

Научная статья

УДК 539.319

doi: 10.17223/19988621/83/10

Представительный объем и эффективные термоупругие материальные параметры композиций с периодической структурой

Лидия Владимировна Ландик¹, Валерий Михайлович Пестренин²,
Ирина Владимировна Пестренина³

*1, 2, 3 Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия*

¹ LidiaLandik@gmail.com

² PestreninVM@mail.ru

³ IPestrenina@gmail.com

Аннотация. Предлагается основанный на методе «от противного» итерационный алгоритм построения представительного объема композита периодической структуры и его эффективных материальных термоупругих характеристик. Сформулированы существенные признаки представительного объема. Для конкретной периодической структуры определены представительный объем и его эффективные параметры. Показано, что фрагмент композита в объеме периодической ячейки не обладает необходимыми характерными признаками представительного объема.

Ключевые слова: композит, представительный объем, эффективные материальные характеристики, периодическая ячейка

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта № 1025.

Для цитирования: Ландик Л.В., Пестренин В.М., Пестренина И.В. Представительный объем и эффективные термоупругие материальные параметры композиций с периодической структурой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 111–126. doi: 10.17223/19988621/83/10

Original article

A representative volume element and effective thermoelastic material parameters of compositions with periodic structure

Lidia V. Landik¹, Valery M. Pestrenin², Irene V. Pestrenina³

1, 2, 3 Perm State University, Perm, Russian Federation

¹ LidiaLandik@gmail.com

² PestrelinVM@mail.ru

³ IPestrenina@gmail.com

Abstract. In this paper, an iterative algorithm for designing representative volume element (RVE) of a composite with periodic structure and its effective material thermoelastic characteristics is proposed. The features of the RVE are described. A periodic cell of the composite, which is widely and validly used to determine its effective parameters under specific boundary conditions on its surfaces, does not have all the necessary features of the RVE. Therefore, a separated from the composite sequence of cubic samples with increasing characteristic size and consisting of periodic cells is considered. According to the method of contradiction, each sample of the sequence is assumed to be an RVE. A solution to the problem of micromechanics is obtained for them. Based on this solution, the macroscopic properties of the sample are determined. The calculated macroscopic material parameters and the fulfillment of the symmetry conditions of the stiffness matrix for the next cubic sample are compared with the corresponding data for the previous sample, and the essential features of the RVE are verified. Finally, a conclusion is made about the possibility (or impossibility) of recognizing the considered sample as an RVE. The sequences of the values of calculated characteristics and the percentage deviation of the stiffness matrix from symmetry are convergent. The obtained characteristics are taken as the limiting values for the cube representing RVE. They are referred to as effective material characteristics of the composition. It is revealed that the existence of the RVE for a composite is a basis for applying effective modulus theory to the description of its stress-strain state.

Keywords: composite, representative volume element, effective material characteristics, periodicity cell

Acknowledgments: This work was partially supported by the Government of Perm Krai (project No. 1025).

For citation: Landik, L.V., Pestrelin, V.M., Pestrenina, I.V. (2023) A representative volume element and effective thermoelastic material parameters of compositions with periodic structure. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 111–126. doi: 10.17223/19988621/83/10

Введение

Композиционные материалы периодической структуры широко применяются в качестве конструкционных в современной технике. К ним, в частности, относятся материалы на основе тканевых препрегов. Определению эффективных материальных характеристик композиций с периодической структурой посвящено большое число публикаций. В работе [1] с использованием метода осреднения регулярных структур [2] предложен и далее развит в публикациях (см.: [3] и др.) метод асимптотического осреднения задачи механики деформируемого твердого тела. Метод асимптотического осреднения оказывается многоуровневым: на каждом из них появляются соответствующие уровню эффективные материальные параметры [1]. Для вычисления эффективных характеристик нулевого уровня достаточно принять во внимание два слагаемых асимптотического разложения решения. Эффективные параметры нулевого уровня метода асимптотического

разложения связывают макроскопические параметры состояния, усредненные по объему периодической ячейки. Рассматриваемым методом определяются эффективные параметры упругих [3–5], термоупругих [6–8], вязкоупругих [9–11], упругопластических [12, 13], нелинейно упругих [14] композитов с периодической структурой.

Еще одним подходом к определению эффективных материальных характеристик композитов с периодической структурой является метод прямого осреднения решения задачи микромеханики по объему периодической ячейки со специально подобранными краевыми условиями. Эффективные параметры, получаемые этим методом, также связывают осредненные по ячейке периодичности компоненты тензоров напряжений и деформаций. Подход реализуется для построения эффективных параметров волоконных, тканевых и других композитов [15–21].

Методы, разработанные для вычисления эффективных материальных характеристик композитов с периодической структурой, используются для решения аналогичных задач и для других (непериодических) композиций. С этой целью структура композита моделируется периодической средой (производится периодизация). Подход используется для композитов, армированных непрерывными волокнами [18, 22], короткими волокнами [23], для дисперсных композиций [24], тканевых композитов [25], метаматериалов [24], гибридных композитов [26, 27], для стохастически армированной среды [28, 29] и в других случаях. Построение эффективных материальных характеристик композита посредством осреднения по объему периодической ячейки предполагает, что такая ячейка является частью достаточно большого объема, находящегося в однородном напряженно деформированном состоянии.

