

Научная статья

УДК 517.956.4, 519.644.5

MSC: 31B10, 65N38, 80M15

doi: 10.17223/19988621/83/4

Об аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области

Дмитрий Юрьевич Иванов

Российский университет транспорта, Москва, Россия, ivanovdyu@yandex.ru

Аннотация. На основе кусочно-квадратичной интерполяции получены полуаналитические аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя, сходящиеся с кубической скоростью равномерно вблизи границы двумерной пространственной области. При некоторых упрощениях доказано, что использование ряда стандартных квадратурных формул приводит к нарушению равномерной сходимости аппроксимаций нормальной производной вблизи границы области. Теоретические выводы подтверждены результатами вычисления нормальной производной решения второй краевой задачи теплопроводности в круговой области.

Ключевые слова: квадратурная формула, нормальная производная, тепловой потенциал простого слоя, граничный элемент, коллокация, равномерная сходимость

Для цитирования: Иванов Д.Ю. Об аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 31–51. doi: 10.17223/19988621/83/4

Original article

On approximation of the normal derivative of the single layer heat potential near the boundary of a two-dimensional domain

Dmitry Yu. Ivanov

Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation, ivanovdyu@yandex.ru

Abstract. Within the framework of the collocation boundary element method, approximations of the normal derivative (ND) of the single layer heat potential (SLHP) are obtained. The approximations uniformly converge with a cubic rate near the boundary of a two-dimensional spatial domain. For this purpose, exact integration with respect to the variable $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$ is used, where d and r are the distances from the observed point to the boundary of the spatial domain and to the boundary point of integration, respectively. Namely, the integrals on the boundary elements (BEs) arising after piecewise

quadratic interpolation of the density function are calculated using exact integration over the variable ρ if the values d and ρ do not exceed approximately the value D —a third of the radius of the Lyapunov circle. In other cases, the integrals on the BEs are calculated using simple Gaussian quadrature formulas (SGQF). To make exact integration over ρ possible, the smooth parts of the integrands are approximated by quadratic interpolation in the variable ρ .

In particular, in this way the direct value of the ND of the SLHP is calculated when $d = 0$ and, on the basis of this, the boundary integral equation is approximated, which makes it possible to obtain a solution of the initial-Neumann problem for the heat equation (INPHE) at a zero initial condition. It is proved that the corresponding approximations of the ND of the INPHE's solution converge with a cubic rate uniformly in the near-boundary domain, where $d \in (0, D]$. With some simplifications, it's proved that the calculation of integrals on the BEs exclusively with the help of the SGQF entails a violation of the uniform convergence of the ND SLHP approximations near the boundary of the spatial domain. The results of calculating the ND of the INPHE solution in the unit circle are presented, confirming the theoretical conclusions.

Keywords: quadrature formula, normal derivative, single layer heat potential, boundary element, collocation, uniform convergence

For citation: Ivanov, D.Yu. (2023) On approximation of the normal derivative of the single layer heat potential near the boundary of a two-dimensional domain. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 31–51. doi: 10.17223/19988621/83/4

Введение

Метод граничных элементов является одним из основных методов приближенного решения задач математической физики наряду с методом конечных элементов и методом конечных разностей. В отличие от двух последних методов граничных элементов является более аналитическим и позволяет уменьшить размерность задачи на единицу, а именно: искомая функция вычисляется в виде потенциала непосредственно в любой внутренней точке области с помощью значений так называемой функции плотности, заданной на границе области и вычисляемой, в свою очередь, с помощью граничного интегрального уравнения, размерность которого на единицу меньше размерности краевой задачи. В рамках коллокационного метода граничных элементов (КМГЭ) для вычисления потенциала осуществляется разбиение границы области на дуги – так называемые граничные элементы (ГЭ), и на каждом из таких ГЭ осуществляется полиномиальная интерполяция функции плотности. Для вычисления получающихся после этого интегралов на ГЭ, как правило, используются простые квадратурные формулы Гаусса (ПКФГ) [1. С. 21, 173], если наблюдаемая точка, в которой вычисляется интеграл, не принадлежит ГЭ. Известно [2–4], что благодаря сингулярности ядра интегрального оператора точность аппроксимаций потенциала резко снижается вблизи границы области в случаях, когда для вычисления интегралов на ГЭ применяются более или менее стандартные квадратурные формулы, например ПКФГ или квадратурные формулы Ньютона–Котеса (КФНК). В работах [2–8] для вычисления интегралов на ГЭ предлагаются специальные квадратурные формулы, позво-

ляющие увеличить точность вычисления потенциалов вблизи границы области и обеспечивающие равномерную в области сходимост аппроксимаций потенциала.

В работах [2–8] рассматривались потенциалы только для стационарных уравнений – Лапласа и Гельмгольца. В работах автора [9, 10] равномерная в области сходимост аппроксимаций потенциалов простого и двойного слоев для двумерного уравнения теплопроводности обеспечивается применением точного интегрирования по переменной $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$, где d и r – расстояния от наблюдаемой точки до границы пространственной области и до граничной точки интегрирования соответственно. С помощью такого интегрирования вычисляются интегралы на ГЭ, если величины d и ρ не превосходят приблизительно величины D – трети радиуса круга Ляпунова, а остальные интегралы вычисляются с помощью ПКФГ. Для того чтобы точное интегрирование по ρ стало возможным, гладкие части подынтегральных функций аппроксимируются с помощью полиномиальной интерполяции по переменной ρ .

В настоящей работе аналогичный подход используется для вычисления нормальной производной (НП) теплового потенциала простого слоя (ТППС) вблизи границы двумерной пространственной области ($d \in (0, D]$), а также прямого значения НП ТППС при $d = 0$. В разделе 2 на основе кусочно-квадратичной интерполяции получены аппроксимации НП ТППС, сходящиеся к точным значениям с кубической скоростью равномерно в приграничной области $d \in [0, D]$. С помощью таких аппроксимаций в разделе 3 получены аппроксимации НП решений начально-краевых задач теплопроводности (НКЗТ) с граничными условиями второго рода и нулевым начальным условием, сходящиеся равномерно при $d \in (0, D]$ с кубической скоростью. В разделе 4 показано, что применение для вычисления интегралов на ГЭ исключительно ПКФГ или КФНК нарушает равномерную сходимост аппроксимаций НП ТППС вблизи границы пространственной области. В разделе 5 теоретические выводы подтверждены результатами вычисления НП решения НКЗТ в круговой области.

В заключение отметим, что специальные квадратурные формулы для вычисления прямых значений производных логарифмических потенциалов простого и двойного слоев, а также прямых значений производных потенциалов для трехмерных стационарных уравнений были получены в работах [11–13].

1. Предварительные определения и замечания

Пусть Ω_+ – двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах $x \equiv (x_1, x_2)$ зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{x}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, с положительным направлением против часовой стрелки. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbf{R}$), периодические с периодом $2S$ (S – половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимно однозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерыв-

ные производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($i=1,2$, $l=\overline{0,n}$, $s \in \mathbf{R}$). Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если не оговорено особо.

Обозначим через $\mathbf{B}$ замкнутый оператор в комплексном гильбертовом пространстве $L_2 \equiv L_2(I_T)$ ($I_T \equiv [0, T]$): $(\mathbf{B}f)(t) = f'(t)$, заданный на множестве $D(\mathbf{B})$ классов функций $f \in L_2$, эквивалентных абсолютно непрерывным на промежутке I_T функциям $f(t)$, таким что $f(0) = 0$. Оператор $\mathbf{B}$ является генератором C_0 -полугруппы операторов правого сдвига $U(\tau): (U(\tau)f)(t) = f(t-\tau)$ при $\tau \leq t$, $(U(\tau)f)(t) = 0$ при $\tau > t$ ($f \in L_2$), $\mathbf{B}f = \lim_{\tau \rightarrow +0} \tau^{-1}(f - U(\tau)f)$ ($f \in D(\mathbf{B})$). Заметим, что $\|U(\tau)\| = 1$ при $\tau < T$, $U(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geq T$ ($\mathbf{O}$ – нулевой оператор).

Обозначим через H^n ($n \in \mathbf{Z}_+$) гильбертовы пространства функций $f \in D(\mathbf{B}^n)$ с нормами $\|f\|_{H^n} \equiv \left[\sum_{m=0}^n \|\mathbf{B}^m f\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}$ ($H^0 \equiv L_2$). Введем в рассмотрение банаховы пространства $C_n^k(\partial\Omega)$ ($k, n \in \mathbf{Z}_+$) векторных функций $f(x)$ ($x \in \partial\Omega$) со значениями в пространстве H^n , имеющих непрерывные на множестве $\overline{I_s}$ производные $f^{(l)}(s) \equiv d^l f(\tilde{x}(s))/ds^l$ ($l=\overline{0,k}$) (непрерывность и дифференцируемость векторных функций здесь и далее предполагается в норме пространства их значений, в данном случае – H^n), с нормами $\|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} \equiv \max_{l=0,k} \sup_{s \in I_s} \|f^{(l)}(s)\|_{H^n}$. Введем обозначения $C(\partial\Omega) \equiv C_0^0(\partial\Omega)$, $C^k(\partial\Omega) \equiv C_0^k(\partial\Omega)$, $C_n(\partial\Omega) \equiv C_n^0(\partial\Omega)$. Зададим банаховы пространства $C_{n,m}^k(\partial\Omega) \equiv C_n^k(\partial\Omega) \cap C_{n+m}(\partial\Omega)$ с нормами $\|f\|_{C_{n,m}^k(\partial\Omega)} \equiv \|f\|_{C_n^k(\partial\Omega)} + \|f\|_{C_{n+m}(\partial\Omega)}$ ($k, n, m \in \mathbf{Z}_+$).

