

Научная статья

УДК 539.2

doi: 10.17223/19988621/83/14

## Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде

Исмоил Иброхимович Сафаров<sup>1</sup>, Мухсин Худойбердиевич Тешаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Ташкентский химико-технологический институт,*

*Ташкент, Узбекистан, safarov54@mail.ru*

<sup>2</sup> *Бухарское отделение Института математики АН Республики Узбекистан,*

*Бухара, Узбекистан, muhsin\_5@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются неустановившиеся движения сферических тел, погруженных в вязкоупругую среду, под действием нестационарных волн. Используя теорему о вычетах, определены выражения перемещений и напряжений как функции времени. Найдено, что при кратковременном воздействии волн максимальные величины напряжений и деформаций существенно выше средних, причем наибольшего значения напряжение достигает в лобовой точке.

**Ключевые слова:** оболочка, вязкоупругая среда, нестационарная волна, преобразования Лапласа, напряжение, деформация

**Для цитирования:** Сафаров И.И., Тешаев М.Х. Нестационарные движения сферических оболочек в вязкоупругой среде // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 166–179. doi: 10.17223/19988621/83/14

Original article

## Unsteady Motions of Spherical Shells in a Viscoelastic Medium

Ismoil I. Safarov<sup>1</sup>, Mukhsin Kh. Teshaeв<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan, safarov54@mail.ru*

<sup>2</sup> *Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan, muhsin\_5@mail.ru*

**Abstract.** This paper considers the unsteady motions of the spherical bodies immersed in a viscoelastic medium under the action of unsteady waves. The relation between stresses and strains complies with the hereditary Boltzmann–Voltaire integral. Using the integral Laplace transform, an exact solution of the equations of motion is obtained in the images. The integrand function in the images satisfies Jordan's lemma. Using the residue theorem, displacements and stresses are determined as the functions of time. An algorithm is developed, and a program is compiled in C++. The numerical results are obtained and analyzed. It is revealed that the kinematic factors, i.e. acceleration and velocity, of the spherical shell differ significantly from those of the viscoelastic medium. Under short-term exposure to waves (loads), the diagram of the stress-strain state changes: at all points of the shell, the maximum stresses and strains are significantly higher than average values, and the stress attains the maximum at the frontal point. Some differences are also

found in the variation of time-displacement dependence for the spherical shell and surrounding viscoelastic medium.

**Keywords:** shell, viscoelastic medium, unsteady wave, Laplace transform, stress, strain

**For citation:** Safarov, I.I., Teshayev, M.Kh. (2023) Unsteady Motions of Spherical Shells in a Viscoelastic Medium. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 166–179. doi: 10.17223/19988621/83/14

## Введение

Исследования нестационарного взаимодействия волн с деформируемыми конструкциями являются актуальной задачей механики и физики. Практика современных строительства и машиностроения требует расчета элементов конструкций и сооружений на действие нестационарных волн, распространяющихся в окружающей среде.

Задача о движении и прочности сферической оболочки, погруженной в деформируемую среду, под действием волн была исследована в работах [1–4], однако исследователями рассматривались в основном гармонические нагрузки, такие как серия гармонических волн и стоячие волны. Дифракция сферической нестационарной акустической волны на сплошной упругой сфере исследована в [5]. Поставленная задача решена методом интегрального преобразования Фурье. В работе [6] исследована задача о взаимодействии нестационарных акустических волн с тонкой сферической оболочкой. Отмечено, что наличие тонкой оболочки на границе раздела не создает принципиальных трудностей. В работах [7–9] область приложения результатов, полученных в нестационарной постановке задачи гидроупругости тонкостенных конструкций, расширяется; в них указано, что необходимо учитывать возможности возникновения явления кавитации в жидкости.

Определение движения деформируемых сферических включений, находящихся в упругой среде при воздействии нестационарной нагрузки, является сложной задачей механики [9]. Поэтому для упрощения поставленной задачи для определения нестационарного движения твердосферического включения сферические тела рассматриваются как абсолютно жесткие [10, 11]. В этих работах нагрузка, или падающая волна, принимается в виде экспоненциально затухающей функции и задача решается методом интегрального преобразования Фурье.

В последнее время указывается на необходимость учета влияния реологических свойств материала и окружающей среды на нестационарное динамическое напряженно-деформированное состояние *сферических оболочек при воздействии нестационарных нагрузок*, чему пока уделяется мало внимания. Цель настоящей работы – разработка методики и алгоритма для определения динамического напряженно-деформированного состояния сферических оболочек при воздействии нестационарных волн. Для решения задачи применяются преобразования Лапласа, теорема сложения сферических функций.

В работе рассматриваются линейные колебания сферических оболочек при воздействии вязкоупругих продольных (или поперечных) нестационарных волн. Для описания вязкоупругих свойств материала среды и сферической оболочки использована связь между напряжениями и деформациями, удовлетворяющая наследственному интегралу Больцмана–Вольтерры. С помощью интегрального

преобразования Лапласа получено точное решение уравнений движения в изображениях. Подынтегральная функция в изображениях удовлетворяет лемме Жордана. Используя теорему о вычетах, определены выражения для перемещений и напряжений как функции времени.

