

Научная статья

УДК 532.5

doi: 10.17223/19988621/82/10

Численное моделирование турбулентных потоков на основе двухжидкостной модели турбулентности

Муродил Эркинжон угли Мадалиев

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии наук
Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, Ферганский политехнический институт,
Фергана, Узбекистан, Madaliev.ME2019@mail.ru, m.e.madaliyev@ferpi.uz*

Аннотация. Обсуждаются возможности двухжидкостной модели турбулентности для решения сложных физических задач: отрывного обтекания квадратного цилиндра, ламинарно-турбулентного течения во внезапно расширяющемся канале. Для численной реализации систем гидродинамических уравнений использована конечно-разностная схема, где вязкостные члены аппроксимировались центральной разностью неявным образом, а для конвективных членов использована явная схема против потока. На каждом временном шаге коррекция для скоростей проводилась через давление по процедуре SIMPLE. Для оценки адекватности полученные численные результаты сопоставлены с известными экспериментальными данными. Сравнения численных результатов показали, что двухжидкостная модель проста в реализации, требует меньше вычислительных ресурсов и способна с большой точностью предсказывать ламинарные и турбулентные течения.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, отрывное течение, двухжидкостная модель, метод контрольного объема

Для цитирования: Мадалиев М.Э. Численное моделирование турбулентных потоков на основе двухжидкостной модели турбулентности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 82. С. 120–140. doi: 10.17223/19988621/82/10

Original article

Numerical simulation of turbulent flows on the basis of a two-fluid model of turbulence

Murodil E. Madaliev

*Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev of the
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan,
Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan, Madaliev.ME2019@mail.ru,
m.e.madaliyev@ferpi.uz*

Abstract. This paper discusses the capabilities of a two-fluid turbulence model for solving complex physical problems such as separated flow around a square cylinder and laminar-

turbulent flow in a suddenly expanding channel. The numerical solution to the system of hydrodynamic equations is implemented using a finite-difference scheme. At each time step, the velocities are corrected through pressure calculations according to the SIMPLE algorithm. For verification purposes, the obtained numerical results are compared with available experimental data. A comparison of numerical results has shown that the two-fluid model is easy to implement, requires less computational resources and is capable of predicting laminar and turbulent flows with high accuracy.

Keywords: Navier-Stokes equations, separated flow, two-fluid model, finite volume method

For citation: Madaliev, M.E. (2023) Numerical simulation of turbulent flows on the basis of a two-fluid model of turbulence. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 82. pp. 120–140. doi: 10.17223/19988621/82/10

Введение

В настоящее время для построения математических моделей турбулентности существует несколько подходов. Первым является гипотеза о применимости уравнений Навье–Стокса для описания турбулентности. Все модели, построенные на основе данного подхода, называются методами прямого моделирования (DNS) [1] и крупных вихрей (LES) [2–3]. Однако для реализации таких методов требуется разрешение нестационарных уравнений с расчетными ячейками менее колмогоровского масштаба в трехмерной постановке и необходимо проведение интегрирования очень мелкими шагами по времени. Поэтому требуется использование мощных суперкомпьютеров, а их широкое практическое применение, по оценкам специалистов, может начаться лишь в конце нынешнего столетия.

Вторым подходом для описания турбулентности является подход Рейнольдса. В основе данного подхода лежит так называемое уравнение Навье–Стокса, осредненное по Рейнольдсу (RANS). При таком подходе в уравнениях гидродинамики после осреднения по времени возникают напряжения Рейнольдса, которые необходимо определить. Следовательно, полученная система уравнений получается незамкнутой, и все модели, которые направлены на замыкание данной системы, называются полуэмпирическими RANS-моделями [4–8].

Еще одним подходом к решению проблемы турбулентности является двухжидкостной подход Сполдинга [9, 10]. Суть данного подхода заключается в том, что турбулентный поток делится на две жидкости по некоторым отличительным признакам потока. Однако двухжидкостной подход Сполдинга не получил дальнейшего развития из-за того, что для замыкания систем уравнений, как в моделях RANS, привлекались еще дополнительные уравнения на основе различных гипотез. В результате число решаемых уравнений удваивалось по сравнению с RANS-моделями, а это увеличивало вычислительное время.

Данный подход после достаточно долгой паузы получил свое развитие в работах [11, 12], в которых показано, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси двух жидкостей с различными скоростями и температурами. Такая возможность математически доказывается на основе первой гипотезы Рейнольдса (скорость турбулентного потока состоит из осредненной и флук-

тирующей скоростей) и молярного движения в турбулентном течении. 3. Маликовым предложена двухжидкостная модель, в которой основной параметр турбулентности – эффективная молярная вязкость – определяется по теории кинетики и гипотезе Прандтля, поэтому дополнительные эмпирические уравнения не привлекаются. В работах [11, 13] такая модель использована для исследования обтекания пластины, свободной турбулентной струи и вращающегося потока. Показано, что новая двухжидкостная модель турбулентности имеет высокую точность, проста для решения инженерных задач и способна адекватно описывать анизотропную турбулентность. В этой работе для моделирования турбулентного переноса не использована обобщенная гипотеза Буссинеска и не вводится турбулентное число Прандтля. Вместо них использованы параметры, более понятные с точки зрения физики. Поэтому в настоящей работе поставлена цель показать, что разработанная двухжидкостная модель обладает универсальностью и способна с большой точностью описывать различные сложные турбулентные течения.

Работа состоит из шести разделов. В первом разделе на основе двухжидкостной модели численно исследуется отрывное обтекание квадратного цилиндра. В втором разделе обсуждаются результаты и проводится сравнение с экспериментальными данными. В третьем разделе проводится численное исследование турбулентного потока в ламинарно-турбулентного течения во внезапно расширяющемся канале. В четвертом разделе обсуждаются результаты и проводится сравнение с экспериментальными данными. В пятом разделе рассматривается турбулентное течение во внезапно расширяющемся канале. В шестом разделе обсуждаются полученные результаты и сравниваются с известными опытными данными.

Нестационарная система уравнений турбулентности по двухжидкостной модели имеет следующий вид [14]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\rho \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) - \vartheta_j \vartheta_i \right], \\ \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} + \bar{V}_j \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} &= -\rho \vartheta_j \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_{ji} \left(\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{F_{si}}{\rho} + \frac{F_{fi}}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho \bar{V}_j}{\partial x_j} &= 0, \quad v_{ji} = 3v + 2 \left| \frac{\vartheta_i \vartheta_j}{\text{def}(\vec{V})} \right| \quad i \neq j, \\ v_{ii} &= 3v + \frac{1}{\text{div} \vec{\vartheta}} \left| \frac{\vartheta_k \vartheta_k}{\text{def}(\vec{V})} \right| \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k}, \quad \vec{F}_f = -\rho K_f \vec{\vartheta}, \quad \vec{F}_s = \rho C_s \text{rot} \vec{V} \times \vec{\vartheta}. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Здесь $\bar{V}_i, \vartheta_i$ – соответственно осредненная и относительная скорости турбулентного потока, $\bar{p}$ – осредненное гидростатическое давление, v – молекулярная кинематическая вязкость, v_{ji} – эффективная молярная вязкость, F_{si} – поперечная сила Сefмена, обусловленная сдвиговым полем скорости, F_{fi} – сила трения, K_f – коэффициент трения. Постоянные коэффициенты равны $C_1 = 0.7825$, $C_2 = 0.306$, $C_s = 0.2$. Остальные обозначения подробно представлены в статье [11].

