

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 539.375

doi: 10.17223/19988621/83/6

**К нахождению предела упругости адгезионного слоя
при его нормальном разрыве****Виктория Эдуардовна Богачева¹, Вадим Вадимович Глаголев²,
Леонид Вадимович Глаголев³, Алексей Александрович Маркин⁴**^{1, 2, 4} *Тульский государственный университет, Тула, Россия*³ *АО КБП им. академика А.Г. Шипунова, Тула, Россия*¹ *v.boga4eva2014@yandex.ru*² *vadim@tsu.tula.ru*³ *len4ic92@gmail.com*⁴ *markin-nikram@yandex.ru*

Аннотация. Рассмотрена задача нахождения предела упругого деформирования предельно тонкого адгезионного слоя при нормальном разрыве. Наряду с напряжением отрыва учитывается наличие отличной от нуля компоненты тензора напряжений вдоль оси слоя. Показано, что напряженное состояние в слое не зависит от его толщины и определяется типом плоской задачи. При плоской деформации напряжение отрыва значительно превышает аналогичное напряжение плоского напряженного состояния.

Ключевые слова: упругость, критерий Треска–Сен-Венана, предельно тонкий слой, нормальный разрыв

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00003, <https://rscf.ru/project/22-71-00003/> в Тульском государственном университете.

Для цитирования: Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. К нахождению предела упругости адгезионного слоя при его нормальном разрыве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6

On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading

Viktoriya E. Bogacheva¹, Vadim V. Glagolev²,
Leonid V. Glagolev³, Aleksey A. Markin⁴

^{1, 2, 4} Tula State University, Tula, Russian Federation

³ JSC "KBP", Tula, Russian Federation

¹ v.boga4eva2014@yandex.ru

² vadim@tsu.tula.ru

³ len4ic92@gmail.com

⁴ markin-nikram@yandex.ru

Abstract. In this paper, the problem of determining the limit of elastic strain of an extremely thin adhesive layer in the opening mode of loading (mode I) is considered. The presence of a nonzero component of the stress tensor along the layer axis is taken into account. The Tresca – Saint-Venant criterion is used as a condition for the transition to a plastic strain state. On the basis of the general variational problem formulation with account for restrictions on the displacement field, the problem is formulated in a differential form. A simplified problem formulation is solved analytically. According to the solution, the stress state in the layer does not depend on its thickness and is specified by the plane problem type. In the plane strain state, the cleavage stress significantly exceeds that in the plane stress state. In this case, Poisson's ratio of the adhesive significantly affects the ratio of cleavage stresses. For a certain value of Poisson's ratio, the Irwin empirical correction is obtained. It is shown that for the transition to a plastic state in the case of plane strain, larger external load is required in contrast to the plane stress state. Due to the finiteness of the stress state in the adhesive layer, as the relative thickness of the layer tends to zero, the plasticity occurs in the layer at an arbitrary small external load.

Keywords: elasticity, Tresca–Saint-Venant criterion, extremely thin layer, opening mode of loading

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-71-00003), <https://rscf.ru/project/22-71-00003/> at Tula State University.

For citation: Bogacheva, V.E., Glagolev, V.V., Glagolev, L.V., Markin, A.A. (2023) On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6

Введение

Исследование критических состояний адгезионных слоев композита, как правило, использует модель квазихрупкого разрушения [1–3]. Адгезив, сопрягающий несущие слои композита, рассматривается в виде слоя нулевой толщины, вдоль которого предполагается развитие процесса разрушения. В этом случае для определения состояния предразрушения используют либо когезионные модели [4–6], либо модели с сингулярным распределением напряжений [7–10]. В случае сингулярных решений механические свойства адгезивов не рассматриваются, а для

когезионных моделей постулируются законы взаимодействия когезионных сил [5, 11, 12]. В случае нормального разрыва наиболее известной является модель Леонова–Панасюка–Дагдейла [13, 14], в рамках которой на напряжения отрыва накладывается ограничение в виде предела текучести. С формальной точки зрения для плоского деформированного и плоского напряженного состояний данное ограничение приводит практически к одному результату. Однако экспериментальное сравнение длин зон пластичности показывает их существенное различие [15]. Для объяснения данного факта Ирвином [16] была введена формальная поправка на величину предела текучести. При плоской деформации предел текучести увеличивается в $\sqrt{3}$ раз по сравнению с плоским напряженным состоянием. Однако причина этого не указывается.

В данной работе возможный переход в состояние пластичности при нормальном разрыве предлагается рассматривать в рамках критерия Треска–Сен-Венана, при этом учитывать все диагональные компоненты тензора напряжений адгезионного слоя. Для предельно тонких, но конечных адгезионных слоев определены компоненты напряжений. С учетом реальных механических свойств [17] найдены отношения напряжений отрыва при достижении предела упругости в различных адгезионных слоях.

Постановка задачи

Рассматривается двухконсольная балка (ДКБ-образец) длиной $\ell + a$, состоящая из трех тел. На рис. 1 консоли 1 и 2 с одинаковыми геометрическими и механическими свойствами сопряжены адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 по длине ℓ . ДКБ-образец жестко закреплен от перемещений по правому торцу, а по левому торцу действует симметричная распределенная нагрузка P .

