ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 512.54.05, 512.543.7 DOI 10.17223/20710410/59/1

ОБ УРАВНЕНИЯХ В СВОБОДНЫХ МОНОИДАХ И ПОЛУГРУППАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РЕШЕНИЯ[1]

В. Г. Дурнев, А. И. Зеткина

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль, Россия

E-mail: durnev@unuyar.ac.ru, a.zetkina1@uniyar.ac.ru

Изучаются алгоритмические проблемы для уравнений в свободных моноидах и полугруппах (уравнения в словах и длинах) с дополнительными ограничениями на решения. Доказывается, что невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в словах и длинах в свободном моноиде (свободной полугруппе) ранга 2 с одним дополнительным ограничением на решение в форме принадлежности одной его компоненты языку сбалансированных слов или равенства проекций двух компонент решения на одну выделенную свободную образующую определить, имеет ли она решение. Аналогичный результат установлен для систем неравенств в словах.

Ключевые слова: *системы уравнений в свободных моноидах и свободных полугруппах, уравнения в словах и длинах, уравнения с ограничениями на решения.*

ON EQUATIONS IN FREE MONOIDS AND SEMIGROUPS WITH RESTRICTIONS ON SOLUTIONS

V. G. Durnev, A. I. Zetkina

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

We study algorithmic problems for equations in free monoids and semigroups (equations in words and lengths) with additional restrictions on the solutions. It is proved that it is impossible to construct an algorithm that solves an arbitrary system of equations in words and lengths in a free monoid (free semigroup) of rank 2 with an additional constraint on the solution in the form that one of its components belongs to the language of balanced words or the equality of the projections of two components of the solution into a distinguished free generator to determine whether it has a solution. A similar result is obtained for systems of inequalities in words.

Keywords: *systems of equations in free monoids and free semigroups, equations in words and lengths, equations with restrictions on solutions.*

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 19-52-26006.

Введение

Содержащиеся в работе результаты анонсированы без доказательств в тезисах [1, 2]. Приводится их подробное доказательство. Кроме того, теорема 3 существенно усиливает анонсированный в тезисах результат. По нашему мнению, этот результат максимально близок к окончательному.

Через M_m будем обозначать свободный моноид, т. е. свободную полугруппу ранга m с пустым словом в качестве нейтрального элемента и со свободными образующими $a_1, \ldots, a_m$, а через F_m — свободную группу с теми же свободными образующими. Через S_m будем обозначать свободную полугруппу без пустого слова с теми же самыми свободными образующими $a_1, \ldots, a_m$. Доказанные в работе теоремы справедливы одновременно для свободного моноида M_m и для свободной полугруппы S_m при $m \geqslant 2$. Доказательство проводится, как правило, для свободного моноида M_2. Его легко перенести на свободный моноид M_m и свободную полугруппу S_m для любого $m \geqslant 2$. Заметим, что почти до конца XX в. в нашей стране использовались понятия «*свободная полугруппа с пустым словом в качестве нейтрального элемента*», «*свободная полугруппа с нейтральным элементом*» и «*свободная полугруппа с единицей*». Большинство результатов в этой области не зависело от того, рассматривается ли свободная полугруппа с единицей или без неё. И только в работе Н. А. Перязева [3] был получен важный результат, справедливый для M_2, но не для S_2.

К концу XX в. под влиянием работ группы Н. Бурбаки понятие «*свободная полугруппа с единицей*» стало заменяться более кратким понятием «*свободный моноид*». Одним из первых его стал употреблять Н. А. Перязев [3].

Свободные образующие a_1 и a_2 свободного моноида M_2 будем обозначать через a и b соответственно.

Определение 1. *Системой уравнений* с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ в свободном моноиде M_m (свободной полугруппе S_m) называется выражение вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} \big(w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)\big), \tag{1}$$

где $w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ и $u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ — слова в алфавите

$$\{\, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m \,\}.$$

Определение 2. Набор $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ элементов свободного моноида M_m (свободной полугруппы S_m) называется *решением* системы (1), если при любом i $(i = 1, \ldots, k)$ в свободном моноиде M_m (свободной полугруппе S_m) выполняется равенство

$$w_i(g_1, \ldots, g_n, a_1, \ldots, a_m) = u_i(g_1, \ldots, g_n, a_1, \ldots, a_m).$$

Определение 3. Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Заметим, что при $m \geqslant 2$ система уравнений $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k}\big(w_i = u_i\big)$ равносильна одному уравнению

$$w_1 a_1 w_2 a_1 \ldots a_1 w_k \, w_1 a_2 w_2 a_2 \ldots a_2 w_k = u_1 a_1 u_2 a_1 \ldots a_1 u_k \, u_1 a_2 u_2 a_2 \ldots a_2 u_k.$$

Эта равносильность позволяет удалять из формул знак конъюнкции &.