Отрывное обтекание квадратного цилиндра

Режимы отрывных течений вязкой жидкости около плохо обтекаемых тел или инженерных конструкций часто встречаются в природе и технике. Периодическое выпадение вихрей, возникающее, когда поток проходит квадратный блок, имеет большое значение для инженерного гидравлического проектирования. В инженерной практике экономичное и безопасное проектирование различных конструкций, таких как опоры мостов, башни, дымоходы и морские платформы, которые подвергаются воздействию потоков жидкости, требует надежного расчета величин, направлений и частоты воздействий сил на конструкцию, а также прогнозирования колебаний скорости потока вокруг конструкции [15–18].

Д. Лин и соавт. [19] использовали закрытый канал, в который поместили квадратное препятствие с длиной стороны $D = 4$ см. Лазерная доплеровская velocиметрия (ЛДВ) использовалась для регистрации мгновенной скорости. Входная постоянная скорость U_0 составляла 0,535 м/с, что давало число Рейнольдса $Re_D = U_0 D / \nu$, равное 21 400. Физическая схема течения и границы расчетной области показаны на рис. 1.

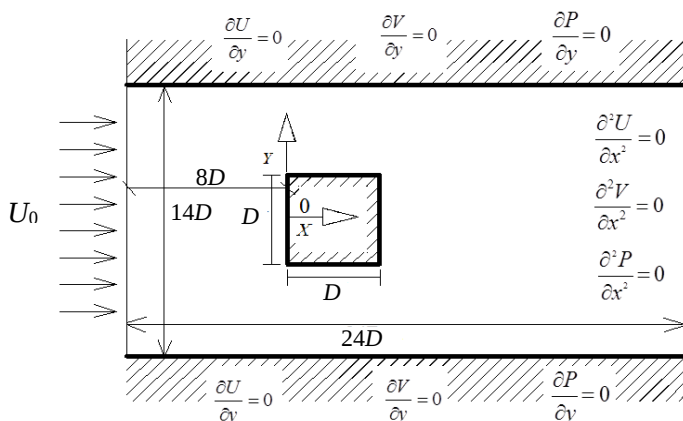


Рис. 1. Принципиальная схема поперечного обтекания квадратного цилиндра

Fig. 1. Schematic diagram of a transverse flow around a square cylinder

Начало введенной декартовой системы координат находится в центре левой части квадрата, в точке 0. Ширина канала во входном и выходном сечении имеет размер $14D$. Длина канала имеет размер $24D$. Квадратное препятствие расположено в координатах $x \in [0, D]$.

Расчетные сетки

Поток, обтекающий квадратный блок, представляет собой сложный поток из-за крупномасштабной периодичности разделения. Ожидается, что модель даст высокоточное предсказание сложного обтекания препятствия. Что касается двухжидкостной модели, в работе [14] показано, что она способна давать приемлемые результаты и на грубой сетке. В работе было использовано три различных вида сгущенной сетки с различным сгущением, размер сетки 300×300 ячеек.

Для этого использовано преобразование систем координат $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$.

Как видно из рис. 2, сетка была сгущена в центральной части сечений А–А, В–В.

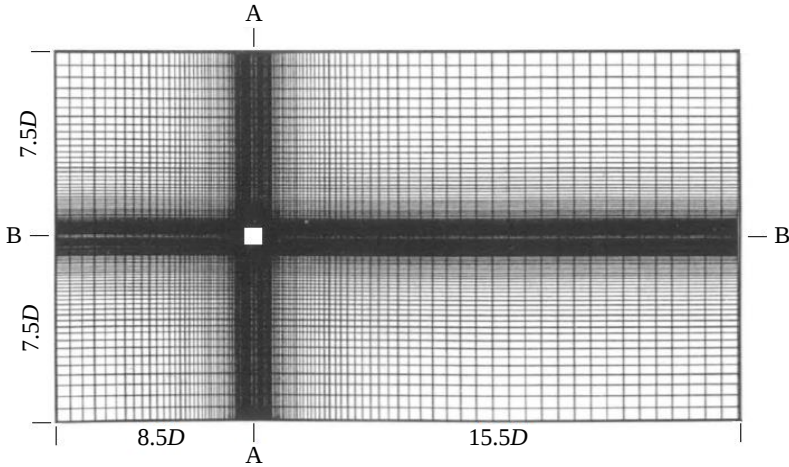


Рис. 2. Сгущенная сетка размером 300×300

Fig. 2. Condensed grid size 300×300

В центральной части сечений А–А = x_c , В–В = y_c было использовано следующее преобразование по координатам X и Y :

$$\begin{aligned}\xi &= x_c \left\{ 1 + \operatorname{sh} \left[\tau_x (x - B_x) \right] / \operatorname{sh} (\tau_x B_x) \right\}, \\ \eta &= y_c \left\{ 1 + \operatorname{sh} \left[\tau_y (y - B_y) \right] / \operatorname{sh} (\tau_y B_y) \right\},\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{1}{2\tau_x} \ln \left[\frac{1 + (e^{\tau_x} - 1)(x_c / 24D)}{1 + (e^{-\tau_x} - 1)(x_c / 24D)} \right], \quad 0 < \tau_x < \infty, \\ B_y &= \frac{1}{2\tau_y} \ln \left[\frac{1 + (e^{\tau_y} - 1)(y_c / 16D)}{1 + (e^{-\tau_y} - 1)(y_c / 16D)} \right], \quad 0 < \tau_y < \infty,\end{aligned}\quad (3)$$

где τ_x , τ_y – параметры растяжения, которые изменяются от нуля до больших значений. В статье использованы для первой сетки $\tau_x = 1.1$, $\tau_y = 1.5$, для второй сетки $\tau_x = 4.1$, $\tau_y = 2$, для третьей сетки $\tau_x = 8.1$, $\tau_y = 5$.

Система уравнений (1) после преобразования координат в безразмерных параметрах имеет вид:

$$\begin{aligned}& \left[\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] = \\ & = \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial V_x}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 V_x}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_x \vartheta_x}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y \vartheta_x}{\partial \eta};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \\
 & = \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial V_y}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 V_y}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y \vartheta_x}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y \vartheta_x}{\partial \eta}; \\
 & \frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \eta} = - \left(\vartheta_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \vartheta_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial \eta} \right) + \\
 & + C_s \left(- \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial \eta} \right) \vartheta_y \right) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2v_{xx} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \xi} \right) \right) + \\
 & + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v_{xy} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \xi} \right) \right) - C_r \vartheta_x; \\
 & \frac{\partial \vartheta_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \eta} = - \left(\vartheta_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \xi} + \vartheta_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial \eta} \right) + \\
 & + C_s \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial \eta} \right) \vartheta_x \right) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(v_{xy} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial \eta} \right) \right) + \\
 & + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2v_{yy} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta_y}{\partial \eta} \right) - C_r \vartheta_y.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для численной реализации система уравнений (4) приведена к безразмерному виду соотношением всех скоростей к средней скорости входящего потока, а всех линейных размеров – к размеру квадрата D .

На всех неподвижных твердых стенках поставлены очевидные граничные условия прилипания: $V_x|_{\Gamma} = 0$ и $V_y|_{\Gamma} = 0$, где Γ – твердая граница. На выходе канала для всех задач для горизонтальной, вертикальной скоростей и относительных скоростей приняты условия экстраполяции второго порядка точности. На входе применяются равномерные профили продольной составляющей скорости с $V_x = U_0$, поперечная составляющая скорости и давление равны нулю: $V_y = P = 0$. Для численной реализации системы (4) на входе для относительных скоростей были заданы следующие условия: $\vartheta_x = 0.03$, $\vartheta_y = 0$.

