

Научная статья

УДК 523.6:52–17

doi: 10.17223/19988621/83/13

## Влияние формы метеороидов на их динамику: радиационное давление и эффект Пойнтинга–Робертсона

Галина Олеговна Рябова

*Томский государственный университет, Томск, Россия, galina.ryabova@mail.tsu.ru*

**Аннотация.** Представлен численный метод получения площади миделева сечения геометрически-простой выпуклой частицы со случайной ориентацией. Площадь миделя является ключевым параметром при вычислении радиационных сил – радиационного давления Солнца и эффекта Пойнтинга–Робертсона – на метеороид. Пробная оценка, полученная для метеороидов потока Геминид массы 0.0003 г, показывает, что при хаотическом вращении метеороидов во время их орбитальной эволюции влияние формы невелико. Если же ось вращения частицы стабилизировалась, то влияние формы может быть существенным.

**Ключевые слова:** метеороид, площадь миделя, радиационные силы, эффект Пойнтинга–Робертсона, радиационное давление

**Благодарности:** Исследование выполнено при поддержке Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 0721-2020-0049). В этом исследовании использовалась система астрофизических данных NASA (NASA ADS).

**Для цитирования:** Рябова Г.О. Влияние формы метеороидов на их динамику: радиационное давление и эффект Пойнтинга–Робертсона // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 151–165. doi: 10.17223/19988621/83/13

Original article

## Influence of the shape of meteoroids on their dynamics: radiation pressure and the Poynting-Robertson effect

Galina O. Ryabova

*Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, galina.ryabova@mail.tsu.ru*

**Abstract.** When calculating the evolution of meteoroid orbits, it is necessary to take into account radiation forces in addition to gravitational perturbations: the solar radiation pressure force and the Poynting–Robertson effect. The key parameter for meteoroids in this paper is  $A/m$ , which is the area-to-mass ratio of a meteoroid.

In models describing the dynamics of meteoroids, for simplicity, one value of the  $A/m$  parameter (for a spherical particle) is used for each model. However, this parameter is invariable during rotation of spherical particles, while it changes for real ones.

Given the modern accuracy of the models, the decision to use a constant value of  $A/m$  is justified. However, for future models, knowledge of the distribution of the midsection area of particles of different shapes can be useful. This work is motivated by the lack of studies on the influence of the shape of meteoroids on the structural characteristics of a model meteoroid stream in the literature. The purpose of this work is to fill this gap to some extent. A simple numerical method for obtaining the distribution of the cross-sectional area of a convex particle with a random orientation is proposed. The distributions for a cube, a cylinder, and an ellipsoid of revolution are obtained. A method for generating random numbers corresponding to a given discrete distribution is described. An example of estimating the influence of the Poynting–Robertson effect and solar radiation pressure on the model Geminid shower is given.

**Keywords:** meteoroid, midsection area, radiation forces, Poynting–Robertson effect, radiation pressure

**Acknowledgments:** This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 0721-2020-0049). This research has made use of NASA's Astrophysics Data System.

**For citation:** Ryabova, G.O. (2023) Influence of the shape of meteoroids on their dynamics: radiation pressure and the Poynting–Robertson effect. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 151–165. doi: 10.17223/19988621/83/13

## Введение

При вычислении эволюции орбит метеороидов кроме гравитационных возмущений необходимо учитывать радиационные силы: силу радиационного давления Солнца и эффект Пойнтинга–Робертсона (ПР-эффект). Ключевым параметром для метеороидов здесь является  $A/m$  – отношение площади миделева сечения метеороида к его массе.

В моделях, исследующих динамику метеороидов, для простоты используется одно значение параметра  $A/m$  для каждой модели. Обычно при этом приводят значения плотности и массы (или размера) сферической частицы. Однако сферические частицы при вращении не меняют  $A/m$ , а реальные – меняют.

При современной точности моделей решение использовать постоянное значение  $A/m$  оправдано. Однако для будущих моделей знание распределения площади миделева сечения частиц разных форм может быть полезным. Мотивацией к данной работе послужило то, что в литературе не удалось найти исследования влияния формы метеороидов на структурные характеристики модельного метеороидного потока.

Настоящая работа предпринята с целью несколько заполнить этот пробел. В ней предложен простой численный метод получения распределения площади поперечного сечения выпуклой частицы со случайной ориентацией. Получены распределения для куба, цилиндра, эллипсоида вращения. Описан метод генерирования случайных чисел, соответствующих данному дискретному распределению. Дан пример оценки влияния ПР-эффекта и радиационного давления Солнца на модельный поток Геминид.

Ниже, если не указано особо, используются единицы системы СГС. Желание автора сохранить устоявшиеся классические обозначения переменных привело

к использованию одного обозначения для различных переменных: например,  $r$  обозначает гелиоцентрическое расстояние, радиус сферы и радиус основания цилиндра. К путанице это не приводит, поскольку значение либо очевидно из контекста, либо прямо указано.

### Мидель и негравитационные силы

Уравнение движения для частицы, движущейся в радиационном поле Солнца, запишется как [1. Eq. (5)]

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left( \frac{S}{c} \frac{A}{m} \right) Q_{pr} \left[ \left( 1 - \frac{V_r}{c} \right) \hat{\mathbf{S}} - \frac{\mathbf{V}}{c} \right]. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{V}$  – скорость,  $V_r$  – радиальная скорость,  $m$  – масса,  $A$  – площадь миделя метеороида;  $c$  – скорость света,  $Q_{pr}$  – коэффициент рассеяния Ми,  $\hat{\mathbf{S}}$  – единичный вектор в направлении падающего излучения,  $S$  – плотность потока солнечной энергии на гелиоцентрическом расстоянии  $r$ . Следуя Burns и соавт. [1], мы называем торможением (или эффектом) Пойнтинга–Робертсона зависящую от скорости часть (1), а радиационным давлением (иногда его называют световым давлением) – постоянный радиальный член (1).

