ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Математика и механика № 83
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.983.23 MSC: 46B
doi: 10.17223/19988621/83/5

Об ограниченности интегрального оператора свертки в паре классических лебеговых пространств L_p, L_r

Евгений Александрович Павлов[1], Александр Иванович Фурменко[2]

[1] Крымский инженерно-педагогический университет, Симферополь, Россия, pavlov-oe@bk.ru
[2] Военно-воздушная академия им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Россия, furmenko@mail.ru

Аннотация. В терминах ядра интегрального оператора свертки получен конструктивный критерий его ограниченности в паре классических лебеговых пространств L_p и L_r. Показано, что для того, чтобы интегральный оператор свертки ограниченно действовал из L_p в $L_{r,p}$, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(t)$ оператора принадлежало пространству Марцинкевича $M_{t^{1-1/q}}$.

Ключевые слова: интегральный оператор свертки, ограниченность, критерий ограниченности, лебеговы пространства

Для цитирования: Павлов Е.А., Фурменко А.И. Об ограниченности интегрального оператора свертки в паре классических лебеговых пространств L_p и L_r // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 52–58. doi: 10.17223/19988621/83/5

Original article

On the boundedness of the integral convolution operator in a pair of classical Lebesgue spaces L_p and L_r

Evgeniy A. Pavlov[1], Aleksandr I. Furmenko[2]

[1] The Crimean State Engineering Pedagogical University, Simferopol, Russian Federation, pavlov-oe@bk.ru
[2] N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation, furmenko@mail.ru

Abstract. In this paper, in terms of the kernel $K(t)$ of the integral convolution operator, a constructive criterion for its boundedness in a pair of classical Lebesgue spaces L_p and L_r is obtained. It is shown that the integral convolution operator acts boundedly from L_p into $L_{r,p}$ if and only if the kernel $K(t)$ belongs to the Marcinkiewicz space $M_{t^{1-1/q}}$.

Keywords: integral convolution operator, boundedness, boundedness criterion, Lebesgue spaces

For citation: Pavlov, E.A., Furmenko, A.I. (2023) On the boundedness of the integral convolution operator in a pair of classical Lebesgue spaces L_p and L_r. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 52–58. doi: 10.17223/19988621/83/5

Введение

Первые интегральные выражения, представляющие в современном понимании свертку двух функций, встречаются уже в трудах С. Пуассона, в частности в уравнении теплопроводности. Аналогичные интегральные выражения содержатся в работах П. Дюбуа-Реймонда.

Исследователями, начавшими изучение интегральных операторов свертки, были У. Юнг, Д. Гильберт, А.Н. Колмогоров, Г. Харди, Дж. Литтльвуд и ряд других математиков. В дальнейшем свойства непрерывности, регулярности и компактности операторов свертки и операторов типа свертки изучались в работах Л. Хермандера, А. Бенедика, Р. Пансона, С. Беннета, Р. Ханта, С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина, Е.М. Семенова, О' Нейла, А. Блозинского, В.Б. Короткова и др.

В монографии [1] П. Халмошем была поставлена проблема отыскания конструктивного критерия ограниченности интегрального оператора в паре лебеговых пространств L_p и L_r, хотя и выражалось сомнение, что такой критерий вообще существует. До последнего времени подобный критерий для произвольного интегрального оператора не получен.

Обширный материал, посвященный интегральным операторам в парах лебеговых пространств L_p и L_r, содержится в монографиях [2–4]. Приведено множество достаточных условий для непрерывности, регулярности и компактности интегральных операторов. Следует отметить монографию [2], в которой содержится глава, посвященная интегральным операторам. Первый, по-видимому, конструктивный критерий регулярности интегрального оператора свертки в лебеговом пространстве $L_p(R_n)$ был приведен в монографии [3] (см.: [3. С. 78, теорема 2.2]). Этот результат был обобщен одним из авторов данной работы на симметричные пространства в [5].

Известно классическое неравенство, принадлежащее У. Юнгу (см.: [6. С. 176]):

Пусть $1 \le p,\ q,\ r$ и выполняется равенство

$$1 + 1/r = 1/p + 1/q. \tag{1}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\| K * x \|_{L_r} \le \| K \|_{L_q} \cdot \| x \|_{L_p} . \tag{2}$$

Неравенство (2) было доказано для функций, определенных, в частности, на $(-\infty, +\infty)$. Оно остается справедливым и для функций, определенных на $(0, +\infty)$.