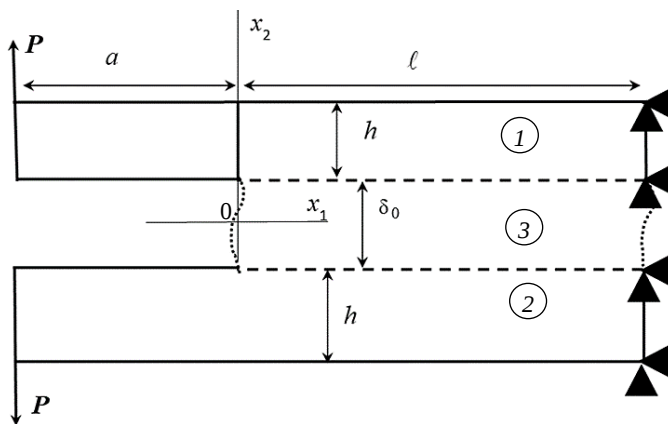


Рис. 1. Схема нагружения слоистого композита
Fig. 1. Schematic diagram of the layered composite loading

Предполагаем материал консолей упругим, а материал слоя упругопластичским. Для напряженно-деформированного состояния композита необходимо определить внешнюю нагрузку, соответствующую переходу материала адгезива в состояние пластичности.

Равновесие тел 1 и 2 согласно работам [18–20] запишем в вариационной форме:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \epsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ u_1 dx_1 +$$

$$+ 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta u} dl, \quad (1)$$

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \epsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- u_1 dx_1 +$$

$$+ 0.5 \delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = \int_{L_2} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta u} dl, \quad (2)$$

где S_1, S_2 – площади тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор средних напряжений слоя; $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ – тензор средних деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\epsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad \bar{\epsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad (3)$$

$$\bar{\epsilon}_{21}(x_1) = \bar{\epsilon}_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right), \quad (4)$$

где u_i^+, u_i^- – компоненты векторов перемещений границ слоя; знаки $+, -$ определяют верхнюю и нижнюю границы слоя; $i = 1, 2$; L_i – граница приложения внешней нагрузки.

Проекции поля перемещений в задаче удовлетворяют условиям симметрии: $u_1^1(x_1, x_2) = u_1^1(x_1, x_2)$, $u_2^1(x_1, x_2) = -u_2^2(x_1, x_2)$, где верхний индекс определяет номер консоли; $u_i^1(x_1, x_2) \Big|_{x_2=\delta_0/2} = u_i^+(x_1)$; $u_i^2(x_1, x_2) \Big|_{x_2=-\delta_0/2} = u_i^-(x_1)$. В адгезионном слое для рассматриваемого нагружения имеет место равенство нулю средних касательных напряжений: $\bar{\sigma}_{12} = 0$. С учетом условий симметрии связанная по полю граничных перемещений слоя система уравнений (1) и (2) сводится к одному уравнению для консоли 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \epsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta u} dl. \quad (5)$$

Определяющие соотношения консолей и слоя принимаем в форме закона Гука:

$$\sigma_{jk} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left(\epsilon_{jk} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \epsilon \delta_{jk} \right), \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_{jk} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\epsilon}_{jk} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\epsilon} \delta_{jk} \right), \quad (7)$$

где E_1, E_3, ν_1, ν_3 – соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона консоли и слоя; $\epsilon = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ – объемная деформация; $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22} + \bar{\epsilon}_{33}$ – объемная деформация слоя; δ_{jk} – символ Кронекера; $j, k = 1, 2, 3$.

Переход в состояние пластического деформирования адгезионного слоя определяем в рамках критерия Треска–Сен-Венана [21, 22]. В силу антисимметрии касательных компонент тензора напряжений для данного вида нагружения тензор средних напряжений слоя будет иметь диагональный вид. Исходя из решения упругой задачи, для состояния плоской деформации находим минимальное главное напряжение $\bar{\sigma}_m$. Если $\bar{\sigma}_{33} \geq \bar{\sigma}_{11}$ то $\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_{11}$. В случае $\bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{33}$ имеем $\bar{\sigma}_m = \bar{\sigma}_{33}$. В силу того, что максимальным главным является напряжение $\bar{\sigma}_{22}$, условие текучести в состоянии плоской деформации запишем в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_m = 2\tau_0, \quad (8)$$

где τ_0 – предел текучести. Для плоского напряженного состояния в силу $\bar{\sigma}_{22} > \bar{\sigma}_{11} > \bar{\sigma}_{33} = 0$ имеем

$$\bar{\sigma}_{22} = 2\tau_0. \quad (9)$$

Поле перемещений в теле 1 определяем согласно кинематике Миндлина [23]:

$$u_1^+(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (10)$$

$$u_2^+(x_1, x_2) = u_2^+(x_1). \quad (11)$$

По распределению (10), (11) находим деформации

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad (12)$$

$$\varepsilon_{21}(x_1, x_2) = \varepsilon_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (13)$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = 0. \quad (14)$$

