

Научная статья

УДК 519.64

doi: 10.17223/19988621/82/4

MSC: 65R20; 31B10

Исследование приближенного решения интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве

Эльнур Гасан оглы Халилов

*Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,
Баку, Азербайджан, elnurkhalil@mail.ru*

Аннотация. Дано обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Предложен новый метод построения квадратурной формулы для потенциалов простого и двойного слоев, дающий возможность определить скорость сходимости этих квадратурных формул, на основе которых рассматриваемое интегральное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений, при этом устанавливаются существование и единственность решения данной системы. Доказывается сходимость решения системы алгебраических уравнений к значению точного решения интегрального уравнения в опорных точках и указывается скорость сходимости метода. Кроме того, построена последовательность, сходящаяся к точному решению внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве.

Ключевые слова: внешняя краевая задача Дирихле, уравнение Гельмгольца, потенциалы простого и двойного слоев, функция Ханкеля, квадратурные формулы, метод коллокации

Для цитирования: Халилов Э.Г. Исследование приближенного решения интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 39–54. doi: 10.17223/19988621/82/4

Original article

Investigation of an approximate solution of the integral equation of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space

Elnur H. Khalilov

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan, elnurkhalil@mail.ru

Abstract. Since in many cases it is impossible to find an exact solution of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional

space, there is a growing interest in studying its approximate solution. One of the methods for solving the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space is its reduction to a curvilinear integral equation. Note that the main advantage of applying the method of integral equations to the study of exterior boundary value problems is that such an approach allows us to reduce the problem posed for an unbounded domain to a problem for a bounded domain of lower dimension. In this work, we substantiate the application of the collocation method for the integral equation

$$\varphi + K\varphi - i\eta S\varphi = 2f$$

of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in two-dimensional space, here

$$(S\varphi)(x) = 2 \int_L \Phi_k(x, y) \varphi(y) dl_y, \quad x \in L,$$

$$(K\varphi)(x) = 2 \int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} \varphi(y) dl_y, \quad x \in L,$$

$\eta \neq 0$ is an arbitrary real number, $L \subset R^2$ is a closed and twice continuously differentiable curve, f is a given continuous function on L , φ is the desired continuous function on L , $v(y)$ is an outer unit normal at the point $y \in L$, and $\Phi_k(x, y)$ is a fundamental solution of the Helmholtz equation, i.e.,

$$\Phi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} & \text{at } k = 0, \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|) & \text{at } k \neq 0, \end{cases}$$

where $H_0^{(1)}$ is a zero-degree Hankel function of the first kind defined by the formula $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iN_0(z)$,

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

is a Bessel function of zero degree,

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

is a Neumann function of zero degree, and $C = 0.57721...$ is the Euler constant. We propose a new method for constructing a quadrature formula for the potentials of the simple and double layers $(S\varphi)(x)$ and $(K\varphi)(x)$, respectively, which makes it possible to determine the rate of convergence of these quadrature formulas. Based on these quadrature formulas, we replace the integral equation under consideration by a system of algebraic equations, and establish the existence and uniqueness of a solution to the resulting system. We prove as well the convergence of the solution of the system of algebraic equations to the value of the exact solution of the integral equation at the reference points, and indicate the rate of convergence of the method. In addition, a sequence is constructed that converges to an exact solution of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation in the two-dimensional space.

Keywords: exterior Dirichlet boundary value problem, Helmholtz equation, potentials of simple and double layers, Hankel function, quadrature formulas, collocation method

For citation: Khalilov, E.H. (2023) Investigation of an approximate solution of the integral equation of the exterior Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz

equation in the two-dimensional space. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 39–54. doi: 10.17223/19988621/82/4

Введение и постановка задачи

Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей L , а f – заданная непрерывная функция на L . Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца: найти функцию $u \in C^{(2)}(R^2 \setminus \bar{D}) \cap C(R^2 \setminus D)$, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $R^2 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{gradu}(x) \right) - i k u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}} \right), \quad x \rightarrow \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и граничному условию

$$u(x) = f(x) \quad \text{на } L,$$

где Δ – оператор Лапласа, k – волновое число, причем $\text{Im } k \geq 0$.