Для удаления из формул знака дизъюнкции $\vee$ можно применить установленную Н. К. Косовским в работе [4] эквивалентность ($m \geqslant 2$)

$$M_m \vdash (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)((x_1 = x_2 \vee x_3 = x_4) \iff \\ \iff (\exists y_1)(\exists y_2)(\exists y_3)(\exists y_4)w(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, a_1, a_2) = \\ = u(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, a_1, a_2)),$$

где $w(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, a_1, a_2)$ и $u(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, a_1, a_2)$ — некоторые слова в алфавите $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, a_1, a_2\}$.

В работе [5] показано, что число новых переменных y_1, y_2, y_3 и y_4 можно уменьшить до двух — построены слова $w(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, a_1, a_2)$ и $u(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, a_1, a_2)$ в алфавите $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, a_1, a_2\}$, для которых справедлива эквивалентность

$$M_m \vdash (\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)((x_1 = x_2 \vee x_3 = x_4) \iff \\ \iff (\exists y_1)(\exists y_2)w(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, a_1, a_2) = u(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, a_1, a_2)).$$

1. Алгоритмические проблемы для уравнений в свободных моноидах и полугруппах (обзор результатов)

В 60-е годы XX в. А. А. Марков предложил использовать системы уравнений в свободной полугруппе S_m (в свободном моноиде M_m) в качестве одного из подходов к отрицательному решению 10-й проблемы Д. Гильберта.

Системы уравнений в свободных полугруппах (в свободных моноидах) также называются *системами уравнений в словах*. Первые результаты в исследовании систем уравнений в словах были получены А. А. Марковым (не опубликовано) и Ю. И. Хмелевским [6] в конце 60-х годов прошлого века.

В эти же годы было начато изучение систем уравнений в словах и длинах, т. е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} \big(w_i = u_i\big) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} \big(|x_i| = |x_j|\big),$$

где через $|x| = |y|$ обозначен предикат «*длины слов x и y равны*». Первые результаты в исследовании систем уравнений в словах и длинах получены в начале 70-х годов в работах Ю. В. Матиясевича [7] и Н. К. Косовского [8, 9].

Для слова w в алфавите Σ и буквы a этого алфавита через $|w|_a$ будем обозначать число вхождений буквы a в слово w.

В 1972—1973 гг. первый автор начал рассматривать системы уравнений в словах и длинах с дополнительным предикатом $|x|_a = |y|_a$ — «*проекции слов x и y на выделенную букву a равны*». В работе [10], в частности, доказано, что можно указать такое однопараметрическое семейство систем уравнений в свободной нециклической полугруппе с единицей или без неё

$$\big(w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \ldots, x_n, a, b)\big) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} (|x_i| = |x_j| \mathbin{\&} |x_i|_a = |x_j|_a)$$

с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, константами a и b и параметром x, где A — некоторое подмножество множества $\{\{t, s\} : 1 \leqslant t, s \leqslant n\}$, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального m определить, имеет ли решение система уравнений

$$w(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} (|x_i| = |x_j| \mathbin{\&} |x_i|_a = |x_j|_a).$$

В этой же работе отмечено, что результат остаётся верным, если предикат $|x| = |y|$ & & $|x|_a = |y|_a$ заменить предикатом $|x|_b = |y|_b$ & $|x|_a = |y|_a$.

Аналогичный результат содержится в работе [11], опубликованной в 1988 г.

В 1976 г. Г. С. Маканин получил в теории уравнений в словах фундаментальный результат [12, 13] — он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной полугруппе $S(m)$ (свободном моноиде M_m) определить, имеет ли она решение. Несколько позже в работе [14] Г. С. Маканин построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной группе F_m определить, имеет ли она решение.