Формулы для осредненных изменений в большой полуоси  $a$  и эксцентриситете  $e$  вследствие ПР-эффекта можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle &= -4.8 \times 10^{-8} \frac{A}{m} \frac{2 + 3e^2}{a(1 - e^2)^{3/2}} - 5.15 \times 10^{-16} \psi \hat{U} \frac{A}{m} \frac{2 + e^2}{a(1 - e^2)^{3/2}} \text{ а.е. год}^{-1}, \\ \left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle &= -4.8 \times 10^{-8} \frac{A}{m} \frac{5e}{2a^2(1 - e^2)^{1/2}} - 5.15 \times 10^{-16} \psi \hat{U} \frac{A}{m} \frac{2e}{a^2(1 - e^2)^{1/2}} \text{ год}^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\psi$  – коэффициент, зависящий от вещества метеороида,  $\hat{U}$  – осредненная по орбите скорость солнечного ветра относительно метеороида. Единицы  $A$ ,  $m$  и  $\hat{U}$  в единицах СГС [см, г, с],  $a$  в а.е. Первые члены правых частей – это изменения, вызванные электромагнитной радиацией [1. Eqs. (47)–(49)], вторые члены – то же самое, но для корпускулярной части ПР-эффекта [2. Eq. (3.17)]. В общем случае ПР-эффект вызывает уменьшение  $a$  и  $e$  со временем.

Отношение силы радиационного давления ( $F_{rad}$ ) к силе гравитационного притяжения Солнца ( $F_{grav}$ ) есть

$$\beta = \frac{F_{rad}}{F_{grav}} = \left( \frac{SA}{cm} \right) Q_{pr} \frac{r^2}{\mu}, \quad (3)$$

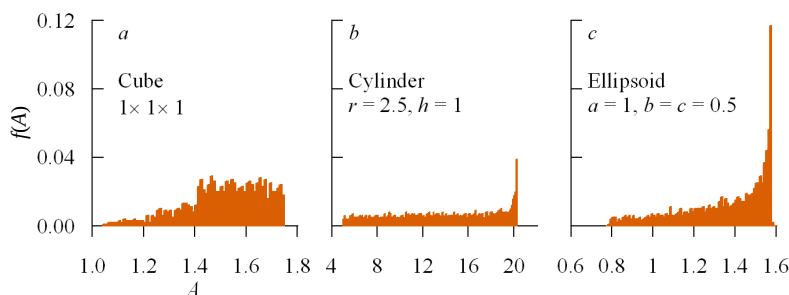
где  $\mu$  – гелиоцентрическая гравитационная постоянная. Сила радиационного давления дает тот же эффект, что и уменьшение массы Солнца в  $(1 - \beta)$  раз.

Чтобы дать представление о величине радиационных сил, приведем пример. Пусть орбита родительского тела имеет большую полуось  $a = 1.3$  а.е. и эксцентриситет  $e = 0.9$ . Пусть сферический метеороид массы  $0.0003$  г и плотности  $1$  г см<sup>-3</sup> отделяется от родительского тела в перигелии с нулевой скоростью (что физически неправдоподобно, но необходимо для нашей оценки). Тогда только за счет радиационного давления его большая полуось будет больше на  $0.035$  а.е., чем большая полуось родительского тела. Но за две тысячи лет эволюции она уменьшится на  $0.1$  а.е. вследствие ПР-эффекта. Таким образом, эффекты противоборствуют. Подробнее этот вопрос изложен в работе [3. Sect. 3.1].

## Метод и результаты

Вкратце метод получения распределения площади поперечного сечения выпуклой частицы со случайной ориентацией можно описать следующим образом. Зададим две прямоугольные системы координат, имеющих общее начало: первая система основная, она неподвижна; вторая система связана с исследуемым телом, она ориентирована случайно. Для вычисления площади проекции тела на одну из координатных плоскостей (например,  $XY$ ) основной системы применяем метод Монте-Карло. Задав на поверхности тела случайную точку, находим точку, принадлежащую проекции. Повторяем это до тех пор, пока вся область проекции не заполнится точками с заданной плотностью. Вообще говоря, мы можем выбирать случайную точку не только на поверхности, но и внутри тела. Однако такой подход сильно увеличивает время вычислений. Повернув исследуемое тело заданное количество раз ( $N_{exp}$ ) и, соответственно, вычислив  $N_{exp}$  площадей проекции тела  $A$ , находим функцию плотности распределения вероятности  $f(A)$  и функцию распределения  $F(A)$ . Подробное описание, формулы и технические детали вынесены в Приложение А.

Метод был опробован на кубе, цилиндре и эллипсоиде. Распределения для трех форм тел приведены на рис. 1. Эти результаты интересны не столько сами по себе, сколько в приложении к задачам метеорной астрономии. Рассмотрим, как влияет форма частиц на их эволюцию на одном конкретном примере.



**Рис. 1.** Функция плотности распределения вероятности  $f(A)$  (ось ординат) в зависимости от площади миделя  $A$  (ось абсцисс) для трех тел: *a* – куб с ребром, равным 1; *b* – круговой прямой цилиндр с радиусом основания  $r = 2.5$  и высотой  $h = 1$ ; *c* – эллипсоид вращения с большей полуосью  $a = 1$  и меньшими полуосями  $b = c = 0.5$ . Единицы длины произвольные

**Fig. 1.** Probability density function  $f(A)$  (ordinate) versus midsection area  $A$  (abscissa) for three bodies: (a) cube with the edge equal to 1; (b) circular straight cylinder with the base radius  $r = 2.5$  and the height  $h = 1$ ; and (c) ellipsoid of revolution with the semi-major axis  $a = 1$  and semi-minor axes  $b = c = 0.5$ . Units of length are arbitrary

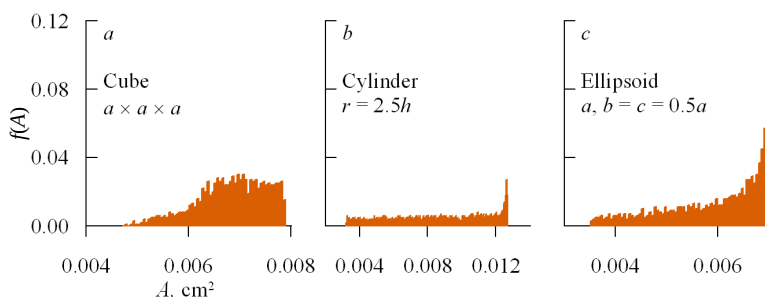
В работе [3] рассмотрена численная модель эволюции метеороидного потока Геминид, состоящая из *сферических* метеороидов пяти фиксированных масс. Возраст потока был принят в 2000 лет. Родительское тело потока – астероид (3200) Фазтон – две тысячи лет назад (начальная эпоха  $t_0 = \text{JD } 1720165.2248$ ) имел элементы орбиты:  $a_0 = 1.2738169504$  а.е.,  $e_0 = 0.9007730431$ . Скорость выброса метеороидов определялась по формуле Whipple [4]. Используя те же начальные условия, попробуем оценить, что произойдет с метеороидами массы  $m = 0.0003$  г, если они будут иметь не сферическую форму, а форму куба, цилиндра с пропор-

циями  $r = 2h$  и эллипсоида с пропорциями:  $a, b = c = 0.5a$ . В таблице представлены размеры таких метеороидов. Функции  $f(A)$  для них показаны на рис. 2.