Известно, что в частных случаях (когда область является кругом, квадратом и др.) можно найти точное решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве. Однако во многих случаях невозможно найти точное решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. В связи с этим возникает интерес к исследованию приближенного решения данной краевой задачи. Одним из методов решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца является ее приведение к интегральному уравнению (см.: [1]). Отметим, что основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности. О. Панич [2], Х. Бракхаге и П. Вернер [3], а также Р. Лейс [4] независимо друг от друга показали, что комбинация потенциалов простого и двойного слоев

$$u(x) = \int_L \left(\frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} - i \eta \Phi_k(x, y) \right) \varphi(y) dl_y, \quad x \in R^2 \setminus \bar{D},$$

с непрерывной плотностью φ представляет собой решение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, если φ является решением интегрального уравнения

$$\varphi + K\varphi - i\eta S\varphi = 2f,$$

которое запишем в виде:

$$\varphi + A\varphi = 2f, \tag{1}$$

здесь $\eta \neq 0$ – произвольное вещественное число, $\nu(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in L$,

$$A\varphi = K\varphi - i\eta S\varphi, \quad (S\varphi)(x) = 2 \int_L \Phi_k(x, y) \varphi(y) dl_y,$$

$$(K\varphi)(x) = 2 \int_L \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) dl_y, \quad x \in L,$$

$\Phi_k(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} & \text{при } k = 0, \\ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|) & \text{при } k \neq 0, \end{cases}$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой

$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + i N_0(z)$, $J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$ – функция Бесселя нулевого

порядка, $N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$ – функция Неймана

нулевого порядка, а $C = 0.57721...$ – постоянная Эйлера.

Так как интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием. Отметим, что в работах [5–8] дано обоснование метода коллокации для интегральных уравнений различных краевых задач для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Однако известно, что в трехмерном пространстве фундаментальное решение уравнения Гельмгольца имеет вид:

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x - y|)}{4\pi|x - y|}, \quad x, y \in R^3, \quad x \neq y,$$

и поэтому интегральные операторы, участвующие в уравнении (1), строго отличаются от интегральных операторов, участвующих в интегральных уравнениях внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. Кроме того, в работах [9, 10], построив квадратурные формулы для логарифмических потенциалов простого и двойного слоев, дано обоснование метода коллокации для интегральных уравнений некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в двумерном пространстве. В работах же [11, 12] исследованы приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений внешней краевой задачи с импедансным условием для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве, а в работе [13] построена квадратурная формула для потенциалов простого и двойного слоев и исследовано приближенное решение уравнения (1). Однако в этой работе для построения квадратурных формул использована асимптотическая формула для функций Ханкеля первого рода нулевого порядка, которая не дает возможности определить скорость сходимости этих квадратурных формул, а значит, и невозможно определить скорость сходимости метода.

Следует отметить, что до сих пор не построены квадратурные формулы для потенциалов простого и двойного слоев без использования асимптотической формулы для функций Ханкеля первого рода нулевого порядка. Учитывая это, в данной работе предложен новый метод построения квадратурных формул для

потенциалов простого и двойного слоев, который дает возможность определить скорость сходимости построенных квадратурных формул. Кроме того, в работе дано обоснование метода коллокации для интегрального уравнения (1) и построена последовательность, сходящаяся к точному решению внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в двумерном пространстве.

1. Построение квадратурной формулы

Предположим, что замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая $L \subset R^2$ задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a, b]$. Разобьем промежуток $[a, b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей: $t_p = a + \frac{(b-a)p}{n}$, $p = \overline{0, n}$, где

$$M_0 = \max_{t \in [a, b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} < +\infty$$

(см.: [14. С. 560]) и d – стандартный радиус (см.: [15. С. 400]). В качестве опорных точек возьмем $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, где $\tau_p = a + \frac{(b-a)(2p-1)}{2n}$. Тогда кривая L

разбивается на элементарные части: $L = \bigcup_{p=1}^n L_p$, где $L_p = \{x(t): t_{p-1} \leq t \leq t_p\}$.

Известно (см.: [9]):

(1) $\forall p \in \{1, 2, \dots, n\}: r_p(n) \sim R_p(n)$, где

$$r_p(n) = \min \left\{ \left| x(\tau_p) - x(t_{p-1}) \right|, \left| x(t_p) - x(\tau_p) \right| \right\},$$

$$R_p(n) = \max \left\{ \left| x(\tau_p) - x(t_{p-1}) \right|, \left| x(t_p) - x(\tau_p) \right| \right\},$$

а запись $a(n) \sim b(n)$ означает, что

$$C_1 \leq \frac{a(n)}{b(n)} \leq C_2,$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n ;

(2) $\forall p \in \{1, 2, \dots, n\}: R_p(n) \leq d/2$;

(3) $\forall p, j \in \{1, 2, \dots, n\}: r_j(n) \sim r_p(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim \frac{1}{n}$, где $R(n) = \max_{p=1, n} R_p(n)$, $r(n) = \min_{p=1, n} r_p(n)$.

