

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/84/12

Математическая модель физически нелинейных крутильных колебаний круглого упругого стержня

Хайрулла Худойназаров

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,
kh.khudoyn@gmail.com*

Аннотация. Разработана математическая модель нестационарных крутильных колебаний круглого упругого стержня с учетом нелинейного закона упругости Г. Каудерера. Нелинейное уравнение движения упругого тела для случая крутильных колебаний стержня приведено к двум линеаризованным уравнениям в преобразованиях. Выведено физически нелинейное уравнение крутильных колебаний стержня, из которого в частном случае можно получить некоторые известные физически нелинейные уравнения колебания. Разработан алгоритм, позволяющий по полю искомым функций однозначно определить напряженно-деформированное состояние точек произвольного сечения стержня по пространственным координатам и времени.

Ключевые слова: математическая модель, нестационарность, крутильные колебания, нелинейные уравнения, физическая нелинейность, напряжения, перемещение

Для цитирования: Худойназаров Х. Математическая модель физически нелинейных крутильных колебаний круглого упругого стержня // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 152–166. doi: 10.17223/19988621/84/12

Original article

A mathematical model of physically nonlinear torsional vibrations of a circular elastic rod

Khayrulla Khudoynazarov

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan, kh.khudoyn@gmail.com

Abstract. A mathematical model of non-stationary torsional vibrations of a circular elastic rod is developed taking into account the Kauderer nonlinear law of elasticity. To solve this problem, the nonlinear equation of motion of an elastic body with torsional vibrations of a rod is reduced to two linear Bessel equations (homogeneous and inhomogeneous) in transformations. Considering general solutions of the obtained equations with zero initial and given boundary conditions on the surface of the rod,

a refined physically nonlinear equation of torsional vibrations of the rod made of homogeneous and isotropic material is derived. In particular, this equation may be used to obtain some well-known classical oscillation equations. An algorithm is proposed that allows one to determine the stress-strain state of the points along an arbitrary cross-section of the rod in terms of space and time coordinates using the field of the desired functions. Some special cases resulting from the obtained results are analyzed. In particular, by reducing the expressions of Bessel functions in the form of power series to the first few terms, an approximate equation of the circular rod oscillations is derived. Comparative analysis of findings and available data of other authors shows that the obtained equation generalizes the well-known classical linear equation and nonlinear equations of G. Kauderer and Professor I.G. Filippov. Based on the proposed equation and formulas for stresses and displacement, the applied problem of physically nonlinear torsional vibrations of a circular elastic rod under end and surface loads is solved.

Keywords: mathematical model, non-stationary, torsional vibrations, nonlinear equations, physical nonlinearity, stresses, displacement

For citation: Khudoynazarov, Kh. (2023) A mathematical model of physically nonlinear torsional vibrations of a circular elastic rod. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 152–166. doi: 10.17223/19988621/84/12

Введение

Цилиндрические оболочки и круглые стержни являются одними из основных элементов различных инженерных конструкций [1], и исследования их нелинейного динамического поведения имеют важное прикладное значение [2, 3]. Такие элементы в процессе эксплуатации часто находятся под воздействием динамических нагрузок, которые приводят к их нестационарным колебаниям [4, 5]. Как отмечено М. Амабили [6], В.И. Цурпаль [7] и другими исследователями, линейные теории не всегда достаточно точно описывают такие колебательные процессы, и поэтому для их исследования применяются различного рода нелинейные (геометрически и физически) теории [8, 9]. При этом во многих нелинейных задачах механики деформируемых твердых тел учитывается геометрическая нелинейность [10]. При сравнительно больших напряжениях, когда деформации остаются малыми, имеют место нелинейные зависимости между компонентами тензоров напряжений и деформаций [11].

Вопросам нестационарных колебаний элементов инженерных конструкций с учетом физической нелинейности в целом посвящено небольшое количество работ [12]. При исследовании динамического поведения элементов инженерных конструкций имеет важное значение разработка математических основ изучения процесса [13, 14]. Сюда примыкают и исследования крутильных колебаний цилиндрических оболочек и стержней, которые наряду с их продольными и поперечными колебаниями имеют важные приложения в стержневых системах. Так, в работах В.И. Ерофеева и соавт. [15] предложены математические модели, обобщающие уравнения крутильных колебаний стержней Кулона и Власова с учетом геометрической нелинейности. В общем случае нелинейность учитывается как в системе перемещений, так и в соотношениях, связывающих перемещения и деформации.

Трехслойные конструкционные элементы широко применяются в авиа- и судостроении, строительстве зданий и сооружений, космической промышленности и других отраслях. Поэтому актуальной является проблема разработки эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций, а также обобщения классических теорий с применением уточненных моделей, включая нелинейные, отражающие динамическое поведение современных материалов. В этом плане в работе А.В. Кудина и соавт. [16] приведен вариант уравнений изгиба трехслойных пластин симметричного строения с изотропными наружными слоями и физически нелинейно-упругим изотропным материалом заполнителя. Разработана трехмерная конечно-элементная модель трехслойной пластины, на основе которой получены численные оценки параметров состояния трехслойной конструкции.

