

Научная статья

УДК 532.529

doi: 10.17223/19988621/84/8

К построению математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала

Владимир Петрович Бушланов¹, Владимир Григорьевич Бутов²,
Анатолий Алексеевич Глазунов³

¹ Государственный морской университет им. адмирала Ф. Ф. Ушакова, Новороссийск, Россия

^{2,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ bpv@ngs.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ gla@niipmm.tsu.ru

Аннотация. В трудах И.М. Васенина разработан кинетический подход для создания математических моделей двухфазных сред. На его основе создана и реализована модель двухфазного течения в соплах Лавала с учетом вращения капель конденсата. Показано, что при многочисленных столкновениях моменты вращения некоторых капель могут превысить критическое значение и произойдет разрушение капель центробежными силами. Данный подход распространен на построение математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли.

Ключевые слова: кинетический подход, осесимметричное сопло Лавала, момент вращения капли, система уравнений двухфазного течения с учетом силы Магнуса

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030) и Государственного морского университета им. адмирала Ф.Ф. Ушакова в г. Новороссийске.

Для цитирования: Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А. К построению математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 93–108. doi: 10.17223/19988621/84/8

Original article

On the development of a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle

Vladimir P. Bushlanov¹, Vladimir G. Butov², Anatoliy A. Glazunov³

¹ Admiral Ushakov Maritime State University, Novorossiysk, Russian Federation

^{2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ bpv@ngs.ru

² *bvg@niipmm.tsu.ru*

³ *gla@niipmm.tsu.ru*

Abstract. When modeling the flow of two-phase media, a number of authors use the kinetic approach. In the 1980s, I.M. Vasenin et al. obtained equations describing the flow of gas and liquid particles based on the equation for a drop distribution function in terms of masses, velocities, temperatures, and intrinsic angular momentum. They differ from the known equations by an additional equation for the mean square of the rotation moment. A numerical solution to the equations shows that due to numerous collisions and coagulation, the rotation moments of some drops exceed the critical value, and the drops are destroyed by centrifugal forces. In this paper, the kinetic approach is extended to the model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle with account for the radial diffusion of drops under the action of the Magnus force acting on a rotating drop. The system of equations is derived from the kinetic equation up to second-order moments using the method of moments. Only second-order moments, which affect diffusion to the wall, are taken into account. Diffusion leads to an earlier occurrence of drops on the wall and therefore must be considered when profiling the contour of the nozzle.

Keywords: kinetic approach, axisymmetric de Laval nozzle, moment of drop rotation, system of two-phase flow equations with allowance for the Magnus force

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030) and by the Admiral Ushakov Maritime State University in Novorossiysk.

For citation: Bushlanov, V.P., Butov, V.G., Glazunov, A.A. (2023) On the development of a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 93–108. doi: 10.17223/19988621/84/8

*Авторы посвящают статью памяти своего Учителя
Игоря Михайловича Васенина, основателя кинетического
подхода в теории двухфазных течений в соплах*

Введение

Широкое применение ракетных двигателей на твердом топливе обуславливает проведение работ по созданию новых и совершенствованию существующих конструкций. Такие работы проводятся по ряду направлений [1, 2], и одним из них является углубленное изучение двухфазной газодинамики продуктов сгорания в сопле Лавалья. Это связано с тем, что интегральные энерго-тяговые характеристики двигателя определяются параметрами двухфазного течения, силами, действующими на стенки сопла. К настоящему времени выполнено большое количество исследований по разработке физико-математических моделей и изучению особенностей в них [3–17], которые усвершенствуются путем учета новых физических эффектов в соплах. В большинстве моделей рассмотрены эффекты, связанные с поступательным движением капель, хотя в ряде работ отмечается возможность вращения капель за счет различных процессов [15, 18–20]. В работах [12–15] показано, что в результате многочисленных столкновений капель различ-

ных размеров момент импульса у них может накапливаться и даже достигать критических значений для их разрушения центробежными силами [1, 18]. Для описания разрушения капель из-за вращения в [1, 12–15] к системе газодинамических уравнений двухфазного течения добавлено уравнение для квадрата момента вращения капель.

В двухфазных течениях в сопле Лавала жидкие капли сталкиваются [1]. Если до столкновения они не вращались, то после коагуляции момент вращения образовавшейся капли равен

$$\vec{M}_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (r_1 + r_2) \vec{e}_0 \times \vec{v}, \quad (1)$$

где 1 и 2 – индексы капель, $\vec{v} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ – вектор относительной скорости капель, $\vec{e}_0$ – единичный вектор в направлении отрезка, соединяющего центры сфер в момент столкновения. Угловая скорость вращения капли $\omega = |\vec{M}_0|/I$ может достигать величин $\sim 10^7$ 1/сек, где момент инерции образовавшейся сферической капли $I = 0.4mr^2$, если принять радиусы частиц $r = 5 \cdot 10^{-6}$ м, и $|\vec{v}| \sim 100$ м/с в минимальном сечении сопла.

Считая приближенно вращающиеся капли сферами, запишем уравнения вращения и движения сферы в газе:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\frac{\vec{M}}{t_{\text{вр}}}, t_{\text{вр}} = \frac{r^2 \rho}{15 \rho_r v_r} \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = 0.3 \varphi \frac{\vec{u}_r - \vec{u}}{t_{\text{вр}}} + \frac{(\vec{u}_r - \vec{u}) \times \vec{M}}{8 m v_r t_{\text{вр}}}, \varphi = -\left(1 + \frac{3}{8} \frac{r |\vec{u}_r - \vec{u}|}{v_r}\right) \quad (3)$$

где $\vec{M}$, $\vec{u}$, $\vec{u}_r$ – момент количества движения, скорость сферы и скорость газа, v_r , ρ_r – кинематическая вязкость и плотность газа, m – масса капли.

Выражение (2) получено в приближении Стокса, а (3) – в приближении Озеена для движения сферы в вязкой жидкости. В сверхзвуковых соплах Лавала, как следует из многочисленных расчетов (см.: [1, 8, 17]), вектор разности скоростей $\vec{v}$ сталкивающихся капель в области сильной коагуляции (в области минимального сечения) почти параллелен оси сопла, поэтому момент вращения $\vec{M}_0$ перпендикулярен $\vec{v}$ и лежит в радиальной плоскости сопла. Вектор $\vec{u}_r - \vec{u}$ также почти параллелен оси сопла, поэтому вектор силы Магнуса (см. второй член правой части (3)) находится в радиальной плоскости сопла. В области горла сопла перемещения частиц в радиальном направлении за счет силы Магнуса отодвинут предельные линии частиц к стенке сопла и сдвинут место выпадения частиц к минимальному сечению, что важно при профилировании контура сопла.