### Постановка задачи и методика решения

Пусть замкнутая деформируемая сферическая оболочка окружена безграничной вязкоупругой средой (рис. 1).

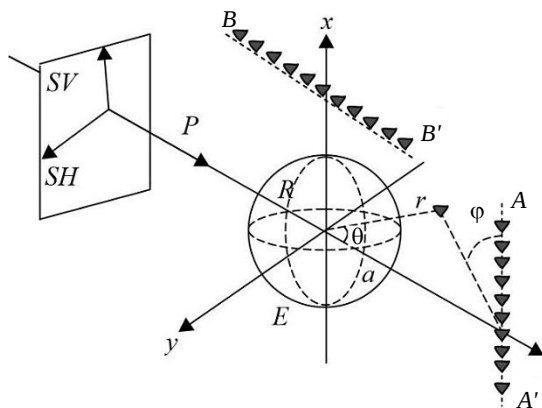


Рис. 1. Расчетная схема  
Fig. 1. Computational scheme

Введем сферическую систему координат и на оси  $z$  поместим источник нестационарных волн. В этом случае процесс деформации оболочки будет осесимметричным. Задача решается в безмоментной постановке (изгибные жесткости не учитываются). Тогда уравнения движения сферической оболочки представляются в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - (v_0 - \operatorname{ctg} \theta)u - (1 + v_0) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\ & - \int_0^t R_u(t - \tau) L_{11}(u, w) d\tau = \frac{1}{c_{10}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{mc_{10}^2} p_1(a, \theta, t), \\ & (1 + v_0) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \operatorname{ctg} \theta - 2w \right) - \int_0^t R_w(t - \tau) L_{22}(u, w) d\tau = \\ & = \frac{1}{c_{10}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{mc_{10}^2} p_2(a, \theta, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11}(u, w) &= \frac{\partial^2 u(\theta, \tau)}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u(\theta, \tau)}{\partial \theta} - (v_0 - \operatorname{ctg} \theta)u(\theta, \tau) - (1 + v_0) \frac{\partial w(\theta, \tau)}{\partial \theta}, \\ L_{22}(u, w) &= (1 + v_0) \left( \frac{\partial u(\theta, \tau)}{\partial \theta} + u(\theta, \tau) \operatorname{ctg} \theta - 2w(\theta, \tau) \right), \end{aligned}$$

$$m = \rho_0 h, c_{10} = [E_0 / \rho_0 (1 - \nu_0^2)]^{1/2},$$

$E_0, \nu_0, \rho_0$  – соответственно мгновенный модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность сферической оболочки;  $R_u(t - \tau)$ ,  $R_w(t - \tau)$  – ядра релаксации цилиндрической оболочки;  $u, w$  – перемещения срединной поверхности по касательной к меридиану и по нормали;  $\theta$  – угол, отсчитываемый от оси  $z$ .

Если вязкоупругая среда, окружающая сферическую оболочку, находится в условиях осесимметричной деформации, то перемещения и напряжения в потенциалах перемещений принимают следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} C_{\alpha 0}^2 \left[ \nabla^2 \varphi - \int_0^t R_{\alpha}(t - \tau) \nabla^2 \varphi(\tau) d\tau \right] &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ C_{\beta 0}^2 \left[ \nabla^2 \psi - \int_0^t R_{\beta}(t - \tau) \nabla^2 \psi(\tau) d\tau \right] &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_r \vec{r} + u_{\theta} \vec{j}_{\theta} + 0 \vec{k}_z, u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}), \\ u_{\theta} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \psi}{\partial \theta}), \sigma_r = \frac{\tilde{\lambda}_c}{c_{10}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \\ &+ 2\tilde{\mu}_c (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{r}{c_{20}^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2} + \frac{1}{c_{20}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\tilde{\lambda}_c}{c_{10}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\tilde{\mu}_c (\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c_{20}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial \theta^2}),$$

$$\tilde{\lambda}_c f(t) = \lambda_{0c} \left[ f(t) - \int_0^t R_{\lambda c}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right]; \tilde{\mu}_c f(t) = \mu_{0c} \left[ f(t) - \int_0^t R_{\mu c}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (4)$$

где  $\vec{u}(u_r, u_{\theta}, 0)$  – вектор перемещений среды,  $f(t)$  – произвольная функция времени,  $\lambda_{0c}, \mu_{0c}$  – мгновенные модули упругости,  $c_{20} = [kE_0 / 2\rho_0(1 + \nu_0)]^{1/2}$ .

В расчетах использовалось трехпараметрическое ядро релаксации Колтунова–Ржаницына:  $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$ ,  $C_{\alpha 0}^2 = (\lambda_c + 2\mu_c) / \rho_0$ ,  $C_{\beta 0}^2 = \mu_c / \rho_0$ .

На контакте оболочек со средой ставится условие жесткого контакта, т.е. выполняется равенство соответствующих перемещений.

На бесконечности возмущения должны затухать: если  $\varphi, \psi$  расходящиеся волны, то  $\varphi \rightarrow 0, \psi \rightarrow 0$  при  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ .

Начальные условия – нулевые, Действующие нагрузки со стороны среды на оболочку представим в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\lambda_{0c}}{c_{10}^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \Big|_{r=a} - \int_0^t R_{\lambda c}(t - \tau) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} d\tau + 2\mu_{0c} (\Phi(\varphi, \psi) - \int_0^t R_{\lambda c}(t - \tau) \Phi(\varphi(\tau), \psi(\tau)) d\tau), \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu_{0c} (\Psi(\varphi, \psi) - \int_0^t R_{\lambda c}(t - \tau) \Psi(\varphi(\tau), \psi(\tau)) d\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi, \psi) &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - r \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{r}{c_{20}^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2} + \frac{1}{c_{20}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \Big|_{r=a}, \\ \Psi(\varphi, \psi) &= \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{c_{20}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right) \Big|_{r=a}.\end{aligned}\quad (5)$$

Напряжения в срединной поверхности сферической оболочки имеют следующий вид [13]:

$$\begin{aligned}\sigma_{10} &= \rho_0 c_{10}^2 \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \operatorname{ctg} \theta - (1 + \nu_0) w \right], \\ \sigma_{20} &= \rho_0 c_{10}^2 \left[ u \operatorname{ctg} \theta + \nu_0 \frac{\partial u}{\partial \theta} - (1 + \nu_0) w \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Зависимости (1) – (6) записаны в безразмерном виде.

Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (1) и (2) ищем в виде рядов по функциям Лежандра:

$$\begin{aligned}u(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) P'_n(\cos \theta), \\ w(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) P_n^0(\cos \theta), \\ \varphi(r, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r, t) P_n^0(\cos \theta), \\ \psi(r, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(r, t) P'_n(\cos \theta),\end{aligned}\quad (7)$$

где  $P_n^0(\cos \theta)$ ,  $P'_n(\cos \theta)$  – присоединенные функции Лежандра нулевого и первого порядков.

Внешние силы также представим в форме рядов:

$$\begin{aligned}p_{kp}(a, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{kpn}(t) P_n^0(\cos \theta), \\ p_{ka}(a, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_{kpn}(t) P'_n(\cos \theta).\end{aligned}\quad (8)$$

Подставляя (7) в систему (1) и (2), получим следующую систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{u}_n + C_{10}^2 [n(n+1) - (1 - \nu_0)] u_n - C_{10}^2 (1 + \nu_0) - \int_0^t R_u(t - \tau) L_{11}(u, w) d\tau &= P_{1n}, \\ \ddot{w}_n - C_{10}^2 (1 + \nu_0) [n(n+1) - 2w_n] u_n + \int_0^t R_w(t - \tau) L_{22}(u, w) d\tau &= P_{2n}, \\ C_{\alpha 0}^2 \left[ \nabla^2 \Phi(r, t) - \int_0^t R_{\alpha}(t - \tau) \Phi(r, t) d\tau \right] &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \\ C_{\beta 0}^2 \left[ \nabla^2 \Psi(r, t) - \int_0^t R_{\alpha}(t - \tau) \Psi(r, t) d\tau \right] &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2, 3...\end{aligned}\quad (9)$$

Для решения задачи применяем преобразования Лапласа для функции  $f(t)$ , интегрируемой в смысле Лебега на любом открытом интервале  $0 < t < T$ , которая выражается формулой (8) [14]:

$$f^L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = L[f(t)]. \quad (10)$$

Функция  $f^L(s)$  называется изображением,  $f(t)$  – оригиналом. Обратное преобразование Лапласа определяется формулой

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f^L(s) ds = L^{-1}[f^L(s)], \quad (11)$$

где интеграл берется вдоль пути, лежащего справа от особенностей подынтегральной функции.

Применяя к (9) преобразования Лапласа (10) по времени, получим следующую систему алгебраических и обыкновенных уравнений:

$$\begin{aligned} c_{11}u_n^L + c_{12}w_n^L &= P_{1n}^L(s), \\ c_{21}u_n^L + c_{22}w_n^L &= P_{2n}^L(s), \\ C_{\alpha 0}^2(1-\Omega_p^s(s))\nabla^2\Phi^L(r,s) - s^2\Phi &= 0, \\ C_{\beta 0}^2(1-\Omega_c^s(s))\nabla^2\Psi^L(r,s) - s^2\Psi &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{10}^2[n(n+1) - (1-\nu_0)] + s^2; \quad c_{12} = -c_{10}^2(\nu_0+1), \\ c_{21} &= -c_{10}^2(\nu_0+1)(n+1)n, \quad c_{22} = 2c_{10}^2(\nu_0+1) + (1 + \frac{s^n f_n(s)}{m\Phi_n(s)})s^2. \end{aligned}$$

Решение системы алгебраических и дифференциальных уравнений (12) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_n^L &= \frac{c_{12}P_{1n}^L(s) - c_{22}P_{2n}^L(s)}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}, \quad w_n^L = \frac{c_{11}P_{2n}^L(s) - c_{21}P_{1n}^L(s)}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}, \\ \Phi^L(r,s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n K_{n+1/2}(\alpha_s r) + B_n N_{n+1/2}(\alpha_s r)), \\ \Psi^L(r,s) &= \sum (C_n K_{n+1/2}(\beta_s r) + M_n N_{n+1/2}(\beta_s r)), \\ \alpha_s^2 &= \frac{s^2}{c_{\alpha 0}^2(1-\Omega_p^s(s))}, \quad \alpha_s^2 = \frac{s^2}{c_{\beta 0}^2(1-\Omega_c^s(s))}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $K_n(X), N_n(X)$  – модифицирование функции Бесселя и Неймана,  $A_n, B_n, C_n, M_n$  – произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий.