Некоторые авторы для решения задачи об эффективных материальных характеристиках материала используют понятие представительного объема композита (representative volume element – RVE). Выбор представительного объема при исследовании эффективных материальных характеристик композита (не обязательно периодической структуры) проводится авторами достаточно произвольно, потому что отсутствуют общепринятые способы построения такого объема. Одни авторы отождествляют RVE с элементарной ячейкой периодичности, например [16], другие принимают его линейные размеры бесконечными [29].

Впервые понятие представительного объема было сформулировано в [30], в настоящее время исследователи [23, 31] придерживаются определения RVE, предложенного W.J. Drugan, J.R. Willis: «Это наименьший элемент объема материала композита, для которого обычные макроскопически однородные определяющие модели “эффективного модуля” могут быть применены» [32]. Приведенное определение наделяет представительный объем следующими признаками:

- макроскопические материальные характеристики представительного объема не зависят от заданных на его поверхностях граничных условий;
- при любом нагружении RVE его макроскопическое напряженно деформированное состояние однородно;
- RVE – минимально возможный образец для численных испытаний по определению эффективных материальных параметров композита;
- любой объем, больший RVE, имеет такие же эффективные параметры.

Изучая представительные объемы для стохастически армированных композитов, авторы [31, 32] отмечают зависимость характерных размеров RVE от свойств компонентов, их объемной доли, параметра макроскопических соотношений и др. При осреднении микроструктурных характеристик состояния на объемах, меньших RVE, макроскопические материальные параметры (по предложению Т. Канит) называются «кажущимися». Они могут существенно отличаться от эффективных.

Задача определения RVE конкретных композиций наряду с их эффективными материальными характеристиками представляется важной по следующим причинам:

- достоверные эффективные материальные характеристики определяются на образце, не меньшем, чем RVE;
- характерный размер RVE ограничивает размер сетки дискретизации при численном исследовании;
- дегомогенизация состояния композитного материала является решением задачи микромеханики о напряженно деформированном состоянии RVE;
- существование RVE для композита является критерием для применения теории эффективного модуля к анализу его напряженно деформированного состояния.

В настоящей работе на примере композита конкретной периодической структуры изучается зависимость параметров макроскопических уравнений термоупругости как от выбора периодической ячейки, так и от объема осреднения. Предлагается алгоритм итерационного процесса построения представительного объема и эффективных материальных свойств композита, а также критерии его окончания.

Постановка задачи

Рассматривается периодический композитный материал, представляющий собой эпоксидную матрицу, армированную прямыми непрерывными волокнами, параллельными оси x_3 ортонормированной декартовой системы координат. Поперечное сечение композита, перпендикулярное волокнам, представлено на рис. 1, *a*.

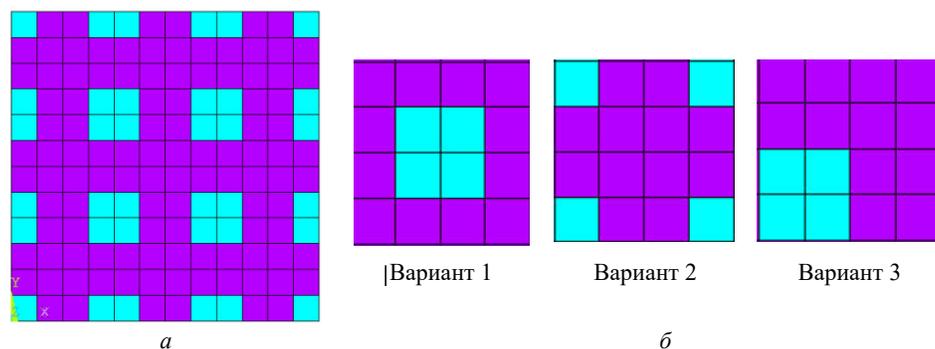


Рис. 1. Поперечное сечение композиции периодической структуры (*a*) и варианты ячейки периодичности (*б*)

Fig. 1. (a) Cross section of the periodic structure composition and (b) versions of a periodicity cell

Заметим, что для композита с периодической структурой ячейка периодически определяется неоднозначно. Любой объем материала с линейными размерами периодической ячейки может быть принят за такую ячейку. С целью оценить влияние такого выбора на приведенные свойства рассматриваемого материала выберем три кубические периодические ячейки. Их сечения, перпендикулярные волокнам, представлены на рис. 1, б. Объемное содержание волокон принимается равным 0.25. Волокна имеют квадратное сечение со стороной 0.28 мм. Элементы структуры композиции считаются изотропными, их термомеханические материальные характеристики приведены в табл. 1.