После фундаментальных результатов Г. С. Маканина особый интерес стал представлять вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для уравнений в свободных моноидах, полугруппах и группах с различными «не слишком сложными» и «достаточно естественными» ограничениями на решения.

В работах [15, 16] доказана алгоритмическая неразрешимость позитивной $\exists\forall\exists^3$-теории любой конечно порождённой нециклической свободной полугруппы (с пустым словом или без него).

Вопрос о разрешимости позитивной теории свободной полугруппы счётного ранга в кандидатской диссертации первого автора был легко сведён к следующей проблеме:

Существует ли алгоритм, позволяющий для произвольного уравнения

$$w(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = u(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$$

в свободной полугруппе счётного ранга (с пустым словом или без него) определить, имеет ли оно такое решение g_1, …, g_n, что

$$g_1 \in M_{m_1},\ g_2 \in M_{m_2},\ \dots,\ g_n \in M_{m_n},$$

где $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n$; M_{m_i} — свободная полугруппа с образующими $a_1, \dots, a_{m_i}$?

Ю. М. Важенин и Б. В. Розенблат в работе [17], используя результат Г. С. Маканина, доказали, что существует алгоритм для решения последней задачи, это позволило им установить *разрешимость позитивной теории свободной полугруппы счётного ранга.*

Аналогичным образом вводятся понятия системы уравнений в свободной группе и её решения.

Определение 4. *Системой уравнений* с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ в свободной группе F_m называется выражение вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m), \tag{2}$$

где $w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ и $u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ — слова в алфавите

$$\{\, x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}, a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \dots, a_m, a_m^{-1},\ \}.$$

Определение 5. Набор $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ элементов свободной группы F_m называется *решением* системы (2), если при любом i $(i = 1, \dots, k)$ в свободной группе F_m выполняется равенство

$$w_i(g_1, \dots, g_n, a_1, \dots, a_m) = u_i(g_1, \dots, g_n, a_1, \dots, a_m).$$

Определение 6. Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Используя уравнение А. И. Мальцева (приводится в [18]) $[x, a_1] = ([x, a_2]\, y^2)^2$, имеющее в свободной группе F_m при $m \geqslant 2$ лишь тривиальное решение $x = 1$ и $y = 1$, можно любую систему уравнений $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} w_i = u_i$ в свободной группе F_m заменить одним равносильным ей уравнением $w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 1$ (без введения новых переменных). Это позволяет удалять из формул, относящихся к свободной группе, знак конъюнкции & без введения новых переменных.

Г. А. Гуревич (доказательство приведено Г. С. Маканиным в работе [18]) установил, что и дизъюнкцию уравнений

$$\bigvee_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$$

в свободной группе F_m можно заменить одним равносильным ей уравнением $u(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 1$ (без введения новых переменных). Доказано, что для свободной группы F_m справедлива эквивалентность

$$F_m \vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\Big(\mathop{\&}\limits_{\varepsilon,\delta=\pm1} (x_1 a_1^{\varepsilon} x_1 a_1^{-\varepsilon})(x_2 a_2^{\delta} x_2 a_2^{-\delta}) = (x_2 a_2^{\delta} x_2 a_2^{-\delta})(x_1 a_1^{\varepsilon} x_1 a_1^{-\varepsilon}) \iff$$
$$\iff (x_1 = 1 \vee x_2 = 1)\Big).$$

Это позволяет удалять из формул, относящихся к свободной группе F_m при $m \geqslant 2$, знак дизъюнкции $\vee$ без введения новых переменных.

Вопрос о разрешимости позитивной теории свободной группы был сведен Ю. И. Мерзляковым [19] к следующей проблеме:

Существует ли алгоритм, позволяющий для произвольного уравнения

$$w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 1$$

в свободной группе счётного ранга определить, имеет ли оно такое решение $g_1, \ldots, g_n$, что

$$g_1 \in F_{m_1},\ g_2 \in F_{m_2},\ \ldots,\ g_n \in F_{m_n},$$

где $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n$; F_{m_i} — свободная группа с образующими $a_1, \ldots, a_{m_i}$?

Г. С. Маканин [18] построил искомый алгоритм и тем самым доказал *разрешимость позитивной теории свободной группы*. Это был первый шаг на пути решения известной проблемы А. Тарского о разрешимости элементарной теории свободной нециклической группы.