Метод решения

В работе для разностной аппроксимации исходных уравнений применен метод контрольного объема SIMPLE [20]. При этом вязкостные члены аппроксимировались неявными центральной разностью, а для конвективных членов использована полунявная схема первого порядка точности против потока для всех задач [21]. Обезразмеренную систему уравнений (4) можно представить в матричном виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + V_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \Phi. \tag{5}$$

Здесь

$$\Phi = \begin{pmatrix} V_x, V_y \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{Re}, \frac{1}{Re} \\ 2v_{xx} \\ v_{xy} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{Re}, \frac{1}{Re} \\ v_{xy} \\ 2v_{yy} \end{pmatrix},$$

$$\Pi^\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\rho \partial x} - \frac{\partial \vartheta_x \vartheta_y}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta_x \vartheta_x}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\rho \partial y} - \frac{\partial \vartheta_y \vartheta_y}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta_x \vartheta_y}{\partial x} \\ -\left(\vartheta_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_{xy} \left(\frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \right) + C_s \left(-\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vartheta \right) - K_f \vartheta_x \\ -\left(\vartheta_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_{xy} \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \right) \right) + C_s \left(\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) u \right) - K_f \vartheta_y \end{pmatrix}.$$

Полунеявная схема против потока имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t), (\Delta x), (\Delta y))$. Применив полунеявный метод к нелинейному уравнению двухжидкостной модели турбулентности, получаем следующую разностную схему:

$$\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{(F_e + |F_e|)\Phi_{i+1,j}^n + (|F_e| + |F_w| + F_e - F_w)\Phi_{i,j}^n - (F_w + |F_w|)\Phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} +$$

$$+ \frac{\Phi_{i,j+1}^n (F_n - |F_n|) + \Phi_{i,j}^n ((|F_n| + F_n) + (|F_s| - F_s)) - \Phi_{i,j-1}^n (|F_s| + F_s)}{2\Delta y} =$$

$$= \frac{1}{Re} \left(\frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{\Phi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right) - \Pi^\Phi,$$

здесь

$$F_e = \frac{(\Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i,j}^n)}{2},$$

$$F_w = \frac{(\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n)}{2},$$

$$F_n = \frac{(\Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j}^n)}{2},$$

$$F_s = \frac{(\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n)}{2}.$$

Чтобы определить неизвестные значения, использована схема прогонки, которой была подробно описана в статье [21]. Интегрирование велось с шагом по времени $\Delta t < 0.005$.

Результаты расчетов и их обсуждение

На рис. 3 представлена безразмерная усредненная по времени скорость потока вдоль центральной линии области результатов моделирования, и ее можно ис-

пользовать для определения длины зоны разделения, или зоны рециркуляции, за квадратным блоком.

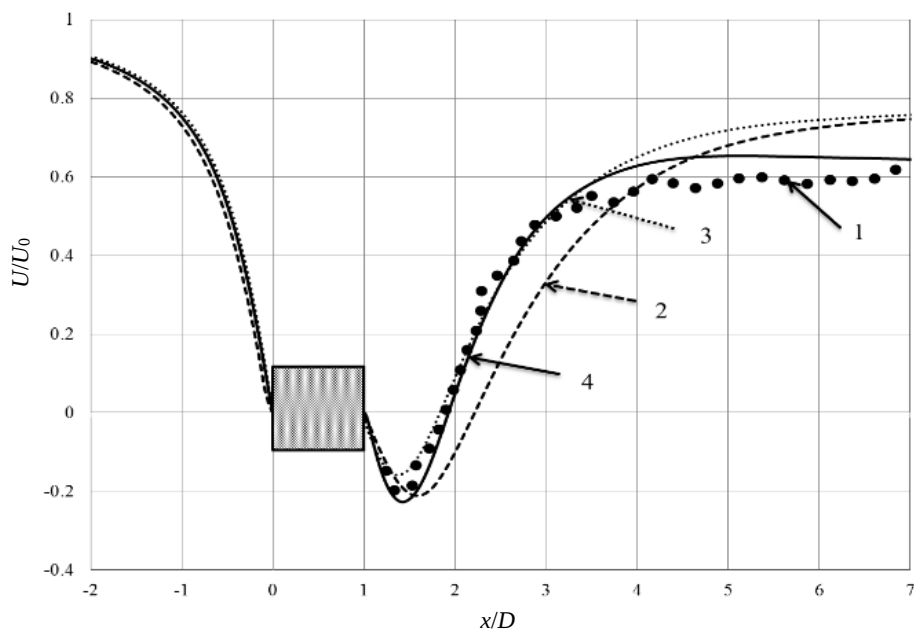


Рис. 3. Безразмерная усредненная по времени скорость потока вдоль центральной линии области: 1 – экспериментальные результаты Д. Лина и др. [19], 2 – двухжидкостная модель в первой сетке, 3 – двухжидкостная модель во второй сетке, 4 – двухжидкостная модель в третьей сетке

Fig. 3. Dimensionless time-averaged velocity of the flow along the central line of the region: (1) experimental results by Lin et al. [19], (2) two-fluid model in the first grid, (3) two-fluid model in the second grid, and (4) two-fluid model in the third grid

Экспериментальное измерение вихревого выброса доступно за квадратным блоком, оно показывает, что вращающийся поток наблюдался от $x/D = 1$ до 4, после этого U/U_0 относительно постоянно: в эксперименте Д. Лина и соавт. [19] эта величина составляет примерно 0.6; численные результаты двухжидкостного подхода на первой и второй сетках равны 0.75; при использовании третьего варианта сетки результат равен 0.64 до конца канала. За препятствием, для $x/D > 4$, величина усредненных по времени скоростей потока уменьшается на 40% в экспериментальной работе Д. Лина и соавт. и на 25–36% при двухжидкостном подходе на первой, второй и третьей сетках по сравнению со скоростью входного свободного потока.

На рис. 4 представлены усредненные по времени профили осевой скорости в нескольких поперечных сечениях.

На рис. 5 представлены усредненные по времени профили вертикальной скорости в нескольких поперечных сечениях.