Одной из основных проблем в исследовании динамического поведения оболочек и стержней является выбор уравнений колебания, который должен осуществляться, исходя из конкретных физико-механических свойств их материалов [17]. Поэтому во многих случаях исследователям приходится разрабатывать подходящие уравнения колебания [18]. Естественно, при этом используются различные методы вывода уравнений. К одному из таких методов относится метод использования общих решений в преобразованиях трехмерных задач теории упругости [19, 20]. Сущность метода сводится к изучению построенных решений при различных типах внешних воздействий [21, 22] и выяснению условий, при выполнении которых смещения или их «главные части» удовлетворяют несложным уравнениям колебания, а также к нахождению алгоритма, позволяющего по полю этих «главных частей» вычислять приближенные значения полей смещений и напряжений в любом сечении для произвольного момента времени.

Таким образом, можно утверждать, что в настоящее время существует незначительное количество работ, посвященных практически важной задаче исследования физически нелинейных, нестационарных колебаний цилиндрических оболочек и стержней. Поэтому актуальной является проблема [13, 14] усовершенствования существующих и создания новых моделей динамического расчета таких систем, находящихся под действием динамических нагрузок с учетом свойств физической нелинейности их материала. Цель данной работы – вывод физически нелинейных уравнений колебания кругового упругого стержня, разработка алгоритма определения напряженно-деформированного состояния (НДС) произвольной его точки, а также решение прикладной задачи о физически нелинейных нестационарных колебаниях такого стержня на основе полученных уравнений колебания и формул для определения НДС.

Постановка задачи

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) рассматривается однородный и изотропный упругий стержень кругового поперечного сечения радиуса r_0 . Считается, что стержень имеет неограниченную длину. Для исследования крутильных колебаний такого стержня принимаются уравнения движения упругого тела. Известно [21], что при решении осесимметричных задач о нестационарных колебаниях круговых цилиндрических оболочек и круглых стержней задачу о их

крутильных колебаниях можно исследовать отдельно от задачи о их продольно-радиальных колебаниях. Поэтому крутильные колебания круглого стержня описываются уравнением

$$\frac{\partial \sigma_{r0}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z0}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r0}}{r} = \rho \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}, \quad (0 \leq r \leq r_0). \quad (1)$$

Далее будем считать, что крутильные колебания рассматриваемой оболочки возбуждаются внешним усилием, действующим на внешней поверхности ($r = r_0$), т.е. граничное условие задачи при $r = r_0$ имеет вид:

$$\sigma_{r0}(r_0, z, t) = f_{r0}(z, t), \quad \sigma_{z0}(r_0, z, t) = 0. \quad (2)$$

Начальные условия нулевые.

В случае крутильных колебаний круглого упругого стержня нелинейный закон упругости между ненулевыми компонентами тензоров напряжений и деформаций принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{r0} &= G \left[\varepsilon_{r0} + \frac{2}{3} \alpha \gamma_2 (\varepsilon_{r0}^3 + \varepsilon_{z0}^2 \varepsilon_{r0}) \right], \\ \sigma_{z0} &= G \left[\varepsilon_{z0} + \frac{2}{3} \alpha \gamma_2 (\varepsilon_{r0}^2 \varepsilon_{z0} + \varepsilon_{z0}^3) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

здесь α – малый параметр, γ_2 – параметр нелинейности [11],

$$\varepsilon_{r0} = \frac{\partial U_0}{\partial r} - \frac{U_0}{r}; \quad \varepsilon_{z0} = \frac{\partial U_0}{\partial z}. \quad (4)$$

Таким образом, задача о нелинейных крутильных колебаниях круглого упругого стержня приводится к интегрированию уравнений движения (1) при нелинейном законе упругости (4) с граничными (2) и нулевыми начальными условиями.

Методика решения

Выводим уравнения физически нелинейных крутильных колебаний круглого стержня. Подставляя выражения (3) в уравнения движения (1), получим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно деформаций ε_{r0} и ε_{z0}

$$\Delta_0(\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{z0}) + \alpha \gamma_2 \left[\Delta_0(\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{z0}) \Psi_0^2 + \varepsilon_{r0} \frac{\partial \Psi_0^2}{\partial r} + \varepsilon_{z0} \frac{\partial \Psi_0^2}{\partial z} \right] = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где

$$\Delta_0(\varepsilon_{r0}, \varepsilon_{z0}) = \frac{\partial \varepsilon_{r0}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}}{\partial z} + \frac{2\varepsilon_{r0}}{r}.$$

Разложим деформации и перемещение, входящие в уравнение (5), в степенные ряды по степеням малого параметра α . Далее из-за малости перемещения и деформаций членами, содержащими квадрат малого параметра и выше, можно пренебречь, т.е. представим деформации и перемещения в виде:

$$\varepsilon_{i0} = \varepsilon_{i0}^{(0)} + \alpha \varepsilon_{i0}^{(1)}, \quad U_0 = U_0^{(0)} + \alpha U_0^{(1)}, \quad (6)$$