Обобщая эти ситуации, Г. С. Маканин поставил в «Коуровской тетради» [20] следующую проблему для уравнений в свободных группах:

9.25. Указать алгоритм, который по уравнению

$$w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 1$$

в свободной группе F_m и списку конечно порождённых подгрупп $H_1, \ldots, H_n$ группы F_m позволял бы узнать, существует ли решение этого уравнения с условием

$$x_1 \in H_1,\ \ldots,\ x_n \in H_n.$$

Первые положительные результаты в направлении решения этой проблемы получил А. Ш. Малхасян в работе [21].

К. Шульц [22] рассмотрел аналогичную проблему для уравнений в свободных моноидах (свободных полугруппах) с регулярными ограничениями на решения и доказал, что существует алгоритм, который по уравнению

$$w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = u(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$$

в свободном моноиде M_m и списку регулярных подмножеств (языков) $H_1, \ldots, H_n$ моноида M_m позволяет узнать, существует ли решение этого уравнения с условием

$$x_1 \in H_1, \ \ldots, \ x_n \in H_n.$$

Так как каждая конечно порождённая подполугруппа (с единицей) свободного моноида M_m является регулярным подмножеством (языком), то решённая К. Шульцем проблема для уравнений с ограничениями на решения в свободных полугруппах является естественным аналогом проблемы Г. С. Маканина.

V. Diekert в работах [23, 24] построил алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению

$$w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 1$$

в свободной группе F_m и списку регулярных подмножеств (языков) $H_1, \ldots, H_n$ группы F_m определить, существует ли решение этого уравнения с условием

$$x_1 \in H_1, \ \ldots, \ x_n \in H_n.$$

Тем самым решена и проблема Г. С. Маканина.

Сказанное позволяет считать, что дальнейшее исследование различных обобщений проблемы Г. С. Маканина для свободных групп, моноидов и полугрупп, получающихся путём ослабления ограничений, налагаемых на подгруппы (подполугруппы, подмоноиды, языки) $H_1, \ldots, H_n$, представляет большой интерес.

В силу теоремы К. Шульца для получения алгоритмически неразрешимых проблем для уравнений в свободных моноидах (полугруппах) с подполугрупповыми ограничениями на решения необходимо рассматривать, в первую очередь, бесконечно порождённые свободные подполугруппы, среди которых имеются как нерегулярные, так и регулярные языки, например подполугруппа, порождённая всевозможными словами вида ab^na $(n = 1, 2, \ldots)$, свободно ими порождается и является регулярным языком.

2. Алгоритмические проблемы для уравнений в свободных моноидах и полугруппах (новые результаты)

В литературе по формальным языкам и грамматикам достаточно часто встречается рекурсивный язык L_1 в алфавите $\{a, b\}$, который состоит из всех слов w, для которых $|w|_a = |w|_b$, — язык *сбалансированных*, или *уравновешенных, слов* в алфавите $\{a, b\}$. Пользуясь известным критерием свободности для подполугрупп свободной полугруппы, легко доказать, что L_1 — *свободная подполугруппа счётного ранга.* Конечно, рекурсивный язык L_1 не является регулярным, однако с точки зрения сложности разрешимости для него алгоритмических проблем он скорее «ближе» к регулярным языкам, чем к произвольным рекурсивным.

Поэтому представляют интерес, на наш взгляд, следующие две теоремы.

Теорема 1. Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободном моноиде M_2 (в свободной полугруппе S_2)

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) \ \& \underset{\{i,j\} \in A}{\&} |x_i| = |x_j| \ \& \ |x_1|_b = |x_2|_b$$

с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, константами a и b и параметром x, где A — некоторое подмножество множества $\{\{t, s\} : 1 \leqslant t, s \leqslant n\}$, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение с ограничениями на решения

$$w(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j| \;\&\; |x_1|_b = |x_2|_b.$$

Теорема 2. Можно указать такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободном моноиде M_2 (в свободной полугруппе S_2)

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j| \;\&\; x_1 \in L_1$$

с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, константами a и b и параметром x, где A — некоторое подмножество множества $\{\{t, s\} : 1 \leqslant t, s \leqslant n\}$, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение уравнение с ограничениями на решения

$$w(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j| \;\&\; x_1 \in L_1.$$

Доказательство теорем 1 и 2 проведём по единой схеме с некоторыми отличиями. Прежде всего в позитивной $\exists$-теории моноида M_2 (полугруппы S_2) с использованием предиката $|x| = |y|$ равенства длин выразим ряд вспомогательных предикатов.