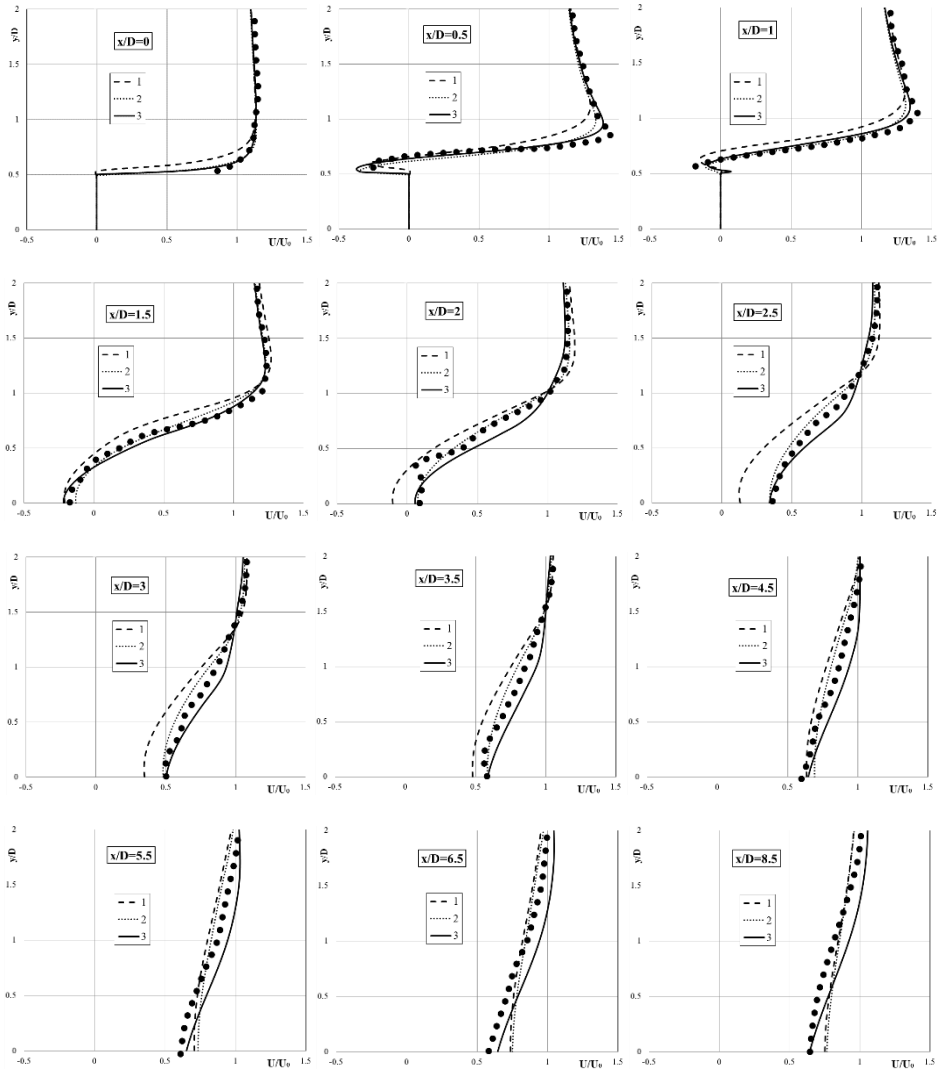


Рис. 4. Рассчитанные и измеренные усредненные по времени профили осевой скорости в нескольких поперечных сечениях: (●) – экспериментальные результаты Д. Лина и др., 1 – двухжидкостная модель в первой сетке, 2 – двухжидкостная модель во второй сетке, 3 – двухжидкостная модель в третьей сетке

Fig. 4. Calculated and measured time-averaged axial velocity profiles in several cross-sections: (●) experimental results by Lin et al., (1) two-fluid model in the first grid, (2) two-fluid model in the second grid, and (3) two-fluid model in the third grid

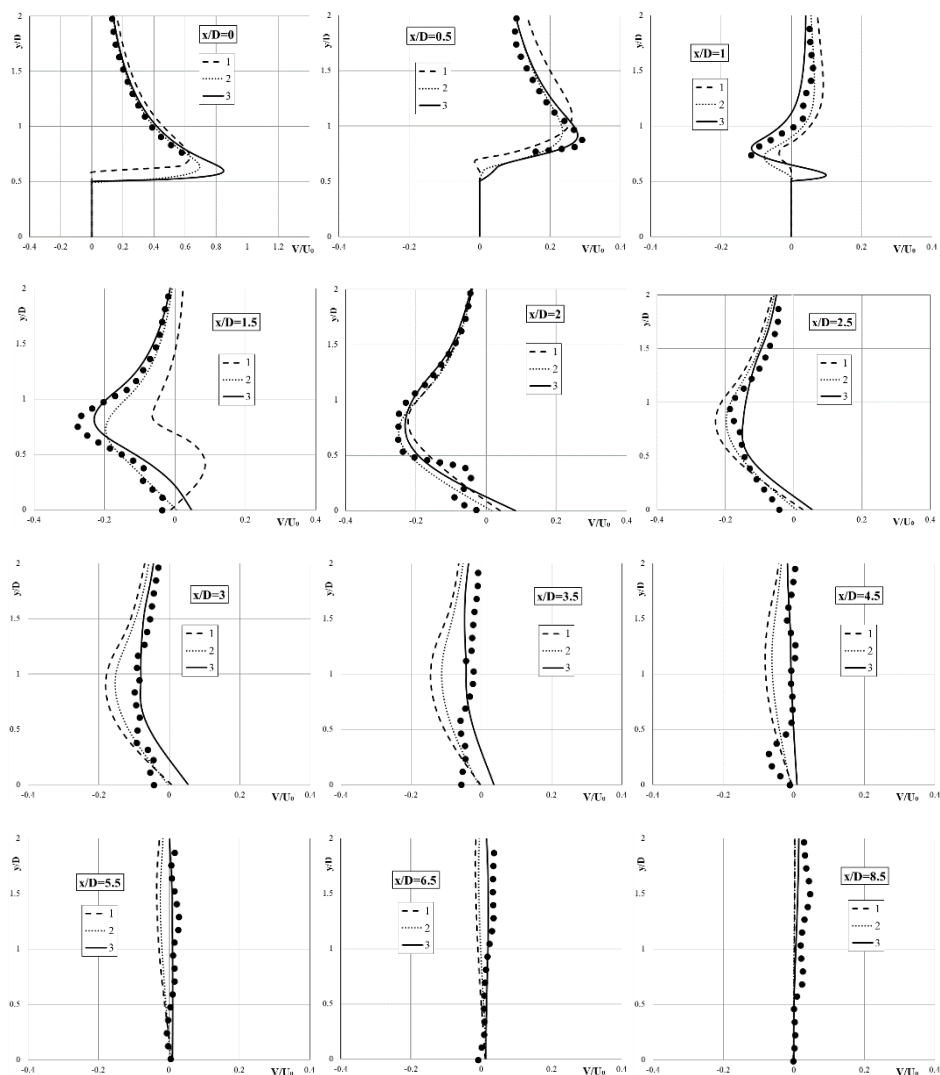


Рис. 5. Рассчитанные и измеренные усредненные по времени профили вертикальной скорости в нескольких поперечных сечениях вдоль верхней поверхности квадратного цилиндра: (●) – экспериментальные результаты Д. Лина и др., 1 – двухжидкостная модель в первой сетке, 2 – двухжидкостная модель во второй сетке, 3 – двухжидкостная модель в третьей сетке

Fig. 5. Calculated and measured time-averaged vertical velocity profiles in several cross-sections along the upper surface of the square cylinder: (●) experimental results by Lin et al., (1) two-fluid model in the first grid, (2) two-fluid model in the second grid, and (3) two-fluid model in the third grid

Ламинарное течение во внезапно расширяющемся канале

Течение в плоском канале с внезапным расширением относится к наиболее простому классу отрывных течений, когда точка отрыва потока является фиксированной. Теоретический расчет таких течений представляет большие трудности из-за образования сложных отрывных и возвратно-циркуляционных течений в области за уступом. Первые расчеты стационарных двумерных ламинарных отрывных течений несжимаемой жидкости в каналах были изучены еще Г. Блазиусом в 1910 г. аналитически в виде рядов [22]. В дальнейшем эта задача использовалась многими учеными для изучения механизмов отрывных течений и тестирования разностных схем решения уравнений Навье–Стокса.

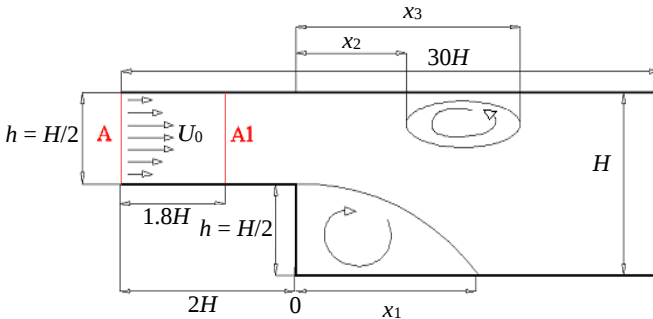


Рис. 6. Схема расчетной области в плоском канале с обратным уступом
Fig. 6. Computational domain in a flat backward-facing step

Рассматривается двумерное ламинарное течение в плоском канале с внезапным расширением. Физическая картина анализируемого течения и конфигурация расчетной области представлены на рис. 6. Начало введенной декартовой системы координат находится в левом нижнем углу уступа. Ширина канала в левом входном сечении имеет размер h , а в правом выходном сечении канала — $H = 2h$. Высота уступа равна, соответственно, h . Во входном сечении канала задавался параболический профиль течения Пуазейля для продольной скорости U , а вертикальная скорость V была равна нулю. При введении безразмерных величин за масштаб длины принимается ширина канала h , за масштаб скорости принята средняя по сечению скорость U_0 на входе в канал; x_1 — расстояние до повторного присоединения первичного вихря, x_2 — расстояние до начала вторичного вихря, x_3 — расстояние до конца вторичного вихря.