Это неравенство обобщалось, уточнялось и усиливалось в работах многих авторов (см.: [7–10] и др.). Если зафиксировать множитель $K(t)$, то с точки зрения функционального анализа оно означает, что интегральный оператор свертки с ядром $K(t)$, принадлежащем пространству L_q, ограниченно действует из L_p в L_r.

С.Г. Крейном, Ю.И. Петуниным и Е.М. Семеновым (см.: [7. С. 202, теорема 6.17]) была доказана

Теорема 1. Пусть $1 \le p,\ q,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1>0$, число r определяется из равенства

$$1/r = 1/p + 1/q - 1. \tag{3}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\| x{*}y \|_{L_{r,p}} \le C \| y \|_{M_{t^{1-1/q}}} \cdot \| x \|_{L_p} . \tag{4}$$

Учитывая вложения $L_{r,p} \subset L_r$, $L_q \subset M_{t^{1-1/q}}$, неравенство (4) С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина и Е.М. Семенова (см.: [7]) с точки зрения функционального анализа является усилением неравенства У. Юнга.

Теорема 2. Пусть $1 \le p,\ q,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1>0$. Число r определяется из равенства $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Тогда если ядро $K \in M_{t^{1-1/q}}$, то интегральный оператор свертки с ядром K ограниченно действует из L_p в $L_{r,p}$.

В данной статье получено обращение теоремы 2. Получен конструктивный критерий ограниченности интегрального оператора свертки из L_p в L_r в терминах ядра $K(t)$.

1. Предварительные сведения

Определение 1. Пусть $\mathrm{S}(0,+\infty)$ – пространство всех измеримых по Лебегу функций, определенных на полуоси $(0,+\infty)$ и почти всюду конечных. Функцией распределения для неотрицательной функции $x(t)$ называется функция, определенная равенством

$$\eta_x(\tau) = \operatorname{mes}\{t : x(t) > \tau\},$$

где $\tau > 0$.

Определение 2. Две неотрицательные функции $x(t)$ и $y(t)$ называются равноизмеримыми, если

$$\eta_x(\tau) = \eta_y(\tau), \quad \forall \tau > 0 .$$

Рассматриваются только такие функции $x(t)$ и $y(t)$, для которых

$$\eta_x(\tau) < \infty, \quad \forall \tau \in (0,\infty) ,$$

$$\eta_y(\tau) < \infty, \quad \forall \tau \in (0,+\infty) .$$

Определение 3. Перестановкой для неотрицательной функции $x(t)$ называется функция, определенная равенством

$$x^*(t) = \inf\{\tau : \eta_x(\tau) < t\} .$$

Определение 4. Функциональное банахово пространство на $(0,+\infty)$ с мерой Лебега называется симметричным, или перестановочно-инвариантным (см.: [7]), если:

1. Из того что $y(t) \in E$ и $|x| \le |y|$, почти всюду следует, что $x(t) \in E$ и $\| x \|_E \le \| y \|_E$.

2. Из того, что $y(t) \in E$ и $|x(t)|$ равноизмерима с $|y(t)|$, следует, что $x(t) \in E$ и $\| x \|_E = \| y \|_E$.

Определение 5. Фундаментальной функцией симметричного пространства E (см.: [11, 12]) называется функция, определенная равенством

$$\varphi_E(t) = \| \chi_e \|_E \text{, где } mes\, e = t .$$

Определение 6. Пространством Лоренца Λ_φ на $(0, +\infty)$ называется множество функций, определенных на $(0, +\infty)$, измеримых по Лебегу, для которых конечна норма (см.: [10, 11, 13])

$$\| x \|_{\Lambda_\varphi} = \int_0^\infty x^*(t)\, d\varphi(t), \tag{5}$$

где $\varphi(t)$ – вогнутая (квазивогнутая) неотрицательная функция на $(0, +\infty)$.

Определение 7. Пространством Марцинкевича M_ψ на $(0, +\infty)$ называется множество функций, определенных на $(0, +\infty)$, измеримых по Лебегу, для которых конечна норма (см.: [10, 11, 14])

$$\| x \|_{M_\psi} = \sup_{0<h<\infty} \frac{1}{\psi(\mathrm{h})} \int_0^h x^*(s)\, ds , \tag{6}$$

где ψ вогнута (квазивогнута) на $(0, +\infty)$.