Пусть $p \in \mathbf{R}$. Зададим в области $\Omega' \equiv \mathbf{R}^2 \setminus \partial\Omega$ функцию $u(x)$:

$$u(x) = G_0(x)v \equiv \int_{I_T} A_0(x, \tau) e^{-p\tau} U(\tau)v d\tau \quad (x \in \Omega', v \in C(\partial\Omega)).$$

Здесь $A_0(x, \tau)f \equiv \int_{I_s} a_0(r, \tau)f(s')ds'$ ($f \in C(\partial\Omega)$),

$a_0(r, \tau) \equiv (4\pi\tau)^{-1} \exp[-r^2/(4\tau)]$, $r \equiv |r|$, $r(x, s') \equiv \tilde{x}(s') - x$. При $p=0$ функция $u(x)$ – двумерный ГППС. Производная $z(x) \equiv \partial_m u(x)$ по направлению некоторого единичного вектора m имеет вид:

$$z(x) = G(x)v \equiv \int_{I_T} A(x, \tau) e^{-p\tau} U(\tau)v d\tau, \quad (1)$$

$$A(x, \tau)f \equiv \int_{I_s} g(x, s', \tau)f(s')ds', \quad g(x, s', \tau) \equiv a(r, \tau)(-mr), \quad a(r, \tau) \equiv r^{-1} \partial_r a_0(r, \tau).$$

Обозначим через $n(s)$ единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\tilde{x}(s)$ и направленную внутрь области Ω_+ : $n(s) = (-\tilde{x}'_2(s), \tilde{x}'_1(s))$. Пусть $r_0 \equiv \tilde{x}(s') - \tilde{x}(s)$ и $r_0 \equiv |r_0|$. Зададим на множестве $\Theta \equiv \{(s, s'): \sigma \equiv s' - s \in \overline{I_s}, s \in \overline{I_s}\}$ функции $\psi_i(s, s')$ ($i=0,2$): при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i/\sigma^2$, где

$$\varphi_0(s, s') \equiv r_0^2 = [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)]^2,$$

$$\varphi_2(s, s') \equiv -\mathbf{n}(s)\mathbf{r}_0 = \tilde{x}'_2(s)[\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] - \tilde{x}'_1(s)[\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)],$$

а при $s' = s$ равенствами $\psi_0(s, s) \equiv 1$, $\psi_2(s, s) \equiv 2^{-1}[\tilde{x}'_2(s)\tilde{x}''_1(s) - \tilde{x}'_1(s)\tilde{x}''_2(s)]$. В силу теоремы 1 [14] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_s^j \psi_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = 0, 2$).

Так как контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, то $c_r \equiv \inf_{(s, s') \in \Theta} \psi_0 > 0$ ($c_r \leq 1$).

Справедлива оценка: $\vartheta \leq c_K |\sigma| \leq c'_K c_r^{-1/2} r_0$, где ϑ – острый угол между нормальными, проходящими через точки $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(s')$; $c_K \equiv \sup_{s \in I_S} K(s, s)$, $c'_K \equiv \sup_{(s, s') \in \Theta} K(s, s')$ ($K(s, s') \equiv |\partial_s^2 \varphi_2|$, $K(s, s)$ – кривизна кривой в точке $\tilde{\mathbf{x}}(s)$). Поэтому величина $3D$, где $D \equiv c_r^{1/2}/(3c'_K)$, может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова. Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ и осями ординат, направленными по нормали внутрь области Ω_+ . Согласно [15. С. 313] точки $\tilde{\mathbf{x}}_d(s)$ ($s \in I_S$) с местными координатами $(0, d)$ при фиксированном $d \in I_D \equiv [-D, 0) \cup (0, D]$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, параллельную кривой $\partial\Omega$, т.е. соответствие между точками $\tilde{\mathbf{x}}_d(s)$ и $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ взаимно однозначное ($\tilde{\mathbf{x}}_0(s) \equiv \tilde{\mathbf{x}}(s)$).

Местные координаты точек $\tilde{\mathbf{x}}(s')$ равны $(-2^{-1}\partial_s \varphi_0, -\varphi_2)$, поэтому $r^2 = |\tilde{\mathbf{x}}(s') - \tilde{\mathbf{x}}_d(s)|^2 = \varphi'_0 + d^2$, где $\varphi'_0 \equiv \varphi_0 + 2d\varphi_2$. Так как кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\tilde{\mathbf{x}}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\tilde{\mathbf{x}}(s)$, то $2d\mathbf{n}(s)\mathbf{r}_0 < r_0^2$, следовательно, $\varphi'_0 > 0$ при $(d, s, s') \in \Upsilon$, $s \neq s'$. Зададим на множестве $\Upsilon \equiv \overline{I_D} \times \Theta$ функцию $\rho'(d, s, s')$: $\rho' = \sqrt{\varphi'_0}$, если $\sigma \geq 0$; $\rho' = -\sqrt{\varphi'_0}$, если $\sigma < 0$ ($\sqrt{1} = 1$), а также функцию $\psi'_0(d, s, s') \equiv \psi_0 + 2d\psi_2$. Так как $\psi_0(s, s) = 1$, $|\psi_2(s, s)| \equiv 2^{-1}K(s, s)$ и $D \leq 1/(3c_K)$, то при $(d, s) \in I_D \times I_S$ имеем оценку: $\psi'_0(d, s, s) \geq 2/3$. Поэтому $\psi'_0 > 0$ на множестве Υ .

Так как $r^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_2 + d^2$, то $-\mathbf{n}(s)\mathbf{r} = 2^{-1}\partial_d r^2 = \varphi_2 + d$, поэтому функция $g(\mathbf{x}, s', \tau)$ при $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d(s)$, $(d, s, s') \in \Upsilon$ может быть записана в следующем виде:

$$g(\tilde{\mathbf{x}}_d(s), s', \tau) = a_1(d, \rho', \tau) \delta_1(d, s, s') + a_2(d, \rho', \tau) \delta_2(d, s, s'), \quad (2)$$

$$a_1(d, \rho, \tau) \equiv \rho^2 a(\rho^2 + d^2, \tau), \quad a_2(d, \rho, \tau) \equiv d a(\rho^2 + d^2, \tau), \quad \delta_1 \equiv \psi_2/\psi'_0, \quad \delta_2 \equiv 1.$$

Так как $\psi'_0 > 0$ на множестве Υ , то при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_s^j \delta_i$ ($j = \overline{0, n}$).

Пусть E_s – дуга кривой $\partial\Omega$, ограниченная двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии D от прямой $\tilde{\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{x}}_D(s)$, причем $\tilde{\mathbf{x}}(s) \in E_s$. Соот-

ветствующие значения σ обозначим через Ξ_s , границы отрезка Ξ_s – через Σ'_s и Σ''_s ($\Sigma'_s < \Sigma''_s$). Введем в рассмотрение множество $\Upsilon' \equiv \{(d, s, s') : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_s}, \sigma \in \Xi_s\}$.

Теорема 1 (см. теорему 5 [9]). Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда на множестве Υ' существуют положительная, ограниченная сверху функция $\delta(d, s, s') \equiv (\partial_s \rho')^{-1}$ и непрерывные производные $\partial_s^j \delta$ ($j = \overline{0, n}$).

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$). Тогда функции $\rho_{d,s}(\sigma) \equiv \rho'(d, s, s + \sigma)$ при любых фиксированных $s \in I_s$, $d \in \overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображают множества Ξ_s на соответствующие множества $\rho_{d,s}(\Xi_s)$. Функции $\tilde{\delta}_1(d, s, \rho) \equiv \delta_1(d, s, s + \sigma_{d,s}(\rho))$, $\tilde{\delta}_2(d, s, \rho) \equiv \delta(d, s, s + \sigma_{d,s}(\rho))$ ($\sigma_{d,s}(\rho)$ – функция, обратная к функции $\rho_{d,s}(\sigma)$) имеют непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}' \equiv \{(d, s, \rho) : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_s}, \rho \in \rho_{d,s}(\Xi_s)\}$ производные $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = 1, 2$).

Обозначим через $\Lambda_m(z)$ и $\tilde{\Lambda}_m(z)$ ($z \in [a, b]$, $m = \overline{0, 2}$) интерполяционные многочлены Лагранжа:

$$\Lambda_m(z) \equiv \prod_{j=0(j \neq m)}^2 \frac{z - z_j}{z_m - z_j}, \quad z_j \equiv \bar{z} + q_j h_z \quad (j = \overline{0, 2}); \quad \tilde{\Lambda}_m(z) \equiv \prod_{j=0(j \neq m)}^2 \frac{z - \tilde{z}_j}{\tilde{z}_m - \tilde{z}_j},$$

$$\tilde{z}_j \equiv \bar{z} + \tilde{q}_j h_z \quad (j = \overline{0, 2}).$$

Здесь $h_z \equiv 2^{-1}(b - a)$, $\bar{z} \equiv 2^{-1}(a + b)$; $q_0 \equiv -1$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$; $\tilde{q}_0 \equiv -\sqrt{3}/2$, $\tilde{q}_1 \equiv 0$, $\tilde{q}_2 \equiv \sqrt{3}/2$ [16. С. 92]. Пусть $f(z)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на промежутке $[a, b]$ функция со значениями в произвольном банаховом пространстве B . Тогда для функций $\tilde{f}_1(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(z_m) \Lambda_m(z)$, $\tilde{f}_2(z) \equiv \sum_{m=0}^2 f(\tilde{z}_m) \tilde{\Lambda}_m(z)$, а также первых и вторых производных функции $\tilde{f}_1(z)$ при $z \in [a, b]$ имеют место оценки:

$$\left| \tilde{f}_1(z) - f(z) \right| \leq c_\omega \sup_{z \in [a, b]} \left| f^{(3)}(z) \right| h_z^3, \quad \left| \tilde{f}_2 - f \right| \leq \tilde{c}_\omega \sup_{z \in [a, b]} \left| f^{(3)}(z) \right| h_z^3$$

$$(c_\omega \equiv 2\sqrt{3}/9, \quad \tilde{c}_\omega \equiv 4^{-1}), \quad (3)$$

$$\left| \tilde{f}_1(z) \right| \leq c_\Lambda \max_{m=0,2} \left| f(z_m) \right|, \quad \left| \tilde{f}_2(z) \right| \leq \tilde{c}_\Lambda \max_{m=0,2} \left| f(\tilde{z}_m) \right|$$

$$(c_\Lambda \equiv 3, \quad \tilde{c}_\Lambda \equiv 3^{-1}(7 + 2\sqrt{3})), \quad (4)$$

$$\left| \tilde{f}_1^{(1)}(z) \right| \leq c'_\Lambda \sup_{z \in [a, b]} \left| f^{(1)}(z) \right|, \quad \left| \tilde{f}_1^{(2)}(z) \right| \leq c''_\Lambda \sup_{z \in [a, b]} \left| f^{(2)}(z) \right| \quad (c'_\Lambda \equiv 3, \quad c''_\Lambda \equiv 2^{-1}). \quad (5)$$

2. Аппроксимация нормальной производной потенциала вблизи границы области

В этом параграфе будем полагать, что $x = \tilde{x}_d(s)$ ($d \in \overline{I_D}$, $s \in I_s$), $\mathbf{z}(x) = \partial_{n(s)} \mathbf{u}(x)$. Тогда функция $\mathbf{z}(x)$ при $p = 0$ – НП ТППС. Замкнутую об-