Таблица 1

Термомеханические свойства элементов структуры

Элемент структуры	E , МПа	ν	α , 1/град
Волокно	95 000	0.24	3.5e-6
Связующее	8 000	0.33	5.5e-5

Рассматриваемый материал имеет оси симметрии второго порядка (оси x_1 , x_2) и ось симметрии четвертого порядка (ось x_3). Поэтому макроскопические физические уравнения с использованием технических постоянных представляются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1}(\sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22}) - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33} &= -\alpha_1\Delta T + \varepsilon_{11}, & \gamma_{12} &= \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}, \\ \frac{1}{E_1}(\sigma_{22} - \nu_{12}\sigma_{11}) - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33} &= -\alpha_1\Delta T + \varepsilon_{22}, & \gamma_{13} &= \frac{1}{G_{13}}\sigma_{13}, \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{E_3}\sigma_{33} &= -\alpha_3\Delta T + \varepsilon_{33}, & \gamma_{23} &= \frac{1}{G_{13}}\sigma_{23}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $E_1 = E_2$ – модуль Юнга в направлениях осей x_1 , x_2 , E_3 – модуль Юнга в направлении оси x_3 , $\nu_{12} = \nu_{21}$ – коэффициент Пуассона, характеризующий деформацию в направлении оси x_2 при растяжении образца в направлении x_1 и наоборот, $\nu_{31} = \nu_{32}$ – коэффициент Пуассона, характеризующий деформацию в направлении оси x_1 или x_2 при растяжении образца в направлении x_3 ; $\nu_{13} = \nu_{23}$ – коэффициент Пуассона, характеризующий деформацию в направлении оси x_3 при растяжении образца в направлении x_1 или x_2 ; $\alpha_1 = \alpha_2$, α_3 – коэффициенты линейной температурной деформации. Количество независимых упругих констант в равенствах (1) равно шести, так как они подчиняются условию

$$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}. \quad (2)$$

Задача состоит в определении представительного объема и макроскопических термоупругих свойств композиционного материала. При этом под приведенными

(эффективными) свойствами композита понимаются константы, связывающие в форме физических уравнений термоупругости (1) средние по представительному объему значения деформаций, напряжений и приращения температуры.

Численный метод построения макроскопических характеристик

Итерационная процедура построения представительного объема композиции однонаправленных статистически однородных волокон и матрицы и ее эффективных материальных характеристик предложена в статье [23]. Для случая композита периодической структуры представительный объем композиции предлагается строить следующим образом. Задается последовательность кубических образцов, выделенных из композита, состоящих из ячеек периодичности. Количество периодических ячеек в таких кубах возрастает по кубическому закону: 1, 8, 27, 64... Размер ребра такого куба равен ma , где a – длина ребра ячейки периодичности. Начиная с первого образца данной последовательности предполагается (метод от противного), что он является представительным объемом. Строятся «кажущиеся» материальные характеристики в соответствии с ниже описанной методикой и проверяются условия симметричности матрицы жесткости (2). Результаты вычислений макроскопических материальных параметров и выполнение условий (2) для очередного кубического образца сравниваются с соответствующими данными для предыдущего образца. На основании этого сравнения делается вывод о возможности (или невозможности) признания рассматриваемого образца в качестве представительного объема. Последовательности значений вычисленных характеристик и значения процента отклонения матрицы жесткости от симметричности оказываются сходящимися. Представительным объемом становится куб, для которого полученные значения можно принять за предельные. Они и принимаются за эффективные материальные характеристики композиции.

Численные эксперименты по определению макроскопических материальных констант реализуются посредством осреднения решений задач микромеханики по объему образца в следующих нагружениях:

1. Растяжение вдоль волокон. Задается перемещение образца вдоль оси x_3 . Определяются параметры $E_3, \nu_{31} = \nu_{32}$.

2. Растяжение поперек волокон. Задается перемещение поперек волокон x_1 . Определяются параметры E_1, ν_{12}, ν_{13} .

3. Задается сдвиг в плоскости x_1x_2 . Определяется параметр $G_{12} = G_{21}$.

4. Задается сдвиг в плоскости x_1x_3 . Определяется параметр $G_{13} = G_{23}$.

5. Нагрев образца. Задается изменение температуры ΔT . Определяются параметры $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3$.

Вычисления по определению эффективных свойств образца осуществлялись с использованием комплекса ANSYS. Тестирование описанной методики проведено на примерах построения материальных характеристик однородных анизотропных материалов с известными материальными характеристиками. Достоверность вычислений контролировалась пересчетом на измельченной конечно-элементной сетке.

Обсуждения результатов вычисления

Макроскопические материальные характеристики, отвечающие ячейке периодичности

Вычисленные макроскопические характеристики для образца, представляющего собой ячейку периодичности в предположении, что она является представительным объемом, для указанных выше трех вариантов ячейки отражены в табл. 2. В последней строке таблицы приводится значение параметра

$$\eta = \frac{v_{13}E_3 - v_{31}E_1}{v_{13}E_3} 100\%, \text{ характеризующего невыполнение равенства (2).}$$

Таблица 2

Зависимость макроскопических параметров, определенных на кубе с ребром a , от выбора варианта ячейки

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Среднее	Отклонение, %
E_3 , МПа	29 768	29 757	29 758	29 760.84	0.018
E_1 , МПа	12 289	12 340	11 498	12 042.27	3.2
v_{12}	0.354	0.350	0.337	0.347	2.13
v_{31}	0.302	0.305	0.306	0.305	0.51
v_{13}	0.233	0.235	0.290	0.253	10.49
G_1 , МПа	4 081	4 318	4 362	4 253.67	2.91
G_3 , МПа	4 676	4 459	4 314	4 383.0	3.32
α_1	4,21e-5	4,45e-5	4,26e-5	4,305e-5	2,46
α_3	3,15e-5	3,05e-5	3,69e-5	3,297e-5	8,48
η , %	46,4	46,1	59,2	50,5	—

Результаты, представленные в табл. 2, позволяют сделать следующие выводы:

1. Макроскопические материальные параметры зависят от выбора периодической ячейки. При этом E_1 , E_3 , v_{12} , v_{31} , G_1 , G_3 для различных ячеек периодичности отличаются меньше чем на 5%.