Цель работы – на основе кинетического подхода [21] построить математическую модель двухфазного течения, описывающую диффузию вращающихся капель под действием силы Магнуса в осесимметричном сопле Лавала.

Постановка задачи

Среднестатистические параметры будем задавать с помощью функции распределения. Разобьем все капли на входе в сопло на K_p фракций. К каплям i -той фракции отнесем все капли массой m в интервале масс $m_i < m < m_{i+1}$.

Пусть x_1, x_2, x_3 – декартовы координаты. Обозначим функцию распределения i -той фракции

$$f^i(t, x_1, x_2, x_3, m, u_1, u_2, u_3, T, M_1, M_2, M_3). \quad (4)$$

В дальнейшем вместо (4) будем использовать компактную форму записи:

$$f^i(t, m, \bar{\Omega}), \quad \bar{\Omega} = \{x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, T, M_1, M_2, M_3\} \quad (5)$$

Число капель i -той фракции с параметрами $\bar{\Omega}$, принимающими значения в фазовом объеме $d\bar{\Omega}$, равно $f^i(t, m, \bar{\Omega})d\bar{\Omega}$.

Выделим в момент времени t капли i -той фракции с параметрами $\bar{\Omega}$ в фазовом объеме $d\bar{\Omega}$. В момент времени $t + \Delta t$ у этих капель параметры станут Ω' , и они займут фазовый объем $d\Omega'$. Разность числа выделенных капель в моменты $t + \Delta t$ и t равна

$$\Delta N = \int_{\Omega'_x} f^i(t + \Delta t, \bar{\Omega})d\bar{\Omega} - \int_{\Omega_x} f^i(t, \bar{\Omega})d\bar{\Omega} = \Delta t \int \frac{\partial_c J^i}{\partial t} d\bar{\Omega}, \quad (6)$$

где скорость прихода капель в единицу времени в единице фазового объема Ω в результате столкновений условно обозначена $\frac{\partial_c J^i}{\partial t}$. Из (6)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial_c J^i}{\partial t} d\bar{\Omega} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega} [f^i(t + \Delta t, \bar{\Omega}) - f^i(t, \bar{\Omega})] d\bar{\Omega} \right\} + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega - \Omega} f^i(t + \Delta t, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{\partial f^i}{\partial t} d\bar{\Omega} + \int_{\Sigma} f^i \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} \vec{n} d\Sigma, \end{aligned} \quad (7)$$

где Σ – поверхность, ограничивающая Ω , а $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к ней, $\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t}$ – скорость изменения вектора $\bar{\Omega}$.

Воспользовавшись теоремой Остроградского, с учетом произвольности Ω из (7) получим

$$\frac{\partial f^i}{\partial t} + \frac{\partial u_k f^i}{\partial x_k} + \frac{\partial a_k f^i}{\partial u_k} + \frac{\partial B_k f^i}{\partial M_k} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{qS}{mc_v} f^i \right) = \frac{\partial_c J^i}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad a_k = \frac{du_k}{dt}, B_k = \frac{dM_k}{dt}, \frac{dT}{dt} = \frac{qS}{mc_v}, \quad (9)$$

S – площадь поверхности сферической капли, c_v – удельная теплоемкость вещества капли при постоянном объеме, q – поток тепла в единицу времени на единицу поверхности капли.

Уравнение переноса признака частиц

Запишем теперь уравнение для признака капли $\Phi(t, m, \bar{\Omega})$, под которым будем понимать произвольную величину, переносящуюся вместе с каплей и зависящую от ее массы, скорости, момента и температуры.

Уравнение для признака частиц получим способом, аналогичным [6]. Умножим левую и правую части (8) на функцию признака $\Phi(t, m, \bar{\Omega})$ и проинтегрируем по всему фазовому объему Ω и массам m , тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial f^i}{\partial t} d\bar{\Omega} dm + \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial u_k f^i}{\partial x_k} d\bar{\Omega} dm + \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial}{\partial u_k} (a_k f^i) d\bar{\Omega} dm + \int_{\Omega} \frac{s}{mc_v} \Phi \frac{\partial}{\partial T} (q f^i) d\bar{\Omega} dm + \\ + \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial}{\partial M_k} (B_k f^i) d\bar{\Omega} dm = \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial_c J^i}{\partial t} d\bar{\Omega} dm. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим

$$\int_{\Omega} \Phi(t, m, \bar{\Omega}) f^i(t, m, \bar{\Omega}) d\bar{\Omega} dm dT dm = \langle \Phi^i(t, \bar{x}) \rangle \langle f^i(t, \bar{x}) \rangle = \Phi^i f^i. \quad (11)$$

Предполагая, что $f^i = 0$ на границе Ω , интегрированием по частям из (10) получим (индекс i , указывающий номер фракции, опустим):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi f) - f \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} (f \langle \Phi u_k \rangle) - f \left\langle u_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle - f \left\langle a_k \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \right\rangle - \frac{s}{mc_v} f \left\langle q \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right\rangle - f \left\langle B_k \frac{\partial \Phi}{\partial M_k} \right\rangle = \\ = \Delta(\Phi) = \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial_c J}{\partial t} d\bar{\Omega} dm. \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем в (12) к новым переменным $\vec{v}$, θ , $\vec{L}$:

$$\vec{v} = \vec{u} - \langle \vec{u} \rangle, \quad \theta = T - \langle T \rangle, \quad \vec{L} = \vec{M} - \langle \vec{M} \rangle \quad (13)$$

Из (12) и (13) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi f) - f \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} (f \langle \Phi u_k \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_k} (f \langle u_k \rangle \langle \Phi \rangle) - f \left[\langle u_k \rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle + \frac{\partial \langle \Phi u_k \rangle}{\partial x_k} + \left\langle a_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right\rangle + \right. \\ \left. + \frac{s}{mc_v} f \left\langle q \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle - \left\langle B_k \frac{\partial \Phi}{\partial L_k} \right\rangle \right] = \Delta(\Phi), \end{aligned} \quad (14)$$