ласть, ограниченную кривыми $\partial\Omega_{-D}$ и $\partial\Omega_D$, обозначим через Ω_D . В силу равенства (2) и следствия 1 операторы $A(\mathbf{x}, \tau)$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$, $\tau > 0$) могут быть представлены в виде суммы: $A(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{i=1}^3 A_i(\mathbf{x}, \tau)$, где

$$A_i(\mathbf{x}, \tau) f \equiv \int_{\rho_{d,s}(\Sigma'_s)}^{\rho_{d,s}(\Sigma_s^+)} a_i(d, \rho, \tau) \tilde{\delta}_i(d, s, \rho) f(s + \sigma_{d,s}(\rho)) d\rho \quad (i=1, 2),$$

$$A_3(\mathbf{x}, \tau) f \equiv \int_{I_S \setminus \Xi_s} g(\mathbf{x}, s + \sigma, \tau) f(s + \sigma) d\sigma.$$

Условимся оператор A , отображающий банахово пространство B в банахово пространство C , обозначать как $A [B \rightarrow C]$, а если $C = B$, то $A [B]$. Так как любая прямая, параллельная прямой $\tilde{\mathbf{x}}(s)\tilde{\mathbf{x}}_D(s)$, пересекает границу $\partial\Omega$ внутри круга Ляпунова с центром в $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ не более чем в одной точке, то $r \geq D$, если $\sigma \in I_S \setminus \Xi_s$. Учитывая также следствие 1, получаем оценки норм операторов $A_i(\mathbf{x}, \tau) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$:

$$\|A_i(\mathbf{x}, \tau)\| \leq \tilde{c}_i \tilde{c}_{i,0} y_i \quad (i=1, 3), \quad y_1(\tau) \equiv \tau^{-1/2},$$

$$y_2(d, \tau) \equiv d \tau^{-3/2} \exp[-d^2/(4\tau)], \quad y_3 \equiv 1, \quad (6)$$

$$\tilde{c}_{i,0} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Gamma}^+} |\tilde{\delta}_i| \quad (i=1, 2), \quad \tilde{c}_1 \equiv (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2 \exp(-\gamma^2/4) d\gamma = (2\sqrt{\pi})^{-1},$$

$$\tilde{c}_2 \equiv (8\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\gamma^2/4) d\gamma = (4\sqrt{\pi})^{-1}, \quad \tilde{c}_{3,0} \equiv \sup_{r \geq D, \tau > 0} |g(\mathbf{x}, s', \tau)|, \quad \tilde{c}_3 \equiv 2S.$$

В силу оценок (6) имеем равномерную на множестве Ω_D ограниченность операторов $G(\mathbf{x}) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$:

$$\|G(\mathbf{x})\| \leq c_G \equiv \sum_{i=1}^3 c_i \tilde{c}_i \tilde{c}_{i,0}, \quad c_1 \equiv 2T^{1/2}, \quad c_2 \equiv \int_0^\infty y_2(d, \tau) d\tau = 2\sqrt{\pi}, \quad c_3 \equiv T. \quad (7)$$

Заметим, что неравенство $\|G(\mathbf{x})\| \leq c_G$ выполняется и при $d = 0$. В этом случае $A(\mathbf{x}, \tau) = A_1(\mathbf{x}, \tau) + A_3(\mathbf{x}, \tau)$ и функция $\mathbf{z}(x)$ при $p = 0$ суть прямое значение НП ТППС на $\partial\Omega$.

Пусть $N/2 \in \mathbf{N}$, $\tilde{N} \in \mathbf{N}$, $\tau_m \equiv m h_\tau$, $\tilde{\tau}_n \equiv n \tilde{h}_\tau$ ($m, n \in \mathbf{Z}_+$), $h_\tau \equiv T/N$, $\tilde{h}_\tau \equiv h_\tau / \tilde{N}$. Зададим функции $\tilde{U}(\tau) [L_2]$ и $e(\tau)$ ($\tau \geq 0$):

$$\tilde{U}(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 U(\tau_{2n+1} + q_m h_\tau) \Lambda_m(\tau) \quad (\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], \quad n = \overline{0, N/2-1}),$$

$$e(\tau) \equiv \sum_{m=0}^2 \exp[-p(\tilde{\tau}_{2n+1} + q_m \tilde{h}_\tau)] \Lambda_m(\tau) \quad (\tau \in [\tilde{\tau}_{2n}, \tilde{\tau}_{2n+2}], \quad n = \overline{0, N\tilde{N}/2-1}).$$

В силу оценок (4) и $\|U(\tau)\| \leq 1$, $|e^{-p\tau}| \leq e^{pT}$ функции $\tilde{U}(\tau)$ и $e(\tau)$ ограничены:

$\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq c_\Lambda e^{pT}$. На основании оценки (3) имеем оценки:

$$\|\tilde{U}(\tau)e(\tau)f - U(\tau)e^{-p\tau}f\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_\omega \left(\|B^3 f\|_{C(\partial\Omega)} + c_\Lambda |p|^3 \tilde{N}^{-3} \|f\|_{C(\partial\Omega)} \right) h_\tau^3 \quad (8)$$

$$(f \in C_3(\partial\Omega)).$$

Далее будем считать, что величина $\tilde{N} \in \mathbf{N}$ фиксирована. Пусть $L/2 \in \mathbf{N}$, $s_l \equiv lh_s$, $l \in \mathbf{Z}$, $h_s \equiv S/(L+1)$. Введем в рассмотрение пространства H_L векторных сеточных функций f со значениями $f_l \in L_2$, заданными в узлах $\tilde{x}(s_l)$, с нормой $\|f\|_{H_L} = \max_{-L-1 \leq l \leq L} \|f_l\|_{L_2}$. Зададим проекционные операторы $P_L [C(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$: $(P_L f)_l = f(s_l)$ ($\|P_L\| \leq 1$). Введем также в рассмотрение операторы $\tilde{P}_L [H_L \rightarrow C(\partial\Omega)]$:

$$(\tilde{P}_L f)(s) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2l-1+m} \Lambda_m(s) \quad (f \in H_L, s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], l = \overline{-L/2, L/2}).$$

В силу оценки (4) операторы $\tilde{P}_L$ ограничены в совокупности: $\|\tilde{P}_L\| \leq c_\Lambda$. На основании оценки (3) имеем оценки:

$$\|\tilde{P}_L P_L f - f\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_\omega \|f^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)). \quad (9)$$

Определение 1. Будем говорить, что ограниченные операторы $A_n [C \rightarrow D]$ ($n \in \mathbf{N}$) сходятся при $n \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим ограниченным операторам $B_n [C \rightarrow D]$, если $\|A_n f - B_n f\|_D \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно в шаре $\|f\|_C \leq 1$.

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{G}(x) [H_L \rightarrow L_2]$ ($x \in \Omega_D$):

$$\tilde{G}(x)f \equiv \int_{I_\tau} A(x, \tau) e(\tau) \tilde{U}(\tau) \tilde{P}_L f d\tau \quad (f \in H_L).$$

С учетом оценок (6) и $\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq c_\Lambda e^{|\rho|\tau}$, $\|\tilde{P}_L\| \leq c_\Lambda$ операторы $\tilde{G}(x)$ ограничены в совокупности: $\|\tilde{G}(x)\| \leq c_G c_\Lambda^3 e^{|\rho|\tau}$. С учетом оценок (8), (9) получаем неравенства

$$\|\tilde{G}(x)P_L f - G(x)f\|_{L_2} \leq c_G c_\omega \left[\left(\|B^3 f\|_{C(\partial\Omega)} + c_\Lambda p^3 \tilde{N}^{-3} \|f\|_{C(\partial\Omega)} \right) h_\tau^3 + c_\Lambda^2 e^{|\rho|\tau} \|f^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s^3 \right]$$

$$(f \in C_{0,3}^3(\partial\Omega)),$$

позволяющие сделать утверждение:

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{G}(x)P_L [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($N/2 \in \mathbf{N}$, $L/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $G(x) [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение операторы $\tilde{A}_i(x, \tau)$ ($x \in \Omega_D$), аппроксимирующие операторы $A_i(x, \tau)\tilde{P}_L [H_L \rightarrow L_2]$ ($i = \overline{1, 3}$). Для этого в выражениях $A_i(x, \tau)\tilde{P}_L f$ ($i = 1, 2$) заменим функции $\tilde{\delta}_i \tilde{f}$ ($\tilde{f} \equiv \tilde{P}_L f$, $f \in H_L$) их кусочно-квадратичными интерполянтами по переменной ρ :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} &\equiv \sum_{l=-L-2}^L \int_{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})} a_i(d, \rho, \tau) \mathbf{B}_{i,l}(d, s, \rho) \mathbf{f} d\rho, \\ \mathbf{B}_{i,l}(d, s, \rho) \mathbf{f} &\equiv \sum_{m=0}^2 \tilde{\delta}_i(d, s, \rho_{d,s,l,m}) \tilde{\mathbf{f}}(s + \sigma_{d,s}(\rho_{d,s,l,m})) \tilde{\Lambda}_m(\rho) \\ &\quad (\rho \in [\rho_{d,s}(\alpha_{s,l}), \rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})]), \\ \rho_{d,s,l,m} &\equiv \bar{\rho}_{d,s,l} + \tilde{q}_m h'_{d,s,l}, \quad \bar{\rho}_{d,s,l} \equiv 2^{-1} [\rho_{d,s}(\alpha_{s,l}) + \rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})], \\ h'_{d,s,l} &\equiv 2^{-1} [\rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1}) - \rho_{d,s}(\alpha_{s,l})].\end{aligned}$$

Здесь $\alpha_{s,0} \equiv 0$; $\alpha_{s,l} \equiv \min\{s_{l+k} - s, \Sigma_s''\}$, если $s_{l+k} \geq s \in (s_k, s_{k+1}]$ и $l > 0$, и $\alpha_{s,l} \equiv \max\{s_{l+k+1} - s, \Sigma_s'\}$, если $s_{l+k+1} < s$ и $l < 0$. Операторы $\mathbf{A}_3(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L$ аппроксимируем с помощью ПКФГ с γ узлами:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_3(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f} &\equiv \sum_{l=-L-1}^L h_{s,l}'' \mathbf{B}_{3,l}(\mathbf{x}) \mathbf{f}, \quad \mathbf{B}_{3,l}(\mathbf{x}) \mathbf{f} \equiv \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j g(\mathbf{x}, \beta_{s,l,j}, \tau) \tilde{\mathbf{f}}(\beta_{s,l,j}), \\ \beta_{s,l,j} &\equiv \bar{\beta}_{s,l} + h_{s,l}'' z_j, \quad \bar{\beta}_{s,l} \equiv 2^{-1} (\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}), \quad h_{s,l}'' \equiv 2^{-1} (\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}),\end{aligned}$$

где $\beta_{s,l} \equiv \max\{s_l, s + \Sigma_s''\}$, если $s_l \geq s$, и $\beta_{s,l} \equiv \min\{s_l, s + \Sigma_s'\}$, если $s_l < s$. Здесь z_j – корни многочлена $P_\gamma(z) \equiv [\gamma!(2\gamma)!] (d^\gamma/dz^\gamma) (z^2 - 1)^\gamma$ на промежутке $[-1; 1]$ [16. С. 258]; для весовых коэффициентов ω_j выполняется равенство: $\sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j = 2$ ($\omega_j > 0$) [16. С. 255].