2. Отличие параметров v_{13} , α_3 для различных периодических ячеек превышает 5%.

3. Матрица упругих констант для всех трех видов периодической ячейки получается несимметричной. Невыполнение равенства (2) достигает 59%.

Отмеченные факты означают, что образец композита размером в одну ячейку периодичности не может рассматриваться как его представительный объем.

Представительный объем и эффективные материальные характеристики композита

В соответствии с процедурой, приведенной выше, построена последовательность кубических образцов композита с длиной ребер от $1a$ до $20a$ ($m = 1 \div 20$) и выполнены вычисления их макроскопических материальных термоупругих характеристик. Все соответствующие последовательности макроскопических

параметров композита являются сходящимися, закономерности их поведения вполне проявляются на промежутке $m = 1 \div 10$. Результаты вычислений показаны в табл. 3 и на рис. 2–6.

Таблица 3

Зависимость макроскопических параметров, определенных на кубическом образце с длиной ребра $10a$, от выбора ячейки

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Среднее	Отклонение, %
E_3 , МПа	29 768	29 769	29 769	29 768.7	0.002
E_1 , МПа	13 792	13 800	13 845	13 812.33	0.17
ν_{12}	0.344	0.345	0.342	0.344	0.36
ν_{31}	0.302	0.302	0.302	0.302	0.0
ν_{13}	0.151	0.149	0.155	0.152	1.77
G_1 , МПа	4 097	4 217	4 242	4 218.6	0.44
G_3 , МПа	4 874	4 832	4 828	4 844.7	0.43
α_1	4.68e-5	4.71e-5	4.69e-5	4.69e-5	0.28
α_3	1.59e-5	1.60e-5	1.63e-5	1.59e-5	1.87
η , %	7.3	7.1	9.4	7.9	–

Как видно из табл. 3, для образца с ребром $10a$ значения макроскопических констант практически не зависят от выбора ячейки периодичности. Этот результат был предсказуем: макроскопические характеристики композита периодической структуры не должны зависеть от выбора периодической ячейки.

Графики на рис. 2–6 иллюстрируют изменение макроскопических материальных параметров композита в зависимости от длины ребра образца. Значение модуля упругости E_3 практически не изменяется, поэтому его график не приводится. На всех рисунках номер кривой на графике соответствует номеру варианта выбора периодической ячейки.

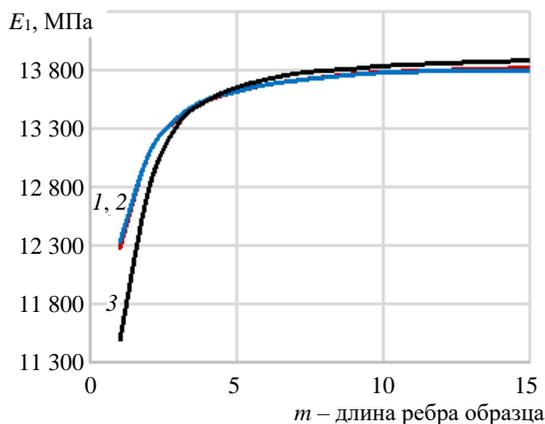


Рис. 2. Зависимость модуля E_1 от длины ребра образца
Fig. 2. Dependence of the module E_1 on the length of the sample rib

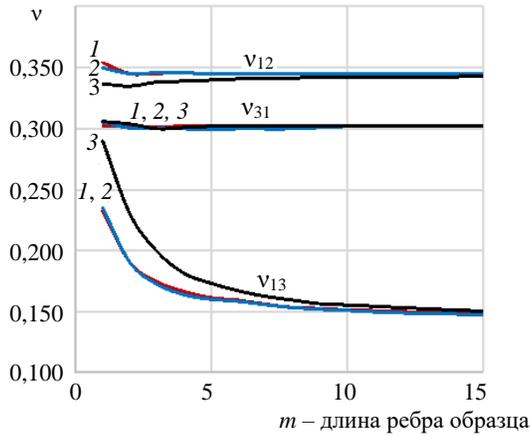


Рис. 3. Зависимость коэффициентов Пуассона от длины ребра образца
Fig. 3. Dependence of Poisson's ratios on the length of the sample rib

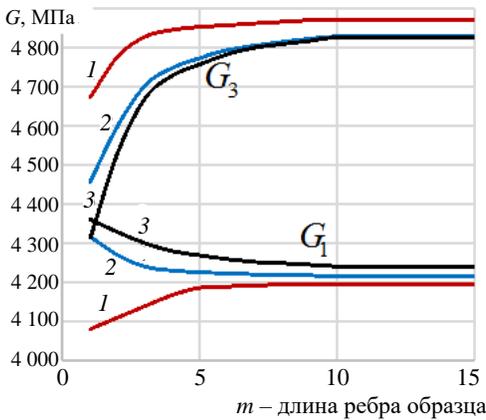


Рис. 4. Зависимость модулей сдвига от длины ребра образца
Fig. 4. Dependence of shear moduli on the length of the sample rib

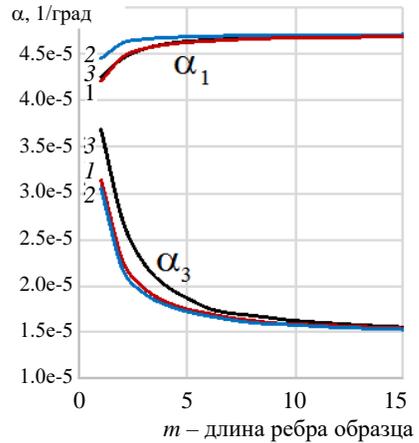


Рис. 5. Зависимость коэффициентов температурного расширения от длины ребра образца
Fig. 5. Dependence of thermal expansion coefficients on the length of the sample rib

Анализ данных, представленных на рис. 2–6 и в табл. 3, приводит к следующим выводам.