Справедливо вложение (см.: [7])

$$\Lambda_{\varphi_E} \subset E \subset M_{\frac{t}{\varphi_E}} , \tag{7}$$

где $\varphi_E(t) = \| \chi_{[0,\, \mathrm{t}]} \|_E$.

2. Основные результаты

Теорема 3. Пусть ядро $K(t)$ неотрицательно на $(0, +\infty)$. Если интегральный оператор свертки ограниченно действует из из L_p в L_r, где $r > p$, тогда ядро $K(t)$ принадлежит пространству Марцинкевича $M_{t^{1-1/q}}$, где

$$1/r = 1/p + 1/q - 1.$$

Доказательство. Получаем

$$t\int_0 K(t-s)x^*(s)\, ds \geq x^*(t) \cdot \int_0^t K(t-s)\, ds . \tag{8}$$

Делая замену переменной $t - s = \xi$, получим неравенство

$$\int_0^t K(t-s)x^*(s)\, ds \geq \int_0^t K(\xi)\, d\xi\, x^*(t) . \tag{9}$$

Учитывая неравенство

$$\| \int_0^t K(t-s)x^*(s)\, ds \|_{L_r} \leq C \| x \|_{L_p} \tag{10}$$

и неравенство (9), получим

$$
\begin{aligned}
C\,\|x\|_{L_p} &\geq \Big\|\int_0^t K(t-s)x^*(s)\,ds\Big\|_{L_r} \geq \\
&\geq \Big\|x^*(t)\cdot\int_0^t K(\xi)\,d\xi\Big\|_{L_r} \geq \\
&\geq \Big\|x^*(t)\,\chi_{[\tau,\,2\tau]}(\mathrm{t})\int_0^t K(\xi)\,d\xi\Big\|_{L_r} \geq \\
&\geq \int_0^\tau K(\xi)\,d\xi\,\|x^*(t)\,\chi_{[\tau,\,2\tau]}(\mathrm{t})\|_{L_r}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Итак, получено неравенство

$$C\,\|x\|_{L_p} \geq \int_0^\tau K(\xi)\,d\xi\,\|x^*(t)\,\chi_{[\tau,\,2\tau]}(\mathrm{t})\|_{L_r}\ . \tag{12}$$

Полагая $x(t)=\chi_{[0,\,2\tau]}(\mathrm{t})$, получим неравенство

$$c\cdot(2\tau)^{\frac{1}{p}} \geq \int_0^\tau K(\xi)\,d\xi\cdot\tau^{\frac{1}{r}}\ . \tag{13}$$

Неравенство (13) можно записать в виде:

$$\tau^{(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\cdot\int_0^\tau K(\xi)\,d\xi \leq C\cdot 2^{\frac{1}{p}}\ , \tag{14}$$

или в виде:

$$(\tau)^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\cdot\int_0^\tau K(\xi)\,d\xi \leq C_1\ . \tag{15}$$

Обозначая $1/p\ -1/r=1-1/q$, получаем

$$\tau^{-(1-\frac{1}{q})}\cdot\int_0^\tau K^*(\xi)\,d\xi \leq C_1,\ \text{где}\ C_1 = C\cdot 2^{\frac{1}{p}}\ . \tag{16}$$

Определяя точную верхнюю грань по всем $\tau\in(0,+\infty)$, получаем включение

$$K(t)\in M_{t^{1-1/q}}$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть ядро $K(t)$ неотрицательно на полуоси $(0,+\infty)$, $p,\ q\ \geq 1$, а число r определяется из равенства $1/r=1/\ p\ +1/\ q\ \ -1$. Для того чтобы интегральный оператор свертки ограниченно действовал из L_p в L_r, где $r > p$, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(t)$ принадлежало пространству Марцинкевича $M_{t^{1-1/q}}$, где $1+1/r=1/p\ +1/q$, $1\leq r,\ p,q$.

Доказательство вытекает из теоремы 1 (см.: [7]) и теоремы 3.

Замечание. Учитывая, что $\varphi_{L_r}(t)=\varphi_{L_{r,p}}(t)=t^{\frac{1}{r}}$ и $\varphi_{L_q}(t)\leq\varphi_{M_{t^{1-1/q}}}(t)=t^{\frac{1}{q}}$, аналогично несложно доказать следующее утверждение:

Теорема 5. Пусть $p,\ q\ \geq 1,\ 1/p+1/q-1>0$. Обозначим через r число, которое определяется из равенства

$$1+1/r=1/p+1/q.$$

Тогда для того, чтобы интегральный оператор свертки с неотрицательным ядром $K(t)$ ограниченно действовал L_p в $L_{r,p}$, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(t)$ принадлежало пространству Марцинкевича $M_{t^{1-1/q}}$.