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой L на «регулярные» элементарные части.

Поступая точно так же, как и в доказательстве леммы 2.1 работы [7], можно показать справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Существуют такие постоянные $C'_0 > 0$ и $C'_1 > 0$, не зависящие от n , для которых при $\forall p, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq p$, и $\forall y \in L_j$ справедливы следующие неравенства:*

$$C'_0 |y - x(\tau_p)| \leq |x(\tau_j) - x(\tau_p)| \leq C'_1 |y - x(\tau_p)|.$$

Через $C(L)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in L} |\varphi(x)|$ и для функции $\varphi \in C(L)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \max_{\substack{|x-y| \leq \delta \\ x, y \in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad \delta > 0.$$

Пусть

$$\Phi_k^n(x, y) = \frac{i}{4} H_{0,n}^{(1)}(k|x-y|), \quad x, y \in L, \quad x \neq y,$$

где

$$H_{0,n}^{(1)}(z) = J_{0,n}(z) + i N_{0,n}(z), \quad J_{0,n}(z) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

и

$$N_{0,n}(z) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_{0,n}(z) + \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}.$$

Несложно заметить, что

$$\frac{\partial \Phi_k^n(x, y)}{\partial v(y)} = \frac{i}{4} \left(\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} + i \frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} \right),$$

где

$$\frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} = (y-x, v(y)) \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^m k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{k|x-y|}{2} + C \right) \frac{\partial J_{0,n}(k|x-y|)}{\partial v(y)} + \frac{2(y-x, v(y))}{\pi |x-y|^2} J_{0,n}(k|x-y|) + \\ &+ (y-x, v(y)) \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1} k^{2m} |x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть L – замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая кривая в R^2 , $\varphi \in C(L)$ и

$$\begin{aligned} a_{pj} &= \frac{2(b-a)|\operatorname{sgn}(p-j)|}{n} \left(\frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - i \eta \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right) \times \\ &\times \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2}. \end{aligned}$$

Тогда выражение

$$(A_n \varphi)(x(\tau_p)) = \sum_{j=1}^n a_{pj} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(A\varphi)(x)$, $x \in L$, причем справедлива следующая оценка:

$$\max_{p=1, n} \left| (A\varphi)(x(\tau_p)) - (A_n\varphi)(x(\tau_p)) \right| \leq M \left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_{\infty} \frac{\ln n}{n} \right).$$

Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Доказательство. Сначала покажем, что выражение

$$(S_n\varphi)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(S\varphi)(x)$, $x \in L$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} (S\varphi)(x(\tau_p)) - (S_n\varphi)(x(\tau_p)) &= 2 \int_{L_p} \Phi_k(x(\tau_p), y) \varphi(y) dy + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} (\Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))) \varphi(y) dy + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) (\varphi(y) - \varphi(x(\tau_j))) dy + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \left(\sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) \varphi(x(\tau_j)) dt. \end{aligned}$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $h_1^n(x(\tau_p))$, $h_2^n(x(\tau_p))$, $h_3^n(x(\tau_p))$ и $h_4^n(x(\tau_p))$ соответственно.

Очевидно, что

$$|J_0(k|x-y|)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|k| \text{diam } L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M, \quad \forall x, y \in L, \quad (2)$$

и

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\frac{k|x-y|}{2} \right)^{2m} \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(|k| \text{diam } L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M, \quad \forall x, y \in L, \quad (3)$$

следовательно,

$$|\Phi_k(x, y)| \leq M |\ln|x-y||, \quad \forall x, y \in L, \quad x \neq y. \quad (4)$$

Тогда, применяя формулу вычисления криволинейного интеграла, находим

$$|h_1^n(x(\tau_p))| \leq 2 \|\varphi\|_{\infty} \int_{L_p} |\Phi_k(x(\tau_p), y)| dy \leq M \|\varphi\|_{\infty} \int_0^{R(n)} |\ln \tau| d\tau \leq M \|\varphi\|_{\infty} R(n) |\ln R(n)|.$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq p$. Учитывая лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \left| |x(\tau_p) - y|^q - |x(\tau_p) - x(\tau_j)|^q \right| &\leq M q |x(\tau_j) - y| |x(\tau_p) - y|^{q-1} \leq \\ &\leq M q R(n) (\text{diam } L)^{q-1} \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \left| \ln(k|x(\tau_p) - y|) - \ln(k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|) \right| &= \left| \ln \left(1 + \frac{|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{|x(\tau_p) - y|} \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \ln \left(1 + \frac{|x(\tau_j) - y|}{|x(\tau_p) - y|} \right) \right| \leq M \frac{R(n)}{|x(\tau_p) - y|}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $q \in \mathbb{N}$. Тогда, принимая во внимание неравенства (2), (3), (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} &\left| \Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\left(\frac{k|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left(\frac{k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left| \left(\ln \frac{k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} + C \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\left(\frac{k|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left(\frac{k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left| \left(\ln(k|x(\tau_p) - y|) - \ln(k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|) \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{k|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} \right| + \\ &+ \frac{1}{4} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} \right) \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\left(\frac{k|x(\tau_p) - y|}{2} \right)^{2m} - \left(\frac{k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|}{2} \right)^{2m} \right) \right| \leq \frac{MR(n)}{|x(\tau_p) - y|}. \end{aligned}$$