Из (5), (12), (13) получаем две системы дифференциальных уравнений. Для участка $x_1 \in [-a; 0]$ система имеет вид:

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0, \quad (15)$$

а на участке $x_1 \in (0; \ell]$ система преобразуется к форме

$$\frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, \quad \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0, \quad \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}, \quad (16)$$

с условиями сопряжения

$$u_1^+|_{x_1=0} = u_1^+|_{x_1=+0}, \quad u_2^+|_{x_1=0} = u_2^+|_{x_1=+0}, \quad \varphi^+|_{x=0} = \varphi^+|_{x=+0}, \quad (17)$$

$$M_{11}|_{x_1=0} = M_{11}|_{x_1=+0}, \quad Q_{12}|_{x_1=0} = Q_{12}|_{x_1=+0}, \quad Q_{11}|_{x_1=0} = (Q_{11} + 0.5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0}, \quad (18)$$

граничными условиями на левом торце пластины

$$Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad (19)$$

и граничными условиями на правом торце пластины

$$u_1^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad \varphi|_{x_1=\ell} = 0, \quad u_2^+|_{x_1=\ell} = 0, \quad (20)$$

где $Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2$; $Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2$; $M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11}(x_2 - \delta_0/2) dx_2$; $Q_2 = Ph$.

С учетом (12)–(14) соотношения (6) запишем в виде:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad (21)$$

$$\sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (22)$$

где $L = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$, $D = \frac{E_1(1-\nu_1)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$ для плоского деформированного состояния; $D = \frac{E_1}{(1-\nu_1^2)}$ для плоского напряженного состояния.

Связь напряженного состояния в адгезионном слое с его граничным перемещением на участке сопряжения с пластиной получим из (7) и (3):

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \frac{du_1^+}{dx_1} + D_2 u_2^+, \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = C_1 u_2^+ + C_2 \frac{du_1^+}{dx_1}, \quad (24)$$

где $D_1 = \frac{E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$, $D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$, $C_1 = \frac{2E_3(1-\nu_3)}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)\delta_0}$, $C_2 = \frac{E_3\nu_3}{(1+\nu_3)(1-2\nu_3)}$, $\bar{\sigma}_{33} = \nu_3(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22})$ для плоской деформации; $D_1 = \frac{E_3}{(1-\nu_3^2)}$,

$D_2 = \frac{2E_3\nu_3}{(1-\nu_3^2)\delta_0}$, $C_1 = \frac{2E_3}{(1-\nu_3^2)\delta_0}$, $C_2 = \frac{E_3\nu_3}{(1-\nu_3^2)}$, $\bar{\epsilon}_{33} = -\frac{\nu_3}{1-\nu_3}(\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22})$ для плоского напряженного состояния.

С учетом (21), (22) выражения обобщенных сил и моментов принимают вид:

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2) \right) \right) dx_2 = D \left(h \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^2}{2} \varphi' \right), \quad (25)$$

$$Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} L \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right) dx_2 = Lh \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi \right), \quad (26)$$

$$M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \left(D \left(\frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi'(x_2 - \delta_0/2) \right) \right) (x_2 - \delta_0/2) dx_2 = D \left(\frac{h^2}{2} \frac{du_1^+}{dx_1} - \frac{h^3}{3} \varphi' \right). \quad (27)$$

Задача (15)–(27) с учетом (8) или (9) становится замкнутой относительно четырех неизвестных функций: $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $\varphi(x_1)$, Q_2 .

Решение задачи

Согласно данным работы [17] рассмотрим образец со следующими геометрическими и механическими характеристиками консолей: $a = 0.055$ м, $h = 0.0127$ м, $b = 0.025$ м, $E_1 = 2.04 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_1 = 0.33$, где b – толщина образца в направлении

нормали к рассматриваемому сечению. Механические свойства адгезивов представим в таблице.

Механические свойства адгезивов

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
E_3 (ГПа)	4.9	1.85	0.49
τ_0 (МПа)	25.1	14.6	5.2
ν_3	0.35	0.33	0.3

Проинтегрируем систему (15) с учетом граничных условий (19). Из условий сопряжения решений (18) в точке $x_1 = 0$ получим граничные условия для системы (16):

$$Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2, \quad M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2 a, \quad (Q_{11} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{11})|_{x_1=0} = 0. \quad (28)$$