В дальнейшем будем работать с натуральными числами, а не с целыми неотрицательными, чтобы дать единые доказательства и для свободного моноида M_2 (свободной полугруппы с пустым словом), и для свободной полугруппы без пустого слова S_2.

Пусть α — это буква a или b,

$$\mathbb{N}_\alpha(x) \;\rightleftharpoons\; (x\,\alpha = \alpha\, x \;\&\; (\exists y)\, x = ay).$$

Если X — элемент моноида M_2, то формула $\mathbb{N}_\alpha(X)$ истинна на моноиде M_2 тогда и только тогда, когда X — натуральная степень буквы α.

Для свободной полугруппы S_2 эта формула примет более простой вид:

$$\mathbb{N}_\alpha(x) \;\rightleftharpoons\; (x\,\alpha = \alpha\, x).$$

Рассмотрим предикат $R(x, y)$, истинный тогда и только тогда, когда найдётся такое натуральное число t, что $x = a^t$, а $y = b^t$. Справедлива эквивалентность

$$R(x, y) \iff \mathbb{N}_a(x) \;\&\; \mathbb{N}_b(y) \;\&\; |x| = |y|.$$

Введём необходимый для дальнейшего предикат делимости $D(x, y)$, истинный тогда и только тогда, когда найдутся такие натуральные числа s и t, что $x = a^s$, $y = a^t$ и s делит t. Справедлива эквивалентность

$$D(x, y) \iff \Big(\mathbb{N}_a(x) \;\&\; \mathbb{N}_a(y) \;\&\; (\exists v)(\exists u)\big(x = av \;\&\; u(vb) = (vb)u \;\&\; |u| = |y|\big)\Big).$$

Для свободной полугруппы S_2 надо несколько изменить эту эквивалентность — она примет следующий вид:

$$D(x, y) \iff \Big(\mathbb{N}_a(x) \;\&\; \mathbb{N}_a(y) \;\&\; (x = a \vee (\exists v)(\exists u)\big(x = av \;\&\; u(vb) = (vb)u \;\&\; |u| = |y|\big)\Big).$$

Введём основной для дальнейшего предикат $M(x,y,z)$, истинный тогда и только тогда, когда найдутся такие натуральные числа s, t и r, что $x=a^s$, $y=a^t$, $z=a^r$ и $st=r$. Имеют место такие эквивалентности:

$$M(x,y,z) \iff \Big(\mathbb{N}_a(x) \mathbin{\&} \mathbb{N}_a(y) \mathbin{\&} \mathbb{N}_a(z) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (\exists v)(\exists u)(\exists w)\big(u(bx)=(bx)u \mathbin{\&} R(y,v) \mathbin{\&} w=vz \mathbin{\&} |u|=|w| \mathbin{\&} |u|_b=|w|_b\big)\Big),$$
$$M(x,y,z) \iff \Big(\mathbb{N}_a(x) \mathbin{\&} \mathbb{N}_a(y) \mathbin{\&} \mathbb{N}_a(z) \mathbin{\&} (\exists v)(\exists u)(\exists w)(\exists p)(\exists q)\big(u(bx)=(bx)u \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} R(y,v) \mathbin{\&} p=vz \mathbin{\&} |u|=|p| \mathbin{\&} R(z,w) \mathbin{\&} q=uyw \mathbin{\&} q\in L_1\big)\Big).$$

Воспользуемся следующим вариантом непосредственного следствия фундаментальной теоремы Ю. В. Матиясевича [25] о диофантовости рекурсивно перечислимых множеств:

Для произвольного рекурсивно перечислимого множества натуральных чисел можно построить такую формулу $\Phi_A(x_1)$ вида

$$(\exists x_2)\ldots(\exists x_m)\ \Psi,$$

где $\Psi = \mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} \varphi_i$ и каждая формула φ_i имеет один из следующих видов:

$$x_l+x_j=x_k,\quad x_j=x_l,\quad x_lx_j=x_k,\quad x_j=c$$

(здесь c — натуральное число), что для произвольного натурального числа n имеем $n\in A$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_A(n)$ истинна на множестве натуральных чисел.