Кроме того, учитывая неравенства

$$\left| J_0(k|x - y|) - J_{0,n}(k|x - y|) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|k|^{2m}|x - y|^{2m}}{4^m(m!)^2} \leq \frac{M}{(n+1)!}, \quad \forall x, y \in L, \quad (7)$$

и

$$\left| N_0(k|x - y|) - N_{0,n}(k|x - y|) \right| \leq \frac{M|\ln|x - y||}{(n+1)!}, \quad \forall x, y \in L, \quad (8)$$

имеем:

$$\left| \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j)) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq \frac{M|\ln|x(\tau_p) - x(\tau_j)||}{(n+1)!} \leq \frac{M}{(n+1)!|x(\tau_p) - y|}.$$

В результате находим, что

$$\begin{aligned} &\left| \Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq \left| \Phi_k(x(\tau_p), y) - \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| + \\ &+ \left| \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j)) - \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq \frac{M}{|x(\tau_p) - y|} \left(R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| h_2^n(x(\tau_p)) \right| \leq M \|\varphi\|_\infty \left(R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right) \int_{r(n)}^{\text{diam} L} \frac{d\tau}{\tau} \leq M \|\varphi\|_\infty \left(R(n) + \frac{1}{(n+1)!} \right) \left| \ln R(n) \right|.$$

Из неравенства (4), получаем, что

$$\int_L |\Phi_k(x, y)| dl_y$$

сходится как несобственный и

$$\int_L |\Phi_k(x, y)| dl_y \leq M, \quad \forall x \in L.$$

Тогда из неравенств (7) и (8) получим

$$\int_L |\Phi_k^n(x, y)| dl_y \leq \int_L |\Phi_k(x, y)| dl_y + \int_L |\Phi_k(x, y) - \Phi_k^n(x, y)| dl_y \leq M, \quad \forall x \in L, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В итоге, принимая во внимание лемму 1, находим

$$\left| h_3^n(x(\tau_p)) \right| \leq M \omega(\varphi, R(n)) \int_L |\Phi_k^n(x(\tau_p), y)| dl_y \leq M \omega(\varphi, R(n)).$$

Очевидно, что

$$\left| \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} - \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \right| \leq MR(n), \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j]. \quad (9)$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq p$. С учетом леммы 1 и неравенств (2) и (3) имеем

$$\left| J_{0,n}(k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|) \right| \leq \sum_{m=0}^n \frac{(|k| \text{diam} L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и

$$\left| N_{0,n}(k|x(\tau_p) - x(\tau_j)|) \right| \leq M \left| \ln |x(\tau_p) - y| \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

следовательно,

$$\left| \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| \leq M \left| \ln |x(\tau_p) - y| \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \left| h_4^n(x(\tau_p)) \right| &\leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| dt \leq \\ &\leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} \left| \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \right| dl_y \leq \\ &\leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \int_L \left| \ln |x(\tau_p) - y| \right| dl_y \leq M \|\varphi\|_\infty R(n). \end{aligned}$$

Суммируя полученные оценки для выражений $h_1^n(x(\tau_p))$, $h_2^n(x(\tau_p))$, $h_3^n(x(\tau_p))$

и $h_4^n(x(\tau_p))$ и принимая во внимание соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, получаем, что

$$\max_{p=1, n} \left| (S\varphi)(x(\tau_p)) - (S_n\varphi)(x(\tau_p)) \right| \leq M \left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Теперь докажем, что выражение

$$(K_n \varphi)(x(\tau_p)) = \frac{2(b-a)}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1, n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(K\varphi)(x)$, $x \in L$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} (K\varphi)(x(\tau_p)) - (K_n \varphi)(x(\tau_p)) &= 2 \int_{L_p} \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial v(y)} \varphi(y) dl_y + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} \left(\frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right) \varphi(y) dl_y + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{L_j} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} (\varphi(y) - \varphi(x(\tau_j))) dl_y + \\ &+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \left(\sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2} - \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} \right) \varphi(x(\tau_j)) dt. \end{aligned}$$

Слагаемые в последнем равенстве обозначим через $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$ соответственно.