где индекс i принимает значения r или z . Подставив (6) в уравнения (5), получим следующее уравнение относительно деформации:

$$\begin{aligned} \Delta_0 \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) + \alpha \Delta_0 \left(\varepsilon_{r0}^{(1)}, \varepsilon_{z0}^{(1)} \right) + \alpha \gamma_2 \left\{ F_1 + F_2 + \alpha \left[F_3 + F_4 + \Delta_0 \left(\varepsilon_{i0}^{(1)} \right) \Psi_0^2 \right] \right\} = \\ = \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 U_0^{(0)}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial t^2} \right), \quad (i = r, z). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1 \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{2}{3} \varepsilon_{r0}^{(0)} \right) \left[\left(\varepsilon_{r0}^{(0)} \right)^2 + \left(\varepsilon_{z0}^{(0)} \right)^2 \right], \\ F_2 \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= \left(\varepsilon_{r0}^{(0)} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial r} + \varepsilon_{r0}^{(0)} \varepsilon_{z0}^{(0)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial r} \right) + \left(\varepsilon_{z0}^{(0)} \right)^2 \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial z}, \\ F_3 \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= \frac{4}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{2}{r} \varepsilon_{r0}^{(0)} \right) \left(\varepsilon_{r0}^{(0)} \varepsilon_{r0}^{(1)} + \varepsilon_{z0}^{(0)} \varepsilon_{z0}^{(1)} \right), \\ F_4 \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= \varepsilon_{r0}^{(0)} \left(2 \varepsilon_{r0}^{(1)} \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial r} + \varepsilon_{r0}^{(0)} \frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(1)}}{\partial r} \right) + \left(\varepsilon_{r0}^{(1)} \varepsilon_{z0}^{(0)} + \varepsilon_{r0}^{(0)} \varepsilon_{z0}^{(1)} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial r} \right) + \\ &+ \varepsilon_{z0}^{(0)} \varepsilon_{r0}^{(0)} \left(\frac{\partial \varepsilon_{r0}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(1)}}{\partial r} \right) + \varepsilon_{z0}^{(0)} \left(2 \varepsilon_{z0}^{(1)} \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(0)}}{\partial z} + \varepsilon_{z0}^{(0)} \frac{\partial \varepsilon_{z0}^{(1)}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Пренебрегая опять членами, содержащими квадрат малого параметра, из (7) получим

$$\Delta_0 \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) + \alpha \left[\Delta_0 \left(\varepsilon_{r0}^{(1)}, \varepsilon_{z0}^{(1)} \right) + \gamma_2 \left(F_1 + F_2 \right) \right] = \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 U_0^{(0)}}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^2 U_0^{(1)}}{\partial t^2} \right).$$

Отсюда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра α , будем иметь следующие уравнения:

$$\Delta U_0^{(0)} = 0, \quad (8)$$

$$\Delta U_0^{(1)} + \gamma_2 F \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} F \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) &= F_1 \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right) + F_2 \left(\varepsilon_{r0}^{(0)}, \varepsilon_{z0}^{(0)} \right), \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, получено два линейные уравнения, одно из которых однородное, а другое неоднородное. При этом правая часть неоднородного уравнения (9) определяется по результатам решения линейного уравнения (8).

Для решения уравнений (8), (9) функции внешних воздействий в граничных условиях будем считать принадлежащими к классу функций, представимых в виде [22]:

$$f_{r0}(z, t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left. \right\} dk \int_{(l)} \bar{f}_{r0}(k, p) e^{pt} dp, \quad (10)$$

где (l) – разомкнутый контур в плоскости p , прилегающий справа к участку $(-i\omega_0, i\omega_0)$ мнимой оси. Кроме того, функции $f_{r_0}(k, p)$, которые необходимы при выводе уравнений колебания, пренебрежимо малы вне области $k \leq k_0$, $|\operatorname{Im} p| \leq \omega_0$.

Представив перемещение $U_\theta^{(0)}$ также как (10), обозначив при этом его изображение через $\bar{U}_\theta^{(0)}$ и применив к уравнению (8), получим обыкновенное дифференциальное уравнение Бесселя, общее решение которого равно

$$\bar{U}_\theta^{(0)}(r) = CI_1(\beta r), \quad \beta^2 = \frac{p^2}{b^2} + k^2, \quad b^2 = G/\rho \quad (11)$$

где C – постоянная интегрирования; $I_1(\beta r)$ – функция Бесселя; b – скорость поперечных волн. Используя стандартные разложения функции Бесселя в степенной ряд по степеням радиальной координаты, вводя новую искомую функцию по формуле

$$\bar{U}(p, k) = \frac{1}{2} \beta C \quad (12)$$

и ограничиваясь первым приближением в бесконечной сумме степенного ряда, для преобразованного по (10) перемещения $\bar{U}_\theta^{(0)}$, получим

$$U_\theta^{(0)}(r, z, t) = \left(r + \frac{r^3}{8} \lambda \right) U(z, t), \quad (13)$$

где функция $U(z, t)$ является оригиналом функций $\bar{U}(p, k)$, а оператор λ определяется как [23]

$$\lambda^n [U(z, t)] = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left. \right\} dk \int_{(l)} \beta^{2n} [\bar{U}(p, k)] e^{pt} dp. \quad (14)$$

При этом, исходя из вида (11) для β , нетрудно заключить что оператор λ^n в переменных (z, t) имеет вид:

$$\lambda^n(\zeta) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\zeta)}{\partial z^2}. \quad (15)$$

Аналогично для $U_\theta^{(1)}(r, z, t)$ решается однородная часть уравнения (9). Далее для решения неоднородного уравнения применен метод вариации постоянных и найдено

$$U_\theta^{(1)}(r, z, t) = \frac{2}{3} r^2 F[U_\theta^{(0)}]. \quad (16)$$

Формулы (13) и (16) позволяет находить перемещение $U_\theta(r, z, t)$, а через него и деформации ε_{r_0} и ε_{z_0} , подстановка которых в граничные условия (2) приводит к следующему уравнению:

$$\left(\lambda U + \frac{r_0^2}{6} \lambda^2 U \right) \left[1 + \frac{2}{3} \gamma_2 \left(r_0^2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \frac{5r_0^6}{196} \lambda^2 U \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) \right] = \frac{4}{r_0^2} \frac{f_{r_0}(z, t)}{G}. \quad (17)$$

Уравнение (17), в соответствии с (15), представляет собой уравнение физически нелинейных крутильных колебаний круглого упругого стержня. Это уравнение зависит от оператора λ и главной части $U(z, t)$ крутильного перемещения $U_\theta(r, z, t)$

точек оси стержня. При этом, в соответствии с выражением крутильного перемещения (13), функция $U(z, t)$ имеет размерность деформации и в случае первого приближения в (13) является углом поворота. Кроме того, уравнение (17) в своей структуре учитывает деформацию поперечного сдвига и инерцию вращения, а также правильно учитывает силы, действующие на внешнюю поверхность стержня.