– Значения макроскопических термомеханических параметров кубического образца, состоящего из ячеек периодичности, устанавливаются независимо от выбора периодической ячейки и при дальнейшем увеличении образца практически не изменяются. Отсюда можно заключить, что рассматриваемый предельный кубический образец следует принять за представительный объем композитного материала, а его макроскопические свойства – за эффективные характеристики. В нашем случае таким объемом практически является куб с размером ребра $10a$.

– Скорости стремления макроскопических констант к своим предельным значениям существенно различны. Эффективные константы E_3 , ν_{31} устанавливаются при размере ребра куба в три длины ребра ячейки периодичности, а E_1 , ν_{13} , α_1 , α_3 – в десять длин.

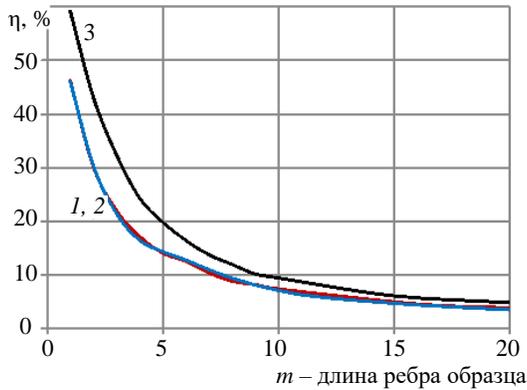


Рис. 6. Зависимость погрешности η от длины ребра образца
Fig. 6. Dependence of the error η on the length of the sample rib

Сравнение макроскопических постоянных, полученных на образцах с длинами ребер $1a$ и $10a$ приводится в табл. 4.

Таблица 4

Сравнение макроскопических термоупругих констант, определенных на образцах с длинами ребер $1a$ и $10a$

Параметры	$m = 1$	$m = 10$	Отличие, %
E_3 , МПа	29 761	29 769	0.03
E_1 , МПа	12 042	13 812	12.8
ν_{12}	0.347	0.344	1.01
ν_{31}	0.305	0.302	0.85
ν_{13}	0.253	0.152	66.7
G_1 , МПа	4 253.7	4 218.6	0.83
G_3 , МПа	4 383.0	4 844.7	7.47
α_1	4.305e-5	4.691e-5	8.22
α_3	3.297e-5	1.589e-5	107.5
η , %	50.5	7.9	–

Как видно из табл. 4, периодическая ячейка композиции с периодической структурой не является представительным объемом, потому что, во-первых, вычисленные на ней материальные параметры значительно отличаются от эффективных (E_1 (12.8%), ν_{13} (66.7%), α_3 (107.5%)), а во-вторых, не выполняется условие симметричности матрицы упругих констант (2), различие составляет в среднем по трем видам ячеек 50.5%.

Заключение

Предложен итерационный алгоритм построения представительного объема и его эффективных материальных характеристик для композита периодической структуры, использующий метод «от противного». Сформулированы присущие представительному объему признаки. Периодическая ячейка композита, широко и правомерно используемая для определения его эффективных параметров при специально сформулированных на ее поверхностях граничных условиях, не обладает такими признаками и поэтому не может служить представительным объемом композита периодической структуры. Выявлено, что существование RVE для композита является основанием для применения теории эффективного модуля к описанию его напряженно деформированного состояния.

Установлено, что за представительный объем материала рассматриваемой в примере периодической структуры можно принять куб с ребром, равным десяти характерным размерам периодической ячейки. Макроскопические свойства такого объема практически не зависят от выбора ячейки периодичности и не изменяются при дальнейшем увеличении длины ребра образца. На практике за представительный объем можно принять и меньший куб – с ребром 5–7 характерных размеров ребра периодической ячейки. Макроскопические свойства, отвечающие такому представительному объему, отличаются от эффективных менее чем на 10%.

Приведенные в работе результаты найдут применение при расчетах конструкций из композитов периодической структуры.