**Размеры метеороидов массы 0.0003 г и плотности 1 г см<sup>-3</sup>**

| Sphere                                 | Cube                                   | Cylinder                                                 | Ellipsoid                                                                  |
|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $r = 0.041528$<br>$\bar{A} = 0.005418$ | $d = 0.066943$<br>$\bar{A} = 0.006722$ | $r = 0.062035$<br>$h = 0.024814$<br>$\bar{A} = 0.008463$ | $a = 0.065922$<br>$b = 0.032961$<br>$c = 0.032961$<br>$\bar{A} = 0.005834$ |

*Примечание.* В таблице приведены: для сферы радиус  $r$ , для куба ребро  $d$ , для цилиндра радиус основания  $r$  и высота  $h$ , для эллипсоида полуоси  $a, b, c$ . Для всех тел дана средняя расчетная площадь миделя  $\bar{A}$ . Единицы [г, см].



**Рис. 2.** Функция плотности распределения вероятности  $f(A)$  (ось ординат) в зависимости от площади миделя  $A$  (ось абсцисс) для тел, размеры которых приведены в таблице:

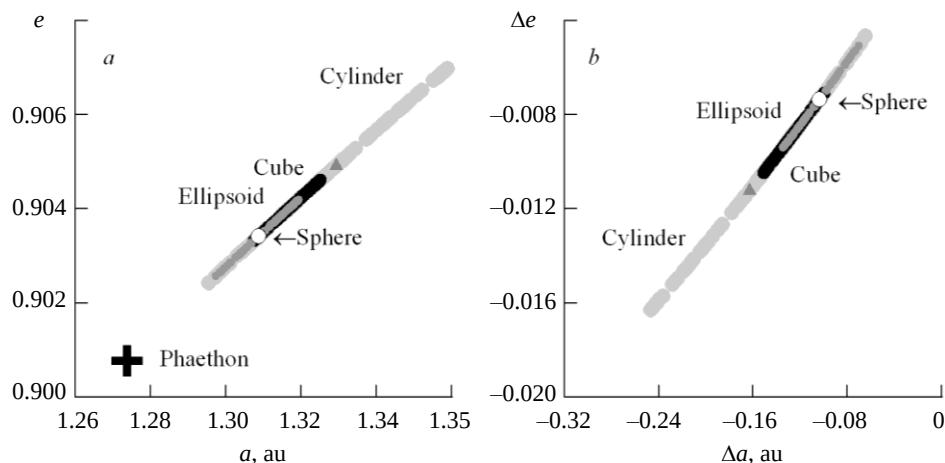
$a$  – куб,  $b$  – цилиндр,  $c$  – эллипсоид

**Fig. 2.** Probability density function  $f(A)$  (ordinate) versus midsection area  $A$  (abscissa) for the bodies with dimensions given in the table: (a) cube, (b) cylinder, and (c) ellipsoid

Первое, что следует отметить, анализируя рис. 2, где приведена  $f(A)$  для этих частиц, – то, что формы распределений совпадают (в статистическом смысле, а не буквально) с соответствующими графиками рис. 1. Так и должно быть, поскольку пропорции тел те же самые. Распределения рис. 2 можно было бы получить из распределений рис. 1, вычислив коэффициенты масштабирования. Цилиндр намеренно выбран плоским, чтобы имитировать метеороиды-хлопья. Заметим, что его средний мидель самый большой из трех тел. Продолговатые метеороиды имитируются эллипсоидом.

Прежде всего оценим влияние радиационного давления и ПР-эффекта без учета других факторов, т.е. скорости выброса и гравитационных возмущений. Для этого рассмотрим первую простую модель: в перигелии родительского тела выпускаем с нулевой скоростью выброса по 100 частиц одной массы и плотности, но различных форм, т.е. всего 400 частиц. Поскольку радиационное давление противодействует притяжению Солнца, немедленно после отделения, т.е. в момент  $t_0$ , большая полуось и эксцентриситет частиц и родительского тела заметно отличаются (см. рис. 3,  $a$ ). Даже для сферических частиц  $a$  возрастает на 0.035 а.е. Темно-серым треугольником на рис. 3,  $a$  отмечена цилиндрическая частица со средней площадью миделя  $\bar{A}$ . Это наибольшая  $\bar{A}$  для выбранных форм (см. таблицу). Сферические частицы, как известно, имеют наименьшее  $\bar{A}$ . Что касается ПР-эффекта, то изменения в элементах орбит показаны на рис. 3,  $b$ . Здесь  $\Delta a$  и  $\Delta e$  вычислены

по формулам (2) для возраста потока 2000 лет. Очевидно, что на большом интервале времени действие ПР-эффекта преобладает, а дисперсия в  $a$  велика: для цилиндра она составляет 0.18 а.е.