Обратное преобразование Лапласа осуществляется с помощью (11). Подынтегральная функция в изображениях удовлетворяет лемме Жордана. Используя теорему о вычетах, определяем выражения перемещений и напряжений как функции времени.

Потенциал падающей единичной ступенчатой волны напряжений представляется в виде:

$$\varphi_p = 0.5(t + z - 1)H(t + z - 1), \psi_p = 0. \quad (14)$$

Время  $t = 0$  соответствует моменту соприкосновения волны с оболочкой. Подвергая потенциал (14) интегральному преобразованию Лапласа и используя теорему сложения сферических функций, представляем его в координатах оболочки

$$\varphi_p^L = \frac{e^{-s}}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2sr}} I_{n+1/2}(sr) P_n(\cos \theta). \quad (15)$$

Постановка задачи позволяет определить напряженно-деформированное состояние окружающей среды, когда сферическая оболочка представляется как твердое включение. Тогда сферические включения будут свободно перемещаться вместе с окружающей средой. Пусть  $U$  обозначает вектор перемещений сферических тел. Легко доказать, что вследствие симметрии

$$U = kU,$$

где  $k$  – единичный вектор, направленный вдоль движения.

Из этого следует, что при  $r = a$

$$u_r = U(t)P_1(\cos \theta), u_\theta = U(t) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (16)$$

Перемещение  $U$  удовлетворяет уравнению движения

$$\frac{4\pi a^3}{3} \rho_1 \ddot{U} = \iint_{\Omega_g} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^t R_t(t-\tau) \Gamma(\sigma_{rr}(\tau), \sigma_{r\theta}(\tau)) d\tau, \quad (17)$$

$$\Gamma(\sigma_{rr}(\tau), \sigma_{r\theta}(\tau)) = \iint_{\Omega_g} (\sigma_{rr}(\tau) \cos \theta - \sigma_{r\theta}(\tau) \sin \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi,$$

где  $\rho_1$  – плотность сферического включения, а интеграл, взятый по поверхности сферы, представляет собой проекцию на ось  $z$  результирующей, с которой окружающая среда действует на сферу.

Выражения для  $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$  получаются, если подставить (9) в уравнения (3). Можно показать, что (опуская детали преобразований [14])

$$U = \frac{\bar{I} e^{-s\zeta}}{a} (1 - \Omega_r(s\zeta)) (3i\pi\Phi_0 j_1(\alpha a) + A_1 h_1(\alpha a) - 2B_1 h_1(\beta a)). \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнения (9) и используя граничные условия, получим два уравнения, которые могут быть использованы для определения  $A_1$  и  $B_1$ . Из этих уравнений получаем

$$A_1 = \frac{-3\Phi_0 i}{\Delta_1} (\alpha\beta a^2 j_2(\alpha a) h_1(\beta a) - (1 - \bar{\rho}) \beta a j_1(\alpha a) h_2(\beta a)). \quad (19)$$

Тогда  $U$  принимает вид:

$$U = \frac{3\Phi_0 k \bar{\rho}}{a \Delta_1} h_2(\beta a) e^{-s}, \quad k_0^2 = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} = \frac{C_{\alpha 0}^2}{C_{\beta 0}^2} = \frac{2(1 - \nu_c)}{1 - 2\nu_c}.$$

Здесь  $\nu_c$  – коэффициент Пуассона.

При исследовании колебательных процессов сферического выключения использованы следующие выражения функции Бесселя:

$$j_{n-1}(\zeta)h_n(\zeta) - h_{n-1}(\zeta)j_n(\zeta) = \frac{-i}{\zeta^2}.$$

Определив функцию проводимости, перейдем к определению нестационарного движения сферического включения под действием аperiодического возмущения в соответствии с уравнениями (14) и (17). Прежде чем перейти к описанию аperiодического движения, целесообразно упростить уравнение (18). Представим  $h_n(\zeta)$  в виде комбинации элементарных функций с помощью соотношения

$$h_n(\zeta) = -i(-1)^n \zeta^n \left( \frac{d}{\zeta d\zeta} \right)^n \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}. \text{ Отсюда следует, что}$$

$$h_1(\zeta) = -i\zeta^{-2}(i\zeta - 1)e^{i\zeta}, \quad h_2(\zeta) = -i\zeta^{-3}(-\zeta^2 - 3i\zeta + 3)e^{i\zeta}.$$