Так как (см.: [15. С. 403])

$$|(y - x, v(y))| \leq M |x - y|^2, \quad (10)$$

то

$$\left| \frac{\partial J_0(k|x-y|)}{\partial v(y)} \right| \leq M |x - y|^2 \quad (11)$$

и

$$\left| \frac{\partial N_0(k|x-y|)}{\partial v(y)} \right| \leq M (|x - y|^2 |\ln|x - y|| + |x - y|^2 + 1), \quad (12)$$

а значит,

$$\left| \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} \right| \leq M, \quad \forall x, y \in L, x \neq y. \quad (13)$$

Тогда, учитывая формулу вычисления криволинейного интеграла, получим

$$|\delta_1^n(x(\tau_p))| \leq M \|\varphi\|_\infty \int_0^{R(n)} d\tau \leq M \|\varphi\|_\infty R(n).$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq p$. Из леммы 1 и неравенства (10) очевидно, что

$$|(y - x(\tau_p), v(y)) - (x(\tau_j) - x(\tau_p), v(x(\tau_j)))| = |(y - x(\tau_j), v(y))| +$$

$$+\left|\left(x(\tau_j)-x(\tau_p), v(y)-v(x(\tau_j))\right)\right| \leq M\left|y-x(\tau_p)\right| R(n) . \quad (14)$$

Тогда, учитывая неравенства (5), получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial J_0(k|x(\tau_p)-y|)}{\partial v(y)} - \frac{\partial J_0(k|x(\tau_p)-x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \\ & \leq \left| \left(y-x(\tau_p), v(y) \right) - \left(x(\tau_j)-x(\tau_p), v(x(\tau_j)) \right) \right| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|k|^{2m} |x(\tau_p)-y|^{2m-2}}{2^{2m-1} (m-1)! m!} + \\ & \quad + \left| \left(x(\tau_j)-x(\tau_p), v(x(\tau_j)) \right) \right| \times \\ & \quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|k|^{2m} \left| |x(\tau_p)-x(\tau_j)|^{2m-2} - |x(\tau_p)-y|^{2m-2} \right|}{2^{2m-1} (m-1)! m!} \leq M\left|y-x(\tau_p)\right| R(n) . \end{aligned} \quad (15)$$

Кроме того, из леммы 1 и неравенств (10) и (14) имеем

$$\left| \frac{\left(y-x(\tau_p), v(y) \right)}{|x(\tau_p)-y|^2} - \frac{\left(x(\tau_j)-x(\tau_p), v(x(\tau_j)) \right)}{|x(\tau_p)-x(\tau_j)|^2} \right| \leq \frac{M R(n)}{|x(\tau_p)-y|} .$$

Тогда, принимая во внимание неравенства (2), (6), (11), (12), (14) и (15), нетрудно показать, что

$$\left| \frac{\partial N_0(k|x(\tau_p)-y|)}{\partial v(y)} - \frac{\partial N_0(k|x(\tau_p)-x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M R(n)}{|x(\tau_p)-y|} .$$

В результате находим

$$\left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M R(n)}{|x(\tau_p)-y|} .$$

Также, учитывая неравенство

$$\left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M \ln |x(\tau_p)-y|}{n!} , \quad (16)$$

получаем, что

$$\left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), y)}{\partial v(y)} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq M \left(\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|} + \frac{|\ln |x(\tau_p)-y||}{n!} \right) .$$

В итоге

$$\begin{aligned} \left| \delta_2^n(x(\tau_p)) \right| & \leq M \|\Phi\|_{\infty} \left(R(n) \int_{r(n)}^{\text{diam } L} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{n!} \int_{r(n)}^{\text{diam } L} |\ln \tau| d\tau \right) \leq \\ & \leq M \|\Phi\|_{\infty} \left(R(n) |\ln R(n)| + \frac{1}{n!} \right) . \end{aligned}$$

Пусть $y \in L_j$ и $j \neq p$. Так как из леммы 1 и неравенств (13) и (16) очевидно, что

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| + \\ & + \left| \frac{\partial \Phi_k(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| \leq \frac{M \left| \ln |x(\tau_p) - y| \right|}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (17)$$

то

$$\left| \delta_3^n(x(\tau_p)) \right| \leq 2 \omega(\varphi, R(n)) \int_L \left| \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(y)} \right| dl_y \leq M \omega(\varphi, R(n)).$$

