

Научная статья

УДК 531.351

doi: 10.17223/19988621/83/12

Стабилизированный ротатор и основы его теории

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет, Курган, Россия, ip.popow@yandex.ru

Аннотация. Определены механический аналог циклотронного движения и схема соответствующего устройства – стабилизированного ротатора. Установлено, что собственная частота вращения стабилизированного ротатора строго фиксирована (не зависит ни от момента инерции, ни от момента импульса) и совпадает с собственной частотой колебаний маятника с идентичными параметрами. Разработаны основы теории стабилизированного ротатора.

Ключевые слова: ротатор, маятник, частота, стабилизация, выбег, энергия, момент импульса, циклотронное движение

Для цитирования: Попов И.П. Стабилизированный ротатор и основы его теории // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 143–150. doi: 10.17223/19988621/83/12

Original article

Stabilized rotator and foundations of its theory

Igor' P. Popov

Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation, ip.popow@yandex.ru

Abstract. The key circumstance for the possibility of generalizing cyclotron motion to mechanics is that the Lagrangian of an electron moving across a constant magnetic field is twice its kinetic energy. The aim of this work is to find a mechanical analog of the cyclotron motion and to determine the scheme of the corresponding device referred to as a stabilized rotator. At zero torque in the stationary mode, the rotational speed of the stabilized rotator cannot be arbitrary and takes on a single value. The features of the stabilized rotator are the identity of the formula for the frequency of rotation to the formula for the frequency of a spring pendulum, the equality of kinetic and potential energies, and the resulting equality of the radius of rotation of the load to the magnitude of the spring deformation. Just as the frequency does not coincide with the natural frequency during forced oscillations of the pendulum, the rotation frequency of the stabilized rotator under loading does not coincide with the natural rotation frequency. The stabilized rotator can be used to control the natural frequency of the radial oscillator, although in this capacity it may have a strong competition from mechatronic systems. On the contrary, as a rotation stabilizer, its competitive capabilities are undeniable and determined by the extreme simplicity of the design.

Keywords: rotator, pendulum, frequency, stabilization, run-out, energy, angular momentum, cyclotron motion

For citation: Popov, I.P. (2023) Stabilized rotator and foundations of its theory. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 143–150. doi: 10.17223/19988621/83/12

Введение

Механические и электромагнитные явления и процессы во многих случаях математически изоморфны [1, 2]. Это дает возможность обобщать достижения одной научной специальности на другую. В этом смысле представляет интерес циклотронное движение электрического заряда [3–5], которое характеризуется *фиксированной частотой вращения*. Это следует из баланса сил:

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \frac{qB}{m}r = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m}.$$

Здесь q – величина электрического заряда, v – тангенциальная скорость заряда, B – магнитная индукция, m – масса заряженной частицы, r – радиус циклотронного движения, ω – частота вращения.

Частота действительно не зависит ни от скорости, ни от радиуса.

Ключевым обстоятельством для возможности обобщения циклотронного движения на механику является то, что лагранжиан электрона, движущегося поперек постоянного магнитного поля, вдвое больше его кинетической энергии:

$$L = \frac{mv^2}{2} + e(\mathbf{v}, \mathbf{A}).$$

Векторный потенциал магнитного поля равен

$$A = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}].$$

При этом $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$. Таким образом,

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{q^2 B^2 r^2}{2m}.$$

Второе слагаемое равно

$$\frac{q^2 B^2 r^2}{2m} = \frac{q^2 B^2}{2m} \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2} = \frac{mv^2}{2} \text{ ,,}$$

$$L = 2 \frac{mv^2}{2}.$$

Цель работы – нахождение механического аналога циклотронного движения и определение схемы соответствующего устройства, которое уместно назвать стабилизированным ротатором.

Задачей исследования является установление обстоятельств, составляющих его новизну, таких как обусловленность стабилизации частоты вращения ротатора (и заряда при циклотронном движении) равенством кинетической и потенциальной энергий, зависимость собственной частоты вращения стабилизированного ротатора от его конструктивных параметров, влияние изменения момента им-

пульса на радиус и тангенциальную скорость ротатора, особенности динамики стабилизированного ротатора при вынужденном вращении с постоянной частотой и т.д.