где из (2)–(3)

$$\begin{aligned} a_k = a \Delta u_k - a v_k + b \varepsilon_{kpq} (\langle M_p \rangle \Delta u_q + L_p \Delta u_q - \langle M_p \rangle v_q - L_p v_q), \\ B_k = B \langle M_k \rangle + B L_k, \Delta u_k = u_{rk} - \langle u_k \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Поток теплоотдачи $q = \alpha \Delta T - \alpha \theta$, $\Delta T = T_r - \langle T \rangle$, где u_{rk} и T_r – компоненты скоростей газа и температура газа, $\alpha = 0.3\varphi$, $b = \frac{1}{8m v_r t_{вр}}$, $B = -\frac{1}{t_{вр}}$ – коэффициенты, не

зависящие от $\vec{v}$, θ , $\vec{L}$, ε_{kpq} – тензор Леви-Чевиты. Из (15)

$$\left\langle a_k \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle = a \Delta u_k \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle - a \left\langle v_k \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle + b A(\Phi), \quad (16)$$

$$\left\langle B_k \frac{\partial \Phi}{\partial L_k} \right\rangle = B \langle M_k \rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial L_k} \right\rangle + B \left\langle L_k \frac{\partial \Phi}{\partial L_k} \right\rangle, \left\langle q \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle = a \Delta T \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle - a \left\langle \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle,$$

$$A(\Phi) = \varepsilon_{kpq} \left(\langle M_p \rangle \Delta u_q \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle + \Delta u_q \left\langle L_p \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle - \langle M_p \rangle \left\langle v_q \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle - \left\langle L_p v_q \frac{\partial \Phi}{\partial v_k} \right\rangle \right).$$

Полагая в (14) $\Phi = 1, m, v_k, \theta, L_k, v_k u_k, v_k L_p, L_k L_q, v_k \theta, L_k \theta, \theta^2$ и пренебрегая моментами выше второго, получим систему уравнений до моментов второго порядка включительно. Величины $\langle v_k^P \theta^P L_q^P \rangle$ будем называть моментами порядка $P_1 + P_2 + P_3$.

В дальнейшем моментами выше второго порядка будем пренебрегать, а моменты первого порядка обозначать $\langle M_p \rangle = M_p, \langle T \rangle = T, \langle u_k \rangle = u_k$.

Интегралы столкновений

Выясним вид правой части (8). $\frac{\partial_c J^i}{\partial t}$ будем называть интегралом столкновений. Имеем

$$\frac{\partial_c J^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^i A_{ij} - \sum_{j=i+1}^{K_p} A_{ij}^-, \quad (17)$$

где A_{ij} – скорость прихода капель i -той фракции с параметрами $\bar{\Omega}$ в результате коагуляции капель i -той и j -той фракций, $i \geq j$, A_{ij}^- – скорость ухода капель i -той фракции с параметрами $\bar{\Omega}$ в результате слияний с каплями j -той фракции. Такое отнесение образовавшихся после коагуляции капель к каплям большей фракции позволит далее решать уравнения методом Лагранжа. Здесь также предполагается, что после не слияния параметры сталкивающихся капель не изменяются.

Установим вид A_{ij} . Обозначим параметры сталкивающихся капель как $\bar{\Omega}_{m1}$ и $\bar{\Omega}_{m2}$:

$$\bar{\Omega}_{mk} = \{m_k, \bar{u}_k, T_k, \bar{M}_k\}, \quad k = 1, 2. \quad (18)$$

Пусть капля с параметрами $m, \bar{u}, T, \bar{M}$ образуется при столкновении-слиянии двух капель с параметрами $\bar{\Omega}_{m1}$ и $\bar{\Omega}_{m2}$. Тогда имеем следующие уравнения законов сохранения:

$$m = m_1 + m_2, m\bar{u} = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2, E_n(\bar{\Omega}) = E_n(\bar{\Omega}_1) + E_n(\bar{\Omega}_2),$$

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_0, E_n(\bar{\Omega}_k) = m_k c_v T_k + m_k \frac{\bar{u}_k^2}{2} + \frac{\bar{M}_k^2}{2I_k} + \sigma S_k, \quad (19)$$

где $\bar{M}_0$ вычисляется из (1), $S_k = 4\pi r_k^2$, σ – коэффициент поверхностного натяжения, $I_k = \frac{2}{5} m_k r_k^2$.

Из (19) видно, что параметры $\bar{\Omega}_m$ вычисляются через $\bar{\Omega}_{m1}$ и $\bar{\Omega}_{m2}$ и случайные координаты θ и φ вектора столкновения $\vec{e}_0$. Число столкновений в единице объема

за единицу времени капле i -той фракции с параметрами $\vec{\Omega}_{m1}$, с каплями j -той фракции с параметрами $\vec{\Omega}_{m2}$ равно

$$k_{ij}(\vec{\Omega}_{m1}, \vec{\Omega}_{m2}) = f_i(t, \vec{x}, \vec{\Omega}_{m1}) f_j(t, \vec{x}, \vec{\Omega}_{m2}) \left| \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \right| \pi(r_1 + r_2)^2, \quad (20)$$

где r_1 и r_2 – радиусы сферических капель i -той и j -той фракций соответственно (индекс 1 относится к i -той фракции, а 2 – к j -той фракции).

Из (20) имеем, учитывая, что якобиан перехода J от переменных $\vec{\Omega}_{m2}$ к $\vec{\Omega}_m$ из (19) равен $J = \frac{\partial \vec{\Omega}_{m2}}{\partial \vec{\Omega}_m} = \left(\frac{m}{m - m_1} \right)^4$:

$$A_{ij} = \int_{\Omega^+} k_{ij}(\vec{\Omega}_{m1}, \vec{\Omega}_{m2}) \left(\frac{m}{m - m_1} \right)^4 v(\theta, \varphi) d\vec{\Omega}_{m1} d\theta d\varphi, \quad (21)$$

где Ω^+ – область переменных $\vec{\Omega}_{m1}, \theta, \varphi$, в которой происходит слияние капель с параметрами $\vec{\Omega}_{m1}, \vec{\Omega}_{m2} = \vec{\Omega}_{m2}(\vec{\Omega}_{m1}, \vec{\Omega}_m, \theta, \varphi)$. Векторная функция $\vec{\Omega}_{m2}(\vec{\Omega}_{m1}, \vec{\Omega}_m, \theta, \varphi)$ вычисляется по формулам (19); $v(\theta, \varphi)$ – вероятность того, что вектор $\vec{e}_0$ имеет координаты θ, φ .