Воспользовавшись хорошо известной эквивалентностью

$$xy=z \quad\iff\quad (x+y)^2=x^2+2z+y^2,$$

можно считать, что в формулу $\Phi_A(x_1)$ подформулы вида $x_l\,x_j=x_t$ входят лишь при $l=j$, т. е. они имеют вид $x_l^2=x_t$.

Используем следующее утверждение, принадлежащее Дж. Робинсон [26], на которое любезно обратил наше внимание анонимный рецензент одной нашей статьи:

Если m, n и L — натуральные числа, $m\leqslant n$ и $L>n^2$, то $(L+m)\,|\,(L^2-n)$ тогда и только тогда, когда $n=m^2$.

Условие $L>n^2$ можно заменить условием

$$(n+1)\,|\,L \mathbin{\&} (n+2)\,|\,L.$$

Это позволяет в формуле $\Phi_A(x_1)$ заменить подформулу $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{p} x_{l_i}^2=x_{t_i}$ на подформулу

$$U=Y^2 \mathbin{\&} Z=\sum_{i=1}^{p} x_{t_i} \mathbin{\&} (Z+1)\,|\,Y \mathbin{\&} (Z+2)\,|\,Y \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \mathop{\&}\limits_{i=1}^{p} x_{t_i}=x_{l_i}+u_i \mathbin{\&} \mathop{\&}\limits_{i=1}^{p} (Y+x_{l_i})\,|\,(U-x_{t_i}),$$

где U, Y и Z — новые переменные. Поэтому можно считать, что в формуле $\Phi_A(x_1)$ лишь одна подформула φ_i имеет вид $x_l^2=x_k$, а все остальные подформулы φ_i имеют один из следующих видов (c — натуральное число):

$$x_l+x_j=x_k,\quad x_j=x_k,\quad x_l\,|\,x_j,\quad x_j=c.$$

По формуле $\Phi_A(x_1)$ построим формулу $\Phi_A^{(1)}(x_1)$:

$$\Phi_A^{(1)}(x_1) \rightleftharpoons (\exists x_2)\dots(\exists x_m)\left(\Psi_1 \;\&\; \left(\mathop{\&}_{i=2}^{m} \mathbb{N}_a(x_i)\right)\right).$$

Здесь Ψ_1 получается из Ψ заменой каждой подформулы φ_i вида $x_l + x_j = x_k$ на $x_l x_j = x_k$, вида $x_l \,|\, x_j$ — на $D(x_l, x_j)$, вида $x_j = x_k$ — на $x_j = x_k$, вида $x_j = c$ — на $x_j = a^c$ и вида $x_l^2 = x_k$ — на $M(x_l, x_l, x_k)$. Напомним, что подформула последнего вида лишь одна и только в неё, причём лишь один раз, входит предикат $|x|_b = |y|_b$ или предикат $x \in L_1$.

Подходящим образом переименовав переменные в формуле $\Phi_A^{(1)}(x_1)$, можем считать, что в формулу $\Phi_A^{(1)}(x)$ входят лишь переменные $x, x_1, \dots, x_n$.

Удалим из формулы $\Phi_A^{(1)}(x)$ конъюнкцию & (а в случае свободной полугруппы S_2 и дизъюнкцию $\vee$, при этом не будем выделять новые переменные) и приведём её к виду

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \dots, x_n, a, b) \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j| \;\&\; |x_1|_b = |x_2|_b$$

или виду

$$w(x, x_1, \dots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \dots, x_n, a, b) \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j| \;\&\; x_1 \in L_1.$$

Полученную формулу обозначим через $\Phi_A^{(2)}(x)$. Тогда $k \in A$, если и только если формула $\Phi_A^{(2)}(a^k)$ истинна на свободном моноиде M_2 (на свободной полугруппе S_2).