Синтез стабилизированного ротатора

Из ключевого обстоятельства, определяющего возможность обобщения циклотронного движения на механику, заключающегося в том, что лагранжиан электрона вдвое больше его кинетической энергии, что применительно к стабилизированному ротатору следует трактовать как равенство кинетической и потенциальной энергий, необходимо следует, что в состав стабилизированного ротатора должны входить элементы, которые в состоянии запастись оба этих вида энергии, а именно груз (массой m) и пружина (с коэффициентом упругости k).

В соответствии с характером циклотронного движения и, соответственно, ротатора, необходимо имеют место радиус вращения (r) и циклическая частота (ω).

Из равенства энергий следует

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\Delta x}{r}}.$$

Здесь Δx – величина абсолютной деформации пружины.

Неизменность циклической частоты обеспечивается очевидным ключевым условием

$$\Delta x = r.$$

Установленные необходимые обстоятельства определяют принципиальную схему стабилизированного ротатора, которая представлена на рис. 1.

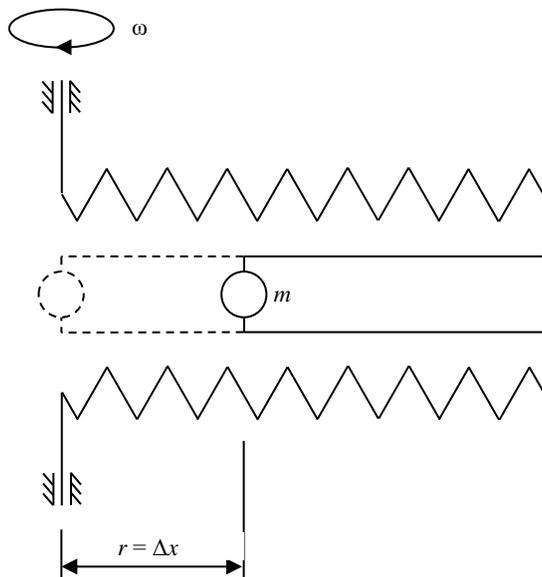


Рис. 1. Стабилизированный ротатор
Fig. 1. Stabilized rotator

Собственная частота вращения стабилизированного ротатора

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1)$$

строго фиксирована (не зависит ни от момента инерции, ни от момента импульса) и замечательным образом совпадает с собственной частотой колебаний маятника с идентичными параметрами.

Подобно классической теории пружинного маятника здесь и далее масса пружин и креплений не учитывается.

Кинематика стабилизированного ротатора

Момент импульса стабилизированного ротатора равен

$$L = J\omega_0 = mr^2\omega_0 = mr^2\sqrt{\frac{k}{m}} = r^2\sqrt{mk}.$$

Здесь J – момент инерции, $x_\omega = \sqrt{mk}$ – волновой реактанс [6], $r = \frac{v}{\omega_0}$.

$$L = r^2 x_\omega = \frac{v^2}{\omega_0^2} x_\omega = v^2 \frac{m}{k} \sqrt{mk} = \frac{m}{\omega_0} v^2.$$

При изменении момента импульса изменяются радиус и тангенциальная скорость (частота вращения при этом не меняется и равна собственной).

Положению груза, при котором его центр масс совпадает с осью вращения, соответствует состояние неопределенного равновесия. При вращении груз равновероятно может отклониться в любую из двух сторон, и, соответственно, может развиваться как сжатие, так и растяжение пружины.

Состояние неопределенного равновесия можно исключить, обеспечив начальное (статическое) смещение груза r_0 и равную ему начальную деформацию пружины.

Нестационарный режим стабилизированного ротатора

Стабилизированный ротатор может быть представлен суперпозицией двух ортогональных пружинных маятников в соответствии с формулой

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}r \cos \varphi(t) + \mathbf{j}r \sin \varphi(t).$$

Это дает возможность использовать хрестоматийные решения для вынужденных колебаний маятника при описании нестационарного режима стабилизированного ротатора, а именно:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \left[r_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) \right] + \\ + \mathbf{j} \left[r_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) \right].$$

Здесь r_0 – начальный радиус, $\delta = R/(2m)$ – коэффициент затухания, R – коэффициент сопротивления, $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \delta^2 > 0$, φ_1 – начальная фаза, ω – частота вынужденных колебаний, $x_0 = F/(2m)$, F – возмущающая сила.

По мере затухания собственных колебаний стабилизированный ротор будет вращаться с циклической частотой ω , а его радиус примет значение

$$r = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{2mF}{R\sqrt{R^2 + 16m^2\omega^2}}.$$

При $\omega_1^2 \leq 0$ происходит аperiодическое затухание.