В силу оценок (4) операторы $\mathbf{B}_{i,l} [H_L \rightarrow L_2]$ ограничены в совокупности: $\|\mathbf{B}_{i,l}\| \leq \tilde{c}_\Lambda c_\Lambda \tilde{c}_{i,0}$ ($i=1, 2$), $\|\mathbf{B}_{3,l}\| \leq 2c_\Lambda \tilde{c}_{3,0}$, и имеют место неравенства $\|\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f}\|_{L_2} \leq \tilde{c}_i \tilde{c}_{i,0} y_i c_\Lambda \tilde{c}_\Lambda \|\mathbf{f}\|_{H_L}$ ($i=1, 2$), $\|\tilde{\mathbf{A}}_3(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{f}\|_{L_2} \leq \tilde{c}_3 \tilde{c}_{3,0} y_3 c_\Lambda \|\mathbf{f}\|_{H_L}$ ($\mathbf{f} \in H_L$). (10)

Введем в рассмотрение операторы $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$), где операторы $\hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x}) [H_L \rightarrow L_2]$ имеют вид:

$$\hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x}) \mathbf{f} \equiv \int_{I_\tau} \tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{x}, \tau) e(\tau) \tilde{\mathbf{U}}(\tau) \mathbf{f} d\tau \quad (\mathbf{f} \in H_L).$$

С учетом неравенств (10) и $\|\tilde{\mathbf{U}}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq c_\Lambda e^{|\rho|T}$ имеем оценки:

$$\|\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \mathbf{f}\|_{L_2} \leq [\tilde{c}_\Lambda (c_1 \tilde{c}_{1,0} + c_2 \tilde{c}_{2,0}) + c_3 \tilde{c}_3 \tilde{c}_{3,0}] c_\Lambda^3 e^{|\rho|T} \|\mathbf{f}\|_{H_L} \quad (\mathbf{f} \in H_L),$$

на основании которых получаем утверждение:

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) [H_L \rightarrow L_2]$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$, $L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) ограничены в совокупности на множестве Ω_D .

В силу теоремы 1 при условии $\partial\Omega \in C^3$ может быть определена константа $c_h \equiv \sup_{(d,s,s') \in \Gamma''} |\partial_s p'|$. В силу следствия 1 и неравенства $r \geq D$, имеющего место, если

$\sigma \in I_s \setminus \Xi_s$, при указанной гладкости кривой $\partial\Omega$ могут быть определены константы

$$\tilde{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Gamma}'} |\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i| \quad (i=1,2, \partial\Omega \in C^{n+2}), \quad \tilde{c}_{3,j} \equiv \sup_{r \geq D, \tau > 0} |\partial_{s'}^j g(x, s', \tau)| \quad (\partial\Omega \in C^{n+1})$$

$$(j = \overline{0, n}, n \in \mathbf{Z}_+).$$

Используя неравенства (3)–(5) и $h'_{d,s,l} \leq 2^{-1} c_h h_s$, при условиях $\partial\Omega \in C^5$, $f \in C^2(\partial\Omega)$ получаем оценки:

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{A}_i(x, \tau) P_L f - A_i(x, \tau) \tilde{P}_L P_L f \right\|_{L_2} \leq \\ & \leq \tilde{c}_\omega \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Gamma}'} \left\| \partial_\rho^3 \left[\tilde{\delta}_i (\tilde{P}_L P_L f)(s + \sigma_{d,s}(\rho)) \right] \right\|_{L_2} 8^{-1} c_h^3 h_s^3 \sum_{l=-L-2}^L \int_{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l})}^{\rho_{d,s}(\alpha_{s,l+1})} a_i(d, \rho, \tau) d\rho \leq \\ & \leq \tilde{c}_\omega \hat{c}_i \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} 8^{-1} c_h^3 h_s^3 \tilde{c}_i y_i, \\ & \hat{c}_i \equiv \tilde{c}_{i,3} c_\Lambda + (3\tilde{c}_{i,2} \tilde{c}_{2,0} + 3\tilde{c}_{i,1} \tilde{c}_{2,1} + \tilde{c}_{i,0} \tilde{c}_{2,2}) c'_\Lambda + 3(\tilde{c}_{i,1} \tilde{c}_{2,0}^2 + \tilde{c}_{i,0} \tilde{c}_{2,1} \tilde{c}_{2,0}) c''_\Lambda \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (11)$$

При условиях $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $f \in C^2(\partial\Omega)$ имеем оценки [16. С. 259]:

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{A}_3(x, \tau) P_L f - A_3(x, \tau) \tilde{P}_L P_L f \right\|_{L_2} \leq \sup_{r \geq D, \tau > 0} \left\| \partial_{s'}^{2\gamma} \left[g(x, s', \tau) (\tilde{P}_L P_L f)(s') \right] \right\|_{L_2} h_s^{2\gamma} \tilde{c}_3 y_3 \leq \\ & \leq \hat{c}_3 \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} h_s^{2\gamma} \tilde{c}_3 y_3, \\ & \hat{c}_3 \equiv \left[(2\gamma)! \right]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} (\gamma!)^4 \left[\tilde{c}_{3,2\gamma} c_\Lambda + 2\gamma \tilde{c}_{3,2\gamma-1} c'_\Lambda + \gamma (2\gamma-1) \tilde{c}_{3,2\gamma-2} c''_\Lambda \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

На основании оценок (11), (12) и $\|\tilde{U}(\tau)\| \leq c_\Lambda$, $|e(\tau)| \leq \tilde{c}_\Lambda e^{|\rho|^T}$ получаем при условиях $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, неравенства

$$\left\| \hat{G}(x) P_L f - \tilde{G}(x) P_L f \right\|_{L_2} \leq \left[\tilde{c}_\omega (\hat{c}_1 \tilde{c}_1 c_1 + \hat{c}_2 \tilde{c}_2 c_2) 8^{-1} c_h^3 h_s^3 + \hat{c}_3 \tilde{c}_3 c_3 h_s^{2\gamma} \right] c_\Lambda^2 e^{|\rho|^T} \|f\|_{C^2(\partial\Omega)},$$

из которых вытекает утверждение:

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}(x) P_L$ [$C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{G}(x) P_L$ [$C^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2$] равномерно по N и $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h_s^3)$.

При вычислении операторов $\hat{G}(x)$ интегрирование по τ осуществляется точно. Затем в операторах $\hat{G}_i(x)$ ($i=1,2$) вычисляются интегралы по ρ , но не все они вычисляются аналитически. В таких случаях для точного интегрирования функции $\exp(-z_n)$ и $\text{Ei}(-z_n)$ ($z_n \equiv (\rho^2 + d^2)/(4\tilde{\tau}_n)$, $n = \overline{1, N\tilde{N}}$) заменяются многочленами, образованными первыми членами разложения этих функций в ряды Маклорена, а именно: $K_M + 1$ членами со степенями $(z_n)^k$ ($k = \overline{0, K_M}$), а также логарифмическим членом $\ln(z_n)$ в случае $\text{Ei}(-z_n)$. Значения $\sigma_{d,s}(\bar{\rho}_{d,s,l} + \tilde{q}_m h'_{d,s,l})$ получаются как численные решения уравнений $\rho_{d,s}(\sigma) = \bar{\rho}_{d,s,l} + \tilde{q}_m h'_{d,s,l}$. Производ-

ные $x'_i(s)$ ($i=1,2$) вычисляются аналитически, так как аналитические выражения функций $x_i(s)$ считаются известными.

На основании теорем 2, 4 делаем следующий вывод:

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}(x)P_L [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $G(x) [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ равномерно по $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение банахово пространство $C(I_T)$ классов функций $f \in L_2$, эквивалентных непрерывным на отрезке I_T функциям $f(t)$, с нормой $\|f\|_{C_T} \equiv \sup_{t \in I_T} |f(t)|$. Вследствие оценок

$$|f(t)| = \left| \int_0^t (Bf)(t') dt' \right| \leq \left[t \int_0^t |(Bf)(t')|^2 dt' \right]^{1/2} \leq \sqrt{T} \|f\|_{H^1}, \quad (t \in I_T, f \in H^1) \quad (13)$$

имеет место вложение $H^1 \subset C(I_T)$

Введем в рассмотрение банаховы пространства C_N сеточных функций f с комплексными значениями f_n , заданными в узлах τ_n ($n = \overline{0, N}$), с нормой $\|f\|_{C_N} = \max_{0 \leq n \leq N} |f_n|$. Зададим операторы $P_N [H^1 \rightarrow C_N]$: $(P_N f)_n = f(\tau_n)$, и $\hat{P}_N [C_N \rightarrow C(I_T)]$:

$$(\hat{P}_N f)(t) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2n+m} \Lambda_m(t) \quad (f \in C_N, t \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+2}], n = \overline{0, N/2-1}).$$

В силу неравенств (3), (4) и (13) справедливы оценки $\|\hat{P}_N P_N\| \leq c_\Lambda \sqrt{T}$ и

$$\|\hat{P}_N P_N f - f\|_{C(I_T)} \leq c_\omega \sqrt{T} \|f\|_{H^4} h_\tau^3 \quad (f \in H^4). \quad (14)$$

Учитывая следствие 2, оценки (7), (14) и замкнутость оператора B , приходим к следующему утверждению:

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{P}_N P_N \hat{G}(x)P_L [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $G(x) [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ равномерно по $x \in \Omega_D$ с порядком аппроксимации $O(h_\tau^3 + h_s^3)$.