Для сравнительного анализа в уравнении (17) целесообразно пренебречь членами с производными четвертого и выше порядков, что дает

$$\lambda U - \frac{2}{3} \gamma_2 r_0^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \lambda U \right] = \frac{4}{Gr_0^2} f_{r0}(z, t). \quad (18)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, следующие из уравнения (18).

1. Если в уравнении (18) пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках, то следует уравнение И.Г. Филиппова [24]

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left(1 + \frac{2}{3} \gamma_2 r_0^2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{4}{Gr_0^2} f_{r0}(z, t). \quad (19)$$

2. Если положить $\gamma_2 = 0$ и учесть выражение (15), то из (18) следует известное классическое линейное уравнение крутильных колебаний кругового стержня.

3. Если заменить числовой коэффициент $2/3$ при нелинейном члене уравнения (19) на $4/3$ и положить $f_{r0}(z, t) \equiv 0$, то следует уравнение Г. Каудерера [11] с отличной от (19) правой частью.

Наряду с уравнением колебания выведены формулы для перемещения и ненулевых компонент напряжения, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} U_\theta(r, z, t) &= rU - \alpha \gamma_2 \frac{r^5}{12} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \\ \sigma_{z0}(r, z, t) &= G \left\{ r \frac{\partial U}{\partial z} - \alpha \gamma_2 \frac{r^5}{36} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \right\}, \\ \sigma_{r0}(r, z, t) &= G \left\{ \frac{r^2}{4} \lambda U - \alpha \gamma_2 \frac{r_0^4}{3} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \lambda U \right] \right\}. \end{aligned}$$

Ниже решена задача о физически нелинейных колебаниях кругового стержня, находящегося под действием комбинированной нагрузки, на основе указанных четырех уравнений.

Нелинейные колебания стержня под действием торцевой и поверхностной нагрузок

Стержень с одним зашлепленным и другим свободным концами подвергается действиям кинематического возбуждения $g(t)$ на свободном конце и динамической нагрузки $f_{r0}(z, t) = \text{const}$ на поверхности. Требуется определить перемещение и напряжения в точках стержня. Решим задачу на основе различных уравнений (линейного, Г. Каудерера, И.Г. Филиппова и предложенного (17)) с одинаковыми

правыми частями, равными $(4/Gr_0^2) f_{r0}(z, t)$. Предварительно все четыре уравнения переводятся в безразмерные координаты по формулам $U = U^*$, $t = (l/b) t^*$, $0 \leq t^* \leq 1$, $z = z^* l$, $0 \leq z^* \leq 1$ (l – длина стержня). В дальнейшем для удобства записи звездочки над буквами опускаются. Уравнения (18), (19) и их указанные частные случаи имеют второй порядок по производным. Поэтому граничные условия задачи для всех рассматриваемых уравнений имеют вид:

$$U(z, t)|_{z=0} = g(t), \quad U(z, t)|_{z=1} = 0, \quad (20)$$

Начальные условия считаются нулевыми, т.е.

$$U(z, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U(z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (21)$$

Функция $g(t)$ принимается в виде $g(t) = A \sin(\pi t)$, где $A = \text{const}$. Интенсивность поверхностной нагрузки определена как $f_{r0}(z, t) = P/S_{\text{бок}}$, где $P = \text{const}$, $S_{\text{бок}} = 2\pi l r_0$.

Задача решена численно методом конечных разностей. Для расчетов приняты следующие значения параметров алюминиевого сплава Д16Т [7, 16]: $\gamma_2 = -0.3878 \cdot 10^6$, $G = 0.277 \cdot 10^5$ МПа, $\rho = 2780$ кг/м³, $l = 1$ м; $r_0 = 0.02$ м, $A = 0.4 \cdot 10^{-3}$. Полученные результаты приведены на рис. 3 в виде зависимостей крутильного перемещения U_θ и касательных напряжений $\sigma_{r0}(r, z, t)$, $\sigma_{z0}(r, z, t)$ от времени и продольной координаты.