При условии равномерности в объеме капель, имеющих любые параметры $\vec{\Omega}_1$, будем считать, что на единицу площади, перпендикулярной $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, приходится равное число столкновений. Элементарная площадка на этой площади равна

$$dS = r dr d\varphi; r = (r_1 + r_2) \sin \theta, dr = (r_1 + r_2) \cos \theta d\theta, \quad (22)$$

где θ – угол между $\vec{e}_0$ и $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, угол φ отсчитывается в радиальной плоскости. Тогда, учитывая (22), имеем:

$$v(\theta, \varphi) = \frac{dS}{\pi(r_1 + r_2)^2} = \frac{\sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi}{\pi}. \quad (23)$$

Из (21)–(23)

$$A_{ij} = \int_{\Omega^+} k_{ij}(\vec{\Omega}_{m1}, \vec{\Omega}_{m2}) \frac{\sin \theta \cos \theta}{\pi} \left(\frac{m}{m - m_1} \right)^4 d\vec{\Omega}_{m1} d\theta d\varphi, \quad (24)$$

где параметры $\vec{\Omega}_{m2}$ выражаются по формулам (19).

Для того, чтобы определить A_{ij}^- , заметим, что любое слияние капель с параметрами $\vec{\Omega}_{m1}$ изменяет $\vec{\Omega}_m$, поэтому

$$A_{ij}^- = \int_{\Omega^-} k_{ij}(\vec{\Omega}_m, \vec{\Omega}_{m1}) d\vec{\Omega}_{m1}, \quad (25)$$

где Ω^- – область коагуляции для переменных $\vec{\Omega}_{m1}$.

Для того, чтобы выражения A_{ij} и A_{ij}^- были полностью определены, установим вид областей Ω^+ и Ω^- . Условимся, что слияние происходит, если выполнены необходимые условия слияния капель при соударениях

$$\Omega^+ : |\vec{M}| = |\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_0| < \Omega_{n*} (\rho \sigma (r_1^3 + r_2^3))^{\frac{7}{3}}, \quad \Omega_{n*} = 5.23, \quad (26)$$

$$\Omega^- : |\vec{M} + \vec{M}_1 + \vec{M}_0| < \Omega_{n*} (\rho \sigma (r_1^3 + r_2^3))^{\frac{7}{3}}. \quad (27)$$

Вычислим $\Delta(\Phi)_i$. Из (12) $\Delta(\Phi)_i = \int_{\Omega_\infty} \Phi \frac{\partial_c J^i}{\partial t} d\vec{\Omega} dm$. Здесь Ω_∞ – вся область изменения параметров $\vec{\Omega}$. Из (17) получим

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi)_i &= \sum_{j=1}^i I_{A_j} - \sum_{j=i+1}^{K_p} I_{A_j^-}, \\ I_{A_j} &= \int_{\Omega_\infty} \Phi A_{ij} d\vec{\Omega}, \quad I_{A_j^-} = \int_{\Omega_\infty} \Phi A_{ij}^- d\vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (28)$$

Перейдем в этих интегралах от переменных $\vec{\Omega}$ к $\vec{\Omega}_2$ по формулам (19). Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} I_{A_j} &= I_{ij}, \quad i \geq j; \quad I_{A_j^-} = I_{ij}, \quad i < j; \\ I_{ij} &= \int_{\Omega_\infty} \int_{\Omega^+} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi K_{ij}(\vec{\Omega}_{m1}, \vec{\Omega}_{m2}) \frac{\sin \theta \cos \theta}{\pi} \right\} d\vec{\Omega}_{m1} d\vec{\Omega}_{m2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Задача о диффузии вращающихся капель под действием силы Магнуса в осесимметричном сопле

Применим полученные уравнения для описания диффузии вращающихся капель под действием силы Магнуса в осесимметричном сопле Лавала. Пусть характерное время затухания колебаний T_1 в образовавшейся после коагуляции капле намного меньше характерного времени между столкновениями $T_{ст}$, тогда в течение времени между столкновениями капли будут вращаться, как квазитвердые тела.

Рассмотрим осесимметричное двухфазное течение, когда ортогональные векторы базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ есть $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_x$ – единичные векторы цилиндрической системы координат. Относительная скорость коагулирующих капель параллельна оси сопла x . Направление вектора $\vec{e}_0$ (см. формулу (1)) при столкновениях равновероятно в радиальной плоскости, а потеря момента количества движения за счет трения о газ (см. формулу (3)) не изменяет его направления, уменьшая только его модуль. Поэтому интеграл столкновения $\Delta(\vec{M}) = 0$ и величины вектора момента вращения капель $\langle \vec{M} \rangle = 0$, если нет градиента концентрации капель в радиальной плоскости сопла. Но в двухфазном потоке в сопле имеются градиенты концентраций капель в радиальном сечении. Покажем, что в этом случае величины $\langle M_2 \rangle$ уже не будут нулевыми. Действительно, сила Магнуса в радиальном направлении

$$(\vec{a}_M)_1 = -\frac{M_2(u_{r3} - u_3)}{8m\nu_r t_{вр}}, \quad (30)$$

и если есть диффузионный поток капель в радиальном направлении, то в этом потоке капли имеют компоненту M_2 того знака, который отвечает за перемещение капель в направлении меньших концентраций, т.е. к стенке, поэтому $\langle M_2 \rangle \neq 0$. Поток компоненты M_2 в радиальном направлении пропорционален $\langle u_1 M_2 \rangle = \langle u_1 \rangle \langle M_2 \rangle + \langle v_1 L_2 \rangle$, поэтому величина $\langle u_1 M_2 \rangle$ должна отвечать за создание ненулевого $\langle M_2 \rangle$. Заметим, что на самой стенке капли имеют M_2 одного знака, так что здесь $\langle M_2 \rangle$ может быть порядка $\langle \overline{M}^2 \rangle^{1/2}$. Согласно формуле (3), величина силы Магнуса пропорциональна $\langle u_3 M_2 \rangle = \langle u_3 \rangle \langle M_2 \rangle + \langle v_3 L_2 \rangle$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что при учете вращения капель в виде (2)–(3) в области больших градиентов нужно учитывать величины $M_2, \langle v_1 L_2 \rangle, \langle v_3 L_2 \rangle$. В ядре потока (вдали от стенки сопла) должны рассчитываться величины $\langle f \rangle = n, \langle mf \rangle = \rho, u, v, T, \langle L_1 L_1 \rangle, \langle L_2 L_2 \rangle$, где n – число капель в единице объема, ρ – массовая плотность.