Кроме того, учитывая лемму 1 и неравенства (9) и (17), получим

$$\begin{aligned} \left| \delta_4^n(x(\tau_p)) \right| & \leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| dt \leq \\ & \leq M \|\varphi\|_\infty R(n) \int_L \left| \frac{\partial \Phi_k^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} \right| dl_y \leq M \|\varphi\|_\infty R(n). \end{aligned}$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$ и учитывая соотношение $R(n) \sim \frac{1}{n}$, имеем

$$\max_{p=1, n} \left| (K\varphi)(x(\tau_p)) - (K_n\varphi)(x(\tau_p)) \right| \leq M \left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Этим и завершается доказательство теоремы 1.

2. Обоснование метода коллокации

Пусть C^n – пространство n -мерных векторов $z^n = (z_1^n, z_2^n, \dots, z_n^n)^T$, $z_l^n \in C$, $l = \overline{1, n}$, с нормой $\|z^n\| = \max_{l=1, n} |z_l^n|$, где запись a^T означает транспонирование вектора a . Используя построенную квадратурную формулу для интеграла $(A\varphi)(x)$, $x \in L$, уравнение (1) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n – приближенных значений $\varphi(x(\tau_l))$, $l = \overline{1, n}$, которую запишем в виде:

$$(I^n + A^n)z^n = 2f^n, \quad (18)$$

где I^n – единичный оператор в пространстве C^n , $A^n = (a_{lj})_{l,j=1}^n$, $f^n = p^n f$, а $p^n : C(L) \rightarrow C^n$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^n f = (f(x(\tau_1)), f(x(\tau_2)), \dots, f(x(\tau_n)))^T.$$

Теорема 2. Уравнения (1) и (18) имеют единственные решения $\varphi_* \in C(L)$ и $z_*^n \in C^n$ соответственно, причем $\|z_*^n - p^n \varphi_*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ с оценкой

$$\|z_*^n - p^n \varphi_*\| \leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Доказательство. Для обоснования метода коллокации будем пользоваться теоремой Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений (см.: [16]). Проверим выполнение условий теоремы 4.2 из работы [16], при этом обозначения и необходимые определения и предложения возьмем из [16]. В работах [2–4] доказано, что $\text{Ker}(I + A) = \{0\}$. Кроме того, операторы $I^n + A^n$ фредгольмовы с нулевым индексом и операторы $p^n: C(L) \rightarrow C^n$ линейны и ограничены. Принимая во внимание способ разбиения кривой L на «регулярные» элементарные части, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|p^n g\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{l=1, n} |g(x(\tau_l))| = \max_{x \in L} |g(x)| = \|g\|_\infty, \quad \forall g \in C(L).$$

Следовательно, система операторов $P = \{p^n\}$ является связывающей для пространств $C(L)$ и C^n . Тогда $f^n \xrightarrow{P} f$, и, принимая во внимание теорему 1, получаем, что по определению 2.1 из работы [16] $I^n + A^n \xrightarrow{PP} I + A$. Так как по определению 3.2 из работы [16] $I^n \rightarrow I$ устойчиво, то по предложению 3.5 и по определению 3.3 из работы [16] осталось проверить условие компактности, которое ввиду предложения 1.1 из [16] равносильно условию $\forall \{z^n\}, z^n \in C^n, \|z^n\| \leq M$; существует относительно компактная последовательность $\{A_n z^n\} \subset C(L)$ такая, что

$$\|A_n z^n - p^n(A_n z^n)\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В качестве $\{A_n z^n\}$ выберем последовательность

$$(A_n z^n)(x) = (K_n z^n)(x) - i\eta(S_n z^n)(x),$$

где

$$(K_n z^n)(x) = 2 \sum_{j=1}^n z_j^n \int_{L_j} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial v(y)} dl_y, \quad x \in L,$$

$$(S_n z^n)(x) = 2 \sum_{j=1}^n z_j^n \int_{L_j} \Phi_k(x, y) dl_y, \quad x \in L.$$

Очевидно, что $\{A_n z^n\} \subset C(L)$ и

$$\|(A_n z^{2n})(x)\| \leq M \|z^n\|, \quad \forall x \in L.$$

Тогда, принимая во внимание условие $\|z^n\| \leq M$, получаем равномерную ограниченность последовательности $\{A_n z^n\}$.