На участке $(0; \ell]$, согласно работе [20], общее решение (16) запишем в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} u_1^+ &= \left(\frac{Lh\mu_1}{C_2} - \frac{Lh(\mu_1^2 - m_2)}{C_2 m_1 \mu_1} - \frac{C_1}{\mu_1 C_2} \right) \tilde{C}_2 e^{\mu_1 x_1} - \left(\frac{Lh\mu_1}{C_2} + \frac{Lh(\mu_1^2 - m_2)}{C_2 m_1 \mu_2} - \frac{C_1}{\mu_1 C_2} \right) \tilde{C}_3 e^{-\mu_1 x_1} + \\ &+ \left(\frac{Lh\mu_3}{C_2} - \frac{Lh(\mu_3^2 - m_2)}{C_2 m_1 \mu_3} - \frac{C_1}{\mu_3 C_2} \right) \tilde{C}_4 e^{\mu_3 x_1} - \\ &- \left(\frac{Lh\mu_3}{C_2} + \frac{Lh(\mu_3^2 - m_2)}{C_2 m_1 \mu_4} - \frac{C_1}{\mu_3 C_2} \right) \tilde{C}_5 e^{-\mu_3 x_1} + \frac{C_1}{C_2} \frac{\tilde{C}_1 x_1}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2} + \tilde{C}_6; \\ u_2^+ &= \tilde{C}_2 e^{\mu_1 x_1} + \tilde{C}_3 e^{-\mu_1 x_1} + \tilde{C}_4 e^{\mu_3 x_1} + \tilde{C}_5 e^{-\mu_3 x_1} - \frac{\tilde{C}_1}{C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2}; \\ \varphi &= \tilde{C}_2 \frac{(\mu_1^2 - m_2)}{m_1 \mu_1} e^{\mu_1 x_1} + \tilde{C}_3 \frac{(\mu_1^2 - m_2)}{m_1 \mu_2} e^{-\mu_1 x_1} + \tilde{C}_4 \frac{(\mu_3^2 - m_2)}{m_1 \mu_3} e^{\mu_3 x_1} + \tilde{C}_5 \frac{(\mu_3^2 - m_2)}{m_1 \mu_4} e^{-\mu_3 x_1}. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\text{где} \quad m_1 = \frac{\left(LS_2 + \frac{Dh}{2} \right)}{LS_2}; \quad m_2 = \frac{(C_1 S_2 - 0.5\delta_0 D_2)}{LhS_2}; \quad m_3 = -\frac{3\delta_0 D_2 Dh + 12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)};$$

$$m_4 = \frac{12LC_2 S_2}{Dh(4hC_2 S_2 - 3Dh^2)}; \quad S_2 = \frac{Dh + 0.5\delta_0 D_1}{C_2}; \quad d^2 = (m_2 + m_1 m_3 + m_4)^2 - 4m_2 m_4;$$

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 + d}{2}}; \quad \mu_2 = -\sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 + d}{2}}; \quad \mu_3 = \sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 - d}{2}};$$

$$\mu_4 = -\sqrt{\frac{m_2 + m_1 m_3 + m_4 - d}{2}}.$$

В решении (29) имеем 6 постоянных интегрирования $\tilde{C}_{1,...,6}$. Условия (28), (20) определяют 6 уравнений для их нахождения.

Из граничных условий (20) в решении (29) для $\ell/\delta_0 \rightarrow \infty$ положим $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_4 = \tilde{C}_6 = 0$.

При этом третье условие сопряжения (28) выполняется практически тождественно и не влияет на решение упругой задачи [24]. В этом случае две постоянные интегрирования $\tilde{C}_3, \tilde{C}_5$ в (29) определяют поле перемещений консоли (10), (11) и, согласно (23), (24), напряженное состояние адгезионного слоя.

Таким образом, для нахождения постоянных интегрирования $\tilde{C}_3, \tilde{C}_5$ и силы Q_2 , обеспечивающей переход адгезива в состояние пластического деформирования, принимаем два первых условия (28) и условие (8) для состояния плоской деформации:

$$\begin{cases} Q_{12}|_{x_1=+0} + Q_2 = 0; \\ M_{11}|_{x_1=+0} + Q_2 a = 0; \\ \bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_m|_{x_1=+0} = 2\tau_0. \end{cases}$$

Для плоского напряженного состояния к двум первым условиям (28) добавляется условие (9):

$$\begin{cases} Q_{12}|_{x_1=+0} + Q_2 = 0; \\ M_{11}|_{x_1=+0} + Q_2 a = 0; \\ \bar{\sigma}_{22}|_{x_1=+0} = 2\tau_0. \end{cases}$$

На рис. 2–4 показаны значения напряжений $\bar{\sigma}_{ii}$ в торцевом сечении слоя в зависимости от его относительной толщины δ_0/h при переходе в состояние пластичности адгезивов из таблицы для рассматриваемого ДКБ-образца. В состоянии плоской деформации имеет место $\bar{\sigma}_{11} \geq \bar{\sigma}_{33}$.

Анализируя зависимости на рис. 2–4 видим, что напряженное состояние при достижении предела упругости в торцевой области не зависит от малых относительных толщин слоя. При этом напряжения отрыва при плоской деформации и плоском напряженном состоянии имеют существенные различия. Так, отношение напряжений отрыва для адгезива Sikaforce 7752 составляет 1.75, для адгезива Araldite 2015 – 1.97, для адгезива Araldite AV138 – 2.16.

Отметим, что в модели Леонова–Панасюка–Дагдейла рассматривается механизм пластического течения, при котором по берегам границы зоны пластических деформаций действуют напряжения, равные пределу текучести. Ирвин ввел поправку, согласно которой предел текучести для плоской деформации формально увеличивается в $\sqrt{3}$ (1.73) раз. При этом размер зоны пластичности для плоской деформации становится в 3 раза меньше, чем при плоском напряженном состоянии. Данная закономерность была установлена экспериментально для стали [16]. В предлагаемой модели данное отношение напряжений отрыва в момент достижения предела упругости получается из решения задачи. Причем разница определяется значением коэффициентом Пуассона адгезива. Так, при значении $\nu_3 = 0.3$ во всех рассматриваемых адгезивах с соответствующими модулями упругости из таблицы данное отношение принимает значение 1.75.