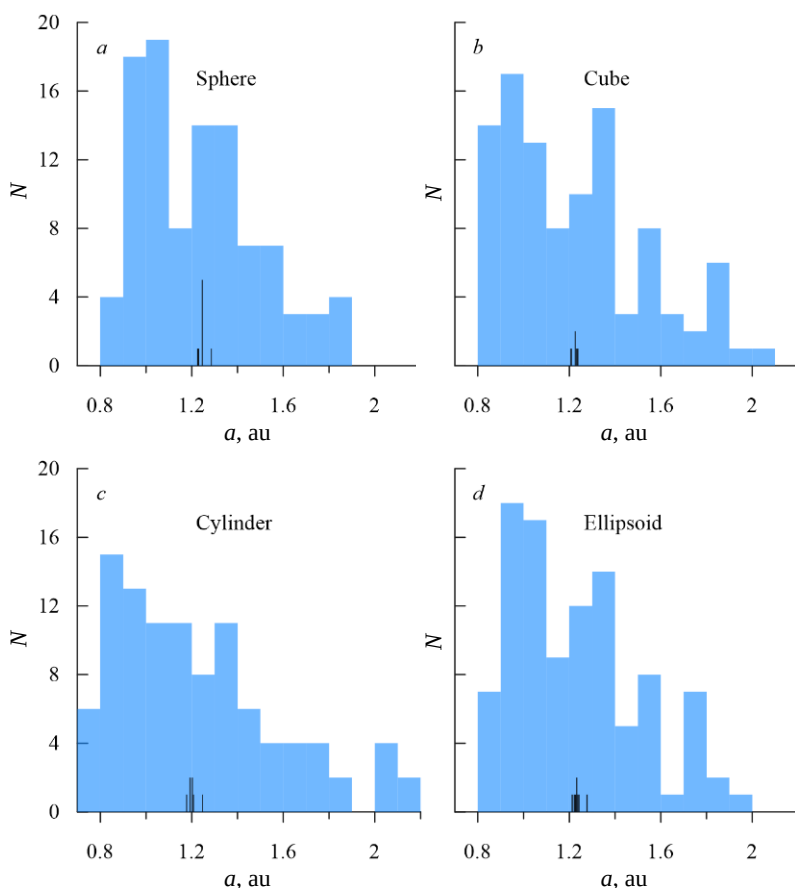


**Рис. 3.** Влияние негравитационных радиационных эффектов на большую полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  для одной сотни модельных метеороидов массы 0.0003 г, отделившихся от родительского тела с нулевой скоростью в перигелии. Цилиндрические метеороиды обозначены светло-серыми большими точками, кубические – черными средними точками, эллипсоиды – темно-серыми малыми точками, сферические – белым кружком. Серым треугольником обозначена цилиндрическая частица со средним миделем  $\bar{A}$ . Все точки располагаются на одной линии, поскольку эффекты не действуют на наклонение орбиты, но величины точек сделаны разными, чтобы было видно наложение.  $a$  – орбитальные элементы  $(a, e)$  метеороидов в момент времени  $t_0$ , т.е. сразу после их отделения, изменения  $(a, e)$  вызваны радиационным давлением Солнца;  $b$  – эффект Пойнтинга–Робертсона через 2000 лет эволюции вносит добавки  $\Delta a$  и  $\Delta e$  в элементы орбит

**Fig. 3.** Influence of non-gravitational radiative effects on semi-major axis  $a$  and eccentricity  $e$  for one hundred model meteoroids with masses 0.0003 g separated from the parent body with zero velocity at perihelion. Cylindrical meteoroids are indicated by large light grey dots, cubic meteoroids by middle-size black dots, ellipsoids by small dark gray dots, and spherical meteoroids by a white circle. The grey triangle denotes a cylindrical particle with an average midsection  $\bar{A}$ . All points are in the same line, since the effects do not impact the orbital inclination, but the size of the points is made different so that the overlap is visible. (a) Orbital elements  $(a, e)$  of meteoroids at time  $t_0$ , i.e. immediately after their separation. Changes of  $(a, e)$  are caused by the radiation pressure of the Sun. (b) The Poynting–Robertson effect adds  $\Delta a$  and  $\Delta e$  to the orbital elements after 2000 years of evolution

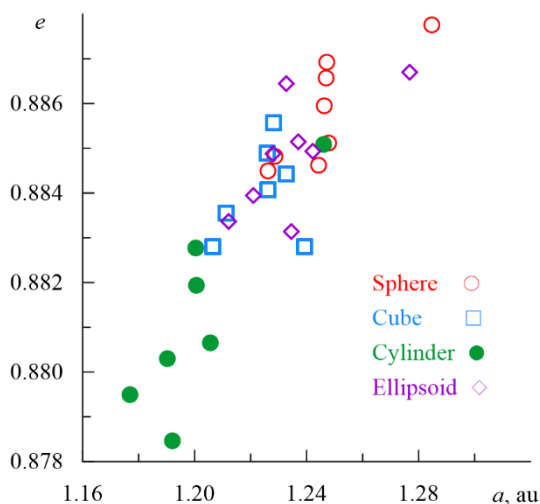
Далее рассмотрим вторую, более полную, модель сил [3]. Здесь по 100 метеороидов одной массы и плотности, но различных форм, были выброшены в перигелии родительского тела изотропно. Скорость выброса метеороидов вычислялась по формуле Whipple [4]. Уравнения движения метеороидов были проинтегрированы на 2000 лет вперед от начальной эпохи. Использовался метод Эверхарта 19-го порядка с переменным шагом. Положения планет были взяты из JPL Planetary Development Ephemeris – DE406. Принимались во внимание гравитационные возмущения всех планет, Луны и Плутона, а также радиационное давление Солн-

ца и ПР-эффект вместе с его корпускулярным аналогом. Оказалось, что влияние добавочных факторов весьма существенно (рис. 4), но для потока в целом.



**Рис. 4.** Распределения больших полуосей  $a$  для одной сотни метеороидов, выброшенных в перигелии родительского тела изотропно со скоростью, вычисленной по формуле Whipple [4], в начальную эпоху JD 1720165.2248. Орбиты этих метеороидов были проинтегрированы до конечной эпохи 2004 December 24. Учитывались возмущения от всех планет, Луны и Плутона, а также радиационное давление и эффект Пойнтинга–Робертсона вместе с его корпускулярной составляющей. Параметр  $A/m$  выбирался случайно для каждого метеороида, но не менялся в процессе интегрирования. Черным цветом показаны распределения для нескольких метеороидов, проходящих вблизи орбиты Земли. Гистограммы приведены для конечной эпохи

**Fig. 4.** Distributions of semi-major axes  $a$  for one hundred meteoroids ejected isotropically at perihelion of the parent body orbit with the speed calculated by Whipple formula [4] in the initial epoch of JD 1720165.2248. The orbits of the meteoroids were integrated to the final epoch 2004 December 24. Gravitational perturbations from all planets, the Moon, and Pluto were taken into account as well as the radiation pressure and the Poynting–Robertson effect together with its corpuscular part. The parameter  $A/m$  was chosen randomly for each meteoroid, but it was invariable during the integration. Black indicators show distributions for several meteoroids passing near the Earth's orbit. Histograms are given for the final epoch