Расчетные сетки

В настоящем исследовании были использованы два образца расчетной сетки, которые представлены на рис. 7. Как видно из рисунка, сгущения сеток около горизонтальных стенок не проведены, потому что, как показано в работе [11], двухжидкостная модель способна с большой точностью описывать закон стенки и с грубой сеткой. В указанной работе показано, что для адекватного описания течения около твердой стенки достаточно двух расчетных узлов внутри пограничного слоя.

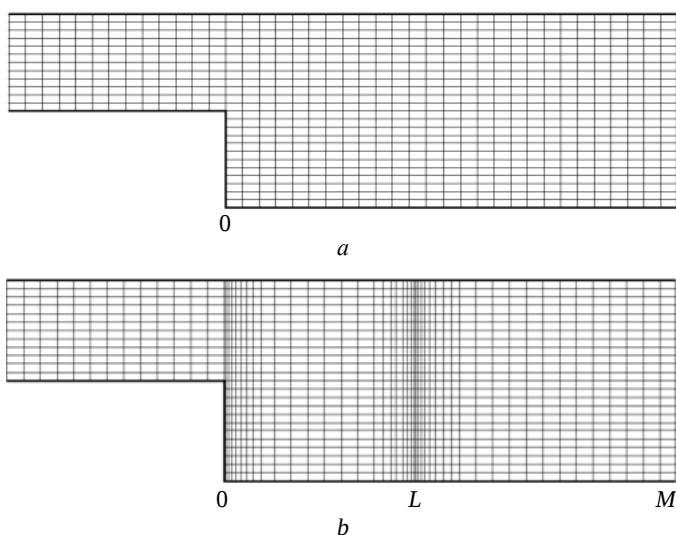


Рис. 7. Расчетные сетки: *a* – равномерная сетка размером 300×100 ,
b – сгущенная сетка размером 400×100

Fig. 7. Computational grids: (*a*) uniform grid size 300×100 and (*b*) condensed grid size 400×100

Как видно из рис. 7, *б*, сгущение сетки производилось в областях отрыва и присоединения потоков. Для этого использовано преобразование систем координат $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$.

При $0 < x < L$:

$$\xi = \frac{\alpha + (1 - \alpha) \left(\ln \left(\left\{ \beta + \left[x(2\alpha + 1)/L \right] - 2\alpha \right\} / \left\{ \beta - \left[x(2\alpha + 1)/L \right] + 2\alpha \right\} \right) \right)}{\ln[(\beta + 1)/(\beta - 1)]}, \quad (6)$$

$$\eta = y/h.$$

При $L < x < M$:

$$\xi = 1 - \left(\ln \left(\left\{ \beta + 1 - x/M \right\} / \left\{ \beta - 1 + x/M \right\} \right) \right) / \left(\ln[(\beta + 1)/(\beta - 1)] \right), \quad (7)$$

$$1 < \beta < \infty, \quad \eta = y/h.$$

Данное преобразование при $\alpha = 1/2$ позволяет измельчить расчетную сетку как в сечении $x = 0$, так и при $x = L$. В работе использовано значение $\beta = 1.054$. В простом варианте сетки (см. рис. 7, *a*) использовано 40×50 узлов при $x < 0$, 260×100 при $x > 0$. В сгущенном варианте сетки (см. рис. 7, *б*) использовано 100×50 узлов при $x < 0$, 200×100 – при $0 < x < L$, 100×100 – при $x > L$. Для сетки со сгущением при $x < 0$ количество узлов было 100×50 , при $0 < x < L$ – 300×100 , при $x > L$ – 100×100 . Для получения стационарного решения при числе Рейнольдса системы (4) $Re > 800$ после формирования квазипериодического режима произведено осреднение результатов по времени.

На входе, в сечении А, согласно работе [23] ставились параметры, полученные на расстоянии $1.8H$ от него (см. рис. 6). Этот тип граничного условия называется граничным условием копирования $A(V_x, V_y, p) = A1(V_x, V_y, p)$.

Результаты расчетов и их обсуждение

При более высоких числах Рейнольдса поток за счет рециркуляции приобретает анизотропную турбулентность. Это объясняет расхождения между экспериментальными и численными результатами, приведенными на рис. 8 при числах Рейнольдса $Re = 1\,290$. На этих рисунках U – безразмерная продольная скорость.

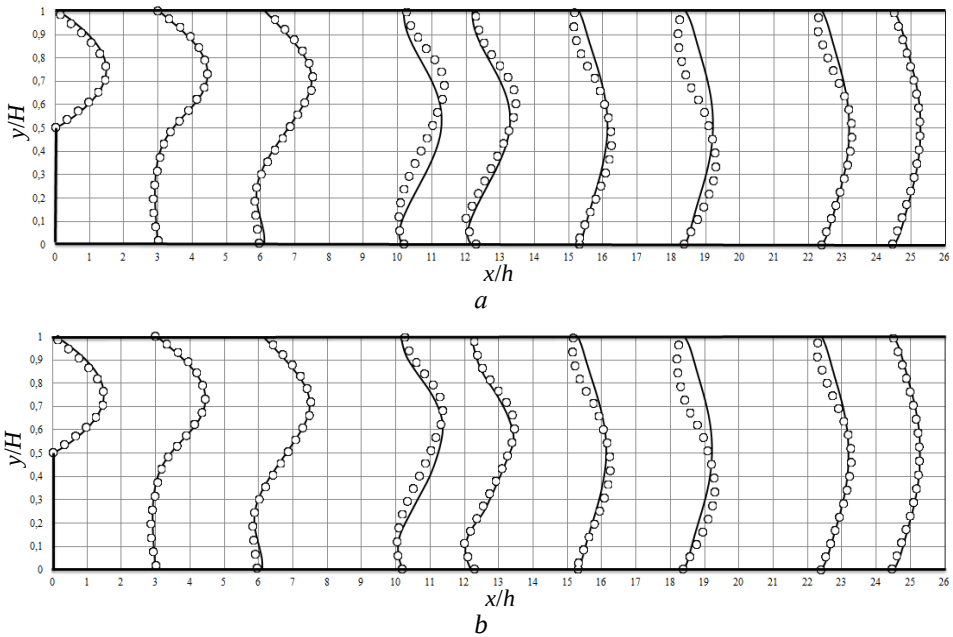


Рис. 8. Профили для $(U + x/h)$ при $Re = 1\,290$ на равномерной сетке (а), на сгущенной сетке (б): (о) – Армали и др./ (эксперимент) [24], (—) – двухжидкостная модель

Fig. 8. Profiles for $(U + x/h)$ at $Re = 1290$ on the (a) uniform and (b) condensed grid: (o) Armali et al. (experiment) [24] and (—) two-fluid model

Из рис. 8 видно, что двухжидкостная модель очень хорошо описывает параметр $(U + x/h)$ при $x/h < 10$ для $Re = 1\,290$. Небольшие отклонения от экспериментальных данных наблюдаются в диапазоне $12 < x/h < 16$.

На рис. 9 приведены результаты для местоположения повторного присоединения первичного и вторичного вихрей в зависимости от числа Рейнольдса.

Из рис. 9 видно, что двухжидкостная модель очень хорошо описывает ламинарную область течения при $Re < 900$ и турбулентную область при $Re > 4\,000$. Отклонение численных результатов от экспериментальных данных наблюдается для переходной области $900 < Re < 4000$.