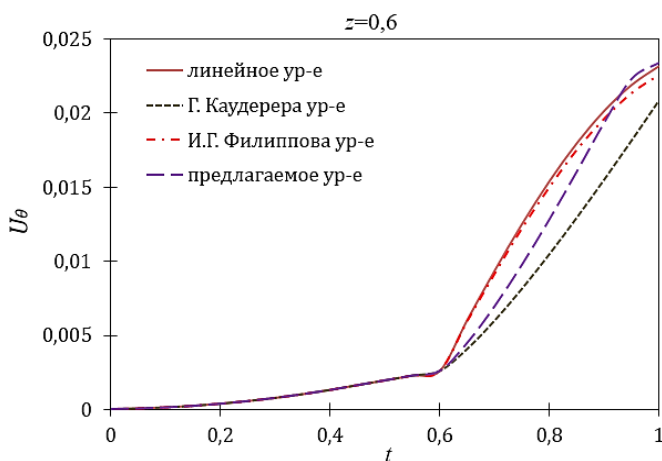


Рис. 1. Зависимости перемещения U_θ от безразмерного времени в поверхностных точках стержня в сечении $z = 0.6$ согласно различным уравнениям

Fig. 1. Dependences of displacement U_θ on dimensionless time at the surface points of the rod along the cross-section $z = 0.6$ according to various equations

На рис. 1 приведены зависимости от времени перемещения U_θ точек на поверхности стержня в сечении $z = 0.6$ по уравнениям Г. Каудерера, И.Г. Филиппова,

по предлагаемому уравнению (17), а также по классическому линейному уравнению. Из представленных графиков следует, что наибольшие значения перемещения дает линейное уравнение, а наименьшее – уравнение Г. Каудерера. Значения, полученные на основе уравнения (17), лежат в промежутке между значениями, полученными по результатам решения уравнения Г. Каудерера и линейного уравнения. Результаты, полученные по уравнению И.Г. Филиппова, очень близки к полученным на основе решения линейного уравнения. При этом, например, в момент времени $t = 0.8$, значения U_0 по линейной теории отличаются от значений по Г. Каудереру на 47%, по уравнению (17) на 20.2%, по И.Г. Филиппову на 2.5% (таблица). Следует отметить, что указанные разницы значений перемещения, вычисленных на основе различных теорий, зависят от времени и для различных моментов времени различны.

Значения перемещения U_0 в поверхностных точках стержня в сечении $z = 0.6$, вычисленные по различным уравнениям

t	Линейное ($\gamma_2 = 0$)	Г. Каудерер ($\gamma_2 \neq 0$)	И.Г. Филиппов ($\gamma_2 \neq 0$)	Уравнение (17) ($\gamma_2 \neq 0$)
0	0	0	0	0
0.1	0.00011	0.00011	0.00011	0.00011
0.2	0.00036	0.00036	0.00036	0.00036
0.3	0.00075	0.00075	0.00075	0.00075
0.4	0.00129	0.00129	0.00129	0.00129
0.5	0.00194	0.00194	0.00194	0.00194
0.6	0.00258	0.00258	0.00258	0.00258
0.7	0.00938	0.00599	0.00917	0.00696
0.8	0.01542	0.01049	0.01504	0.01283
0.9	0.02017	0.01554	0.01965	0.01936
1	0.02319	0.02090	0.02261	0.02337

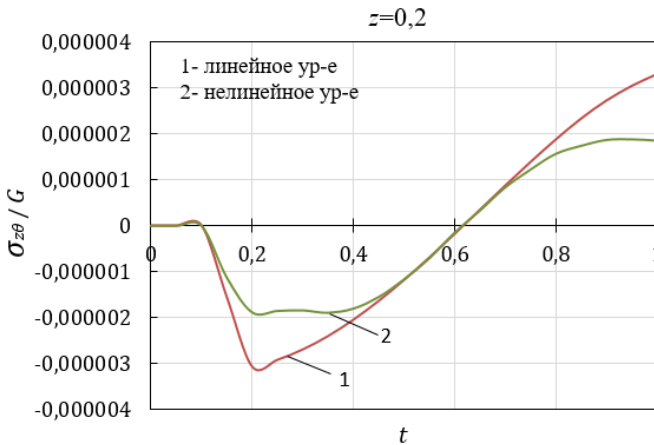


Рис. 2. Зависимости напряжения σ_{z0} от безразмерного времени в точках сечения $z = 0.2$ по линейному и по предлагаемому (17) уравнениям
Fig. 2. Dependences of stress σ_{z0} on dimensionless time at the points along the cross-section $z = 0.2$ according to linear and proposed (17) equations

На рис. 2. приведены зависимости от безразмерного времени напряжения $\sigma_{z\theta}$ в точках сечения $z = 0.2$ на поверхности стержня по предлагаемому нелинейному (17) и по классическому линейному уравнениям. Из представленных графиков следует, что разница между максимальными амплитудами напряжения при $t = 0.2$ составляет 63%. Значения этого напряжения, вычисленные по линейной теории (по абсолютному значению) выше, чем вычисленные по нелинейной теории. Возбуждение напряжения $\sigma_{z\theta}$ в сечении $z = 0.2$ начинается в момент времени $t = 0.15$ и в дальнейшем носит синусоидальный характер.

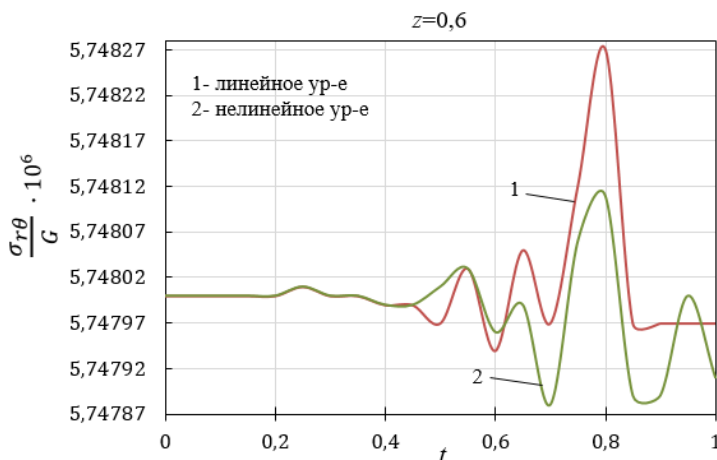


Рис. 3. Зависимости напряжения $\sigma_{r\theta}$ от безразмерного времени в поверхностных точках сечения $z = 0.6$ по линейному и предлагаемому (17) уравнениям