**Рис. 5.** Большие полуоси  $a$  и эксцентриситеты  $e$  «зарегистрированных» на Земле модельных метеороидов, тех самых, что показаны черным цветом на рис. 4. Таковыми считаются метеороиды, узлы орбит которых находятся не далее 0.1 а.е. от орбиты Земли

**Fig. 5.** Semi-major axes  $a$  and eccentricities  $e$  for the model meteoroids “registered” on the Earth (the same ones that are shown in black in fig. 4). Their orbital nodes are located no further than 0.1 AU from Earth’s orbit

Орбиты метеороидов, пересекающих орбиту Земли, не могут отличаться слишком сильно именно из-за наложения условия пересечения. Поскольку интегрировались орбиты всего 100 метеороидов каждой формы, «зарегистрированными на Земле» считались те, узлы которых находились от орбиты Земли не далее 0.1 а.е. На рис. 5 показаны большие полуоси и эксцентриситеты этих метеороидов. Даже если исключить крайний случай, т.е. цилиндры-хлопья, сферические частицы имеют заметно бóльшие  $a$  и  $e$ . Это ожидаемый результат, но в данном случае ценна именно его наглядность.

### Обсуждение

Поскольку метеороид испытывает множество возмущений от сил, как гравитационных, так и негравитационных, а последних насчитывается не менее 20 [5], по умолчанию обычно предполагается, что совокупное действие сил приводит к хаотическому вращению частицы, а следовательно, можно считать форму метеороида сферической. В литературе не удалось найти работ, исследующих вращение межпланетных частиц, кроме работ Долгинова 50–60-летней давности (см., напр.: [6]). Долгинов [6], рассматривая воздействие на частицу светового и корпускулярного потоков с учетом влияния магнитного поля, отмечает, что ориентация<sup>1</sup>

<sup>1</sup> В английской литературе используется термин *alignment*, который лучше соответствует процессу выравнивания оси вращения частицы либо вектора углового момента по какому-то направлению.



частиц устанавливается относительно быстро. Если же обратиться к смежным областям, то ориентация межзвездной пыли потоками газа, магнитным полем, радиационными силами и другими факторами интенсивно обсуждается более 70 лет. В известной пионерской работе Gold [7] было получено, что для галактической пыли направление длинной оси частицы совпадает с направлением относительной скорости частица–межгалактический газ. В обзоре Andersson [8] утверждается, что реальный прогресс в теоретическом и наблюдательном понимании этой проблемы достигнут только в последние годы, хотя ни одна из существующих теорий до сих пор не подтверждена эмпирически. Теория же склоняется к тому, что частицы вращаются не хаотически.

Čapek [9], исследуя вращение метеороидов неправильной формы, выносимых газом при выбросе из ядра кометы, обнаружил, что вначале они вращаются хаотически, но на некотором расстоянии от ядра их вращение стабилизируется. При этом распределение векторов углового момента неслучайно. Они сконцентрированы в направлении, перпендикулярном направлению потока газа. Moreno и соавт. [10] в подобном исследовании подтвердили этот вывод.

Системы сил, влияющих на галактическую и межпланетную пыль, различаются. И тем более отличаются от сил, влияющих на метеороид при выбросе из ядра кометы. Однако у них есть нечто общее – частица движется в потоке: кометного газа, галактического газа, солнечного ветра и радиации, а также в магнитном поле.

В ожидании, пока подобное исследование появится для межпланетных метеороидов, мы предположили, что оси их вращения стабилизируются после выброса из ядра и их направление не меняется. Именно в этом предположении были получены результаты, показанные на рис. 4, 5. Как отмечено, скорость выброса метеороида вычислялась по классической формуле Whipple [4]. Здесь ключевой параметр тот же –  $A/m$ , а скорость выброса зависит линейно от  $(A/m)^{1/2}$ . Иногда  $A/m$  называют «парусностью» частицы. Очевидно, что значение  $A/m$  может быть одним и тем же для метеороидов, имеющих разные массы, и, наоборот, разным для частиц, имеющих одну и ту же массу, но разную форму. Сказанное относится к однородным метеороидам. Частицы, имеющие фрактальную структуру («пушистые», состоящие из скопления микрочастиц) ведут себя иначе. В частности, при выбросе из ядра кометы они могут достигать скорости газа независимо от своей массы [11].

Итак, какие выводы можно сделать из полученных результатов? Во-первых, из рис. 4 следует, что дисперсия в  $a$  настолько велика, что если оценивать принадлежность потоку через критерии подобия [12], то часть метеороидов приходится признать покинувшими метеороидный поток. Для сферических метеороидов было получено [3. Sect. 2.1], что пороговое значение  $a$  приблизительно равно 1.5 а.е., что отсекает около 7% метеороидов массы 0.0003 г. Это умозрительное рассуждение, которое ни подтвердить, ни опровергнуть наблюдениями невозможно (по крайней мере в обозримом будущем). Однако такие оценки дают представление о том, какое количество метеороидов некоего потока пополнило спорадический фон.

Что же касается той небольшой части метеороидного потока, которую мы можем наблюдать на Земле в виде метеоров, то она позволяет получить следующие структурные характеристики метеорного потока: профиль активности пото-

ка, профиль распределения масс в потоке, распределение радиантов, элементы орбит. ПР-эффект и световое давление действуют в плоскости орбиты метеороида, поэтому они не могут вызвать заметного увеличения ширины потока. Однако на все остальные характеристики изменения в  $a$  и  $e$  действие оказывают.

Например, эффект Пойнтинга–Робертсона вызывает так называемое разделение масс, поскольку скорость изменения  $a$  и  $e$  зависит от массы метеороида согласно (2), что дает возможность оценить возраст потока. Подробно метод определения возраста потока по разделению масс изложен в работе [13]. Без оценок на моделях трудно определить, как именно повлияет несферичность частиц на оценку возраста, хотя можно предположить, что возраст будет занижен, а ошибка его определения возрастет.

Как уже отмечалось, в литературе не удалось найти исследования влияния формы метеороидов на структурные характеристики метеорного потока. Предложенный в настоящей работе метод даст возможность проанализировать это влияние на моделях. Заметное влияние на орбитальные элементы метеороидов (даже сферических) может оказать также эффект Ярковского–Радзиевского [14].