Список источников

1. *Победра Б.Е.* Механика композиционных материалов. М. : Изд-во МГУ, 1984. 335 с.
2. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М. : Наука, 1984. 356 с.
3. *Димитриенко Ю.И., Соколов А.П.* Разработка автоматизированной технологии вычисления эффективных упругих характеристик композитов методом асимптотического осреднения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2008. № 2 (29). С. 56–67.
4. *Димитриенко Ю.И., Соколов А.П.* Многмасштабное моделирование упругих композиционных материалов // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 5. С. 3–20.
5. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Асимптотическая теория конструктивно-ортотропных пластин с двухпериодической структурой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 36–56.
6. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Численное моделирование теплового расширения композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. № 12 (48). С. 1–16.
7. *Avellaneda R., Rodríguez-Alemán S., Otero J.A.* Semi-Analytical Method for Computing Effective Thermoelastic Properties in Fiber-Reinforced Composite Materials // Appl. Sci. Materials Science and Engineering. 2021. V. 11 (12). Art. 5354. doi: 10.3390/app11125354
8. *Qiang Ma, Jun Zhi Cui.* Second-Order Two-Scale Analysis Method for the Quasi-Periodic Structure of Composite Materials under Condition of Coupled Thermo-Elasticity // Advanced Materials Research. 2012. V. 629. P. 160–164.
9. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Конечно-элементное моделирование эффективных вязкоупругих свойств однонаправленных композиционных материалов // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 2 (2). С. 28–48.

10. *Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Сборщиков С.В., Яхновский А.Д., Баймурзин Р.Р.* Моделирование эффективных ядер релаксации и ползучести вязкоупругих композитов методом асимптотического осреднения // Математическое моделирование и численные методы. 2020. № 3 (27). С. 22–46.
11. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Федонюк Н.Н.* Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волоконистых полимерных композиционных материалов // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2014. № 11. С. 748–770.
12. *Димитриенко Ю.И., Кашкаров А.И., Макашов А.А.* Конечно-элементный расчет эффективных упругопластических характеристик композитов на основе метода асимптотического осреднения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2007. № 1 (24). С. 26–46.
13. *Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б.* Параметрическое усреднение уравнений нелинейной теории упругости и деформационной теории пластичности // Механика композиционных материалов и конструкций сложных и гетерогенных сред : сб. трудов 6-й Всерос. науч. конф. с междунар. участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, 16–18 ноября 2016 г. М. : ИПРИМ РАН, 2016. С. 77–84.
14. *Димитриенко Ю.И.* Моделирование нелинейно-упругих характеристик композитов с конечными деформациями методом асимптотического осреднения // Известия вузов. Машиностроение. 2015. № 11 (668). С. 68–77. doi: 10.18698/0536-1044-2015-11-68-77
15. *Anoshkin A.N, Pisarev P.V., Ermakov D.A. et al.* Forecasting effective elastic properties of spatially reinforced composite materials applying the local approximation method // AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2216. Art. 020008. doi: 10.1063/5.0004078
16. *Куимова Е.В., Труфанов Н.А.* Численное прогнозирование термовязкоупругих характеристик однонаправленного волоконистого композита с вязкоупругими компонентами // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2009. № 4 (70). С. 129–148.
17. *Yankovskii A.P.* A heuristic approach to the determination of the effective thermal conductivity coefficients of biperiodic composite media // J. of Engineering Physics and Thermophysics. 2016. V. 89 (6) P. 1574–1581. doi: 10.1007/s10891-016-1528-z
18. *Безмельницын А.В., Сапожников С.Б.* Многомасштабное моделирование и анализ механизма возникновения технологических межслойных напряжений в толстостенных кольцах из стеклопластика // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 2. С. 5–22. doi: 10.15593/pern.mech/2017.2.01
19. *Chen Z., Yang F., Meguid S.A.* Multi-level modeling of woven glass/epoxy composite for multilayer printed circuit board applications // International Journal of Solids and Structures. 2014. V. 51 (21-22). P. 3679–3688. doi: 10.1016/J.IJSOLSTR.2014.06.030
20. *McWilliams B., Dibelka J., Yen C.F.* Multi scale modeling and characterization of in elastic deformation mechanisms in continuous fiber and 2D woven fabric reinforced metal matrix composites // Materials Science & Engineering A. 2014. V. 618. P. 142–152. doi: 10.1016/J.MSEA.2014.08.063
21. *Hallal A., Younes R., Fardoun F.* Review and comparative study of analytical modeling for the elastic properties of textile composites // Composites Part B: Engineering. 2013. V. 50. P. 22–31. doi: 10.1016/j.compositesb.2013.01.024
22. *Kormanikova E., Kotrasova K.* Micro-macro modelling of laminated composite rectangular reservoir // Composite Structures. 2022. V. 279. Art. 114701. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114701
23. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V.* Characteristics of Compositions of Unidirectional Short Boron Fibers and Metal Matrices // Mech Compos Mater. 2020. V. 55. P. 1–14. doi: 10.1007/s11029-020-09849-7

24. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Kiselev F.B., Semenov D.M., Volkov L.S., Ming-Hui Fu. Asymptotic Homogenization of Materials with Artificial Periodic Structures // AIP Conference Proceedings. 2020. V. 2216 (1). P. 070005-1–070005-8. doi: 10.1063/5.0003627
25. Heide-Jørgensen S., Budzik M.K., Ibsen C.H. Three-dimensional, multiscale homogenization for hybrid woven composites with fiber-matrix debonding // Composites Science and Technology. 2022. V. 218 (8). Art. 109204. doi: 10.1016/j.compscitech.2021.109204
26. Schneider M., Josien M., Otto F. Representative volume elements for matrix-inclusion composites – a computational study on the effects of an improper treatment of particles intersecting the boundary and the benefits of periodizing the ensemble // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2022. V. 158. Art. 104652. doi: 10.1016/j.jmps.2021.104652
27. Song N., Jackson M., Wu Sh., Souza F. Micromechanical Analysis of Mechanical Response for Unidirectional Fiber-Reinforced Plies // Thematic section: 5th International Congress on 3D materials science. Integrating Materials and Manufacturing Innovation. 2021. V. 10. P. 542–550. doi: 10.1007/s40192-021-00236-1
28. Elmasry A., Azoti W., Elmarakbi M., Elmarakbi A. Interaction modelling of the thermomechanical behaviour of spatially-oriented graphene platelets (GPLs) reinforced polymer matrix // International Journal of Solids and Structures. 2021. V. 232 (December). Art. 111183. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111183
29. Chen Q., Zhao F., Jia J., Zhu Ch., Bai Sh., Ye Y. Multiscale simulation of elastic response and residual stress for ceramic particle reinforced composites // Ceramics International. 2022. V. 48, is. 2. P. 2431–2440. doi: 10.1016/j.ceramint.2021.10.024
30. Hill R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11 (5). P. 357–372.
31. Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach // Int. J. Solids Struct. 2003. V. 40 (13-14). P. 3647–3679. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00143-4
32. Drugan W.J., Willis J.R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equations and estimates of representative volume element size for elastic composites // J. Mech. Phys. Solids. 1996. V. 44. P. 497–524.

References

1. Pobedrya B.E. (1984) *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Composite mechanics]. Moscow: MGU.
2. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. (1984) *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Averaging of processes in periodic media. Mathematical problems of mechanics of composite materials]. Moscow: Nauka.
3. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. (2008) Razrabotka avtomatizirovannoy tekhnologii vychisleniya effektivnykh uprugikh kharakteristik kompozitov metodom asimptoticheskogo osredneniya [Development of automated technology of calculation of effective elastic characteristics of composites by method of asymptotic averaging]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences.* 2(29). pp. 56–67.
4. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. (2012) Mnogomasshtabnoe modelirovanie uprugikh kompozitsionnykh materialov [Multiscale modeling of elastic composite materials]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical Models and Computer Simulations.* 24(5). pp. 3–20.
5. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. (2014) Asimptoticheskaya teoriya konstruktivno-ortotropnykh plastin s dvukhperiodicheskoy strukturoy [Asymptotic theory of constructive-orthotropic plates with two-periodic structures]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods.* 1. pp. 36–56.

6. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. (2015) Chislennoe modelirovanie teplovogo rasshireniya kompozitsionnykh materialov na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniya [Numerical simulation of composite material thermal expansion by homogenization method]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 12(48). pp. 1–16. doi: 10.18698/2308-6033-2015-12-1452
7. Avellaneda R., Rodríguez-Alemán S., Otero J.A. (2021) Semi-analytical method for computing effective thermoelastic properties in fiber-reinforced composite materials. *Applied Sciences. Materials Science and Engineering*. 11(12). Article 5354. doi: 10.3390/app11125354
8. Ma Q., Cui J.Zh. (2012) Second-order two-scale analysis method for the quasi-periodic structure of composite materials under condition of coupled thermo-elasticity. *Advanced Materials Research*. 629. pp. 160–164. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.629.160
9. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. (2014) Konechno-elementnoe modelirovanie effektivnykh vyazkoupругikh svoystv odnonapravlennykh kompozitsionnykh materialov [Finite element modulation of effective viscoelastic properties of unilateral composite materials]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 2(2). pp. 28–48.
10. Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Sborshchikov S.V., Yakhnovskiy A.D., Baymurzin R.R. (2020) Modelirovanie effektivnykh yader relaksatsii i polzuchesti vyazkoupругikh kompozitov metodom asimptoticheskogo osredneniya [Modeling of effective relaxation and creep kernels of viscoelastic composites by asymptotic averaging method]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 3(27). pp. 22–46.
11. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V., Fedonyuk N.N. (2014) Modelirovanie vyazkoupругikh kharakteristik sloisto-voloknistykh polimernykh kompozitsionnykh materialov [Simulation of viscoelastic properties of fibrous laminated polymer composite materials]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana – Science and Education of the Bauman MSTU*. 11. pp. 748–770.
12. Dimitrienko Yu.I., Kashkarov A.I., Makashov A.A. (2007) Konechno-elementnyy raschet effektivnykh uprugoplasticheskikh kharakteristik kompozitov na osnove metoda asimptoticheskogo osredneniya [Finite element design of effective elastic and plastic characteristics of composites on the basis of method of asymptotic averaging]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 1(24). pp. 26–46.
13. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskiy D.B. (2016) Parametricheskoe usrednenie uravneniy nelineynoy teorii uprugosti i deformatsionnoy teorii plastichnosti [Parametric averaging of equations of the nonlinear elasticity theory and deformation plasticity theory]. *Proceedings of the VI International Conference “Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media”*. Moscow. pp. 77–84.
14. Dimitrienko Yu.I. (2015) Modelirovanie nelineynno-uprugikh kharakteristik kompozitov s konechnymi deformatsiyami metodom asimptoticheskogo osredneniya [Modeling of nonlinear-elastic properties of composites with finite deformations by asymptotic homogenization method]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie – BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 11(668). pp. 68–77. doi: 10.18698/0536–1044–2015–11–68–77
15. Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Ermakov D.A., Roman K.V. (2020) Forecasting effective elastic properties of spatially reinforced composite materials applying the local approximation method. *AIP Conference Proceedings*. 2216. Article 020008. doi: 10.1063/5.0004078
16. Kuimova E.V., Trufanov N.A. (2009) Chislennoe prognozirovaniye termovyazkoupругikh kharakteristik odnonapravlennogo voloknistogo kompozita s vyazkoupругimi komponentami [The numerical prediction of effective thermoviscoelastic properties of unidirectional fiber composite with the viscoelastic components]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*. 4(70). pp.129–148.