Fig. 3. Dependences of stress $\sigma_{r\theta}$ on dimensionless time at the surface points along the cross-section $z = 0.6$ according to linear and proposed (17) equations

На рис. 3. приведены зависимости напряжения $\sigma_{r\theta}$ от безразмерного времени в поверхностных точках сечения $z = 0.6$ по линейному и предлагаемому нелинейному (17) уравнениям. Из графиков видно, что в сечении стержня $z = 0.6$ возбуждение напряжения $\sigma_{r\theta}$ начинается примерно в момент времени $t = 0.40$, но в отличие от напряжения $\sigma_{z\theta}$ не носит синусоидального характера. При этом графики напряжения $\sigma_{r\theta}$ по обоим теориям имеют локальные максимумы и минимумы. Из представленных графиков видно, что напряжение $\sigma_{r\theta}$ возбуждается под действием поверхностной силы и имеет постоянное значение, равное $5.748G \cdot 10^6$, которое остается почти неизменным, пока волна кручения, возбужденная торцевой нагрузкой, не доходит до сечения. С подходом волны к сечению в момент времени $t = 0.4$ значения $\sigma_{r\theta}$ начинают увеличиваться и примерно в момент времени $t = 0.8$, как по линейной, так и по нелинейной теории, достигают своего максимума. Следует отметить, что различие максимальных значений по линейной и нелинейной теориям невелико.

На рис.4 приведены зависимости напряжения $\sigma_{r\theta}$ от координаты в момент $t = 0.4$ по линейному и по предлагаемому (17) нелинейному уравнениям. Представленные графики показывают, что напряжение затухает по координате относительно быстро согласно обеим теориям.

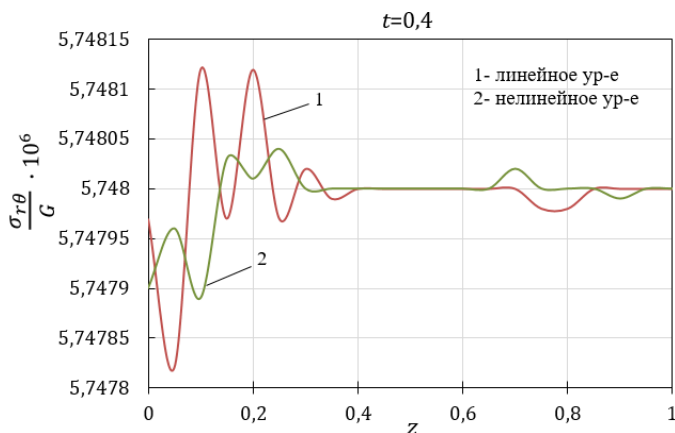


Рис. 4. Зависимости напряжения $\sigma_{r\theta}$ от координаты в момент $t = 0.4$ по линейному и предлагаемому (17) уравнениям

Fig. 4. Dependences of stress $\sigma_{r\theta}$ on the coordinate at a time instant of $t = 0.4$ according to linear and proposed (17) equations

Возбужденное в сечении $z = 0$ (свободный торец) напряжение полностью затухает в сечении $z = 0.4$. При этом линейная теория дает завышенные результаты. В дальнейшем, при $z > 0.4$, обе теории дают одинаковый результат, и изменениями напряжения можно пренебречь.

Заключение

В результате проведенного исследования получены следующие результаты:

- выведены физически нелинейные уравнения крутильных колебаний круглого упругого стержня относительно главной части крутильного перемещения оси стержня, из которых в частном линейном случае следуют результаты работы [21];
- получены формулы для напряжений и перемещения, позволяющие в произвольной точке стержня произвести нелинейный расчет напряженно-деформированного состояния стержня с требуемой точностью по пространственным координатам и времени. В линейном случае данные формулы переходят в известные [24];
- на примере решения на основе полученных нелинейных уравнений прикладной задачи о физически нелинейных колебаниях круглого стержня под действием торцевой и поверхностной нагрузок показано, что линейная теория дает завышенные значения крутильного перемещения и касательных напряжений по сравнению с нелинейной теорией, что согласуется с результатами работ [11, 16];
- разницы значений перемещения, полученные на основе уравнений различных теорий, для различных моментов времени различны. Например, в момент времени $t = 0.8$, значение U_0 , вычисленное по линейной теории, больше значения, вычисленного по предлагаемому уравнению, на 20,2%;
- значения перемещения и напряжений, вычисленные по линейной теории, можно принять как верхние границы значений по сравнению со значениями, вычисленными по нелинейной теории. Данное утверждение подтверждает вывод, сделанный в работе [7] для значений прогиба пластины, вычисленных по линейной и нелинейной теориями.