### Заключение

Предложен простой численный метод получения площади геометрического поперечного сечения выпуклого тела простой формы, допускающей аналитическое описание (куб, цилиндр, эллипсоид вращения и т.п.), со случайной ориентацией. На основе этого метода можно как получить распределение площадей, так и сгенерировать случайную последовательность для моделирования. Построена пробная модель для потока Геминид массы 0.0003 г. Получено, что если ось вращения несферической частицы стабилизирована, это вызывает заметные уменьшение и дисперсию больших полуосей и эксцентриситетов несферических частиц по сравнению со сферическими.

### Список источников

1. Burns J.A., Lamy Ph.L., Soter S. Radiation forces on small particles in the Solar System // *Icarus*. 1978. V. 40 (2). P. 1–48. doi: 10.1016/0019-1035(79)90050-2
2. Ryabova G.O. Mathematical Modelling of Meteoroid Streams. Springer International Publishing, 2020. doi: 10.1007/978-3-030-51510-2
3. Ryabova G.O. On mean motion resonances in the Geminid meteoroid stream // *Planetary and Space Science*. 2022. V. 210. Art. 105378. doi: 10.1016/j.pss.2021.105378
4. Whipple F.L. A comet model. II. Physical relations for comets and meteors // *The Astrophysical Journal*. 1951. V. 113. P. 464–474. doi: 10.1086/145416
5. Kapišinský I. Nongravitational effects affecting small meteoroids in interplanetary space // *Contributions of the Astronomical Observatory Skalnaté Pleso*. 1984. V. 12. P. 99–111.
6. Dolginov A.Z. Alignment of interstellar and interplanetary grains // *Soviet Astronomy*. 1974. V. 18 (1). P. 33–38.
7. Gold T. The alignment of galactic dust // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1952. V. 112. P. 215–218. doi: 10.1093/mnras/112.2.215
8. Andersson B.-G. Interstellar grain alignment: observational status // *Magnetic Fields in Diffuse Media*. Berlin–Heidelberg : Springer-Verlag, 2015. P. 59–87. (Astrophysics and Space Science Library; v. 407). doi: 10.1007/978-3-662-44625-6\_4
9. Čapek D. Rotation of cometary meteoroids // *Astronomy & Astrophysics*. 2014. V. 568 (A39). doi: 10.1051/0004-6361/201423857

10. Moreno F., Guirado D., Muñoz O., Zakharov V., Ivanovski S., Fulle M., Rotundi A., Frattin E., Bertini I. Dynamics of irregularly shaped cometary particles subjected to outflowing gas and solar radiative forces and torques // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2022. V. 510. P. 5142–5153. doi: 10.1093/mnras/stab3769
11. Crifo J.F. In-situ Doppler velocimetry of very large grains: An essential goal for future cometary investigations // *Proceedings of the Symposium on Radars and Lidars in Earth and Planetary Science*. Noordwijk: ESA. 1991. P. 65–70.
12. Williams I.P., Jopek T.J., Rudawska R., Tóth J., Kornoš L. Minor meteor showers and the sporadic background // *Meteoroids: Sources of Meteors on Earth and Beyond*. Cambridge : Cambridge University Press, 2019. P. 210–243. doi: 10.1017/9781108606462.016
13. Ryabova G.O. Age of the Geminid meteor stream (Review) // *Solar System Research*. 1999. V. 33 (3). P. 224–238.
14. Ryabova G.O. Averaged changes in the orbital elements of meteoroids due to Yarkovsky–Radzievskij force // *Complex Planetary Systems. Proceedings of the IAUS 310*. 2014. P. 160–161. doi: 0.1017/S1743921314008114
15. Santaló L.A. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Reading, MA : Addison-Wesley, 1976.
16. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. 2nd enl. and rev. ed. New York : McGraw-Hill, 1968.
17. Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B. *Statistical Distributions*. 4th ed. New York : Wiley, 2011.
18. Brandt S. *Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers*. 4th ed. Cham : Springer, 2014.

## References

1. Burns J.A., Lamy Ph.L., Soter S. (1978) Radiation forces on small particles in the Solar System. *Icarus*. 40(2). pp. 1–48. doi: 10.1016/0019-1035(79)90050-2
2. Ryabova G.O. (2020) *Mathematical Modelling of Meteoroid Streams*. Springer International Publishing. doi: 10.1007/978-3-030-51510-2
3. Ryabova G.O. (2022) On mean motion resonances in the Geminid meteoroid stream. *Planetary and Space Science*. 210. Article 105378. doi: 10.1016/j.pss.2021.105378
4. Whipple F.L. (1951) A comet model. II. Physical relations for comets and meteors. *The Astrophysical Journal*. 113. pp. 464–474. doi: 10.1086/145416
5. Kapišinský I. (1984) Nongravitational effects affecting small meteoroids in interplanetary space. *Contributions of the Astronomical Observatory Skalnaté Pleso*. 12. pp. 99–111.
6. Dolginov A.Z. (1974) Alignment of interstellar and interplanetary grains. *Soviet Astronomy*. 18(1). pp. 33–38.
7. Gold T. (1952) The alignment of galactic dust. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 112. pp. 215–218. doi: 10.1093/mnras/112.2.215
8. Andersson B.-G. (2015) Interstellar grain alignment: observational status. *Magnetic Fields in Diffuse Media*. In: *Astrophysics and Space Science Library*. 407. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag. pp. 59–87. doi: 10.1007/978-3-662-44625-6\_4
9. Čapek D. (2014) Rotation of cometary meteoroids. *Astronomy & Astrophysics*. 568(A39). doi: 10.1051/0004-6361/201423857
10. Moreno F., Guirado D., Muñoz O., Zakharov V., Ivanovski S., Fulle M., Rotundi A., Frattin E., Bertini I. (2022) Dynamics of irregularly shaped cometary particles subjected to outflowing gas and solar radiative forces and torques. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 510. pp. 5142–5153. doi: 10.1093/mnras/stab3769
11. Crifo J.F. (1991) In-situ Doppler velocimetry of very large grains: An essential goal for future cometary investigations. *Proceedings of the Symposium on Radars and Lidars in Earth and Planetary Science*. Noordwijk: ESA. pp. 65–70.