Помимо прочего, около стенки должны быть учтены величины $\langle v_1 v_1 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle$, определяющие вектор плотности потока диффузионного количества движения относительно вектора средней скорости.

Для того чтобы более строго обосновать приведенные выше рассуждения, рассмотрим общую систему моментных уравнений до вторых моментов при следующих предположениях:

1) так как векторы $|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|$ и $\vec{u}_r - \vec{u}$ имеют компоненты в направлении вдоль оси сопла на порядок большие, чем радиальные, то из (1)–(3) будем считать, что векторы собственных моментов количества движения и векторы силы Магнуса лежат в радиальной плоскости сопла;

2) диффузия вращающихся капель к стенке сопла под действием большого градиента концентрации капель в радиальном направлении приводит к тому, что нужно рассматривать и моментные уравнения второго порядка в области больших градиентов концентраций;

3) в ядре потока отличны от нуля только следующие моменты второго порядка: $\langle L_1 L_1 \rangle, \langle L_2 L_2 \rangle, \langle v_1 v_1 \rangle, \langle v_3 v_3 \rangle$;

4) из соображений симметрии и из-за равновероятности столкновений относительно вектора $\vec{e}_0$ и малых градиентов концентраций капель в направлениях 2 и 3 $\langle \vec{M}_1 \rangle = 0$ и

$$\Delta(L_1 L_1) = \Delta(L_2 L_2); \quad (31)$$

5) в осесимметричном случае

$$\langle v_1 v_2 \rangle = \langle v_2 v_2 \rangle = \langle v_3 v_2 \rangle = 0, \langle v_2 L_1 \rangle = \langle v_2 L_2 \rangle = \langle v_2 L_3 \rangle = 0; \quad (32)$$

6) так как из предположения 3 имеем $M_3 = 0$ для всех капель, то

$$M_3 = 0, \langle L_3 v_1 \rangle = \langle L_3 v_2 \rangle = \langle L_3 v_3 \rangle = 0, \langle L_3 L_1 \rangle = \langle L_3 L_2 \rangle = \langle L_3 L_3 \rangle = 0; \quad (33)$$

7) пренебрежем величинами

$$\langle \theta v_1 \rangle = \langle \theta v_2 \rangle = \langle \theta v_3 \rangle = 0, \langle \theta L_1 \rangle = \langle \theta L_2 \rangle = \langle \theta L_3 \rangle = 0. \quad (34)$$

В системе уравнений моментов до второго порядка включительно в области больших градиентов пренебрежем градиентами всех моментов второго порядка по сравнению с градиентом концентрации в радиальном направлении. Тогда с учетом предположений 1–7 будем рассматривать следующие уравнения для моментов второго порядка:

$$\begin{aligned} (\varepsilon - 2a) \langle v_1 v_1 \rangle + b [2\Delta u_3 \langle L_2 v_1 \rangle - 2M_2 \langle v_3 v_1 \rangle] + \Delta \langle v_1 v_1 \rangle &= 0, \\ (\varepsilon - 2a) \langle v_1 v_3 \rangle + b [\Delta u_3 \langle L_2 v_3 \rangle - M_2 \langle v_3 v_3 \rangle - \Delta u_1 \langle L_2 v_1 \rangle + M_2 \langle v_1 v_1 \rangle] &= 0, \\ (\varepsilon - 2a) \langle v_3 v_3 \rangle + b [-2\Delta u_1 \langle L_2 v_3 \rangle + 2M_2 \langle v_1 v_3 \rangle] + \Delta \langle v_3 v_3 \rangle &= 0, \\ (\varepsilon - a + B) \langle v_1 L_1 \rangle + b [\Delta u_3 \langle L_2 L_1 \rangle - M_2 \langle v_3 L_1 \rangle] &= 0, \\ (\varepsilon - a + B) \langle v_1 L_2 \rangle - b M_2 \langle v_3 L_2 \rangle + b \Delta u_3 \langle L_2 L_2 \rangle &= 0, \\ (\varepsilon - a + B) \langle v_3 L_2 \rangle + b M_2 \langle v_1 L_2 \rangle - b \Delta u_1 \langle L_2 L_2 \rangle &= 0, \\ (\varepsilon - a + B) \langle v_3 L_1 \rangle + b [-\Delta u_1 \langle L_2 L_1 \rangle + M_2 \langle v_1 v_1 \rangle] &= 0, \\ (\varepsilon - a + B) \langle L_1 L_2 \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где
$$\varepsilon = -\frac{u_1}{r} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial r}. \quad (36)$$

Из уравнения (35) $\langle L_1 L_2 \rangle = 0$. Уравнение для $\langle v_1 L_1 \rangle$ и $\langle v_3 L_1 \rangle$ однородны, и определитель $(\varepsilon - a + B)^2 + b^2 M_2^2 > 0$, тогда $\langle v_1 L_1 \rangle = 0, \langle v_3 L_1 \rangle = 0$.

Уравнения для $\langle v_1 L_2 \rangle$ и $\langle v_3 L_2 \rangle$ имеют решение

$$\begin{aligned} \langle v_1 L_2 \rangle &= \frac{b \langle L_2 L_2 \rangle}{\Delta} [(\varepsilon - a + B) \Delta u_3 - b M_2 \Delta u_1], \\ \langle v_3 L_2 \rangle &= -\frac{b \langle L_2 L_2 \rangle}{\Delta} [(\varepsilon - a + B) \Delta u_1 + b M_2 \Delta u_3], \Delta = (\varepsilon - a + B)^2 + b^2 M_2^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Из уравнений для $\langle v_1 v_1 \rangle, \langle v_1 v_3 \rangle$ получим