Подобно тому как при вынужденных колебаниях маятника частота не совпадает с собственной частотой, частота вращения стабилизированного ротора при нагружении не совпадает с собственной частотой вращения [7].

Второе замечательное свойство стабилизированного ротора

(Первым являются фиксированная собственная частота вращения (1) и ее совпадение с собственной частотой колебаний маятника).

При *вынужденном* вращении стабилизированного ротора с постоянной частотой

$$\omega = a\omega_0$$

(a – безразмерный коэффициент) его радиальная динамика определяется уравнением

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r = (a^2\omega_0^2 - \omega_0^2)r = -(1 - a^2)\omega_0^2 r.$$

В зависимости от значения a возможны три варианта.

1. При $a < 1$ имеет место дифференциальное уравнение свободных гармонических незатухающих колебаний с собственной частотой

$$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - a^2}.$$

Таким образом, стабилизированный ротор доставляет возможность управлять собственной частотой колебаний радиального осциллятора.

2. При $a = 1$ $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$, $\frac{dr}{dt} = V = const$, $r = r_{01} + Vt$ колебания не происходят.

3. При $a > 1$ $\frac{d^2r}{dt^2} = (a^2 - 1)\omega_0^2 r$, $r = r_{01} e^{(\omega_0 \sqrt{a^2 - 1})t}$ колебания не происходят.

Затухание колебаний в стабилизированном роторе принципиально не отличается от затухания в обычном маятнике.

Выбег ротора в стабилизированном режиме

Минимальная полная энергия стабилизированного ротора в стабилизированном режиме соответствует статическому смещению груза r_0 :

$$W_0 = K_0 + U_0 = 2K_0 = 2U_0 = kr_0^2.$$

Максимальная полная энергия теоретически не ограничена, а практически определяется конструктивно установленным максимальным радиусом r_m :

$$W_m = kr_m^2.$$

Пусть средняя за выбег мощность диссипативных потерь равна P . Тогда время выбега составит

$$\tau = \frac{W_m - W_0}{P} = k \frac{r_m^2 - r_0^2}{P}.$$

Очевидно, что чем меньше P , тем меньше отклонение частоты вращения ω от собственной ω_0 .

Заключение

Заявленная цель работы достигнута. Механический аналог циклотронного движения определен. Им является стабилизированный ротатор, обладающий фиксированной частотой вращения, не зависящей от момента импульса и момента инерции.

Это означает, что при нулевом вращающем моменте в стационарном режиме частота вращения стабилизированного ротатора не может быть произвольной и принимает единственное значение.

Другими особенностями стабилизированного ротатора являются идентичность формулы частоты вращения формуле частоты пружинного маятника, равенство кинетической и потенциальной энергий и вытекающее из этого равенство радиуса вращения груза величине деформации пружины.

Стабилизированный ротатор может использоваться для управления собственной частотой колебаний радиального осциллятора, хотя в этом качестве он может иметь сильную конкуренцию со стороны мехатронных систем [8].

Напротив, в качестве стабилизатора вращений его конкурентные возможности неоспоримы и определяются предельной простотой конструкции.

Список источников

1. Попов И.П. Реактансы и сассептансы механических систем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 64–75. doi: 10.17223/19988621/70/6
2. Абдуллаев Я.Р., Ханахмедова С.А. Исследование динамических процессов стартер-генератора методом электромеханической аналогии // Известия вузов. Электромеханика. 2018. Т. 61, № 1. С. 32–39. doi: 10.17213/0136-3360-2018-1-32-39
3. Опарина Ю.С., Савилов А.В. Спонтанное циклотронное излучение плотного электронного сгустка // Известия Российской академии наук. Сер. физическая. 2018. Т. 82, № 12. С. 1771–1774. doi: 10.1134/S0367676518120311
4. Аскинази Л.Г., Абдуллина Г.И., Белокуров А.А., Блехштейн М.Д., Жубр Н.А., Корнев В.А., Крикунов С.В., Лебедев С.В., Разуменко Д.В., Смирнов А.И., Тукачинский А.С. Спектр ионно-циклотронного излучения из плазмы токамака туман-3м при инжекционном нагреве // Письма в Журнал технической физики. 2018. Т. 44, № 22. С. 48–56. doi: 10.21883/PJTF.2018.22.46921.17486
5. Минашин П.В., Кужушкин А.Б. Спектральная интенсивность электронного циклотронного излучения, выходящего из плазмы токамака-реактора на первую стенку // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2019. Т. 42, № 4. С. 14–20. doi: 10.21517/0202-3822-2019-42-4-14-20