Согласно следствию 3 функции $\tilde{z}(x) \equiv \hat{P}_N P_N \hat{G}(x)P_L v$ являются аппроксимациями функции $z(x)$. В силу теоремы 3 и неравенств $\|P_L\| \leq 1$, $\|\hat{P}_N P_N\| \leq c_\Lambda \sqrt{T}$ операторы $\tilde{G}(x) [C(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ ограничены в совокупности, поэтому аппроксимации $\tilde{z}(x)$ устойчивы к возмущениям функции v в норме $C_1(\partial\Omega)$. Сформулируем основной результат настоящей работы:

Следствие 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $R > 0$. Тогда функции $\tilde{z}(x, t)$ ($L/2 \in \mathbb{N}$, $N/2 \in \mathbb{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ с кубической скоростью к функции $z(x, t)$ равномерно относительно $(x, t) \in \Omega_D \times I_T$ (при почти всех t) и функций $v \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, удовлетворяющих неравенству $\|v\|_{C_{1,3}^3(\partial\Omega)} \leq R$. Кроме того, функции $\tilde{z}_\delta(x, t) : \tilde{z}_\delta(x) \equiv \tilde{G}(x)v_\delta$, сходятся к функции $z(x, t)$ при $L, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ равномерно относительно $(x, t) \in \Omega_D \times I_T$ и функций $v \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, $v_\delta \in C_1(\partial\Omega)$, удовлетворяющих условиям $\|v\|_{C_{1,3}^3(\partial\Omega)} \leq R$, $\|v_\delta - v\|_{C_1(\partial\Omega)} \leq \delta$.

3. Об аппроксимации нормальных производных решений краевых задач вблизи границы области

Пусть $\Omega_- \equiv \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_+}$. Введем в рассмотрение внутренние и внешние задачи Неймана:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u}_\pm(x) &= \mathbf{B}\mathbf{u}_\pm(x) + p\mathbf{u}_\pm(x) \quad (x \in \Omega_\pm), \\ \partial_{n(s)} \mathbf{u}_\pm(x) &= \mathbf{w}(x) \quad (x = \tilde{x}(s), s \in I_S). \end{aligned} \quad (15_\pm)$$

Здесь $\nabla \equiv (\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$; $\mathbf{u}_\pm(x)$ и $\mathbf{w}(x)$ – векторные функции со значениями в пространстве L_2 , заданные на множествах $\Omega_\pm$ и $\partial\Omega$ соответственно. Векторные задачи $(15_\pm)$ суть НКЗТ в области $\Omega_\pm \times I_T$ с граничными условиями второго рода и нулевым начальным условием.

Пусть $C^2(\Omega_\pm)$ и $C(\overline{\Omega_\pm})$ – пространства функций со значениями в L_2 , дважды непрерывно дифференцируемых на множестве $\Omega_\pm$ и непрерывных на замыкании этого множества $\overline{\Omega_\pm}$ соответственно.

Определение 2. Решением уравнения $\nabla^2 \mathbf{u}_\pm = \mathbf{B}\mathbf{u}_\pm + p\mathbf{u}_\pm$ называется функция $\mathbf{u}_\pm \in C^2(\Omega_\pm)$ со значениями в $D(\mathbf{B})$, обращающая уравнение $\nabla^2 \mathbf{u}_\pm = \mathbf{B}\mathbf{u}_\pm + p\mathbf{u}_\pm$ в истинное равенство.

Определение 3. Решением краевой задачи $(15_\pm)$ называется функция $\mathbf{u}_\pm \in C(\overline{\Omega_\pm})$, являющаяся решением уравнения $\nabla^2 \mathbf{u}_\pm = \mathbf{B}\mathbf{u}_\pm + p\mathbf{u}_\pm$ и имеющая с внутренней (внешней) стороны $\partial\Omega$ правильную НП $\partial_{n(s)}^\pm \mathbf{u}_\pm$ ($\partial_{n(s)}^\pm \mathbf{u}_\pm(\tilde{x}_d(s)) \rightarrow \partial_{n(s)}^\pm \mathbf{u}_\pm(\tilde{x}(s))$) при $d \rightarrow \pm 0$ равномерно относительно $s \in I_S$), определяемую равенствами $\partial_{n(s)}^\pm \mathbf{u}_\pm = \mathbf{w}$ ($x = \tilde{x}(s)$, $s \in I_S$). В случае задачи (15_-) требуется также выполнение условия $|x| \|\mathbf{u}_-\|_{L_2} \|\nabla \mathbf{u}_-\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

В пространстве $C(\partial\Omega)$ зададим операторы $\mathbf{G}_\pm \equiv \mp 2^{-1} \mathbf{I} + \mathbf{G}$ ($\mathbf{I}$ – тождественный оператор), где $(\mathbf{G}f)(x) \equiv \mathbf{G}(x)f$ при $x \in \partial\Omega$, $f \in C(\partial\Omega)$.

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{k+2}$. Тогда операторы $\mathbf{G}_\pm [C_{n,m}^k(\partial\Omega)]$ всюду определены, ограничены и ограниченно обратимы ($k, n, m \in \mathbb{Z}_+$).

Теорема 6. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $x \in \Omega_{\pm}$. При любом $w \in C(\partial\Omega)$ краевая задача (15_±) однозначно разрешима и решение $u_{\pm}(x)$ имеет вид: $u_{\pm}(x) = G_0(x)G_{\pm}^{-1}w$.

Доказательство теорем 5 и 6. Пусть $p > 0$. Тогда оператор $B + pI$ порождает экспоненциально убывающую C_0 -полугруппу сжимающих операторов $e^{-pt}U(t)$, и утверждения теоремы 5 могут быть получены по аналогии со следствиями 1 и 2 работы [14], а теоремы 6 – по аналогии с заключительным утверждением работы [17]. Кроме того, обобщения данных утверждений для абстрактного гильбертова пространства вместо L_2 получены в следствиях 9 и 10 работы [18].

Докажем утверждения теорем 5 и 6 для произвольных $p \in \mathbf{R}$. Обозначим через $G'_0(x)$, $G'_{\pm}$ и $G''_0(x)$, $G''_{\pm}$ операторы $G_0(x)$, $G_{\pm}$ при $p = p' \in \mathbf{R}$ и $p = p'' > 0$ соответственно. Пусть функции $u'_\pm$ и $u''_\pm$ являются решениями краевых задач (15_±) с граничными функциями $w' \in C(\partial\Omega)$ и $w'' \in C(\partial\Omega)$ при $p = p'$ и $p = p''$ соответственно. Ограниченный оператор $E_{p'-p'} : (E_{p'-p'} f)(x, t) \equiv \exp[(p'' - p')t] f(x, t)$ биективно отображает пространство $C_{n,m}^k(\partial\Omega)$ само на себя при любых $k, n, m \in \mathbf{Z}_+$. Имеем равенства $G'_0(x) = E_{p'-p'} G''_0(x) E_{p'-p'}^{-1}$, $G'_{\pm}(x) = E_{p'-p'} G''_{\pm}(x) E_{p'-p'}^{-1}$, из которых следуют утверждения теоремы 5 для произвольных $p \in \mathbf{R}$, а также равенства

$$u'_\pm(x) = E_{p'-p'} u''_\pm(x) = E_{p'-p'} G''_0(x) (G''_{\pm})^{-1} w'' = G'_0(x) (G'_{\pm})^{-1} w',$$

при условии что $w' = E_{p'-p'} w''$, из которых следуют утверждения теоремы 6 для произвольных $p \in \mathbf{R}$. Теоремы 5 и 6 доказаны.

Зададим в пространстве H_L операторы $\hat{G}_{\pm} \equiv \mp 2^{-1}I + \hat{G}$, где $(\hat{G} f)_l = \hat{G}(\tilde{x}(s_l)) f$ при $l = \overline{-L/2, L/2}$, $f \in H_L$. По аналогии с теоремой 6, доказанной в работе [19], имеем следующее утверждение:

Теорема 7. Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда существует $N_{\min} \in \mathbf{N}$, такое что при $N/2 \in \mathbf{N}_{\min} \equiv \{N_{\min}, N_{\min} + 1, \dots\}$, $L/2 \in \mathbf{N}$ операторы $\hat{G}_{\pm} [H_L]$ обратимы, и обратные операторы $\hat{G}_{\pm}^{-1}$ ограничены в совокупности.

С учетом следствия 2 и теорем 5, 7 делаем следующий вывод:

Следствие 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\hat{G}_{\pm}^{-1} P_L [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $P_L G_{\pm}^{-1} [C_{0,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow H_L]$ с порядком аппроксимации $O(h_t^3 + h_s^3)$.

Введем в рассмотрение операторы $R_{\pm}(x) \equiv G(x)G_{\pm}^{-1}$ и $\tilde{R}_{\pm}(x) \equiv \hat{P}_N P_N \hat{G}(x) \hat{G}_{\pm}^{-1} P_L$ ($x \in \Omega_D^{\pm} \equiv \Omega_{\pm} \cap \Omega_D$). С учетом следствий 3, 5 и теорем 3, 5 получаем следующее утверждение:

Следствие 6. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$. Тогда операторы $\tilde{R}_{\pm}(x) [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}_{\min}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответ-

ствующим операторам $\mathbf{R}_{\pm}(\mathbf{x}) [C_{1,3}^3(\partial\Omega) \rightarrow C(I_T)]$ равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega_D^{\pm}$ с порядком аппроксимации $O(h_{\tau}^3 + h_s^3)$.

Согласно следствию 6 функции $\tilde{\mathbf{z}}_{\pm}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\mathbf{R}}_{\pm}(\mathbf{x})\mathbf{w}$ являются аппроксимациями функции $\mathbf{z}_{\pm}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{R}_{\pm}(\mathbf{x})\mathbf{w}$ – НП решения краевой задачи $(15_{\pm})$: $\mathbf{z}_{\pm}(\mathbf{x}) = \partial_{n(s)}\mathbf{u}_{\pm}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_d(s)$, $d \in I_D$, $s \in I_S$). По аналогии со следствием 4 получаем заключительное утверждение:

Следствие 7. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $R > 0$. Тогда функции $\tilde{\mathbf{z}}_{\pm}(\mathbf{x}, t)$ ($L/2 \in \mathbf{N}$, $N/2 \in \mathbf{N}$) сходятся при $L, N \rightarrow \infty$ с кубической скоростью к соответствующим функциям $\mathbf{z}_{\pm}(\mathbf{x}, t)$ равномерно относительно $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_D^{\pm} \times I_T$ и функций $\mathbf{w} \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, удовлетворяющих неравенству $\|\mathbf{w}\|_{C_{1,3}^3(\partial\Omega)} \leq R$. Кроме того, функции $\tilde{\mathbf{z}}_{\delta}^{\pm}(\mathbf{x}, t)$: $\tilde{\mathbf{z}}_{\delta}^{\pm}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\mathbf{R}}_{\pm}(\mathbf{x})\mathbf{w}_{\delta}$, сходятся к соответствующим функциям $\mathbf{z}_{\pm}(\mathbf{x}, t)$ при $L, N \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ равномерно относительно $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_D^{\pm} \times I_T$ и функций $\mathbf{w} \in C_{1,3}^3(\partial\Omega)$, $\mathbf{w}_{\delta} \in C_1(\partial\Omega)$, удовлетворяющих условиям $\|\mathbf{w}\|_{C_{1,3}^3(\partial\Omega)} \leq R$ и $\|\mathbf{w}_{\delta} - \mathbf{w}\|_{C_1(\partial\Omega)} \leq \delta$.