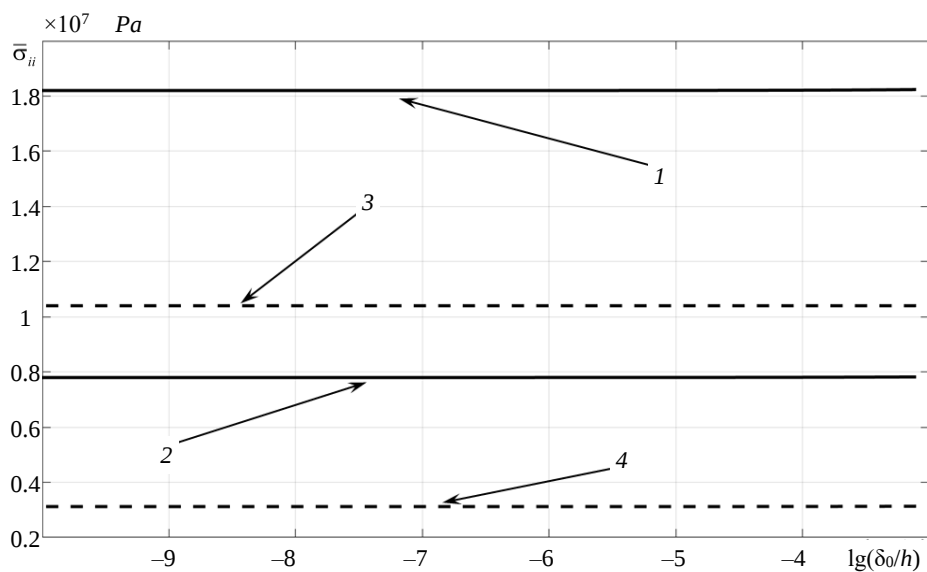


Рис. 2. Торцевые напряжения в адгезиве Sikaforce 7752. Графики 1 и 2 задают напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{33}$ для состояния плоской деформации. Графики 3 и 4 определяют напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ и $\bar{\sigma}_{11}$ в плоском напряженном состоянии

Fig. 2. Edge stresses in Sikaforce 7752 adhesive. Plots 1 and 2 define stresses $\bar{\sigma}_{22}$ and $\bar{\sigma}_{33}$ in a plane strain state. Plots 3 and 4 define stresses $\bar{\sigma}_{22}$ and $\bar{\sigma}_{11}$ in a plane stress state

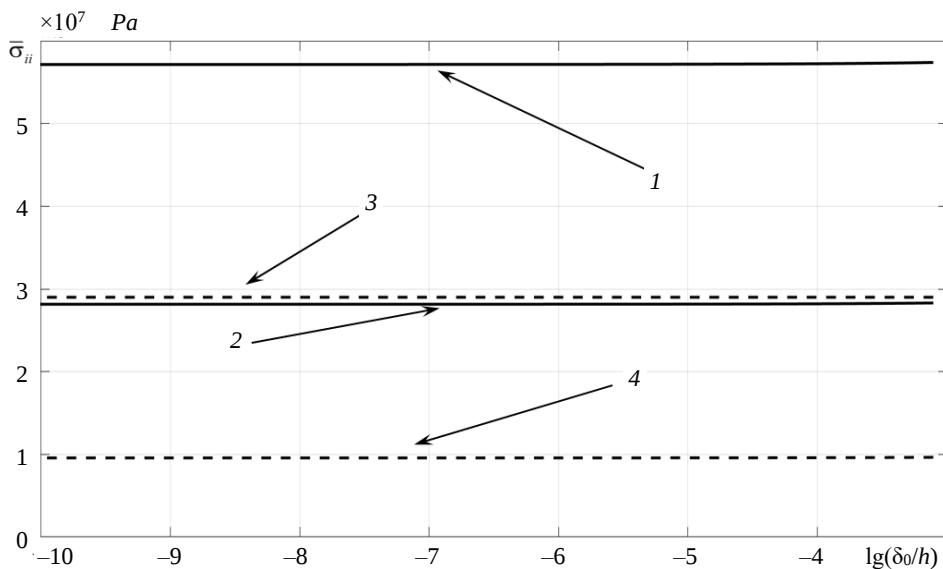


Рис. 3. Торцевые напряжения в адгезиве Araldite 1515.