$$\begin{aligned} \langle v_1 v_1 \rangle &= \left\{ [(\varepsilon - a + B)^2 + 2b^2 M_2^2] [2b \Delta u_3 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta \langle v_1 v_1 \rangle] + 2b^2 M_2 (\varepsilon - 2a) \times \right. \\ &\quad \times [\Delta u_1 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta u_3 \langle v_3 L_2 \rangle] + 2b^2 M_2^2 [2\Delta u_1 \langle v_3 L_2 \rangle - \Delta \langle v_3 v_3 \rangle] \left. \right\} / \Delta 1, \\ \langle v_1 v_3 \rangle &= \left\{ [(\varepsilon - 2a)b] [\Delta u_3 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta u_3 \langle v_3 L_2 \rangle] - b M_2 [2b \Delta u_3 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta \langle v_1 v_1 \rangle] + \right. \\ &\quad + b M_2 [2\Delta u_1 \langle v_3 L_2 \rangle - \Delta \langle v_3 v_3 \rangle] \left. \right\} (\varepsilon - 2a) / \Delta 1, \\ \Delta 1 &= (\varepsilon - 2a) [(\varepsilon - 2a)^2 + 4b^2 M_2^2], \\ \langle v_3 v_3 \rangle &= \left\{ [(\varepsilon - 2a - 2b M_2)] [2b \Delta u_1 \langle v_3 L_2 \rangle - \Delta \langle v_3 v_3 \rangle] - \right. \\ &\quad - 2b^2 M_2 [\Delta u_1 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta u_3 \langle v_3 L_2 \rangle] + \\ &\quad + (\varepsilon - 2a) [2b \Delta u_3 \langle v_1 L_2 \rangle - \Delta \langle v_1 v_1 \rangle] \left. \right\} (\varepsilon - 2a) / \Delta 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Из решений (35)–(38) около стенки сопла видно, что влияние на диффузию членов $\langle v_1 L_1 \rangle$, $\langle v_3 L_1 \rangle$, $\langle L_1 L_2 \rangle$ мало по сравнению с величинами $\langle v_1 v_1 \rangle$, $\langle v_1 v_3 \rangle$, $\langle v_1 L_2 \rangle$, $\langle v_3 L_2 \rangle$.

В уравнениях для моментов первого порядка только $\langle v_1 v_1 \rangle$, $\langle v_1 L_2 \rangle$, $\langle v_1 v_3 \rangle$ входят с градиентом f в радиальном направлении. На этом основании уравнения для $\langle v_3 v_3 \rangle$, $\langle v_3 L_2 \rangle$ рассматривать не будем, и в остальных уравнениях будем считать $\langle v_3 v_3 \rangle = 0$, $\langle v_3 L_2 \rangle = 0$.

Так как $\langle v_1 v_3 \rangle$ входит в уравнение для u_3 , то будем принимать и $\langle v_1 v_3 \rangle = 0$, так как влияние диффузии за счет силы Магнуса на компоненту u_3 мало по сравнению с влиянием на компоненту u_1 .

Уравнения для моментов с учетом рассмотренных выше предположений (1–7) и $\langle v_3 v_3 \rangle = \langle v_1 v_3 \rangle = 0$, $\langle v_3 L_2 \rangle = 0$ следующие:

$$\hat{D}n = \Delta(1), \hat{D}\rho = \Delta(m), \quad (39)$$

$$f \hat{D}_t \rho u_1 + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \langle v_1 v_1 \rangle) \rho - \rho [a \Delta u_1 + b M_2 \Delta u_3] = \Delta(m v_1), \quad (40)$$

$$f \hat{D}_t \rho u_3 - \rho [a \Delta u_3 - b M_2 \Delta u_1 + b \langle v_1 L_2 \rangle] = \Delta(m v_3), \quad (41)$$

$$f \hat{D}_t \rho M_2 + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \langle v_1 L_2 \rangle f) - b M_2 f = \Delta(L_2), \quad (42)$$

$$f \hat{D}_t \rho T - \frac{sa}{mc_v} \Delta T \rho = \Delta(m \theta), \quad (43)$$

$$\hat{D}_t (\langle v_1 v_1 \rangle \rho) + 2 \langle v \rho v_1 \rangle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \rho [-2a \langle v_1 v_1 \rangle + 2b \langle v_1 L_2 \rangle] = \Delta(v_1 v_1), \quad (44)$$

$$\hat{D}_t (\langle v_1 L_2 \rangle n) + n \left[\langle v_1 L_2 \rangle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \langle v_1 v_1 \rangle \frac{\partial M_2}{\partial x_1} \right] - n [(B-a) \langle v_1 L_2 \rangle + b \Delta u_3 L_2 L_2] = \Delta(v_1 L_2), \quad (45)$$

$$\hat{D}_t (\langle L_1 L_1 \rangle n) - 2B \langle L_1 L_1 \rangle n = \Delta(L_1 L_1), \quad (46)$$

$$\hat{D}_t (\langle L_2 L_2 \rangle n) + 2n \langle v_1 L_2 \rangle \frac{\partial M_2}{\partial x_1} - 2B \langle L_2 L_2 \rangle n = \Delta(L_2 L_2), \quad (47)$$

где применены обозначения:

$$\hat{D}\psi = \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 u_1 \psi) + \frac{\partial}{\partial x_3} (u_3 \psi),$$

$$\hat{D}_t \psi = u_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} (x_1 u_1 \psi) + u_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Сделаем еще одно допущение. В уравнении (47) будем считать произведение $\langle v_1 L_2 \rangle \frac{\partial M_2}{\partial x_1}$ величиной более высокого порядка малости, чем члены, порождаю-

щие диффузионные поправки в рассматриваемых уравнениях. Другими словами, если $\langle v_1 L_2 \rangle \sim \varepsilon U M$ и $\frac{\partial M_2}{\partial x_1} \sim \varepsilon \frac{M_2}{L_1}$, где ε – малая величина, равная нулю, если диффузии нет, а U, M_2, L_1 – масштабы скорости, момента количества движения и длины, то $\langle v_1 L_2 \rangle \frac{\partial M_2}{\partial x_1} \sim \varepsilon^2 \frac{U M^2}{L_1}$.