Однако результаты двухжидкостной модели существенно лучше, чем результаты других работ [23, 24]. Видно, что сгущение расчетной сетки несколько улучшает результаты.

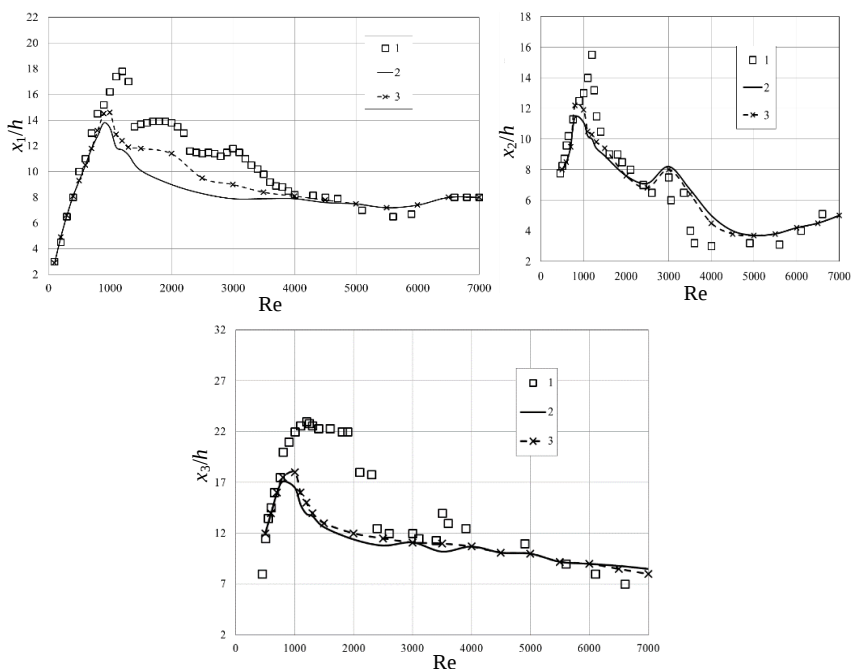


Рис. 9. Результаты местоположения первичного и вторичного вихрей при изменении числа Рейнольдса: 1 – Армали и др. (эксперимент) [24], 2 – двухжидкостная модель с равномерной сеткой, 3 – двухжидкостная модель со сгущенной сеткой

Fig. 9. Results of the primary and secondary vortex location at the varying Reynolds number: (1) Armali et al (experiment) [24], (2) two-fluid model with a uniform grid, and (3) two-fluid model with a condensed grid

Турбулентное течение во внезапно расширяющемся канале

В работе [25] на основе новой двухжидкостной модели проведено исследование во внезапно расширяющемся канале для турбулентных потоков. При этом использована регулярная грубая сетка. Однако можно предполагать о влиянии изменений расчетной сетки на результаты исследования. Поэтому целью настоящей работы является апробация новой модели для сгущенной сетки. Кроме этого, в работе для сравнения представлены результаты моделей грубой сетки из статьи [25] и экспериментальные данные [26].

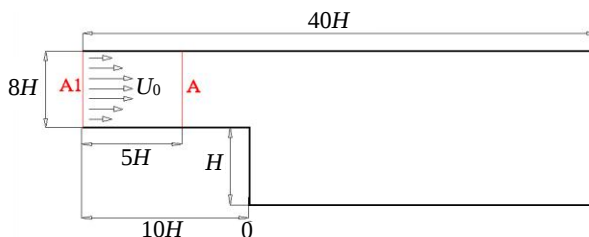


Рис. 10. Схема расчетной области в плоском канале с обратным уступом
Fig. 10. Computational domain in a flat backward-facing step

Рассматривается двумерное турбулентное течение в плоском канале с внезапным расширением в виде уступа. Физическая картина анализируемого течения и конфигурация расчетной области представлены на рис. 10, а остальные значения представлены в базе данных NASA [26]. На входной области задается особый вид граничных условий копированием [27].

Исследования расчетной сетки

В данном исследовании были использованы два образца расчетной сетки (см. рис. 7). Также было применено преобразование систем координат (см. формулы (5), (6)). Система уравнений (4) приводилась к безразмерному виду соотношением всех скоростей к средней скорости на входе, а пространственные размеры – к высоте уступа H . Число Рейнольдса было равно $Re_H = H\bar{U}_0 / \nu = 36000$, где $\bar{U}_0$ – средняя скорость на входе. На входе расчетной области задавались начальные безразмерные возмущения относительных скоростей $u = 10^{-4}$, $\vartheta = 0$ [28]. Интегрирование велось шагом по времени $\Delta t = 0.0001$. Для получения стационарного решения системы (4) после формирования квазипериодического режима произведено осреднение результатов по времени.

Результаты расчетов и их обсуждение

На рис. 11 приведены графики в различных сечениях канала для безразмерной продольной скорости по результатам моделей турбулентности.

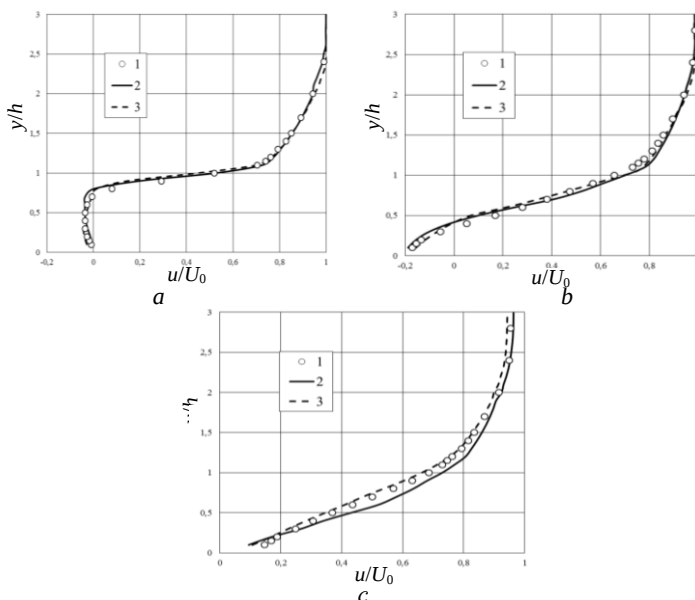


Рис. 11. Профили безразмерной аксиальной скорости при $x = H$ (а), при $x = 4H$ (б), при $x = 6H$ (в): 1 – эксперимент, 2 – двухжидкостная модель в грубой сетке,

3 – двухжидкостная модель в сгущенной сетке

Fig. 11. Profiles of the dimensionless axial velocity at $x = (a) H$, $(b) 4H$, and $(c) 6H$: (1) experiment, (2) two-fluid model in a coarse grid, and (3) two-fluid model in a condensed grid

Для сравнения приведены также экспериментальные данные. На рисунках представлены профили осевой составляющей скорости U в различных сечениях на расстояниях от входа в широкий канал.

На рис. 12 представлены профили турбулентного напряжения в различных измеренных сечениях на расстояниях от входа в широкий канал.