12. Williams I.P., Jopek T.J., Rudawska R., Tóth J., Kornoš L. (2019) Minor meteor showers and the sporadic background. *Meteoroids: Sources of Meteors on Earth and Beyond*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. pp. 210–243. doi: 10.1017/9781108606462.016
13. Ryabova G.O. (1999) Age of the Geminid meteor stream (Review). *Solar System Research*. 33(3). pp. 224–238.
14. Ryabova G.O. (2014) Averaged changes in the orbital elements of meteoroids due to Yarkovsky–Radzievskij force. *Complex Planetary Systems. Proceedings of the IAUS 310*. pp. 160–161. doi: 0.1017/S1743921314008114
15. Santaló L.A. (1976) *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, Reading, MA.
16. Korn G.A., Korn T.M. (1968) *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review*. 2<sup>nd</sup> enl. and rev. edition. New York: McGraw-Hill.
17. Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B. (2011) *Statistical Distributions*. 4<sup>th</sup> edition. New York: Wiley.
18. Brandt S. (2014) *Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers*. 4<sup>th</sup> edition. Springer Cham.

## Приложение А

### Проецирование произвольной точки на поверхности случайно ориентированного тела на плоскость $XY$

Привязываем исследуемое тело, пусть для определенности это будет куб, к случайно ориентированной прямоугольной правосторонней системе координат  $X'Y'Z'$ . Центр этой системы совмещен с центром нашей основной системы  $XYZ$ , также правосторонней. Площадь проекции куба на плоскость  $XY$  (для определенности, но может быть  $YZ$  или  $XZ$ ) является искомой площадью поперечного сечения. Выделим на плоскости  $XY$  квадрат, где проекция куба поместится гарантированно при любом его повороте. Назовем этот квадрат *максимальной площадкой*. Разобьем максимальную площадку на квадратные ячейки.

Начинаем численный эксперимент. Повернем систему координат  $X'Y'Z'$  случайным образом. Далее выберем случайным образом на поверхности куба точку  $\{x', y', z'\}$  и спроецируем ее на максимальную площадку. Точка проекции  $\{x, y, 0\}$  попадет в какую-то ячейку, которая в массиве-счетчике будет теперь помечена как заполненная. Повторяем процесс выбора и проецирования точки до тех пор, пока состояние массива-счетчика меняется. Когда оно меняться перестает, то считаем, что проекция тела заполнена плотно. Сумма площадей заполненных ячеек и есть площадь проекции тела  $A$ . Эксперимент закончен, сохраняем его результат.

Получив  $N_{\text{exp}}$  площадей  $A$ , переходим к построению функции вероятности  $f(A)$  и функции распределения  $F(A)$ . Количество экспериментов  $N_{\text{exp}}$ , которые нужно проделать для получения статистически надежного распределения, зависит от размера ячейки и формы тела.

Одна из возможных проверок правильности работы программы состоит в вычислении математического ожидания  $\bar{A}$  и сравнении его с полученным аналитически. Согласно формуле Коши (Cauchy) [15. Eq. (13.16)] среднее геометрическое поперечное сечение случайно ориентированного выпуклого тела составляет одну четверть его площади поверхности.

Описанный метод программно можно реализовать по-разному. Ниже предлагается один из возможных подходов.

Далее через  $U$  будем обозначать случайное число, равномерно распределенное в интервале  $[0, 1)$ . Случайное число  $R$  равномерно распределено в интервале  $[a, b)$ . Очевидно, что его можно получить из  $U$  по формуле

$$R = a + (b - a) \times U. \quad (\text{A.1})$$

A.1. Произвольная система координат  $X'Y'Z'$ 

В системе координат  $X'Y'Z'$  введём два угла: угол  $T$  между неким вектором  $\mathbf{d}$  и осью  $X'$ ,  $T \in [0, \pi]$ ; угол  $\Phi$  между осью  $Y'$  и проекцией вектора  $\mathbf{d}$  на плоскость  $Y'Z'$ ,  $\Phi \in [0, 2\pi]$ . Тогда

$$\begin{aligned}d_x &= d \cos T, \\d_y &= d \sin T \cos \Phi, \\d_z &= d \sin T \sin \Phi.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Для того чтобы генерировать случайный вектор  $\mathbf{d}$  с изотропным распределением направлений, достаточно вычислить углы  $T$  и  $\Phi$  по формулам

$$\Phi = 2\pi U, \quad \cos T = 1 - 2U,\tag{A.3}$$

где каждое вхождение  $U$  трактуется как отдельное обращение к датчику псевдослучайных чисел.

Оси произвольно ориентированной системы  $X'Y'Z'$  находим следующим образом.

(а) Ось  $X'$ . Способом, описанным выше, находим случайный вектор  $\mathbf{a}$ , определяющий направление  $X'$ .

(б) Ось  $Z'$ . Находим второй случайный вектор  $\mathbf{a}'$ . Вектор  $\mathbf{c}$ , определяющий направление  $Z'$ , находим из векторного произведения  $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{a}']$ .

(с) Ось  $Y'$ . Дополняем нашу систему до правой тройки:  $\mathbf{b} = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]$ . Вектор  $\mathbf{b}$  определяет направление  $Y'$ .

Итак, мы определили систему  $X'Y'Z'$ . Направляющие косинусы ее осей в системе  $XYZ$  легко вычислить из (A.1). Переход от системы  $X'Y'Z'$  к  $XYZ$  осуществляется поворотом (см., напр.: [16. 3.1-12]).

## A.2. Выбор точки на поверхности геометрически-простого тела

В этом разделе все детали методики объясняются на примере куба. Для цилиндра и эллипсоида вращения приведены только формулы.

*Выбор случайной точки  $\{x', y', z'\}$  на поверхности куба.* Рассмотрим куб размерами  $[2a \times 2a \times 2a]$ . Расположим его в системе  $X'Y'Z'$  так, чтобы его центр совпадал с центром системы, а ребра были параллельны осям, и для точек, принадлежащих кубу, выполнялось условие:  $x' \in [-a, +a]$ ,  $y' \in [-a, +a]$ ,  $z' \in [-a, +a]$ . Такое расположение куба позволяет минимизировать площадку  $XY$ , охватывающую все возможные проекции.

У куба 6 граней. Для точки на грани 1 справедливо:  $x' = a$ ,  $y' \in [-a, +a]$ ,  $z' \in [-a, +a]$ , для точек грани 2:  $y' = a$ ,  $x' \in [-a, +a]$ ,  $z' \in [-a, +a]$  и т.д. Случайным образом выбираем одну грань из шести, а в ней координаты  $\{x', y', z'\}$ , пользуясь соотношением (A.1).