Нумерация графиков аналогична рис. 2

Fig. 3. Edge stresses in Araldite 1515 adhesive. The numbering of the plots is similar to fig. 2

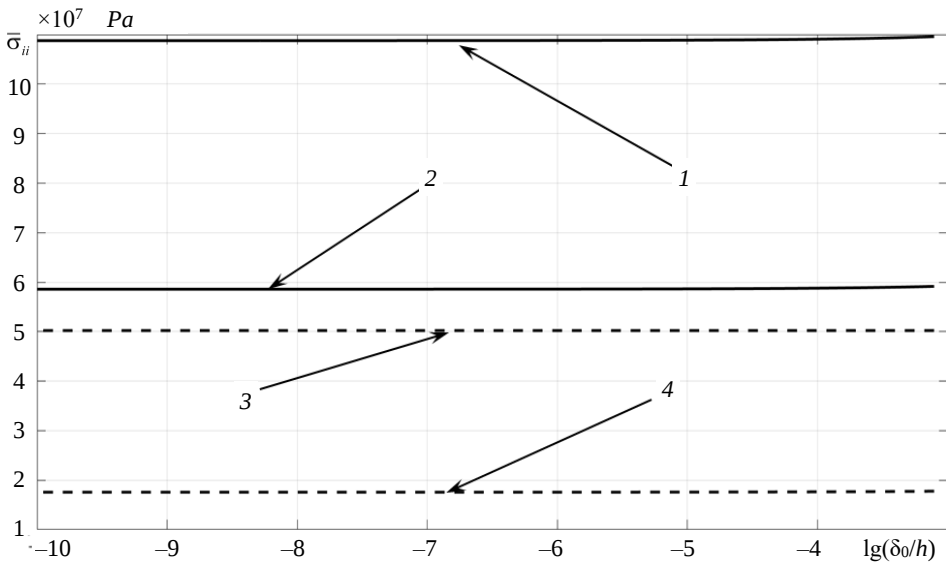


Рис. 4. Торцевые напряжения в адгезиве Araldite AV138.

Нумерация графиков аналогична рис. 2

Fig. 4. Edge stresses in Araldite AV138 adhesive. The numbering of the plots is similar to fig. 2

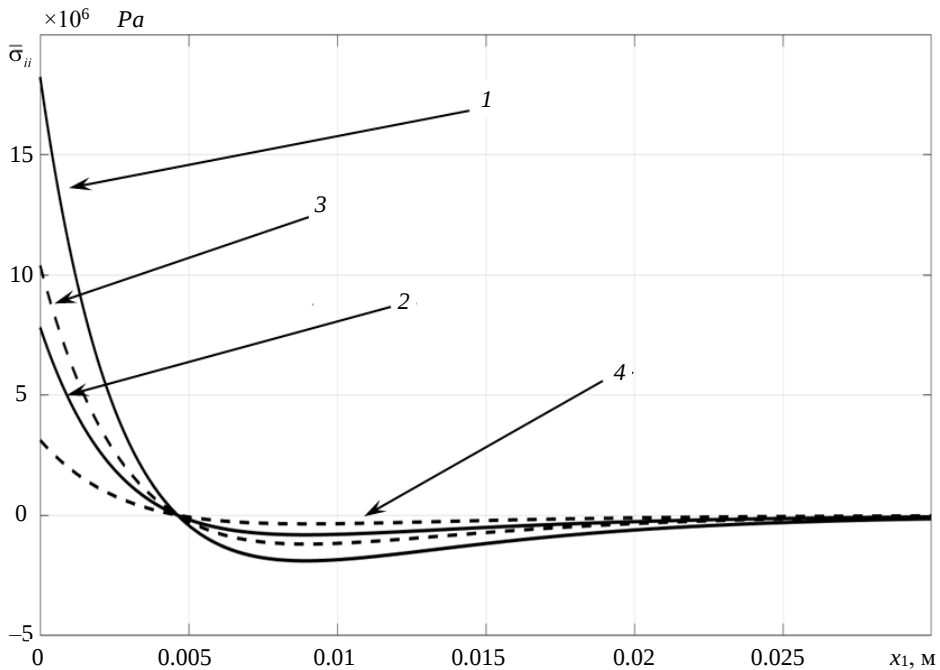


Рис. 5. Напряженное состояние адгезионного слоя Sikaforce 7752.

Нумерация графиков аналогична рис. 2

Fig. 5. Stress state of Sikaforce 7752 adhesive layer. The numbering of the plots is similar to fig. 2

Распределение напряжений в слое для адгезива Sikaforce 7752 для $\delta_0 = 10^{-5}$ м приведено на рис. 5.

При стремлении коэффициента Пуассона адгезива к нулю напряжение отрыва в адгезиве в плоском деформированном состоянии становится равным соответствующему напряжению плоского напряженного состояния при практически нулевых осевых напряжениях. Таким образом, учет коэффициента Пуассона адгезива в предельно тонких слоях имеет существенное значение в формировании напряжений отрыва для рассматриваемых плоских задач.

На рис. 6 показана зависимость значения расклинивающей силы Q_2 , соответствующей переходу в состояние пластичности адгезива, от его относительной толщины для материала Sikaforce 7752. График 1 построен для случая плоской деформации, а график 2 соответствует плоскому напряженному состоянию.