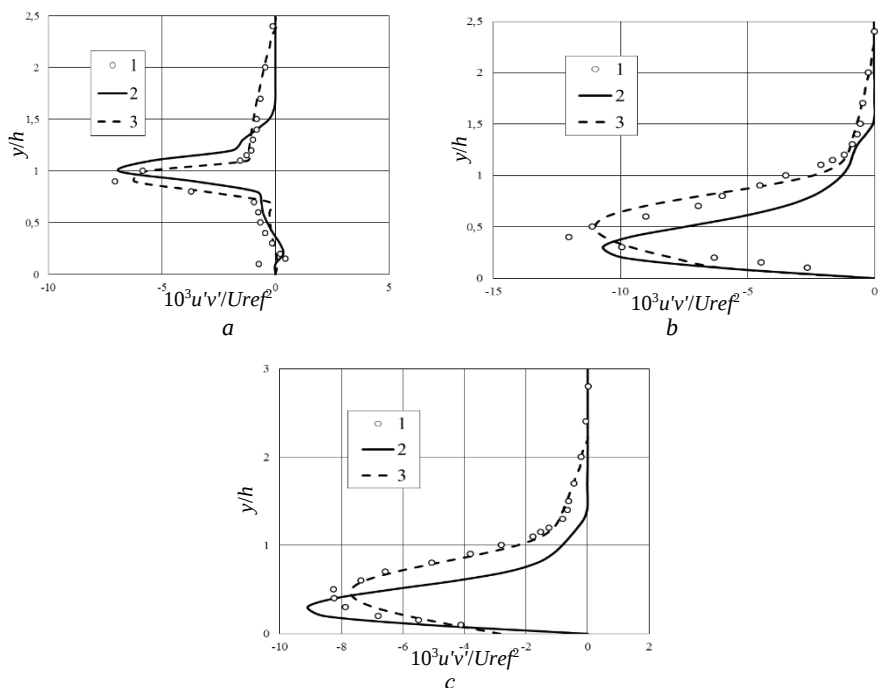


Рис. 12. Профили турбулентного напряжения при $x = H$ (а), при $x = 4H$ (б), , при $x = 6H$ (в): 1 – эксперимент, 2 – двухжидкостная модель в грубой сетки, 3 – двухжидкостная модель в сгущенной сетке

Fig. 12. Turbulent stress profiles at $x =$ (a) H , (b) $4H$, and (c) $6H$: (1) experiment, (2) two-fluid model in a coarse grid, and (3) two-fluid model in a condensed grid

Заключение

Настоящая работа посвящена развитию двухжидкостной модели турбулентности З.М. Маликова и численного метода расчета параметров в переменных скорость–давление. Данная модель позволяет глубже изучить механизм образования и эволюцию вихревых структур за плохо обтекаемыми телами и с внезапным расширением канала при различных числах Рейнольдса. В работе для разностной аппроксимации двухжидкостных уравнений применен известный алгоритм SIMPLE. Анализ устойчивости полунявной схемы против потока показывает, что она устойчива при любом шаге по времени, т.е. абсолютно устойчива.

Несмотря на применение достаточно грубой и мелкой сетки со сгущением, полученные с использованием двухжидкостной модели результаты неплохо согласуются с экспериментальными данными. При использовании сгущенной сетки

результаты более точно согласуются с опубликованными экспериментальными данными (см. рис. 3–5).

Для ламинарного, переходного и турбулентного течений потока определены местоположения повторного присоединения первичного вихря, начала и конца вторичного вихря (см. рис. 9), а также рассчитаны профили продольной скорости в различных сечениях (см. рис. 8). Показано, что двухжидкостная модель турбулентности дает более близкие результаты к экспериментальным данным. Особенно хорошее соответствие наблюдается для ламинарного и турбулентного режимов течения. Несколько хуже результаты для переходного режима. По всей видимости, это связано тем, что коэффициенты поправки для двухжидкостной модели получены для развитой турбулентности, и для переходной области необходимо их калибровать заново. Однако это требует дополнительных исследований.

Для турбулентного течения несжимаемой вязкой жидкости в коротком плоском канале с обратным уступом с использованием новой двухжидкостной турбулентной модели продемонстрированы профили скорости (см. рис. 11), турбулентного напряжения (см. рис. 12) для различных сечений канала, а также показано влияние расчетной сетки на результаты исследования. При использовании довольно грубой и сгущенной сеток для численной реализации гидродинамических уравнений показано, что полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, особенно на сгущенной сетке.

В целом, учитывая точность, а также простоту численной реализации двухжидкостной модели, ее можно рекомендовать для исследования отрывных потоков с рециркуляцией потока.

Список источников

1. *Trias F.X., Gorobets A., Oliva A.* Turbulent flow around a square cylinder at Reynolds number 22,000: A DNS study // *Computers & Fluids*. 2015. V. 123. P. 87–98.
2. *Bouris D., Bergeles G.* 2D LES of vortex shedding from a square cylinder // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1999. V. 80. P. 31–46.
3. *Cao Y., Tamura T.* Large-eddy simulations of flow past a square cylinder using structured and unstructured grids // *Computers & Fluids*. 2016. V. 137. P. 36–54.
4. *Кагенов А.М., Костюшин К.В., Алигасанова К.Л., Котоногов В.А.* Математическое моделирование взаимодействия составной сверхзвуковой струи с преградой // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 68. С. 72–79. doi: 10.17223/19988621/68/7
5. *Глазунов А.А., Еремин И.В., Жильцов К.Н., Костюшин К.В., Тырышкин И.М., Шуварилов В.А.* Численное исследование определения величин пульсаций давления и собственных акустических частот в камерах сгорания с наполнителем сложной формы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 53. С. 59–72. doi: 10.17223/19988621/53/6
6. *Биматов В.И., Савкина Н.В., Фарапонов В.В.* Сверхзвуковое обтекание и аэродинамические характеристики острого конуса для различных моделей турбулентной вязкости // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2016. № 5 (43). С. 35–42. doi: 10.17223/19988621/43/4
7. *Турбаев Р.Р., Шваб А.В.* Численное исследование аэродинамики закрученного турбулентного течения и процесса классификации частиц в вихревой камере центробежного аппарата // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 65. – С. 137–147. doi: 10.17223/19988621/65/11

8. Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Численное исследование закрученного турбулентного течения в канале с внезапным расширением // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 72. С. 93–101. doi: 10.17223/19988621/72/8
9. Spalding D.B. Chemical reaction in turbulent fluids // J. Physico-chemical Hydrodyn. 1983. V. 4. P. 323–336.
10. Spalding D.B. A turbulence model for buoyant and combusting flows // 4th Int. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems, Swansea, 15–18 July 1984.
11. Malikov Z. Mathematical Model of Turbulence Based on the Dynamics of Two Fluids // Applied Mathematic Modeling. 2020. V. 82. P. 409–436.
12. Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical Simulation of Two-Phase Flow in a Centrifugal Separator // Fluid Dynamics. 2020. V. 55 (8). P. 1012–1028.
13. Malikov Z.M. Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids // Applied Mathematic Modeling. 2021. V. 91. P. 186–213.
14. Malikov Z.M., Madaliev M.E. Numerical simulation of flow in a two-dimensional flat diffuser based on two fluid turbulence models // Computer Research and Modeling. 2021. V. 13 (6). P. 1115–1126.
15. Younis B.A., Przulj V.P. Computation of turbulent vortex shedding // Comput Mech. 2006. V. 37. P. 408–425.
16. Rodi W. Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1997. V. 69-71. P. 55–75.
17. Rodi W. On the simulation of turbulent flow past bluff bodies // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 1993. V. 46-47. P. 3–19.
18. Bosch G., Rodi W. Simulation of vortex shedding past a square cylinder with different turbulence models // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1998. V. 28. P. 601–616.
19. Lyn D.A., Einav S., Rodi W., Park J.H. A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder // Journal of Fluid Mechanics. 1995. V. 304. P. 285–319.
20. Patankar S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington–New York–London : Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
21. Madaliev M.E. Numerical Calculation of an Air Centrifugal Separator Based on the SARC Turbulence Model // J. Appl. Comput. Mech. 2020. V. 6 (SI). P. 1133–1140. doi: 10.22055/JACM.2020.31423.1871
22. Blasius H. Laminare Stromung in Kanalen Wecselnder Briete // Zeitschrift filer Mathematik und Physik. 1910. V. 10. P. 225–223.
23. Kopera M.A. Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over a Backward-Facing Step : Thesis Submitted to the University of Warwick for the degree of Doctor of Philosophy School of Engineering March 2011.
24. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 473–496.
25. Маликов З.М., Мадалиев М.Э. Численное моделирование течения в плоском внезапно расширяющемся канале на основе новой двухжидкостной модели турбулентности // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 4 (97). С. 24–39.
26. Cristopher R. Turbulence modeling Resource // NASA Langley Research Center. URL: <http://turbmodels.larc.nasa.gov/>. (04.04.2019)
27. Lund T., Wu X., Squires, K. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. Journal of Computational Physics. 1998. V. 140 (2). P. 233–258.
28. Турубаетов П.П., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного потока в вихревой камере комбинированного пневматического аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 47. С. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9