Здесь также полезно сначала нормализовать некоторые величины. Это можно сделать, нормализуя смещения, скорости и ускорения сферы по отношению к соответствующим величинам падающей волны. Амплитуды смещения и скорости падающей волны равны соответственно

$$U^* = \frac{U}{i\Phi_0 a}, \quad \dot{U}^* = \frac{\dot{U}}{\Phi_0 a \omega_s}.$$

### Результаты и анализ

Поскольку подынтегральное выражение в уравнении (11) регулярно, за исключением конечного числа полюсов внутри  $C$ , то в соответствии с теоремой Жордана и теоремой Коши о вычетах интеграл (11) можно вычислить по формуле

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{n=1}^m R_n, \quad (20)$$

где  $R_n$  – вычет функции  $f(\zeta)$  (интегрирование проводится против часовой стрелки). Тогда безразмерная величина скорости  $\bar{U}$  сферы будет

$$\bar{U}(\tau) = 3\bar{\rho} \sum_{n=1}^m R_n.$$

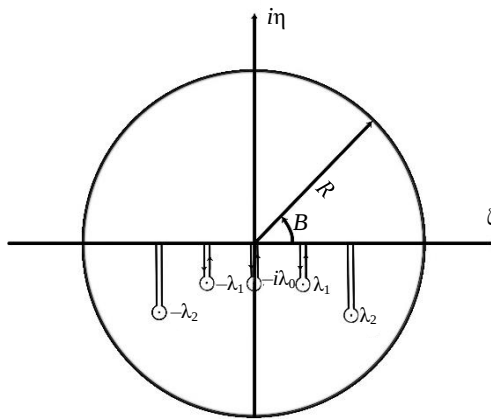
Возвращаясь к уравнению (11), имеем

$$f(\zeta) = (-k^2 \zeta^2 - 3ik\zeta + 3)e^{-i(1+\tau)\zeta} / (\zeta + i\lambda_0) \{ k^2 \zeta^4 + ik[(2k+1) + \bar{\rho}(k+2)]\zeta^3 - \\ - [(2k^2+1) + \bar{\rho}(k^2+9k+2)]\zeta^2 - i9\bar{\rho}(k+1)\zeta \}, \quad (21)$$

и  $f(\zeta)$  имеет, за исключением особых случаев, простые полюсы  $\zeta = -i\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ , где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$  – корни полинома четвертого порядка, стоящего в знаменателе (функции  $f(\zeta)$  в выражении (21)).

Дальнейшее определение корней  $\lambda_k$  показывает, что они комплексные либо чисто мнимые. В обоих случаях все полюсы находятся в нижней полуплоскости. Если корни комплексные, то появляются и их сопряженные, т.е. если  $\lambda_1$  – комплексный корень, то появляется также корень  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ , где  $\bar{\lambda}_1$  – сопряженное  $\lambda_1$  комплексное число. Если корни чисто мнимые, то они различны, за исключением

случая  $-i\lambda_0$ , который совпадает с одним из корней, и тогда  $f(\zeta)$  будет иметь три простых полюса и один полюс второго порядка. Однако и в этом случае вычет можно вычислить прямыми методами теории функций комплексного переменного. Возможны также случаи, когда все корни  $\lambda_k$  комплексные или чисто мнимые (рис. 2).



**Рис. 2.** Распределение вычетов  
**Fig. 2.** Distribution of residues

Если корни  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) комплексные, тогда

$$f(\zeta) = \frac{(-k^2\zeta^2 - i3k\zeta + 3)e^{-i(1+\tau)\zeta}}{(\zeta + i\lambda_0)(\zeta - \lambda_1)(\zeta + \bar{\lambda}_1)(\zeta + \lambda_3)(\zeta + \bar{\lambda}_3)}.$$

Если два корня комплексные и два – чисто мнимые, тогда

$$f(\zeta) = \frac{(-k^2\zeta^2 - i3k\zeta + 3)e^{-i(1+\tau)\zeta}}{(\zeta + i\lambda_0)(\zeta - \lambda_1)(\zeta + \bar{\lambda}_1)(\zeta + \lambda_3)(\zeta + \bar{\lambda}_1)}.$$

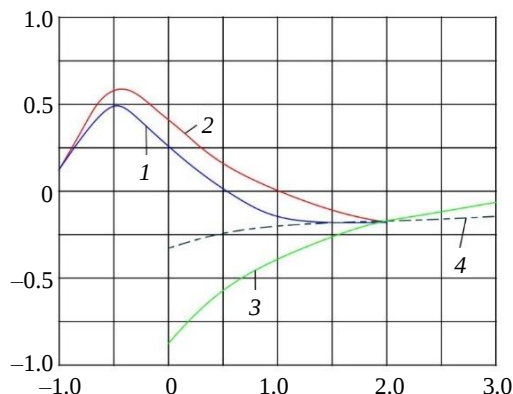
Для получения численных результатов, относящихся к нестационарному движению сферы под действием падающих волн с различными скоростями затухания, использовались величины  $\bar{\rho}$ , равные 0.4, 1.0 и 1.6, и коэффициент Пуассона  $\nu_c = 0.25$ . Рассмотрим сначала случай  $\bar{\rho} = 1$ . Тогда  $f(\zeta)$  принимает вид:

$$f(\zeta) = \frac{e^{-i(1+\tau)\zeta}}{(\zeta + i\lambda_0)(\zeta + \frac{3}{2}i - \frac{3^{1/2}}{2})(\zeta + \frac{3}{2}i + \frac{3^{1/2}}{2})}.$$