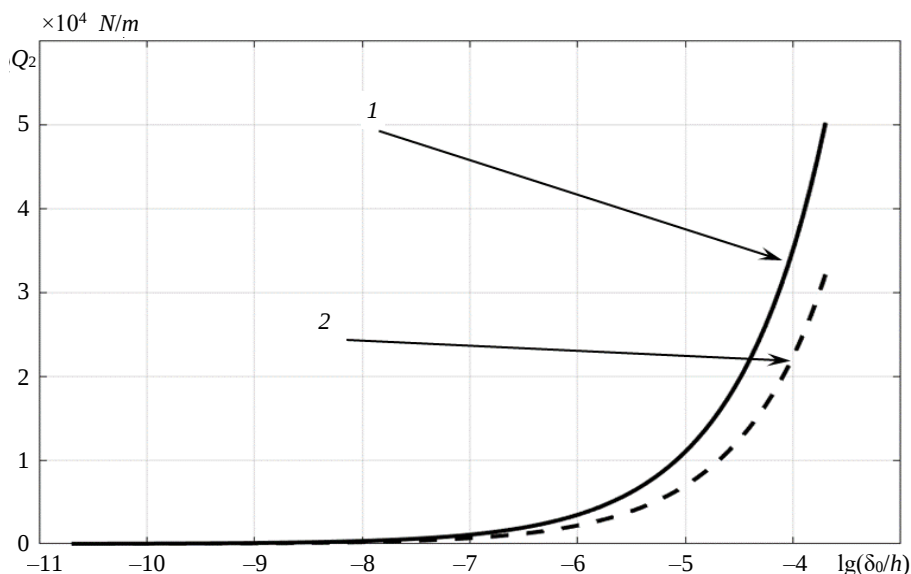


Рис. 6. Значения расклинивающей силы от толщины адгезионного слоя

Fig. 6. Wedging force as a function of adhesive layer thickness

Из представленных на рис. 6 зависимостей видно, что для перехода в состояние пластичности в случае плоской деформации требуется большее значение внешней нагрузки в отличие от плоского напряженного состояния. В силу конечности напряженного состояния в адгезионном слое как при условии (10), так и (9) при стремлении относительной толщины слоя к нулю пластичность в слое реализуется при сколь угодно малой внешней нагрузке. Для адгезивов Araldite AV138 и Araldite 2015 тенденция поведения расклинивающей силы аналогичная.

Заключение

Для адгезивов с упругопластическими свойствами, связывающих консоли ДКБ-образца, рассмотрена модель их деформирования нормальным разрывом.

Напряженное состояние рассматривалось на основе средних по толщине адгезионного слоя напряжений. Наряду с напряжениями, действующими в направлении отрыва, в слое с конечной, но малой толщиной учитываются и ортогональные им напряжения. Напряжения отрыва в момент достижения предела упругости получаются из решения задачи и существенно зависят от коэффициента Пуассона адгезива, принимая различные значения при плоском деформированном и плоском напряженном состояниях.

Список источников

1. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М. : Наука, 1983. 296 с.
2. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers // International Journal of Fracture. 1990. V. 43 (1). P. 1–18. doi: 10.1007/BF00018123
3. Irwin G.R. Crack-extension force for part-through crack in a plate // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Ser. E. Journal of Applied Mechanics. 1962. V. 29. P. 651–654. doi: 10.1115/1.3640649
4. Barenblatt G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture // Advanced in Applied Mechanics. 1962. V. 7. P. 55–129. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2
5. The special issue: Cohesive models // Engineering Fracture Mechanics. 2003. V. 70 (14). P. 1741–1987.
6. Астапов Н.С., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Модель расслоения разномодульного биматериала с трещиной // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19, № 4. С. 49–57.
7. Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening material // Journal of The Mechanics and Physics of Solids. 1968. V. 16 (1). P. 13–31 doi: 10.1016/0022-5096(68)90014-8
8. Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Engineering Failure Analysis. 2020. V. 110. Art. 104410. doi: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410
9. Andrews M.G., Massabò R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // Engineering Fracture Mechanics. 2007. V. 74 (17). P. 2700–2720. doi: 10.1016/j.engfracmech.2007.01.013
10. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М. : Наука, 1996. 288 с.
11. Stigh U., Alfredsson K.S., Andersson T., Biel A., Carlberger T., Salomonsson K. Some aspects of cohesive models and modelling with special application to strength of adhesive layers // International Journal of Fracture. 2010. V. 165. P. 149–162. doi: 10.1007/s10704-010-9458-9
12. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики : сб. ст. М. : Физматлит, 2003. С. 221–239.
13. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1960. V. 8 (2). P. 100–104. doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
14. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикладная механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
15. Irwin G.R. Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness // 7th Sagamore Ordnance Materials Research Conference. 1960. P. 63–78.
16. Irwin G.R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engineering Fracture Mechanics. 1968. V. 1 (2). P. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
17. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // Journal of Adhesion and Adhesives. 2016. V. 67. P. 103–111. doi: 10.1016/j.jadhadh.2015.12.032

18. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. V. 158. P. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
19. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Инченко О.В., Маркин А.А. Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 64. С. 63–76. doi: 10.17223/19988621/64/5
20. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. About the influence of the elastoplastic properties of the adhesive on the value of the J-integral in the DCB sample // *International Journal of Fracture*. 2021. V. 232 (1). P. 43–54. doi: 10.1007/s10704-021-00590-3
21. Tresca H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides // *Mem pres par div savants*. 1868. V. 18. P. 733–799.
22. Ишинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М. : Физматлит, 2001. 701 с.
23. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1951. V. 18. P. 31–38. doi: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29
24. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 3. С. 22–34. doi: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