References

1. Trias F.X., Gorobets A., Oliva A. (2015) Turbulent flow around a square cylinder at Reynolds number 22,000: A DNS study. *Computers & Fluids*. 123. pp. 87–98. doi: 10.1016/j.compfluid.2015.09.013
2. Bouris D., Bergeles G. (1999) 2D LES of vortex shedding from a square cylinder. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 80(1–2). pp. 31–46. doi: 10.1016/S0167-6105(98)00200-1
3. Cao Y., Tamura T. (2016) Large-eddy simulations of flow past a square cylinder using structured and unstructured grids. *Computers & Fluids*. 137. pp. 3654. doi: 10.1016/j.compfluid.2016.07.013
4. Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Aligasanova K.L., Kotonogov V.A. (2020) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya sostavnoy sverkhzvukovoy strui s pregradoy [Mathematical modeling of a supersonic twin jet interaction with an obstacle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 72–79. doi: 10.17223/19988621/68/7
5. Glazunov A.A., Eremin I.V., Zhiltsov K.N., Kostyushin K.V., Tyryshkin I.M., Shuvarikov V.A. (2018) Chislennoe issledovanie opredeleniya velichin pul'satsiy davleniya i sobstvennykh akusticheskikh chastot v kamerakh sgoraniya s napolnitelem slozhnoy formy [Numerical investigation of the pressure pulsation magnitude and natural aeroacoustic frequencies in the combustion chambers with a charge of a complex shape]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 59–72. doi: 10.17223/19988621/53/6
6. Bimatov V.I., Savkina N.V., Faraponov V.V. (2016) Sverkhzvukovoe obtekanie i aerodinamicheskie kharakteristiki ostrogo konusa dlya razlichnykh modeley turbulentnoy vyazkosti [Supersonic flow over a sharp cone and its aerodynamic characteristics for different models of turbulent viscosity]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(43). pp. 35–42. doi: 10.17223/19988621/43/4
7. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2020) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo turbulentnogo techeniya i protsessa klassifikatsii chastits v vikhrevoi kamere tsentrobezhnogo apparata [Numerical study of swirling turbulent flow aerodynamics and classification of particles in a vortex chamber of a centrifugal machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 137–147. doi: 10.17223/19988621/65/11
8. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Chislennoe issledovanie zakruchennogo turbulentnogo techeniya v kanale s vnezapnym rasshireniyem. [Numerical study of a swirling turbulent flow through a channel with an abrupt expansion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 93–101. doi: 10.17223/19988621/72/8
9. Spalding D.B. (1983) Chemical reaction in turbulent fluids. *Journal of Physico-chemical Hydrodynamics*. 4. pp. 323–336.
10. Spalding D.B. (1984). A turbulence model for buoyant and combusting flows. *Proceedings of the 4th International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems, Swansea*.
11. Malikov Z. (2020) Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids. *Applied Mathematical Modelling*. 82. pp. 409–436. doi: 10.1016/j.apm.2020.01.047
12. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2020) Numerical simulation of two-phase flow in a centrifugal separator. *Fluid Dynamics*. 55(8). pp. 1012–1028. doi: 10.1134/S0015462820080066
13. Malikov Z.M. (2021) Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids. *Applied Mathematical Modelling*. 91. 186–213. doi: 10.1016/j.apm.2020.09.029

14. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Numerical simulation of flow in a two-dimensional flat diffuser based on two fluid turbulence models. *Computer Research and Modeling*. 13(6). pp. 1115–1126. doi: 10.20537/2076-7633-2021-13-6-1149-1160
15. Younis B.A., Przulj V.P. (2006) Computation of turbulent vortex shedding. *Computational Mechanics*. 37. pp. 408–425. doi: 10.1007/s00466-005-0713-2
16. Rodi W. (1997) Comparison of LES and RANS calculations of the flow around bluff bodies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 69–71. pp. 55–75. doi: 10.1016/S0167-6105(97)00147-5
17. Rodi W. (1993) On the simulation of turbulent flow past bluff bodies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 46–47. pp. 3–19. doi: 10.1016/B978-0-444-81688-7.50005-X
18. Bosch G., Rodi W. (1998) Simulation of vortex shedding past a square cylinder with different turbulence models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 28. pp. 601–616. doi: 10.1002/(SICI)1097-0363(19980930)28:4<601::AID-FLD732>3.0.CO;2-F
19. Lyn D.A., Einav S., Rodi W., Park J.H. (1995) A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 304. pp. 285–319. doi: 10.1017/S0022112095004435
20. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Washington–New York–London: Hemisphere Publishing Corporation.
21. Madaliev M.E. (2020) Numerical calculation of an air centrifugal separator based on the sarc turbulence model. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 6(SI). pp. 1133–1140. doi: 10.22055/JACM.2020.31423.1871
22. Blasius H. (1910) Laminare Stromung in Kanalen Wecselnder Briete. *Zeitschrift filer Mathematik und Physik*. 10. pp. 225–233.
23. Kopera M.A. (2011) *Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over a Backward-Facing Step*. Ph.D. thesis, University of Warwick.
24. Armaly B.F., Durst F., Pereira J.C.F., Schonung B. (1983) Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 127. pp. 473–496. doi: 10.1017/S0022112083002839
25. Malikov Z.M., Madaliev M.E. (2021) Chislennoe modelirovanie techeniya v ploskom vnezapno rasshiryayushchemsya kanale na osnove novoy dvuzhidkostnoy modeli turbulentnosti [New two-fluid turbulence model-based numerical simulation of flow in a flat suddenly expanding channel]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya «Estestvennye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*. 4(97). pp. 24–39. doi: 10.18698/1812-3368-2021-4-24-39
26. Cristopher R. (2019) *Turbulence Modeling Resource*. NASA Langley Research Center. URL: <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
27. Lund T., Wu X., Squires K. (1998) Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*. 140(2). pp. 233–258. doi: 10.1006/jcph.1998.5882
28. Turubaev R.R., Shvab A.V. (2017) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo potoka v vikhreвой kamere kombinirovannogo pnevmaticheskogo apparata [Numerical study of swirled flow aerodynamics in the vortex chamber of the combined pneumatic machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 47. pp. 87–98. doi: 10.17223/19988621/47/9

Сведения об авторе:

Мадалиев Муродил Эркинжон угли – PhD, старший научный сотрудник Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, старший преподаватель Ферганского политехнического института, Фергана, Узбекистан. E-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru, m.e.madaliev@ferpi.uz

Information about the author:

Madaliev Murodil E. (PhD, Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan, Fergana Polytechnic Institute, Fergana, Republic of Uzbekistan).
E-mail: Madaliev.ME2019@mail.ru, m.e.madaliyev@ferpi.uz

Статья поступила в редакцию 12.03.2022; принята к публикации 31.03.2023

The article was submitted 12.03.2022; accepted for publication 31.03.2023