При исследовании подынтегрального выражения в уравнении (17) нетрудно увидеть, что величина  $e^{-i(1+\tau)\zeta}$  стремится к нулю при  $|\zeta| \rightarrow \infty$  на верхней полуокружности, когда  $(1+\tau) < 0$ , и на нижней полуокружности, когда  $(1+\tau) > 0$ . Таким образом, имеет смысл использовать верхнюю полуокружность в случае  $(1+\tau) < 0$  и нижнюю полуокружность в случае  $(1+\tau) > 0$  и интегрировать по контуру. Следует отметить, что, хотя мы имеем дело с чисто упругой средой, экспоненциальное затухание свободных колебаний связано с тем, что при коле-

бании сферы образуются волны и энергия колебаний рассеивается в направлении от сферы.

На рис. 3 представлены соответственно действительные и мнимые части функции  $U$  в зависимости от времени.



**Рис. 3.** Изменение перемещений жесткого выключения в зависимости от времени при различных отношениях плотностей: 1 – вязкоупругая окружающая среда ( $\bar{\rho} = 0.4$ ), 2 – упругая среда ( $\bar{\rho} = 0.4$ ), 3 – вязкоупругая среда ( $\bar{\rho} = 1.4$ ), 4 – упругая среда ( $\bar{\rho} = 1.4$ )

**Fig. 3.** Time variation of hard-shutdown displacements at different density ratios: 1, viscoelastic medium ( $\bar{\rho} = 0.4$ ); 2, elastic medium ( $\bar{\rho} = 0.4$ ); 3, viscoelastic medium ( $\bar{\rho} = 1.4$ ); and 4, elastic medium ( $\bar{\rho} = 1.4$ )

Отмечено, что в случае  $\bar{\rho} = 0.4$  скорость движения сферы растёт медленнее, чем при  $\bar{\rho} = 1$  и  $\bar{\rho} = 2$ . Однако наблюдается существенное различие через интервал, который приблизительно в 1,5 раза больше времени перехода.

Случай  $\bar{\rho} = 2$ , когда мы имеем два затухающих члена, может быть аналогичен случаю сильно демпфированной системы.

Рассмотрим далее экспоненциально затухающую волну напряжения. Эта форма возмущения выбрана потому, что она описывает типичный источник взрыва [4]. В соответствии с уравнением (6) перемещение сферического жесткого тела имеет вид:

$$U^*(t) = \frac{3i\bar{\rho}}{2\pi} (-k^2\alpha^2a^2 - 3ik\alpha a + 3)e^{-i(\alpha a + \omega t)} d\omega / (k + i\alpha) \times$$

$$\times \{k^2\alpha^4a^4 + ik[(2k+1)]\alpha^3a^3 -$$

$$- [(2k^2+1) + \bar{\rho}(k^2+9k+2)]\alpha^2a^2 - i9\bar{\rho}(k+1)\alpha a + 9\bar{\rho}\}.$$
(22)

Следует отметить, что при отсутствии внешних нагрузок (14) рассматриваются «связные собственные колебания». Тогда решение (13) будет описывать затухающие колебания, в то время как решение (18) имеет только один член с затухающими колебаниями. Также необходимо отметить, что собственные комплексные частоты колебаний сферических тел тесно связаны с отраженными волнами.

**Пример.** Рассмотрим воздействие нестационарных волн (14) на сферическую оболочку.

Когда  $n = 1$ , формой для нормального прогиба является функция  $P_1^0 = \cos \theta$ , а для тангенциального –  $P_1^1 = \sin \theta$ . При  $n = 1$  формулы (12) и (13) примут вид:

$$u_1^L = \frac{3c_{10}^2(1+v_0)}{ms^2D(s)}(1-\Omega_\Gamma(\bar{s})), \quad w_1^L = \frac{3[s^2+c_{10}^2(1+v_0)]}{ms^2D(s)}(1-\Omega_\Gamma(\bar{s})), \quad (23)$$

где

$$D(s) = s^2 + (1/m + 2.0)s^3 + [2 + 1/m + 3c_{10}^2(1+v_0)\Omega(\bar{s})]s^2 + c_{10}^2(1+v_0)\Omega(\bar{s})(6 + 1/m)(s + 1).$$

Обозначим корни уравнения  $D(s) = 0$  (ядра релаксации оболочки и среды равны нулю) через  $\omega_j$  ( $j = 1 \div 4$ ). Тогда оригиналы функции (23) принимают вид:

$$u_1(t) = \frac{3}{m} \left[ \frac{m}{6m+1}(t+1) + \sum_{j=1}^4 A_j e^{t\omega_j} \right], \quad w_1(t) = \frac{3}{m} \left[ \frac{m}{6m+1}(t+1) + \sum_{j=1}^4 B_j e^{t\omega_j} \right],$$

где

$$A_j = \frac{c_{10}^2(1+v_0)}{\omega_j^2 \prod_{k \neq j, k=1} (\omega_j - \omega_k)}, \quad B_j = \frac{\omega_j^2 + c_{10}^2(1+v_0)}{\omega_j^2 \prod_{k \neq j, k=1} (\omega_j - \omega_k)}.$$

Если учитываются вязкие свойства материалов (оболочки и окружающей ее среды), то решение трансцендентного уравнения  $D(s) = 0$  с комплексными входящими параметрами аналитически решить не удастся. Поэтому оно решается численно – методом Мюллера. Результаты расчетов приведены в таблице.