Заметим также следующее. В уравнениях (46)–(47) $\langle L_1 L_1 \rangle = \langle L_2 L_2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle \overline{M}^2 \rangle - M_2^2)$ что следует из предположения 4. Тогда, вычитая уравнения, получим $\hat{D}[(\langle L_1 L_1 \rangle - \langle L_2 L_2 \rangle) f] - 2B(\langle L_1 L_1 \rangle - \langle L_2 L_2 \rangle) f = 0$. Решением этого уравнения при начальном условии на входе в сопло $\langle L_1 L_1 \rangle - \langle L_2 L_2 \rangle = 0$ является $\langle L_1 L_1 \rangle - \langle L_2 L_2 \rangle = 0$. Так как $\langle \overline{M}^2 \rangle = \langle L_1 L_1 \rangle + \langle L_2 L_2 \rangle + M_2^2$, имеем

$$\langle L_1 L_1 \rangle = \langle L_2 L_2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle \overline{M}^2 \rangle - M_2^2). \quad (48)$$

Поэтому вместо уравнений (46), (47) будем рассматривать только уравнение для $\langle \overline{M}^2 \rangle$, которое будет иметь следующий вид:

$$\hat{D}_t \left(\langle \overline{M}^2 \rangle n \right) + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 M_2 \langle v_1 L_2 \rangle n) - 2B \langle \overline{M}^2 \rangle n = \Delta(\overline{M}^2). \quad (49)$$

Система моментных уравнений до второго порядка включительно с учетом сформулированных предположений окончательно в консервативной форме будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial A}{\partial x_3} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 B) = C. \quad (50)$$

Здесь

$$A = u \begin{vmatrix} n \\ \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho T \\ \langle \overline{M}^2 \rangle \\ M_2 \\ v M_2 + \langle v_1 L_2 \rangle \\ \rho v^2 + \langle \rho v_1 v_1 \rangle \end{vmatrix}, \quad B = f \begin{vmatrix} v \\ \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + \rho \langle v_1 v_1 \rangle \\ \rho v T \\ v \langle \overline{M}^2 \rangle + M_2 \langle v_1 L_2 \rangle \\ v M_2 + \langle v_1 L_2 \rangle \\ 2v \langle v_1 L_2 \rangle + M_2 \langle v_1 v_1 \rangle + v^2 M_2 \\ \rho v (v^2 + 3 \langle v_1 v_1 \rangle) \end{vmatrix}, \quad (51)$$

$$C = \left. \begin{aligned} &\Delta(1) \\ &\Delta(m) \\ &\Delta(mv) - \rho(a_f(u - u_r) - b_f M_2 \Delta v + b_f \langle v_1 L_2 \rangle) \\ &\Delta(mv) - \rho[a_f(v - v_r) + b_f M_2 \Delta u] \\ &\Delta(mT) - a_f(T - T_r)\rho \\ &\Delta(\overline{M}^2) - 2B_f \langle \overline{M}^2 \rangle n \\ &\Delta(M_2) - B_f M_2 n \\ &\Delta(v M_2) - n \left\{ (a_f + B_f)(M_2 v + \langle v_1 L_2 \rangle) - a_f M_2 v_r + b_f \Delta u (M_2^2 \langle \overline{M}^2 \rangle / 2) \right\} \\ &\Delta(mv^2) - \rho \left\{ 2a_f (\langle v_1 v_1 \rangle - v \Delta v) + 2b_f \Delta u (M_2 v + \langle v_1 L_2 \rangle) \right\} \end{aligned} \right|, \quad (52)$$

где

$$u = u_3, v = u_1, a_f = a, B_f = -B, b_f = -b. \quad (53)$$

Заключение

В настоящей статье кинетический подход распространен на модель двухфазного течения в осесимметричном сопле Лаваля, которая учитывает радиальную диффузию капель под влиянием силы Магнуса, действующей на вращающуюся каплю, движущуюся со скоростью порядка 100 м/сек относительно газа в минимальном сечении сопла. Система уравнений с диффузией получена методом моментов из кинетического уравнения с точностью до моментов второго порядка. Учтены только моменты второго порядка, которые влияют на диффузию к стенке. Диффузия приведет к более раннему выпадению капель на стенку и разрушению сопла, поэтому она должна учитываться при профилировании контура сопла таким образом, чтобы срез сопла был ближе места выпадения.

Список источников

1. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
2. Алиев А.В. и др. Внутренняя баллистика РДТТ / РАРАН / под ред. А.М. Липанова, Ю.М. Милёхина. М. : Машиностроение, 2007. 504 с.
3. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники Гидромеханика. М. : Изд-во ВИНТИ, 1972. Т. 6. С. 93–174.
4. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М. : Машиностроение, 1974. 212 с.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
6. Крайко А.Н., Шрайбер А.А. К построению модели, описывающей в одномерном приближении двухфазное течение с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата // ЖПМТФ. 1974. № 2. С. 67–74.
7. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1980. 172 с.

8. Яненко Н.Н., Солоухин Р.И., Папырин А.Н., Фомин В.М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск : Наука, 1980. 160 с.
9. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дисперсных включений // Итоги науки и техники. Комплексные и специальные разделы механики. М. : Изд-во ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 3–80.
10. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск : Наука, 1986. 222 с.
11. Шишков А.А., Панин С.Д., Румянцев В.В. Рабочие процессы в ракетных двигателях твердого топлива. М. : Машиностроение, 1989. 239 с.
12. Липанов А.М., Бобрышев В.П., Алиев А.В., Спиридонов Ф.Ф., Лисица В.Д. Численный эксперимент в теории РДТТ / под ред. А.М. Липанова. Екатеринбург : Наука, 1994. 304 с.
13. Glazunov A.A., Vasenin I.M., Ivanov V.A., Kuvshinov N.E., Narimanov R.K. Two-Phase Flow in the Nozzles of Solid Rocket Motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11 (4). P. 583–592.
14. Глазунов А.А., Васенина Т.В., Ерёмин И.В., Кувишинов Н.Е. Исследование неравновесных пространственных двухфазных течений в эллиптических соплах с учетом коагуляции, дробления и вращения частиц и полидисперсной модели осколков // Известия вузов. Физика. 2004. № 10. С. 31–36.
15. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1994. 320 сс.
16. Бутов В.Г., Васенин И.М., Дьяченко Н.Н. Модель движения полидисперсного конденсата с учетом случайных пульсаций скорости и температуры коагулирующихся частиц // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 3. С. 33–39.
17. Губертов А.М., Миронов В.В., Борисов Д.М. и др. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / под ред. А.С. Коротева. М. : Машиностроение, 2004. 512 с.
18. Архипов В.А., Буцланов В.П., Васенин И.М. и др. Равновесные формы и устойчивость вращающихся капель // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 4. С. 13–20.
19. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение газа с частицами. М. : Физматлит, 2008. 600 с.
20. Наумов В.А., Соломенко А.Д., Яценко В.П. Влияние силы Магнуса на движение сферического твердого тела при большой угловой скорости // Инженерно-физический журнал. 1993. Т. 65, № 3. С. 287–290.
21. Гиршфельдер Дж., Керпис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 932 с.