4. Квадратурные аппроксимации как причина отсутствия равномерной сходимости в области

Вычислительные эксперименты показали, что скорость сходимости аппроксимаций НП решений краевых задач существенно снижается по мере приближения точки $\mathbf{x}$ к границе $\partial\Omega$, если для аппроксимации всех интегралов $j_l(\mathbf{x}, \tau) \equiv \int_{s_l}^{s_{l+1}} g(\mathbf{x}, s', \tau) \tilde{f}(s') ds'$ ($l = -L-1, L$, $\mathbf{x} \in \Omega_D$, $\tilde{f} \equiv \tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in H_L$) использовать ПКФГ. Покажем отсутствие равномерной по $d \in I_D$ сходимости аппроксимаций НП ТППС в случае, когда аппроксимируются (с помощью квадратурной формулы типа ПКФГ или КФНК) только интегралы $j_{l'}(\mathbf{x}, \tau)$ на ближайшей к точке $\mathbf{x}$ дуге $[\tilde{\mathbf{x}}(s_{l'-1/2}), \tilde{\mathbf{x}}(s_{l'+1/2})]$ при $\tau \in [0, \tau_{1/2}]$, а в остальных случаях интегралы $j_l(\mathbf{x}, \tau)$ вычисляются точно. Также с целью упрощения считаем, что $p = 0$, и вместо кусочно-квадратичной рассматриваем кусочно-постоянную интерполяцию:

$$\ddot{\mathbf{G}}(\mathbf{x})\mathbf{f} \equiv \sum_{n=0}^N \sum_{l=-L-1}^L \ddot{g}_{n,l} \mathbf{U}(\tau_n) \mathbf{f}(s_l) \quad (\mathbf{x} \in \Omega_D, \quad \mathbf{f} \in C(\partial\Omega), \quad L, N \in \mathbf{N}),$$

$$\ddot{g}_{n,l}(d, s, h_{\tau}, h_s) \equiv \int_{s_{l-1/2}}^{s_{l+1/2}} \tilde{g}_n(d, s, s', h_{\tau}) ds', \quad \tilde{g}_n(d, s, s', h_{\tau}) \equiv \int_{\tau_{n-1/2}}^{\tau_{n+1/2}} g(\tilde{\mathbf{x}}_d(s), s', \tau) d\tau,$$

$$\tau_{n\pm 1/2} \equiv (n \pm 2^{-1})h_{\tau}, \quad s_{l\pm 1/2} \equiv (l \pm 2^{-1})h_s, \quad \text{при этом полагаем: } g \equiv 0 \text{ при } \tau \leq 0, \text{ и учи-}$$

тываем, что $\mathbf{U}(\tau_N) = \mathbf{O}$.

Пусть $\mathbf{f} \in C_{0,2}^2$ и $\partial\Omega \in C^3$. Введем в рассмотрение векторную функцию $\mathbf{h}(\mathbf{x}, s', \tau)$ со значениями в пространстве L_2 : $\mathbf{h} \equiv g(\mathbf{x}, s', \tau) \mathbf{U}(\tau) \mathbf{f}(s')$ при $\tau > 0$,

$\mathbf{h} \equiv 0$ при $\tau \leq 0$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$, $\mathbf{s}' \in I_S$). Для любой замкнутой области $\Omega'_D \subset \Omega_D$ могут быть определены постоянные

$$\check{c}_{i,0} \equiv \sup_{\mathbf{x} \in \Omega'_D, \mathbf{s}' \in I_S, \tau \in \mathbf{R}} |\partial_{\tau}^i g(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \tau)| \quad (i = \overline{0,2}), \quad \check{c}_{0,j} \equiv \sup_{\mathbf{x} \in \Omega'_D, \mathbf{s}' \in I_S, \tau \in \mathbf{R}} |\partial_{\mathbf{s}}^j g(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \tau)| \quad (j = 1,2)$$

и существуют непрерывные производные $\partial_{\tau}^i \mathbf{h}$ ($i = \overline{0,2}$), $\partial_{\mathbf{s}}^j \mathbf{h}$ ($j = 1,2$) при $(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \tau) \in \Omega'_D \times \overline{I_S} \times \mathbf{R}$. Учитывая, что $\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{O}$ при $\tau \geq T$, имеем

$\mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{f} \equiv \int_{\tau_{-1/2}}^{\tau_{N+1/2}} d\tau \int_{I_S} \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{s}', \tau) d\mathbf{s}'$. С помощью формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла [20, С. 146] можно получить оценки:

$$\begin{aligned} \|\ddot{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) \mathbf{f} - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{f}\|_{L_2} &\leq 12^{-1} (T + h_{\tau}) S (c_{\tau} h_{\tau}^2 + c_s h_s^2), \\ c_{\tau}(\mathbf{f}, h_{\tau}) &\equiv \check{c}_{2,0} \|\mathbf{B} \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} h_{\tau} + 2\check{c}_{1,0} \|\mathbf{B} \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)} + \check{c}_{0,0} \|\mathbf{B}^2 \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)}, \\ c_s(\mathbf{f}, h_s) &\equiv \check{c}_{0,2} \|\mathbf{f}^{(1)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s + 2\check{c}_{0,1} \|\mathbf{f}^{(1)}\|_{C(\partial\Omega)} + \check{c}_{0,0} \|\mathbf{f}^{(2)}\|_{C(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

согласно которым операторы $\ddot{\mathbf{G}}(\mathbf{x}) [C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ сходятся по операторной норме при $L, N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\mathbf{G}(\mathbf{x}) [C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ с порядком аппроксимации $O(h_{\tau}^2 + h_s^2)$ равномерно по $\mathbf{x} \in \Omega'_D$. Обозначим через $\check{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s))$ оператор $\ddot{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s))$ ($s \in I_S$, $d \in I_D$), в котором интеграл $\check{g}_{0,l'}$ ($s \in [s'_{l'-1/2}, s'_{l'+1/2}]$) заменен квадратурной аппроксимацией $\check{g}_{0,l'}$ достаточно высокого порядка. Тогда при достаточной гладкости кривой $\partial\Omega$ операторы $\check{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s)) [C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ сходятся по операторной норме при $L, N \rightarrow \infty$ к соответствующим операторам $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s)) [C_{0,2}^2(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ с порядком аппроксимации $O(h_{\tau}^2 + h_s^2)$ равномерно по $(|d|, s) \in [d_0, D] \times I_S$ для любого $d_0 \in (0, D)$. В то же время справедлива теорема:

Теорема 8. Пусть остаточный член квадратурной формулы, используемой для аппроксимации интеграла $\check{g}_{0,l'}$ ($s \in [s'_{l'-1/2}, s'_{l'+1/2}]$, $d \in I_D$), имеет вид: $R_m[f] = c_m (b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)$ ($\xi \in [a, b]$), где f – подынтегральная функция, $[a, b]$ – промежуток интегрирования, c_m – константа, зависящая только от $m \in \mathbf{Z}_+$. Пусть $\partial\Omega \in C^{2m+2}$. Тогда при $L, N \rightarrow \infty$ отсутствует равномерная по $|d| \in (0, d_0]$ сильная сходимость операторов $\check{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s)) [C_n^k(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ к соответствующим операторам $\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{x}}_d(s)) [C_n^k(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$ для любых фиксированных $k, n \in \mathbf{N}$, $s \in I_S$, $d_0 \in (0, D]$.

Доказательство. Пусть $s \in I_S$ фиксировано. Заметим, что

$$\begin{aligned} \check{g}_{0,l'} &= \int_{\Sigma-h_s}^{\Sigma} \check{g}_0(d, s, s+\sigma, h_{\tau}) d\sigma, \quad \text{где } \Sigma \equiv s'_{l'+1/2} - s \in (0, h_s], \\ \check{g}_0 &= -(2\pi)^{-1} \exp\left[-(\sigma^2 \psi'_0 + d^2)/(2h_{\tau})\right] (\sigma^2 \psi_2 + d) / (\sigma^2 \psi'_0 + d^2). \end{aligned}$$

Достаточно ограничиться рассмотрением значений $d > 0$. С помощью равенств $r_m \equiv R_m[\tilde{g}_0]$ ($m \in \mathbf{Z}_+$), где $h_\tau = 2^{-1}c_\tau d^2$, $d = Kh_s$, $c_\tau \equiv 2T/S^2$, зададим функции $r_m(K, h_s, \sigma)$ при $K \in \mathbf{N}$, $h_s \in (0, D/K]$ и $\sigma \in [\Sigma - h_s, \Sigma]$. Пусть $\tilde{\psi}'_0(K, h_s, \sigma) \equiv \psi'_0(Kh_s, s, s + \sigma)$. Учитывая, что $\inf_{(d, s, s') \in \Upsilon} \psi'_0 > 0$ и существуют непрерывные производные: $\partial_{s'}^j \psi'_0$ на Υ , $\partial_{s'}^j \psi_2$ на Θ ($j = \overline{0, 2m}$), можно представить функции r_m в виде:

$$r_m(K, h_s, \sigma) = -c_m K h_s^{2m+2} \exp \left[- \left(\sigma^2 \tilde{\psi}'_0 + K^2 h_s^2 \right) / \left(c_\tau K^2 h_s^2 \right) \right] \sum_{k=0}^m (-1)^{2m-k} S_{m,k} + o_m,$$

$$S_{m,k} \equiv \sigma^{2m-2k} (\tilde{\psi}'_0)^{2m-k} \sum_{n=0}^{2m-k} a_{m,k,n} K^{-2n} h_s^{-2n} \left(\sigma^2 \tilde{\psi}'_0 + K^2 h_s^2 \right)^{-2m+k+n-1},$$

где $a_{m,k,n}$ – постоянные коэффициенты ($a_{m,k,n} \geq (2\pi)^{-1} 2^{2m-k} c_\tau^{-n} (2m-k-n)!$), $o_m(K, h_s, \sigma) \rightarrow 0$ при $h_s \rightarrow 0$ и фиксированном $K \in \mathbf{N}$ равномерно по $\sigma \in [\Sigma - h_s, \Sigma]$.