**Зависимость комплексных частот неосесимметричных колебаний цилиндрических оболочек от модуля упругости  $E$  при скользящем контакте**

| $\omega_j$ | $E = 0,2$   | $E = 0,4$    | $E = 0,6$    | $E = 0,8$    | $E = 1,0$    |
|------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $\omega_1$ | 5.9531D-02  | 6.1341D-02   | 6.1901D-02   | 6.2193D-02   | 6.1787D-02   |
|            | -i7.5656D-2 | -i7.3121D-02 | -i7.2823D-02 | -i7.1202D-02 | -i6.8760D-02 |
| $\omega_2$ | 1.1582D-01  | 1.1585D-01   | 2.4513D-01   | 4.4340D-01   | 1.1588D-01   |
|            | -i6.9000D-1 | -i6.9004D-01 | -i4.4318D-01 | -i6.8910D-01 | -i6.8987D-01 |
| $\omega_3$ | 5.7958D+00  | 5.6652D+00   | 5.7376D+00   | 5.7505D+00   | 5.7971D+00   |
|            | -3.7114D+0  | -i3.6201D+00 | -i3.5791D+00 | -i3.6992D+0  | -i3.7144D+00 |
| $\omega_4$ | 5.4433D+00  | 5.5961D+00   | 5.4244D+00   | 5.0541D+00   | 5.4428D+00   |
|            | -3.8908D+0  | -i3.9481D+0  | -i3.8281D+00 | -i3.9896D+0  | -i3.8914D+00 |
| $\omega_5$ | 6.8053D+00  | 4.8054D+00   | 6.8055D+00   | 6.8064D+00   | 6.8053D+00   |
|            | -i2.8277D+0 | -i2.8277D+00 | -i2.8279D+00 | -i2.8181D+0  | -i2.8227D+00 |

По данным таблицы построены контурные напряжения оболочки (рис. 4). Из графиков видно, что при движении оболочки по первой форме в ней создаются довольно значительные напряжения, амплитуда которых составляет до 35% напряжений при нулевой форме движения.

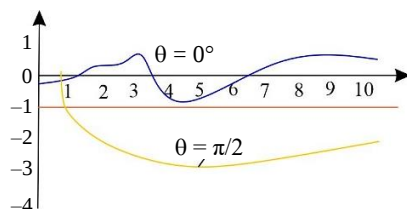


Рис. 4. Изменение контурного напряжения в зависимости от времени

Fig. 4. Time variation of contour stresses

При учете вязкоупругих свойств окружающей деформируемой среды в процессе взаимодействия нестационарных волн с оболочкой происходит диссипация энергии [14]. Это явление приводит к снижению падающих нагрузок. На основе анализа многочисленных результатов выявлено, что при учете вязкоупругих свойств материалов оболочки и окружающей среды напряжения снижаются до 15%.

### Заключение

1. Предложены математическая постановка и методы решения задачи воздействия нестационарных нагрузок на сферическую оболочку, находящуюся в вязкоупругой (упругой) среде.

2. Установлено, что при падении нестационарных волн в начальный момент сферическая оболочка становится почти равномерно всесторонне сжатой, затем наступает качественно новая фаза движения, на которой контурные напряжения затухают и появляются заметные изгибные напряжения.

3. Из численных результатов следует, что в нестационарном волновом поле компоненты напряжения при контакте оболочки со средой становятся быстро изменяющимися функциями координат и существенно зависят от интенсивности и характера изменения нагрузок во времени. При действии нестационарных нормальных волн на сферическом теле в теневой зоне возникает зона растягивающих напряжений.

### Список источников

1. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М. : Наука, 1985. Т. 9. С. 69–148.
2. Mow C.C., Pao Y.H. The Diffraction of Elastic waves and Dynamic Stress Concentrations. California, 1971. 682 p.
3. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Л. : Судостроение, 1987. 316 с.
4. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. М. : Машиностроение, 1977. 304 с.
5. White R.M. Surface elastic waves // Proceedings of the IEEE. 1970. V. 58 (8). P. 1238–1276. doi: 10.1109/PROC.1970.7900
6. Hasanov A., Kurbanov N., Mikhailova N. Investigation of Free Vibrations of Viscoelastic Bodies // Problems of Cybernetics and Informatics : IV International Conference. Baku, 2012 V. III. P. 1–29.
7. Kurbanov N.T., Nasibzada V.N. Investigation of forced oscillations viscoelastic shells // International Journal of Current Research. 2015. V. 7, is. 07. P. 18356–18360.

8. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волновые процессы в механическом волноводе. Основы, концепции, методы. Lambert Academic Publishing, 2012. 220 p.
9. Лычев С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия. 2002. Спец. вып. С. 16–38.
10. Abramidze Ed., Abramidze El. Analysis of nonlinear deformation task of layered cylindrical shell by local surface force and temperature // J. Appl. Math. Inform. Mech. 2019. V. 24 (2). P. 3–9.
11. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
12. Абдукадыров С.А. Нестационарное деформирование цилиндрической оболочки при действии плоской волны сдвига // Исследования по теории пластин и оболочек. 1992. Вып. 24. С. 118–124. URL: <http://mi.mathnet.ru/rus/kutpo/v24/p118>
13. Safarov I.I., Boltaev Z.I., Axmedov M.Sh. Setting the Linear Oscillations of Structural Heterogeneity Viscoelastic Lamellar Systems with Point Relations // J. Applied Mathematics. 2015. V. 6. P. 228–234. doi: 10.4236/am.2015.62022
14. Safarov I.I., Boltaev Z.I., Axmedov M.Sh. Natural Oscillations of Cylindrical Bodies with External Friction on the Boundary // J. Applied Mathematics. 2015. V. 6. P. 629–645. doi: 10.4236/am.2015.63057

## References

1. Vestyak A.V., Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. (1985) Nestatsionarnoe vzaimodeystviy deformiruemykh tel s okruzhayushchey sredoy [Unsteady interaction of deformable bodies with the environment]. *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*. 9. pp. 69–148.
2. Mow C.C., Pao Y.H. (1971) *The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*. California.
3. Pertsev A.K., Platonov E.G. (1987) *Dinamika obolochek i plastin: Nestatsionarnye zadachi* [Dynamics of shells and plates: Non-stationary problems]. Leningrad: Sudostroenie.
4. Filippov I.G. (1977) *Nestatsionarnye kolebaniya i difraktsiya voln v akusticheskikh i uprugikh sredakh* [Unsteady oscillations and wave diffraction in acoustic and elastic media]. Moscow: Mashinostroenie.
5. White R.M. (1970) Surface elastic waves. *Proceedings of the IEEE*. 58(8). pp. 1238–1276. doi: 10.1109/PROC.1970.7900
6. Hasanov A., Kurbanov N., Mikhailova N. (2012) Investigation of free vibrations of viscoelastic bodies. *Proceedings of the IV International Conference «Problems of Cybernetics and Informatics», Baku, Azerbaijan*, III. pp. 1–29.
7. Kurbanov N.T., Nasibzada V.N. (2015) Investigation of forced oscillations viscoelastic shells. *International Journal of Current Research*. 7(07). pp. 18356–18360.
8. Safarov I.I., Teshaeв M.Kh., Boltaev Z.I. (2012) *Volnovye protsessy v mekhanicheskom volnovode* [Wave processes in a mechanical waveguide]. Germany: Lambert Academic Publishing.
9. Lychev S.A., Senitskiy Yu.E. (2002) Nesymmetrichnye integral'nye preobrazovaniya i ikh prilozheniya k zadacham vyazko-uprugosti [Asymmetric integral transformations and their applications to viscoelasticity problems]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvenno-nauchnaya seriya. Spetsial'nyy vypusk – Vestnik of Samara University. Natural Science Series. Special Issue*. pp. 16–38.
10. Abramidze Ed., Abramidze El. (2019) Analysis of nonlinear deformation task of layered cylindrical shell by local surface force and temperature. *Applied Mathematics, Informatics and Mechanics*. 24(2). pp. 3–9.
11. Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. (1990) *Nestatsionarnaya aero-uprugost' tel sfericheskoy formy* [Unsteady aero-elasticity of spherical bodies]. Moscow: Nauka.

12. Abdukadyrov S.A. (1992) Nestatsionarnoe deformirovanie tsilindricheskoy obolochki pri deystvii ploskoy volny sdviga [Unsteady deformation of a cylindrical shell under the action of a plane shear wave]. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek*. 24. pp. 118–124. doi: 10.4236/am.2015.62022
13. Safarov I.I., Boltaev Z.I., Axmedov M.Sh. (2015) Setting the linear oscillations of structural heterogeneity viscoelastic lamellar systems with point relations. *Applied Mathematics*. 6. pp. 228–234. doi: 10.4236/am.2015.63057

**Сведения об авторах:**

**Сафаров Исмонил Иброхимович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» Ташкентского химико-технологического института, Ташкент, Узбекистан. E-mail: safarov54@mail.ru

Тешаев Мухсин Худойбердиевич – доктор физико-математических наук (DSc), доцент, главный научный сотрудник Бухарского отделения Института математики АН Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан. E-mail: muhsin\_5@mail.ru

**Information about the authors:**

**Safarov Ismoil I.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: safarov54@mail.ru

**Teshaev Mukhsin Kh.** (Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: muhsin\_5@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 03.05.2022; принята к публикации 01.06.2023*

*The article was submitted 03.05.2022; accepted for publication 01.06.2023*