Теперь возьмем любые точки $x', x'' \in L$ такие, что $|x' - x''| < d/2$. Тогда, поступая точно так же, как и в работе [9], можно показать, что

$$\left| (A_n z^n)(x') - (A_n z^n)(x'') \right| \leq M \|z^n\| |x' - x''| |\ln |x' - x''||, \quad \forall x', x'' \in L.$$

Отсюда непосредственно вытекает равностепенная непрерывность последовательности $\{A_n z^n\}$. Тогда из теоремы Арцеля следует относительная компактность последовательности $\{A_n z^n\}$. Кроме того, поступая точно так же, как и в доказательстве теоремы 1, получим

$$\|A^n z^n - p^n(A_n z^n)\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В результате, применяя теорему 4.2 из работы [16], находим, что уравнения (1) и (18) имеют единственные решения $\varphi_* \in C(L)$ и $z_*^n \in C^n$ соответственно, причем

$$c_1 \delta_n \leq \|z_*^n - p^n \varphi_*\| \leq c_2 \delta_n,$$

где

$$c_1 = 1/\sup_n \|I^n + A^n\| > 0, \quad c_2 = \sup_n \|(I^n + A^n)^{-1}\| < +\infty, \quad \delta_n = \|(I^n + A^n)(p^n \varphi_*) - 2f^n\|.$$

Принимая во внимание оценки погрешности квадратурной формулы для интеграла $(A\varphi)(x)$, $x \in L$, получаем

$$\begin{aligned} \delta_n &= \|(I^n + A^n)(p^n \varphi_*) - 2p^n f\| = \|p^n \varphi_* + A^n(p^n \varphi_*) - p^n(\varphi_* + A\varphi_*)\| = \\ &= \|A^n(p^n \varphi_*) - p^n(A\varphi_*)\| = \max_{l=1, n} \left| \sum_{j=1}^n a_{lj} \varphi_*(x(\tau_j)) - (A\varphi_*)(x(\tau_l)) \right| \leq \\ &\leq M \left(\omega(\varphi_*, 1/n) + \|\varphi_*\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right). \end{aligned}$$

Кроме того, принимая во внимание неравенства

$$\omega(S\varphi_*, h) \leq M \|\varphi_*\| h |\ln h|, \quad \omega(K\varphi_*, h) \leq M \|\varphi_*\| h |\ln h|,$$

имеем

$$\begin{aligned} \omega(\varphi_*, 1/n) &= \omega(2f - A\varphi_*, 1/n) \leq \omega(2f, 1/n) + \omega(A\varphi_*, 1/n) \leq \\ &\leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|\varphi_*\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right). \end{aligned}$$

В результате, учитывая, что

$$\|\varphi_*\|_\infty = 2 \|(I + A)^{-1} f\|_\infty \leq 2 \|(I + A)^{-1}\| \|f\|_\infty,$$

получаем доказательство теоремы.

Следствие 1. Пусть $x_0 \in R^2 \setminus \overline{D}$, и $z^n = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)^T$ является решением системы алгебраических уравнений (18). Тогда последовательность

$$u_n(x_0) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_k^n(x_0, x(\tau_j))}{\partial v(x(\tau_j))} - i\eta \Phi_k^n(x_0, x(\tau_j)) \right) \sqrt{(x'_1(\tau_j))^2 + (x'_2(\tau_j))^2} z_j^*$$

сходится к значению $u(x_0)$ решения $u(x)$ внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в точке x_0 , причем

$$|u_n(x_0) - u(x_0)| \leq M \left(\omega(f, 1/n) + \|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} \right).$$

Список источников

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
2. Панич О.И. К вопросу о разрешимости внешних краевых задач для волнового уравнения и для системы уравнений Максвелла // Успехи математических наук. 1965. Т. 20, № 1. С. 221–226.
3. Brakhage H., Werner P. Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung // Archiv der Mathematik. 1965. Bd. 16 (1). S. 325–329.
4. Leis R. Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Aussenraums der Schwingungsgleichung // Mathematische Zeitschrift. 1965. Bd. 90 (3). S. 205–211.
5. Каширин А.А., Смагин С.И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52 (8). С. 1492–1505.
6. Каширин А.А., Смагин С.И., Талтыкина М.Ю. Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56 (4). С. 625–638.
7. Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Математические заметки. 2020. Т. 107 (4). С. 604–622.
8. Халилов Э.Г. Исследование приближенного решения некоторых классов поверхностных интегральных уравнений первого рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 43–54.
9. Бахшалыева М.Н., Халилов Э.Г. Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, № 6. С. 936–950.
10. Халилов Э.Г., Бахшалыева М.Н. Исследование приближенного решения интегрального уравнения, соответствующего смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа // Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 1. С. 86–98.
11. Turc C., Boubendir Y., Riahi M.K. Well-conditioned boundary integral equation formulations and Nyström discretizations for the solution of Helmholtz problems with impedance boundary conditions in two-dimensional Lipschitz domains // Journal Integral Equations Applications. 2017. V. 29 (3). P. 441–472.
12. Yaman O.I., Ozdemir G. Numerical solution of a generalized boundary value problem for the modified Helmholtz equation in two dimensions // Mathematics and Computers in Simulation. 2021. V. 190. P. 181–191.
13. Kress R. Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Mathematical and Computer Modeling. 1991. V. 15 (3-5). P. 229–243.
14. Мухомелевич Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Физ.-мат. лит., 1962. 599 с.
15. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1976. 527 с.
16. Вайникко Г.М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.