Пусть $\check{\sigma} \equiv \sigma/h_s$, $\check{\Sigma} \equiv \Sigma/h_s$, $\check{r}_m(K, h_s, \check{\sigma}) \equiv r_m(K, h_s, \sigma h_s)$, $\check{\psi}'_0(K, h_s, \check{\sigma}) \equiv \tilde{\psi}'_0(K, h_s, \sigma h_s)$. Тогда

$$\check{r}_m(K, h_s, \check{\sigma}) = -c_m K^{-2m-1} \sum_{k=0}^m (-1)^{2m-k} \check{S}_{m,k} + \check{o}_m,$$

$$\check{S}_{m,k} \equiv \exp \left[-c_\tau^{-1} \left(\check{\sigma}^2 K^{-2} \check{\psi}'_0 + 1 \right) \right] \check{\sigma}^{2m-2k} K^{-2m+2k} (\check{\psi}'_0)^{2m-k} \sum_{n=0}^{2m-k} a_{m,k,n} \left(\check{\sigma}^2 K^{-2} \check{\psi}'_0 + 1 \right)^{-2m+k+n-1},$$

где $\check{o}_m(K, h_s, \check{\sigma}) \rightarrow 0$ при $h_s \rightarrow 0$ и фиксированном $K \in \mathbf{N}$ равномерно по $\check{\sigma} \in [\check{\Sigma} - 1, \check{\Sigma}]$. Заметим, что слагаемые $\check{S}_{m,k}(K, h_s, \check{\sigma})$ при $k < m$ стремятся к нулю при $K \rightarrow \infty$ равномерно по $h_s \in (0, D/K]$, $\check{\sigma} \in [\check{\Sigma} - 1, \check{\Sigma}]$. Так как $\check{\psi}'_0 = 1$ при $\sigma = d = 0$ и $\check{\Sigma} \leq 1$, то $\check{S}_{m,m}(K, 0, \check{\sigma}) \geq c'_m \equiv 2^{-m-1} \exp(-2/c_\tau) a_{m,m,0} > 0$ при $K \in \mathbf{N}$, $\check{\sigma} \in [\check{\Sigma} - 1, \check{\Sigma}]$. Поэтому существуют постоянные $K_m \in \mathbf{N}$, $h_m \in (0, D/K_m]$ и $c''_m \in (0, c'_m)$, такие что при $h_s \in (0, h_m]$, $\check{\sigma} \in [\check{\Sigma} - 1, \check{\Sigma}]$ имеет место оценка: $|\check{r}_m(K_m, h_s, \check{\sigma})| \geq c''_m \equiv K_m^{-2m-1} |c_m| c''_m$. Пусть $L' \in \mathbf{N}$ такое, что $h_s \in (0, h_m]$ при $L = L', L' + 1, \dots$. Тогда если $d = K_m h_s$, $h_\tau = 2^{-1}c_\tau d^2$ при $L = L', L' + 1, \dots$, то $|R_m[\tilde{g}_0]| \geq c''_m$.

Обозначим через $\check{\mathbf{G}}_L(s)$, $\check{\mathbf{G}}_L(s)$ ($L = L', L' + 1, \dots$) операторы $\check{\mathbf{G}}(\check{x}_d(s))$, $\check{\mathbf{G}}(\check{x}_d(s)) [C_n^k(\partial\Omega) \rightarrow L_2]$, где $d = K_m h_s$, $h_\tau = 2^{-1}c_\tau d^2$, $k, n \in \mathbf{N}$. Пусть $f_1(s') \equiv 1$ ($s' \in I_s$), $f_2 \in H^n$, $\|f_2\|_{L_2} = 1$. Тогда $\tilde{\mathbf{f}} \equiv f_1 f_2 \in C_n^k(\partial\Omega)$ и имеют место оценки: $\|\check{\mathbf{G}}_L(s) \tilde{\mathbf{f}} - \check{\mathbf{G}}_L(s) \tilde{\mathbf{f}}\|_{L_2} = |R_m[\tilde{g}_0]| \geq c''_m$. В силу оценок (7), $\|U(\tau)\| \leq 1$ справедливы оценки:

$$\|\check{\mathbf{G}}_L(x) \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{G}(x) \tilde{\mathbf{f}}\|_{L_2} \leq c_G \left(\|\mathbf{B} \tilde{\mathbf{f}}\|_{C(\partial\Omega)} h_\tau + \|\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}\|_{C(\partial\Omega)} h_s \right) \leq c_G \|f_2\|_{H^1} 2^{-1} c_\tau K_m^2 h_s^2.$$

При достаточно большом натуральном $L'' \geq L'$ получаем неравенство $c_G \|f_2\|_{H^1} c_\tau K_m^2 h_s^2 \leq c_m'''$ ($L = L'', L'' + 1, \dots$). В результате имеем оценки: $\|\tilde{\mathbf{G}}_L(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{f}}\|_{L_2} \geq 2^{-1} c_m'''$ ($L = L'', L'' + 1, \dots$). Теорема доказана.

5. Вычислительные эксперименты

Численную проверку эффективности предлагаемой аппроксимации НП ТППС осуществляем здесь с помощью соответствующей аппроксимации НП решения краевой задачи (15₊) внутри единичного круга при условии, что $p = 0$ и граничная функция $w(\varphi, t) = t^2 (1-t)^2 \cos \varphi$ (φ – полярный угол с полюсом в центре круга). Точные значения функции $\mathbf{z}_+$ при этом вычисляем с помощью рядов:

$$z_+(\varphi, t) = 2 \cos \varphi \left\{ -2^{-1} f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1'(\mu_k R)}{J_1(\mu_k) (\mu_k^2 - 1)} \sum_{l=1}^4 \frac{(-1)^{l+1} [f^{(l)}(t) - f^{(l)}(0) \exp(-\mu_k^2 t)]}{\mu_k^{2l-1}} \right\},$$

где $f(t) \equiv t^2 (1-t)^2$, $J_1(z)$ – функция Бесселя, μ_k – положительные корни уравнения $J_1'(z) = 0$, R – полярный радиус. Для данной геометрии имеем $D = 2/(3\pi)$, $\Sigma_s'' = -\Sigma_s' = \arcsin(2/(3\pi))$ ($s \in I_s$). Аппроксимации $\tilde{\mathbf{z}}_+$ вычисляем при значениях $\gamma = 6$ и $K_M = 10$. Кроме того, вычисляем функции $\tilde{\mathbf{z}}_i^+ \equiv \hat{\mathbf{P}}_N \mathbf{P}_N \hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{G}}_+^{-1} \mathbf{P}_L \mathbf{w}$ ($i = 1, 2, 3$), при этом операторы $\hat{\mathbf{G}}_i(\mathbf{x})$ отличаются от операторов $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x})$ только тем, что операторы $\mathbf{A}_{1-2}(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L$, где $\mathbf{A}_{1-2}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, \tau)$ ($\mathbf{x} \in \Omega_D$), вычисляются не с помощью интегрирования по переменной ρ , а с помощью ПКФГ с $\gamma_{1-2} = 12, 24, 48$ узлами соответственно по аналогии с $\mathbf{A}_3(\mathbf{x}, \tau) \tilde{\mathbf{P}}_L$. Вычисления осуществляем с двойной точностью при значениях параметров $T = 1$, $\tilde{N} = 1$. Для определения погрешностей аппроксимаций $\tilde{\mathbf{z}}_+$, $\tilde{\mathbf{z}}_i^+$ находим их относительные среднеквадратичные отклонения от точной функции $\mathbf{z}_+$: $\delta \tilde{\mathbf{z}}_+ \equiv \|\tilde{\mathbf{z}}_+ - \mathbf{z}_+\| / \|\mathbf{z}_+\|$, $\delta \tilde{\mathbf{z}}_i^+ \equiv \|\tilde{\mathbf{z}}_i^+ - \mathbf{z}_+\| / \|\mathbf{z}_+\|$, при этом $\|\cdot\|$ – среднеквадратичная норма, вычисляемая при фиксированных значениях $d = 1 - R$ в точках $\tilde{\mathbf{x}}_d(s_{l+1/2})$ ($l = -L-1, L$). В таблице в каждой основной ячейке представлены значения $\delta \tilde{\mathbf{z}}_+$, $\delta \tilde{\mathbf{z}}_1^+$, $\delta \tilde{\mathbf{z}}_2^+$, $\delta \tilde{\mathbf{z}}_3^+$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Относительные среднеквадратичные отклонения

d	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-15}
$h_\tau = 1/16$	$6.68 \cdot 10^{-3}$	$6.97 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$
$h_s = \pi/7$	$7.33 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{-1}$	$1.14 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.68 \cdot 10^{-3}$	$4.13 \cdot 10^{-2}$	$8.20 \cdot 10^{-1}$	$1.21 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.68 \cdot 10^{-3}$	$6.97 \cdot 10^{-3}$	$7.33 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$

Окончание таблицы

d	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-15}
$h_\tau = 1/32$	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$7.08 \cdot 10^{-4}$	$7.17 \cdot 10^{-4}$	$7.17 \cdot 10^{-4}$	$7.17 \cdot 10^{-4}$	$7.17 \cdot 10^{-4}$
$h_s = \pi/15$	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$3.02 \cdot 10^{-2}$	$1.02 \cdot 10^0$	$1.23 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$2.49 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-1}$	$1.16 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$7.09 \cdot 10^{-4}$	$5.93 \cdot 10^{-2}$	$9.03 \cdot 10^{-1}$	$1.22 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
$h_\tau = 1/64$	$6.26 \cdot 10^{-5}$	$7.93 \cdot 10^{-5}$	$8.14 \cdot 10^{-5}$	$8.16 \cdot 10^{-5}$	$8.16 \cdot 10^{-5}$	$8.16 \cdot 10^{-5}$
$h_s = \pi/31$	$6.26 \cdot 10^{-5}$	$3.23 \cdot 10^{-2}$	$7.80 \cdot 10^{-1}$	$1.20 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.26 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^{-4}$	$4.04 \cdot 10^{-2}$	$1.07 \cdot 10^0$	$1.23 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.26 \cdot 10^{-5}$	$7.93 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-3}$	$5.74 \cdot 10^{-1}$	$1.18 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
$h_\tau = 1/128$	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$9.17 \cdot 10^{-6}$	$9.66 \cdot 10^{-6}$	$9.73 \cdot 10^{-6}$	$9.74 \cdot 10^{-6}$	$9.74 \cdot 10^{-6}$
$h_s = \pi/63$	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$	$3.94 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^0$	$1.24 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$5.50 \cdot 10^{-2}$	$8.79 \cdot 10^{-1}$	$1.22 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$
	$6.24 \cdot 10^{-6}$	$9.17 \cdot 10^{-6}$	$5.70 \cdot 10^{-4}$	$1.49 \cdot 10^{-1}$	$1.10 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$