17. Yankovskiy A.P. (2016) A heuristic approach to the determination of the effective thermal conductivity coefficients of biperiodic composite media. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 89(6). pp. 1574–1581. doi: 10.1007/s10891-016-1528-z
18. Bezmelnitsyn A.V., Sapozhnikov S.B. (2017) Mnogomasshtabnoe modelirovaniye i analiz mekhanizma voznikoveniya tekhnologicheskikh mezhsloynnykh napryazheniy v tolstostennykh kol'tsakh iz stekloplastika [Multiscale modeling and formation analysis of technological interlaminar stresses in thick-walled GFRP rings]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2. pp. 5–22. doi: 10.15593/perm.mech/2017.2.01
19. Chen Z., Yang F., Meguid S.A. (2014) Multi-level modeling of woven glass/epoxy composite for multilayer printed circuit board applications. *International Journal of Solids and Structures*. 51(21–22). pp. 3679–3688. doi: 10.1016/J.IJSOLSTR.2014.06.030
20. McWilliams B., Dibelka J., Yen C.F. (2014) Multi scale modeling and characterization of in elastic deformation mechanisms in continuous fiber and 2D woven fabric reinforced metal matrix composites. *Materials Science & Engineering. Part A*. 618. pp. 142–152. doi: 10.1016/J.MSEA.2014.08.063
21. Hallal A., Younes R., Fardoun F. (2013) Review and comparative study of analytical modeling for the elastic properties of textile composites. *Composites. Part B: Engineering*. 50. pp. 22–31. doi: 10.1016/j.compositesb.2013.01.024
22. Kormanikova E., Kotrasova K. (2022) Micro-macro modelling of laminated composite rectangular reservoir. *Composite Structures*. 279. Article 114701. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114701
23. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V. (2020) Characteristics of compositions of unidirectional short boron fibers and metal matrices. *Mechanics of Composite Materials*. 55. pp. 1–14. doi: 10.1007/s11029-020-09849-7
24. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Kiselev F.B., Semenov D.M., Volkov L.S., Ming-Hui Fu. (2020) Asymptotic homogenization of materials with artificial periodic structures. *AIP Conference Proceedings*. 2216(1). Article 070005. pp. 1–8. doi: 10.1063/5.0003627
25. Heide-Jørgensen S., Budzik M.K., Ibsen C.H. (2022) Three-dimensional, multiscale homogenization for hybrid woven composites with fiber-matrix debonding. *Composites Science and Technology*. 218. Article 109204. doi: 10.1016/j.compscitech.2021.109204
26. Schneider M., Josien M., Otto F. (2022) Representative volume elements for matrix-inclusion composites - a computational study on the effects of an improper treatment of particles intersecting the boundary and the benefits of periodizing the ensemble. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 158. Article 104652. doi: 10.1016/j.jmps.2021.104652
27. Song N., Jackson M., Wu S., Souza F. (2021) Micromechanical analysis of mechanical response for unidirectional fiber-reinforced plies. *Proceedings of the 5th International Congress on 3D Materials Science. Thematic section “Integrating Materials and Manufacturing Innovation”*. 10. pp. 542–550. doi: 10.1007/s40192-021-00236-1
28. Elmasry A., Azoti W., Elmarakbi M., Elmarakbi A. (2021) Interaction modelling of the thermomechanical behaviour of spatially-oriented graphene platelets (GPLs) reinforced polymer matrix. *International Journal of Solids and Structures*. 232. Article 111183. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111183
29. Chen Q., Zhao F., Jia J., Zhu Ch, Bai Sh., Ye Y. (2022) Multiscale simulation of elastic response and residual stress for ceramic particle reinforced composites. *Ceramics International*. 48(2). pp. 2431–2440. doi: 10.1016/j.ceramint.2021.10.024
30. Hill R. (1963) Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 11(5). pp. 357–372. doi: 10.1016/0022-5096(63)90036-X
31. Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D. (2003) Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach.

- International Journal of Solids and Structures*. 40(13–14). pp. 3647–3679. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00143-4
32. Drugan W.J., Willis J.R. (1996) A micromechanics-based nonlocal constitutive equations and estimates of representative volume element size for elastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 44. pp. 497–524. doi: 10.1016/0022-5096(96)00007-5

Сведения об авторах:

Ландик Лидия Владимировна – инженер кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: LidiaLandik@gmail.com

Пестренин Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: PestreninVM@mail.ru

Пестренина Ирина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета, Пермь, Россия. E-mail: IPestrenina@gmail.com

Information about the authors:

Landik Lidia V. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

Pestrenin Valery M. (Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: PestreninVM@mail.ru

Pestrenina Irene V. (Candidate of Technical Sciences, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: IPestrenina@gmail.com

Статья поступила в редакцию 03.07.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 03.07.2022; accepted for publication 01.06.2023