References

1. Vasenin I.M., Arhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
2. Aliev A. V., Amarantov G. N., Akhmadeev V. F., Babuk V. A. (2007) *Vnutrennyaya ballistika RDIT* [Internal ballistics of solid propellant rocket engine]. Moscow. Mashinostroenie.
3. Krayko A.N., Nigmatulin R.I., Starkov V.K., Sternin L.E. (1972) *Mekhanika mnogofaznykh sred* [Mechanics of multiphase media]. *Itogi nauki i tekhniki. Gidromekhanika*. 6. Moscow: Izdatel'stvo VINITI.
4. Sternin L.E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Moscow: Mashinostroenie.
5. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Part I. Moscow: Nauka.
6. Krayko A.N., Shrayber A.A. (1974). K postroeniyu modeli, opisyyvayushchey v odnomernom priblizhenii dvukhfaznoe techenie s koagulyatsiyey chastits polidispersnogo kondensata

- [On the development of a one-dimensional model describing a two-phase flow with coagulation of particles of polydisperse condensate]. *ZHPMTF*. 2. pp. 67–74.
7. Sternin L.E., Maslov B.N., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. (1980) *Dvukhfaznye mono- i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami* [Two-phase mono- and polydisperse flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
 8. Yanenko N.N., Soloukhin R.I., Papyrin A.N., Fomin V.M. (1980) *Sverkhzvukovye dvukhfaznye techeniya v usloviyakh skorostnoy neravnovesnosti chastits* [Supersonic two-phase flows under conditions of velocity nonequilibrium of particles]. Novosibirsk: Nauka.
 9. Shrayber A.A. (1988) *Mnogofaznye polidispersnye techeniya s peremennym fraktsionnym sostavom dispersnykh vkluycheniy* [Multiphase polydisperse flows with variable fractional composition of dispersed inclusions]. 3. Moscow: Izdatel'stvo. VINITI.
 10. Rychkov A.D. (1986) *Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh* [Mathematical modeling of gas-dynamic processes in channels and nozzles]. Novosibirsk: Nauka.
 11. Shishkov A.A., Panin S.D., Rumyantsev V.V. (1989) *Rabochie protsessy v raketnykh dvigatelyakh tverdogo topliva* [Working processes in solid propellant rocket engines]. Moscow: Mashinostroenie.
 12. Lipanov A.M., Bobryshev V.P., Aliev A.V., Spiridonov F.F., Lisitsa V.D. (1994) *Chislennyy eksperiment v teorii RDTT* [Numerical experiment in the theory of solid propellant rocket engines]. Ekaterinburg: Nauka.
 13. Glazunov A.A., Vasenin I.M., Ivanov V.A., Kuvshinov N.E., Narimanov R.K. (1995) Two-phase flow in the nozzles of solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*. 11(4). pp. 583–592.
 14. Glazunov A.A., Vasenina T.V., Eryomin I.V., Kuvshinov N.E. (2004) Issledovanie neravnovesnykh prostranstvennykh dvukhfaznykh techeniy v ellipticheskikh soplakh s uchetom koagulyatsii, drobleniya i vrashcheniya chastits i polidispersnoy modeli oskolkov [Investigation of non-equilibrium spatial two-phase flows in elliptical nozzles with account for coagulation, breakup, and rotation of particles and polydisperse model of fragments]. *Fizika. Izvestiya VUZov – Russian Physics Journal*. 10. pp. 31–36.
 15. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
 16. Butov V.G., Vasenin I.M., D'yachenko N.N. (1981) Model' dvizheniya polidispersnogo kondensata s uchetom sluchaynykh pul'satsiy skorosti i temperatury koaguliruyushchikhsya chastits [Model of polydisperse condensate motion with allowance for random pulsations of velocity and temperature of coagulating particles]. *Izvestiya AN SSSR. MZHG*. 3. pp. 33–39.
 17. Gubertov A.M., Mironov V.V., Borisov D.M., Baskakov V.N., Volkova L.I., Volkov N.N., Gollender R.G., Gurina I.N., Dolganov Ya.A., Kalinin S.V., Kochetkov Yu.M., Kuranov M.L., Sivenkov V.N., Sonin V.I., Trusov Yu.D., Filimonov M.L., Yakovleva T.A. (2004) *Gazodinamicheskie i teplofizicheskie protsessy v raketnykh dvigatelyakh tverdogo topliva* [Gasdynamic and thermophysical processes in solid rocket propulsion]. Moscow: Mashinostroenie.
 18. Arkhipov V.A., Bushlanov V.P., Vasenin I.M., Rusakov V.V., Trofimov V.F. (1982) Ravnovesnye formy i ustoychivost' vrashchayushchikhsya kapel' [Equilibrium shapes and stability of rotating drops]. *Izvestiya. AN SSSR. MZHG*. 4. pp. 13–20.
 19. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techenie gaza s chastitsami* [Flow of a gas with particles]. Moscow: FIZMATLIT.
 20. Naumov V.A., Solomenko A.D., Yatsenko V.P. (1993) Vliyanie sily Magnusa na dvizhenie sfericheskogo tverdogo tela pri bol'shoi uglovoy skorosti [Effect of the Magnus force on the spherical rigid body motion at high angular velocity]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal – Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 65(3). pp. 287–290.
 21. Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird R.B. (1954) *Molecular Theory of Gases and Liquids*. New York: John Wiley and Sons.

Сведения об авторах:

Бушланов Владимир Петрович – доктор физико-математических наук, профессор Государственного морского университета им. адмирала Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, Россия. E-mail: bvp@ngs.ru

Бутов Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Bushlanov Vladimir P. (Doctor of Physics and Mathematics, Admiral Ushakov Maritime State University, Novorossiysk, Russian Federation). E-mail: bvp@ngs.ru

Butov Vladimir G. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Glazunov Anatoliy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 13.06.2023; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted 13.06.2023; accepted for publication 10.07.2023