6. Попов И.П. Application of the Symbolic (Complex) Method to Study Near-Resonance Phenomena // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2020. V. 49 (12). P. 1053–1063. doi: 10.3103/S1052618820120122
7. Антонов Е.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние нелинейной жесткости упругих элементов на динамику двухмассового микромеханического гироскопа L–L-типа в режиме вынужденных колебаний // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 57. С. 53–61. doi: 10.17223/19988621/57/4
8. Томилин А.К., Байзакова Г.А. Управление частотами колебаний упругих электромеханических систем // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2012. № 3 (19). С. 87–92.

References

1. Popov I.P. (2021) Reaktansy i sasseptansy mekhanicheskikh sistem [Reactances and susceptances of mechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 64–75. doi: 10.17223/19988621/70/6
2. Abdullaev Ya.R., Khanakhmedova S.A. (2018) Issledovanie dinamicheskikh protsessov starter-generatora metodom elektromekhanicheskoy analogii [Investigation of the dynamic processes of the starter-generator by the method of electromechanical analogy]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Elektromekhanika – Bulletin of Higher Educational Institutions. Electromechanics*. 61(1). pp. 32–39. doi: 10.17213/0136-3360-2018-1-32-39
3. Oparina Yu.S., Savilov A.V. (2018) Spontannoe tsiklotronnoe izluchenie plotnogo elektronogo sgustka [Spontaneous cyclotron radiation of a dense electron bunch]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya – Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*. 82(12). pp. 1771–1774. doi: 10.1134/S0367676518120311
4. Askinazi L.G., Abdullina G.I., Belokurov A.A., Blekhshteyn M.D., Zhubr N.A., Kornev V.A., Krikunov S.V., Lebedev S.V., Razumenko D.V., Smirnov A.I., Tukachinskiy A.S. (2018) Spekr ionno-tsiklotronnogo izlucheniya iz plazmy tokamaka tuman-3m pri inzhektionsionnom nagreve [The spectrum of ion cyclotron emission from neutral beam injection heated plasma on the TUMAN-3M Tokamak]. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics Letters*. 44(22). pp. 48–56. doi: 10.21883/PJTF.2018.22.46921.17486
5. Minashin P.V., Kukushkin A.B. (2019) Spekrtral'naya intensivnost' elektronogo tsiklotronnogo izlucheniya, vykhodyashchego iz plazmy tokamaka-reaktora na pervuyu stenku [Spectral intensity of electron cyclotron radiation emerging from the plasma to the first wall in Tokamak-reactor]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Termoyadernyy sintez – Problems of Atomic Science and Technology. Series: Thermonuclear Fusion*. 42(4). pp. 14–20. doi: 10.21517/0202-3822-2019-42-4-14-20
6. Popov I.P. (2020) Application of the symbolic (complex) method to study near-resonance phenomena. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 49(12). pp. 1053–1063. doi: 10.3103/S1052618820120122
7. Antonov E.A., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2019) Vliyaniye nelineynoy zhestkosti uprugikh elementov na dinamiku dvukhmassovogo mikromekhanicheskogo giroskopa L–L-tipa v rezhime vynuuzhdennykh kolebaniy [Influence of nonlinear rigidity of elastic elements on the L–L type two-mass micromechanical gyroscope dynamics in a forced-oscillation regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 54–62. doi: 10.17223/19988621/57/4
8. Tomilin A.K., Bayzakova G.A. (2012) Upravleniye chastotami kolebaniy uprugikh elektromekhanicheskikh sistem [Control over oscillation frequencies of resilient electromechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3. pp. 87–92.

Сведения об авторе:

Попов Игорь Павлович – кандидат технических наук старший преподаватель Курганского государственного университета, Курган, Россия. E-mail: ip.popov@yandex.ru

Information about the author:

Popov Igor' P. (Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer, Kurgan State University, Kurgan, Russian Federation). E-mail: ip.popov@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 22.07.2022; принята к публикации 01.06.2023

The article was submitted 22.07.2022; accepted for publication 01.06.2023