Можно заметить, что аппроксимации $\tilde{\mathbf{z}}_+$ обладают кубической скоростью сходимости, сохраняющейся даже при очень малых по модулю значениях d . Близкие результаты получены и при выборе других точек наблюдения $\tilde{\mathbf{x}}_d(s)$. Скорости сходимости аппроксимаций $\tilde{\mathbf{z}}_i^+$ снижаются от кубической до нулевой по мере приближения к границе $\partial\Omega$ при фиксированных h_τ , h_s и восстанавливаются до кубической по мере уменьшения h_τ , h_s при фиксированных d . При приближении точки $\mathbf{x}$ к узлу квадратурной аппроксимации оператора $\mathbf{A}_{1-2}(\mathbf{x}, \tau)\tilde{\mathbf{P}}_L$, а именно: точки $\tilde{\mathbf{x}}_d(s_i)$ к точке $\tilde{\mathbf{x}}(s_i)$ в случае использования КФНК замкнутого типа, возникают проблемы вычислительного характера: $\tilde{g}_0(d, s, s, h_\tau) \sim d^{-1} \rightarrow \infty$ при $d \rightarrow 0$ и фиксированных $h_\tau > 0$, $s \in I_s$, и ошибки $\delta\tilde{\mathbf{z}}_i^+$ приобретают катастрофический характер. Близкие результаты были получены и для аппроксимаций НП решений краевой задачи (15_) $\tilde{\mathbf{z}}_-$ и $\tilde{\mathbf{z}}_i^-$ во внешности единичного круга. Так как аппроксимации $\tilde{\mathbf{z}}_\pm$ и $\tilde{\mathbf{z}}_i^\pm$ отличаются только способом вычисления операторов $\mathbf{G}(\mathbf{x})$, определяющих НП ТППС вблизи границы $\partial\Omega$, то сделанные на основе численных экспериментов выводы относительно аппроксимаций НП решений краевых задач можно перенести на соответствующие аппроксимации НП ТППС.

Заключение

В рамках коллокационного метода граничных элементов на основе кусочно-квадратичной интерполяции получены аппроксимации НП ТППС, равномерно сходящиеся с кубической скоростью вблизи границы двумерной пространственной области. Для этого используется точное интегрирование по переменной ρ – компоненте межточечного расстояния r , обладающей достаточно гладкой зависимостью от параметра s . Показано, что использование вместо такого интегрирования широкого круга квадратурных формул, в частности ПКФГ и КФНК, влечет нарушение равномерной сходимости аппроксимаций НП ТППС вблизи границы

пространственной области. Заметим, что аналогичная аппроксимация может быть использована для вычисления НП логарифмического потенциала простого слоя.

Список источников

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М. : Мир, 1987. 524 с.
2. Sladek V., Sladek J., Tanaka M. Optimal transformations of the integration variables in computation of singular integrals in BEM // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000. V. 47 (7). P. 1263–1283.
3. Gu Y., Chen W., Zhang J. Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. V. 36 (8). P. 1173–1182.
4. Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 9. С. 1269–1284.
5. Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 9. С. 1262–1276.
6. Sladek V., Sladek J., Tanaka M. Numerical integration of logarithmic and nearly logarithmic singularity in BEMs // Applied Mathematical Modelling. 2001. V. 25. P. 901–922.
7. Johnston P.R., Elliott D. A sinh transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2005. V. 62 (4). P. 564–578.
8. Fu Z.J., Chen W., Qu W. Numerical investigation on three treatments for eliminating the singularities of acoustic fundamental solutions in the singular boundary method // WIT Transactions on Modelling and Simulation. 2014. V. 56. P. 15–26.
9. Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25.
10. Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 30–52.
11. Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 9. С. 1270–1288.
12. Бахшальева М.Н. Квадратурная формула для производной логарифмических потенциалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 5–22.
13. Khalilov E.H. Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential // Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences. 2014. V. 34 (1). P. 73–82.
14. Иванов Д.Ю. Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 38. С. 33–45.
15. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М. : Наука, 1981. Т. 4, ч. 2. 551 с.
16. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
17. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам диффузии на прямом цилиндре // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 8. С. 1094–1103.

18. Иванов Д.Ю. Решение краевых задач для двумерного эллиптического дифференциально-операторного уравнения в абстрактном гильбертовом пространстве с помощью метода граничных интегральных уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 60. С. 11–31.
19. Иванов Д.Ю. О решении плоских задач нестационарной теплопроводности коллокационным методом граничных элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 50. С. 9–29.
20. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Физматлит, 2001. Т. 2. 863 с.

References

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. (1984) *Boundary Element Techniques*. New York: Springer-Verlag.
2. Sladek V., Sladek J., Tanaka M. (2000) Optimal transformations of the integration variables in computation of singular integrals in BEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 47(7). pp. 1263–1283. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(20000310)47:7%3C1263::AID-NME811%3E3.0.CO;2-I
3. Gu Y., Chen W., Zhang J. (2012) Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 36(8). pp. 1173–1182. DOI: 10.1016/jenganabound.2012.01.006.
4. Krutitskii P.A., Fedotova A.D., Kolybasova V.V. (2019) Quadrature formula for the simple layer potential. *Differential Equations*. 55(9). pp. 1226–1241. DOI: 10.1134/s0012266119090106.
5. Krutitskii P.A., Kolybasova V.V. (2016) Numerical method for the solution of integral equations in a problem with directional derivative for the Laplace equation outside open curves. *Differential Equations*. 52(9). pp. 1219–1233. DOI: 10.1134/s0012266116090135.
6. Sladek V., Sladek J. and Tanaka M. (2001) Numerical integration of logarithmic and nearly logarithmic singularity in BEMs. *Applied Mathematical Modelling*. 25. pp. 901–922. DOI: 10.1016/s0307-904x(01)00021-x.
7. Johnston P.R., Elliott D. (2005) A sinh transformation for evaluating nearly singular boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 62(4). pp. 564–578. DOI: 10.1002/nme.1208.
8. Fu Z.J., Chen W., Qu W. (2014) Numerical investigation on three treatments for eliminating the singularities of acoustic fundamental solutions in the singular boundary method. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 56. pp. 15–26. DOI: 10.2495/BEM360021.
9. Ivanov D.Yu. (2019) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy oblasti v sluchaye dvumernykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti s granichnymi usloviyami vtorogo i tret'yego roda [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of domain in the case of two-dimensional problems of non-stationary heat conduction with boundary conditions of the second and third kind]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 5–25. DOI 10.17223/19988621/57/1.
10. Ivanov D.Yu. (2020) Utochneniye kollokatsionnogo metoda granichnykh elementov vblizi granitsy dvumernoy oblasti s pomoshch'yu poluanaliticheskoy approksimatsii teplovogo potentsiala dvoynogo sloya [A refinement of the boundary element collocation method near the boundary of a two-dimensional domain using semianalytic approximation of the double layer heat potential]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 30–52. DOI: 10.17223/19988621/65/3.
11. Krutitskii P.A., Reznichenko I.O., Kolybasova V.V. (2020) Quadrature formula for the direct value of the normal derivative of the single layer potential. *Differential Equations*. 56(9). pp. 1237–1255. DOI: 10.1134/s001226612009013x.

12. Bakhshaliyeva M.N. (2020) Kvadrurnaya formula dlya proizvodnoy logarifmicheskikh potentsialov [A quadrature formula for the derivative of logarithmic potentials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 5–22. DOI: 10.17223/19988621/68/1.
13. Khalilov E.H. (2014) Cubic formula for the normal derivative of a double layer acoustic potential. *Transactions of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences*. 34(1). pp. 73–82. http://imm.az/journals/AMEA_xeberleri/cild34_N1_2014/meqaleler/73-82.pdf.
14. Ivanov D.Yu. (2015) Ustoychivaya razreshimost' v prostranstvakh differentsiruyemykh funktsiy nekotorykh dvumernykh integral'nykh uravneniy teploprovodnosti s operatorno-polugruppovym yadrom [Stable solvability in spaces of differentiable functions of some two-dimensional integral equations of heat conduction with an operator-semigroup kernel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 38. pp. 33–45. DOI: 10.17223/19988621/38/4.
15. Smirnov V.I. (1981) *Kurs vysshey matematiki* [A course of higher mathematics]. Vol. 4. Part II. Moscow: Nauka.
16. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. (2008) *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy.
17. Ivanov D.Y. (2010) Solution of two-dimensional boundary-value problems corresponding to initial-boundary value problems of diffusion on a right cylinder. *Differential Equations*. 46(8). pp. 1104–1113. DOI: 10.1134/S0012266110080045.
18. Ivanov D.Yu. (2019) Resheniye krayevykh zadach dlya dvumernogo ellipticheskogo differentsial'no-operatornogo uravneniya v abstraktnom gil'bertovom prostranstve s pomoshch'yu metoda granichnykh integral'nykh uravneniy [Solution of boundary problems for a two-dimensional elliptic operator-differential equation in an abstract Hilbert space using the method of boundary integral equations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 60. pp. 11–31. DOI: 10.17223/19988621/60/2.
19. Ivanov D.Yu. (2017) O reshenii ploskikh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti kollokatsionnym metodom granichnykh elementov [On the solution of plane problems of non-stationary heat conduction by the boundary element collocation method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 50. pp. 9–29. DOI: 10.17223/19988621/50/2.
20. Fikhtengol'ts G.M. (2001) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 2. Moscow: Fizmatlit.

Сведения об авторе:

Иванов Дмитрий Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Академии базовой подготовки Российского университета транспорта, Москва, Россия. E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Information about the author:

Ivanov Dmitry Yu. (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 08.09.2021; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 08.09.2021; accepted for publication 01.06.2023