Список источников

1. Худаяров Б.А., Комилова К.М. Численное моделирование колебаний вязкоупругих трубопроводов, транспортирующих двухфазную среду в режиме пробкового течения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 95–110. doi: 10.17223/19988621/61/9
2. Худойназаров Х.Х., Халмурадов Р.И., Ялгашев Б.Ф. Продольно-радиальные колебания упругой цилиндрической оболочки с вязкой сжимаемой жидкостью // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С.139–154. doi: 10.17223/19988621/69/11
3. Khudoynazarov Kh., Abdurazakov J., Kholikov D. Nonlinear torsional vibrations of a circular cylindrical elastic shell // AIP Conference Proceedings. 2022. V. 2637. Art. 020003. doi: 10.1063/5.0118844
4. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Nonlinear coupled problems in dynamics of shells // International Journal of Engineering Science. 2003. V. 41. P. 587–607.
5. Khudoynazarov K., Yalgashev B. Longitudinal vibrations of a cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid // E3S Web of Conferences. 2021. V. 264. Art. 02017. doi: 10.1051/e3sconf/202126402017
6. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. New York : Cambridge University Press, 2008. 374 p.
7. Цурпаль И.А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов. Киев : Техника, 1976. 176 с.
8. Петров В.В. Расчет неоднородных по толщине оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей // Academia. Архитектура и строительство. 2016. № 1. С. 112–117.
9. Khudoynazarov Kh., Kholikov D., Abdurazakov J. Torsional vibrations of a conical elastic shell // AIP Conference Proceedings. 2022. V. 2637. Art. 030024. doi: 10.1063/5.0118846
10. Khalmuradov R., Nishonov U. Nonlinear deformation of circular discrete ribbed plate under influence of pulse loading // E3S Web of Conferences. 2021. V. 264. Art. 02018. doi: 10.1051/e3sconf/202126402018
11. Кайдепер Г. Нелинейная механика : пер. с нем. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
12. Pellicano F. Vibrations of circular cylindrical shells: theory and experiments // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 303. P. 154–170.
13. Khodzhaev D.A., Abdikarimov R.A., Mirsaidov M.M. Dynamics of a physically nonlinear viscoelastic cylindrical shell with a concentrated mass // Magazine of Civil Engineering. 2019. V. 91 (7). P. 39–48. doi: 10.18720/MCE.91.4
14. Бакушев С.В. Разрешающие дифференциальные уравнения физически-нелинейной теории упругости в напряжениях для плоской деформации // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 72–86. doi: 10.17223/19988621/63/7
15. Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П. Крутильные волны конечной амплитуды в упругом стержне // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 157–163.
16. Кудин А.В., Тамуров Ю.Н. Применение метода малого параметра при моделировании изгиба симметричных трехслойных пластин с нелинейно-упругим заполнителем // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. Володимира Даля. 2011. № 11 (165). С. 32–40.
17. Вячкин Е.С., Каледин В.О., Решетникова Е.В., Вячкина Е.А., Гилева А.Е. Разработка математической модели статического деформирования слоистых конструкций с несжимаемыми слоями // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 55. С. 72–83. doi: 10.17223/19988621/55/7
18. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыка-

- ющих уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6
19. Khudoynazarov Kh.Kh. Transversal vibrations of thick and thin cylindrical shells, interacting with deformable medium // Shell structures. Theory and applications : Proc. of the 8th international conference on shell structures (SSTA 2005), 12–14 October 2005, Jurata, Gdansk, Poland. London : Taylor & Francis Group, 2006. P. 343–347.
 20. Filippov I.G., Kudajazarov K. Boundary value problems of longitudinal oscillations of the circular cylindrical shells // Gongye Jianzhu. Industrial Construction. 1998. V. 28 (12). P. 34–40.
 21. Филиппов И.Г., Филиппов С.И. Колебательные и волновые процессы в сплошных сжимаемых средах. М. : Произв.-издат. комбинат ВИНТИ, 2007. 429 с.
 22. Петрашень Г.И. Проблемы инженерной теории колебаний вырожденных систем // Исследования по упругости и пластичности. Л. : Изд-во ЛГУ, 1966. Вып. 5. С. 3–33.
 23. Khudoynazarov Kh., Gadayev A., Akhatov Kh. Torsional vibrations of a rotating viscoelastic rod // E3S Web of Conferences. 2023. V. 365. Art. 02016. doi: 10.1051/e3sconf/202336502016
 24. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. М. : Машиностроение. 1983. 270 с.

References

1. Khudayarov B.A., Komilova K.M. (2019) Chislennoe modelirovanie kolebaniy vyazkoupругikh truboprovodov, transportiruyushikh dvukhfaznuyu sredu v rezhime probkovogo techeniya [Numerical simulation of vibrations of viscoelastic pipelines conveying two-phase medium in a slug flow regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61. pp. 95–110. doi: 10.17223/19988621/61/9
2. Khudoynazarov Kh.Kh., Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. (2021) Prodol'no–radial'nye kolebaniya uprugoy tsilindricheskoy obolochki s vyazkoy szhimaemoy zhidkost'yu [Longitudinal-radial vibrations of a elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 139–154. doi: 10.17223/19988621/69/11
3. Khudoynazarov Kh., Abdurazakov J., Kholikov D. (2022) Nonlinear torsional vibrations of a circular cylindrical elastic shell. *AIP Conference Proceedings*. 2637. Article 020003. doi: 10.1063/5.0118844
4. Awrejcewicz J., Krysko V.A. (2003) Nonlinear coupled problems in dynamics of shells. *International Journal of Engineering Science*. 41. pp. 587–607. doi: 10.1016/S0020-7225(02)00279-3
5. Khudoynazarov K., Yalgashev B.F. (2021) Longitudinal vibrations of a cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid. *E3S Web of Conferences*. 264. Article 02017. doi: 10.1051/e3sconf/202126402017
6. Amabili M. (2008) *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. New York: Cambridge University Press.
7. Tsurpal I.A. (1976) *Raschet elementov konstruksiy iz nelineyno-uprugikh materialov* [Calculation of structural elements made of nonlinear elastic materials]. Kyiv: Tekhnika.
8. Petrov V.V. (2016) Raschet neodnorodnykh po tolshchine obolochek s uchetom fizicheskoy i geometricheskoy nelineynostey [Calculation of inhomogeneous thickness of shells with considering physical and geometrical nonlinearities]. *Akademiya arkhitektury i stroitel'stva – Academia Architecture and Construction*. 1. pp. 112–117.
9. Khudoynazarov Kh., Kholikov D., Abdurazakov J. (2022) Torsional vibrations of a conical elastic shell. *AIP Conference Proceedings*, 2637. Article 030024. doi: 10.1063/5.0118846