References

1. Cherepanov G.P. (1983) *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of destruction of composite materials]. Moscow: Nauka.
2. Suo Z., Hutchinson J.W. (1990) Interface crack between two elastic layers. *International Journal of Fracture*. 43(1). pp. 1–18. doi: 10.1007/BF00018123
3. Irwin G.R. (1962) Crack-extension force for part-through crack in a plate. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Series E. Journal of Applied Mechanics*. 29. pp. 651–654. doi: 10.1115/1.3640649
4. Barenblatt G.I. (1962) The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advanced in Applied Mechanics*. pp. 55–129. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70121-2
5. (2003) The special issue: Cohesive models. *Engineering Fracture Mechanics*. 70(14). pp. 1741–1987.
6. Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. (2016) Model' rassloeniya raznomodul'nogo bimateriala s treshchinoy [Delamination model for a composite with a crack]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 19(4). pp. 49–57.
7. Hutchinson J.W. (1968) Singular behavior at the end of a tensile crack tip in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 16(1). pp. 13–31. doi: 10.1016/0022-5096(68)90014-8
8. Ustinov K.B., Massabò R., Lisovenko D.S. (2020) Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution. *Engineering Failure Analysis*. 110. Article 104410. doi: 10.1016/j.engfailanal.2020.104410
9. Andrews M.G., Massabò R. (2007) The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. *Engineering Fracture Mechanics*. 74(17). pp. 2700–2720. doi: 10.1016/j.engfracmech.2007.01.013
10. Chernykh K.F. (1996) *Vvedenie v fizicheski i geometricheski nelineynuyu teoriyu treshchin* [Introduction to physically and geometrically nonlinear crack theory]. Moscow: Nauka.
11. Stigh U., Alfredsson K.S., Andersson T., Biel A., Carlberger T., Salomonsson K. (2010) Some aspects of cohesive models and modelling with special application to strength of adhesive layers. *International Journal of Fracture*. 165. pp. 149–162. doi: 10.1007/s10704-010-9458-9

12. Gol'dshteyn R.V., Perel'muter M.N. (2003) *Rost treshchin po granitse soedineniya materialov* [Growth of cracks along the interface between materials]. In: Problemy mekhaniki. Sbornik statey. Moscow: FIZMATLIT. pp. 221–239.
13. Dugdale D.S. (1960) Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 8(2). pp. 100–104. doi: 10.1016/0022-5096(60)90013-2
14. Leonov M.Ya., Panasyuk V.V. (1959) Razvitie mel'chayshikh treshchin v tverdom tele [The development of tiny cracks in a solid]. *Prikladnaya mekhanika*. 5(4). pp. 391–401.
15. Irwin G.R. (1960) Plastic zone near a crack and fracture toughness. *Proceedings of the 7th Sagamore Ordnance Materials Research Conference*. pp. 63–78.
16. Irwin G.R. (1968) Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control. *Engineering Fracture Mechanics*. 1(2). pp. 241–257. doi: 10.1016/0013-7944(68)90001-5
17. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. (2016) Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints. *Journal of Adhesion and Adhesives*. 67. pp. 103–111. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032
18. Glagolev V.V., Markin A.A. (2019) Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*. 158. pp. 141–149. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002
19. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Inchenko O.V., Markin A.A. (2020) Ob odnom podkhode k otsenke prochnosti adgezionnogo sloya v sloistom kompozite [On one approach to the assessing of the adhesive layer strength in a layered composite]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 64. pp. 63–76. doi: 10.17223/19988621/64/5
20. Berto F., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2021) About the influence of the elastoplastic properties of the adhesive on the value of the J-integral in the DCB sample. *International Journal of Fracture*. 232(1). pp. 43–54. doi: 10.1007/s10704-021-00590-3
21. Tresca H. (1868) Memoire sur l'ecoulement des corps solides. *Mem pres par div savants*. 18. pp. 733–799.
22. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. (2001) *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow: FIZMATLIT.
23. Mindlin R.D. (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 18. pp. 31–38. doi: 10.1007/978-1-4613-8865-4_29
24. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2021) Napryazhennoe sostoyaniye i usloviya initsirovaniya treshchiny v adgezionnom sloe kompozita [Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 3. pp. 22–34. doi: 10.15593/perm.mech/2021.3.03

Сведения об авторах:

Богачева Виктория Эдуардовна – аспирант кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Глаголев Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: vadim@tsu.tula.ru)

Глаголев Леонид Вадимович – кандидат физико-математических наук, начальник бюро АО КБП им. академика А.Г. Шипунова, Тула, Россия. E-mail: len4ic92@gmail.com

Маркин Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: markin-nikram@yandex.ru)

Information about the authors:

Bogacheva Viktoriya E. (Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Glagolev Vadim V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Glagolev Leonid V. (Candidate of Physics and Mathematics, JSC «KBP», Tula, Russian Federation). E-mail: len4ic92@gmail.com

Markin Aleksey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: markin-nikram@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 28.07.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 28.07.2022; accepted for publication 01.06.2023