*Выбор случайной точки на поверхности кругового прямого цилиндра.* Пусть цилиндр имеет основание радиуса  $r$  и высоту  $h$ . Поместим его в системе  $X'Y'Z'$  так, чтобы его центр совпадал с центром системы, а основания были параллельны плоскости  $X'Y'$ . Тогда для верхнего основания справедливо:  $z' = h/2$ ,  $(x'^2 + y'^2) \leq r^2$ . Для нижнего соответственно:  $z' = -h/2$ ,  $(x'^2 + y'^2) \leq r^2$ . Точки на боковой поверхности можно задать из условия  $z' \in [-h/2, h/2]$ ,  $x' = r \cos \alpha$ ,  $y' = r \sin \alpha$ , где  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

В принципе два основания и боковую поверхность можно считать «гранями», и для генерации точки выбирать одну из них случайно (как в кубе). Но чем равномернее на поверхности тела будут распределены случайные точки, тем быстрее область проекции заполнится точками плотно. Поэтому при выборе «граней» разумно принимать во внимание соотношение площадей. Иначе говоря, если площадь грани в пять раз больше, возможности быть выбранной у нее тоже должно быть в пять раз больше.

*Выбор случайной точки на поверхности эллипсоида.* Воспользуемся параметрическим заданием поверхности эллипсоида

$$\begin{aligned}x' &= a \cos T, \\y' &= b \sin T \cos \Phi, \\z' &= c \sin T \sin \Phi,\end{aligned}\tag{A.4}$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – полуоси эллипсоида [16. 3.5.10], углы  $T$  и  $\Phi$  имеют тот же смысл, что и в разделе А.2. Случайный их выбор осуществляется по формулам (А.3).

### А.3. Вычисление площади проекции тела

До начала эксперимента, который состоит в нахождении площади проекции для *одного* случайного положения исследуемого тела, необходимо определить максимальную площадку. Из геометрических соображений находим квадрат, охватывающий максимальную область проекции тела на плоскость  $XY$ . Например, для куба  $1 \times 1 \times 1$  это будет  $x \in [-b, +b]$ ,  $y \in [-b, +b]$ , где  $b = \sqrt{3}/2$ . Разумно взять границы квадрата с некоторым запасом. Делим этот квадрат на квадратные же ячейки с размером стороны, например, 0.01. В программе максимальная площадка, разделенная на ячейки, описывается двумерным массивом-счетчиком.

Алгоритм S: вычисление площади одной проекции.

S1. [Начальная установка.] Установить  $N_{points} \leftarrow 0$ ,  $N_{changes} \leftarrow 0$ ,  $N_{max} \leftarrow 1000$ . Случайным образом повернуть систему координат  $X'Y'Z'$  (раздел А.1).

S2. [Установка счетчиков.] Увеличить  $N_{points}$  на единицу. Если  $N_{points} > N_{max}$ , установить  $N_{points} \leftarrow 1$ ,  $N_{changes} \leftarrow 0$ .

S3. [Выбор точки на теле.] Выбрать случайную точку  $\{x', y', z'\}$  на поверхности тела (раздел А.2).

S4. [Вычисление точки проекции.] Выполнить преобразование  $\{x', y', z'\} \Rightarrow \{x, y, z\}$ . Вычислить элемент массива-счетчика соответствующий точке проекции  $\{x, y, 0\}$ . Пометить эту ячейку как заполненную. Если ячейка прежде была пустой увеличить  $N_{changes}$  на единицу.

S5. [Проекция заполнена плотно?] Эксперимент считается законченным, если после выбора  $N_{max}$  точек изменений в массиве-счетчике нет. Если  $N_{changes} = 0$  и  $N_{points} = N_{max}$  перейти к шагу S6, иначе возвратиться к шагу S2.

S6. [Вычисление площади проекции.] Вычислить площадь проекции, найдя количество заполненных элементов массива-счетчика и умножив его на площадь ячейки.

*Комментарий.*  $N_{max} = 1\,000$  выбрано произвольно, исходя из компромисса между временем работы программы и размерностью массива-счетчика, после нескольких экспериментов. При этом отсутствие «дырок» в проекции, т.е. незаполненных ячеек, контролировалось графически.

## Приложение В

### Генерирование случайных чисел с дискретной функцией распределения $F(A)$

Пусть  $x$  есть непрерывная случайная величина,  $f(x)$  – ее плотность вероятности, а  $F(x)$  – функция распределения. Обратная функция распределения  $G(\delta) = x$  может быть получена из уравнения  $\delta = F(x)$ . Тогда случайную величину  $x$  можно генерировать как  $x = G(U)$ . Строгую формулировку можно найти в [17].

Для дискретной функции распределения можно воспользоваться методом отсеивания Неймана (Neumann Acceptance-Rejection technique) [18. Sect. 4.8.2]. Однако он, хоть и очень простой, но медленный, ибо требует большого числа машинных операций. Поэтому автор действовал по аналогии с непрерывной случайной величиной. Несомненно, подобный метод изобретался и публиковался многократно, но автор не рассматривал литературу по данному вопросу.

Итак, мы имеем дискретную функцию  $F(A)$ , выражающуюся последовательностью чисел  $F(A_i)$ ,  $i = 1 \dots N$ , причем  $F(A_i) \leq F(A_{i+1})$ ,  $F(A_N) = 1$ . Другими словами, мы имеем функцию, заданную таблично. Генерируем случайную величину  $F(A) = U$ . Находим соответствующее ей значение  $A$  линейной интерполяцией по таблице  $F(A_i)$ . Тестирование показало, что

метод работает хорошо, но нужно внимательно относиться к выбору шага таблицы, чтобы не пропустить острого пика функции  $f(A)$ , например такого, как на рис. 1, с.

***Сведения об авторе:***

**Рябова Галина Олеговна** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории компьютерного моделирования и машинного анализа астрономических данных НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: galina.ryabova@mail.tsu.ru

***Information about the author:***

**Ryabova Galina O.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: galina.ryabova@mail.tsu.ru

*Статья поступила в редакцию 23.01.2023; принята к публикации 01.06.2023*

*The article was submitted 23.01.2023; accepted for publication 01.06.2023*