10. Khalmuradov R., Nishonov U. (2021) Nonlinear deformation of circular discrete ribbed plate under influence of pulse loading. *E3S Web of Conferences*. 264. Article 02018. doi: 10.1051/e3sconf/202126402018
11. Kauderer H. (1958) *Nichtlineare Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag.
12. Pellicano F. (2007) Vibrations of circular cylindrical shells: theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*. 303. pp. 154–170. doi: 10.1016/j.jsv.2007.01.022
13. Khodzhaev D.A., Abdikarimov R.A., Mirsaidov M.M. (2019) Dynamics of a physically nonlinear viscoelastic cylindrical shell with a concentrated mass. *Magazine of Civil Engineering*. 91(7). pp. 39–48. doi: 10.18720/MCE.91.4
14. Bakushev S.V. (2020) Razreshayushchie differentsial'nye uravneniya fizicheski nelineynoy teorii uprugosti v napryazheniyakh dlya ploskoy deformatsii [Resolving differential equations of physically nonlinear theory of elasticity in terms of stresses for a plane strain]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp.72–86. doi: 10.17223/19988621/63/7
15. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. (2007) Krutil'nye volny konechnoy amplitudy v uprugom sterzhne [Torsional waves of finite amplitude in an elastic rod]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 157–163.
16. Kudin A.V., Tamurov Yu.N. (2011) Primenenie metoda malogo parametra pri modelirovanii izgiba simmetrichnykh trekhslonnykh plastin s nelineyno-uprugim zapolnitelem [Application of the small parameter method in modeling the bending of symmetrical three-layer plates with a nonlinear elastic filler]. *Bulletin of the Volodymyr Dahl East Ukrainian National University*. 11(165). pp 32–40.
17. Vyachkin E.S., Kaledin V.O., Reshetnikova E.V., Vyachkina E.A., Gileva A.E. (2018) Razrabotka matematicheskoy modeli staticheskogo deformirovaniya sloistykh konstruktivnykh neszhimaemykh sloyami [Mathematical modeling of static deformation of a layered construction with incompressible layers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 55. pp.72–83. doi: 10.17223/19988621/55/7
18. Bakushev S.V. (2022) Differentsial'nye uravneniya ravnovesiya sploshnoy sredy dlya ploskoy deformatsii v dekartovykh koordinatakh pri bikvadrachnoy approksimatsii zamykayushchikh uravneniy [Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in Cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6
19. Khudoynazarov Kh.Kh. (2006) Transversal vibrations of thick and thin cylindrical shells, interacting with deformable medium. *Shell Structures. Theory and Applications: Proceedings of the 8th International Conference on Shell Structures, October 12–14, 2005, Jurata, Gdansk, Poland*. London: Taylor & Francis Group. pp. 343–347.
20. Filippov I.G., Kudajazarov K. (1998) Boundary value problems of longitudinal oscillations of the circular cylindrical shells. *Gongye Jianzhu. Industrial Construction*. 28(12). pp. 34–40. doi: 10.1007/BF02700874
21. Filippov I.G., Filippov S.I. (2007) *Kolebatel'nye i volnovye protsessy v sploshnykh szhimaemykh sredakh* [Vibratory and wave processes in continuous compressible media]. Moscow: PIK VINITI.
22. Petrashen G.I. (1966) Problemy inzhenernoy teorii vyrozhdennykh sistem [Problems of the engineering theory of vibrations of degenerate systems]. *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti – Research on Elasticity and Plasticity*. Leningrad: Publishing House of LSU. 5. pp. 3–33.
23. Khudoynazarov Kh., Gadayev A., Akhatov Kh (2023) Torsional vibrations of a rotating viscoelastic rod. *E3S Web of Conferences*. 365. Article 02016. doi: 10.1051/e3sconf/202336502016
24. Filippov I.G., Egorychev O.A. (1983) *Volnovye protsessy v lineynykh vyazkouprugikh sredakh* [Wave processes in linear viscoelastic medium]. Moscow: Mashinostroenie.

Сведения об авторе:

Худойназаров Хайрулла – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Самаркандского государственного университета, Самарканд, Узбекистан. E-mail: kh.khudoyn@gmail.com

Information about the author:

Khudoynazarov Khayrulla (Doctor of Technical Sciences, Head of Department of Theoretical and Applied Mechanics, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan). E-mail: kh.khudoyn@gmail.com

Статья поступила в редакцию 01.09.2022; принята к публикации 10.07.2023

The article was submitted 01.09.2022; accepted for publication 10.07.2023