References

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons. 271 p.
2. Panich O.I. (1965) K voprosu o razreshimosti vneshnikh krayevykh zadach dlya volnovoogo uravneniya i dlya sistemy uravneniy Maksvela [On the solvability of exterior boundary value problems for the wave equation and a system of Maxwell's equations]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 20(1). pp. 221–226.
3. Brakhage H., Werner P. (1965) Über das Dirichletsche Aussenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung. *Archiv der Mathematik*. 16(1). pp. 325–329. DOI: 10.1007/BF01220037.

4. Leis R. (1965) Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Aussenraums der Schwingungsgleichung. *Mathematische Zeitschrift*. 90(3). pp. 205–211. DOI: 10.1007/BF01119203.
5. Kashirin A.A., Smagin S.I. (2012) Potential-based numerical solution of Dirichlet problems for the Helmholtz equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 52(8). pp. 1173–1185. DOI: 10.1134/S0965542512080052.
6. Kashirin A.A., Smagin S.I., Taltykina M.Yu. (2016) Mosaic-skeleton method as applied to the numerical solution of three-dimensional Dirichlet problems for the Helmholtz equation in integral form. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 56(4). pp. 612–625. DOI: 10.1134/S0965542516040096.
7. Khalilov E.H. (2020) Justification of the collocation method for a class of surface integral equations. *Mathematical Notes*. 107(4). pp. 663–678. DOI: 10.1134/S0001434620030335.
8. Khalilov E.H. (2021) Issledovaniye priblizhennogo resheniya nekotorykh klassov poverkhnostnykh integral'nykh uravneniy pervogo roda [Investigation of an approximate solution of some classes of surface integral equations of the first kind]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 43–54.
9. Bakhshaliyeva M.N., Khalilov E.H. (2021) Justification of the collocation method for an integral equation of the exterior Dirichlet problem for the Laplace equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 61(6). pp. 923–937. DOI: 10.1134/S0965542521030039.
10. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2021) Issledovaniye priblizhennogo resheniya integral'nogo uravneniya, sootvetstvuyushchego smeshannoy krayevoy zadache dlya uravneniya Laplasya [Study of approximate solution to integral equation associated with the mixed boundary value problem for the Laplace equation]. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal – Ufa Mathematical Journal*. 13(1). pp. 85–97. DOI: 10.13108/2021-13-1-85.
11. Turc C., Boubendir Y., Riahi M.K. (2017) Well-conditioned boundary integral equation formulations and Nyström discretizations for the solution of Helmholtz problems with impedance boundary conditions in two-dimensional Lipschitz domains. *Journal of Integral Equations and Applications*. 29(3). pp. 441–472. DOI: 10.1216/JIE-2017-29-3-441.
12. Yaman O.I., Özdemir G. (2021) Numerical solution of a generalized boundary value problem for the modified Helmholtz equation in two dimensions. *Mathematics and Computers in Simulation*. 190. pp. 181–191. DOI: 10.1016/j.matcom.2021.05.013.
13. Kress R. (1991) Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering. *Mathematical and Computer Modeling*. 15(3–5). pp. 229–243. DOI: 10.1016/0895-7177(91)90068-I.
14. Muskhelishvili N.I. (1962) *Singulyarnyye integralnyye uravneniya* [Singular integral equations], Moscow: Fizmatlit.
15. Vladimirov V.S. (1976) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Moscow: Nauka.
16. Vainikko G.M. (1981) Regular convergence of operators and approximate solution of equations. *Journal of Soviet Mathematics*. 15. pp. 675–705. DOI: 10.1007%2FBF01377042.

Сведения об авторе:

Халилов Эльнур Гасан оглы – доктор математических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, Баку, Азербайджан, elnurkhalil@mail.ru

Information about the author:

Khalilov Elnur H. (Doctor of Mathematical Sciences, Professor of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: elnurkhalil@mail.ru

Статья поступила в редакцию 07.03.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 07.03.2022; accepted for publication 31.03.2023