Список источников

1. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространстве L^2. М. : Наука, 1985. 158 с.
2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М. : Наука, 1977. 744 с.
3. *Коротков В.Б.* Интегральные операторы. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1983. 224 с.
4. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.Н., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций М. : Наука, 1966. 499 с.
5. *Павлов Е.А.* Об операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18, № 1. С. 189–194.
6. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. М. : Мир, 1985. Т. 2. 399 с.
7. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с.
8. *Blozinski A.P.* On a convolution theorem for $L(p, q)$ spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 255–265.
9. *Daniel V.W.* Convolution operators on Lebesgue spaces of the half-line // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. C. 479–488.
10. *O'Neil R.* Convolution operators and $L(p, q)$ spaces // Duke Math. J. 1963. V. 30. P. 129–142.
11. *Семенов Е.М.* Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций // Доклады АН СССР. 1964. Т. 156, № 6. С. 1292–1295.
12. *Павлов Е.А.* Об ограниченности операторов свертки в симметричных пространствах // Известия вузов. Математика. 1982. № 2. С. 36–40.
13. *Lorentz G.G.* Some new functional spaces // Ann. of Math. 1950. V. 51 (1). P. 37–55.
14. *Marcinkiewicz J.* Sur l'interpolation d'operations // C.R. Acad. Sci. Paris. 1939. V. 208. P. 1272–1273.

References

1. Halmos P., Sunder V. (1978) *Bounded Integral Operators on L^2 Spaces*. Berlin–New York: Springer-Verlag.
2. Kantorovich L.V., Akilov G. P. (1977) *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka.
3. Korotkov V.V. (1983) *Integral'nyye operatory* [Integral operators]. Novosibirsk: Nauka.
4. Krasnosel'skiy M.A., Zabreyko P.P., Pustyl'nik E.N., Sobolevskiy, P.E. (1966) *Integral'nyye operatory v prostranstvakh summiruyemykh funktsiy* [Integral operators in spaces of summable functions]. Moscow: Nauka.
5. Pavlov E.A. (1977) Translation invariant operators in symmetric spaces. *Siberian Mathematical Journal*. 18(1). pp. 138–142.
6. Edwards R.E. (1982) *Fourier Series. A Modern Introduction*. Vol. 2. Berlin: Springer-Verlag.
7. Kreyn S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. (1978) *Interpolyatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of linear operators]. Moscow: Nauka.
8. Blozinski A.P. (1972) On a convolution theorem for $L(p, q)$ spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 164(2). pp. 255–265.

9. Daniel V.W. (1972) Convolution operators on Lebesgue spaces of the half-line. *Transactions of the American Mathematical Society*. 164(2). pp. 479–488.
10. O'Neil R. (1963) Convolution operators and *L*(*p*, *q*) spaces. *Duke Mathematical Journal.* 30(1). pp. 129–142.
11. Semenov E.M. (1964) Teoremy vlozheniya dlya banakhovykh prostranstv izmerimykh funktsiy [Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*.156(6). pp. 1292–1295.
12. Pavlov E.A. (1982) On the boundedness of convolution operators in symmetric spaces. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 2. pp. 47–52.
13. Lorentz G.G. (1950) Some new functional spaces. *Annals of Mathematics*. 51(1). pp. 37–55.
14. Marcinkiewicz J. (1939) Sur l'interpolation d'opérations. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris*. 208. pp. 1272–1273.

***Сведения об авторах*:**
Павлов Евгений Александрович – доктор физико-математических наук, профессор Крымского инженерно-педагогического университета, Симферополь, Россия. E-mail: pavlov-oe@bk.ru
Фурменко Александр Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент Военно-воздушноой академии им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Россия. E-mail: furmenko@mail.ru

***Information about the authors*:**
Pavlov Evgeniy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Department of Mathematics, The Crimean State Engineering Pedagogical University, Simferopol, Russian Federation). E-mail: pavlov-oe@bk.ru
Furmenko Aleksandr I. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics, N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation). E-mail: furmenko@mail.ru

Статья поступила в редакцию 03.12.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 03.12.2022; accepted for publication 01.06.2023