Для завершения доказательства теорем достаточно взять в качестве A рекурсивно перечислимое, но нерекурсивное множество натуральных чисел. ■

3. Алгоритмические проблемы для систем неравенств в свободных моноидах и полугруппах

V. Diekert предложил (устное сообщение Ю. В. Матиясевича) изучать в свободных моноидах и свободных полугруппах системы неравенств вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m) \leqslant u_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m), \tag{3}$$

где для слов w и u в алфавите образующих свободного моноида запись $w \leqslant u$ означает, что последовательность букв w является подпоследовательностью букв u, т. е. существуют такое число $k \leqslant |w|$ и такие слова $w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$, что

$$w = w_1 \dots w_k, \quad u = u_1 w_1 u_2 \dots u_k w_k u_{k+1}.$$

Системы (3) можно рассматривать как обобщение систем уравнений (1), так как $w = u$ тогда и только тогда, когда $w \leqslant u \;\&\; u \leqslant w$.

Отношение $w \leqslant u$ является отношением частичного порядка на свободном моноиде M_m (свободной полугруппе S_m), т. е. оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Это ещё один довод для обоснования естественности рассмотрения систем неравенств вида (1).

Вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем неравенств (3) в настоящее время открыт. Но если к отношению $w \leqslant u$ добавить предикат равенства длин, то получим алгоритмически неразрешимую задачу.

В дальнейшем равенство $w = u$ будем использовать как сокращённую запись конъюнкции неравенств $w \leqslant u \;\&\; u \leqslant w$.

Теорема 3. Невозможен алгоритм, позволяющий для произвольной системы неравенств с одним ограничением вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a, b) \leqslant u_i(x_1, \ldots, x_n, a, b) \mathbin{\&} |x_1| = |x_2|$$

определить, имеет ли она решение в свободном моноиде M_2.

Доказательство. Докажем теорему по той же схеме, что и теоремы 1 и 2, но с некоторыми изменениями.

Предикаты $R(x, y)$ и $M(x, y, z)$ зададим эквивалентностями

$$R(x, y) \iff \mathbb{N}_a(x) \mathbin{\&} \mathbb{N}_b(y) \mathbin{\&} (\exists h)((ab)h = h(ab) \mathbin{\&} x \leqslant h \mathbin{\&} y \leqslant h \mathbin{\&} |xy| = |h|,$$

$$M(x, y, z) \iff \Big(\mathbb{N}_a(x) \mathbin{\&} \mathbb{N}_a(y) \mathbin{\&} \mathbb{N}_a(z) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} (\exists v)(\exists u)(\exists w)\big(u(bx) = (bx)u \mathbin{\&} R(y, v) \mathbin{\&} w = vz \mathbin{\&} z \leqslant u \mathbin{\&} v \leqslant u \mathbin{\&} |w| = |u|\big)\Big).$$

Покажем, что предикат $M(x, y, z)$ истинен тогда и только тогда, когда найдутся такие натуральные числа s, t и r, что $x = a^s$, $y = a^t$, $z = a^r$ и $st = r$.

Если предикат $M(x, y, z)$ истинен, то существуют такие натуральные числа s, t и r, что $x = a^s$, $y = a^t$, $z = a^r$. Остаётся показать, что $st = r$. Нетрудно видеть, что $u = (ba^s)^l$ для некоторого натурального числа l, $v = b^t$ и $w = b^t a^r$. Тогда неравенства $z \leqslant u \mathbin{\&} v \leqslant u$ влекут неравенства $r \leqslant sl \mathbin{\&} t \leqslant l$, а равенство $|w| = |u|$ даёт равенство $r + t = sl + l$. Поэтому $r = sl \mathbin{\&} t = l$, значит, $r = st$. Обратное утверждение очевидно.

Заметим, что справедлива следующая эквивалентность, которая далее будет значительно усилена:

$$M(x, y, z) \iff \Big(\mathbb{N}_a(x) \mathbin{\&} \mathbb{N}_a(y) \mathbin{\&} \mathbb{N}_a(z) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} (\exists v)(\exists u)(\exists w)(\exists h)\big(\mathbb{N}_b(v) \mathbin{\&} (ab)h = h(ab) \mathbin{\&} y \leqslant h \mathbin{\&} v \leqslant h \mathbin{\&} u(bx) = (bx)u \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} w = vz \mathbin{\&} z \leqslant u \mathbin{\&} v \leqslant u \mathbin{\&} |wyv| = |uh|\big)\Big).$$

В правой части эквивалентности только одно вхождение предиката равенства длин.

Как и ранее, воспользуемся следующим вариантом непосредственного следствия фундаментальной теоремы Ю. В. Матиясевича [25] о диофантовости рекурсивно перечислимых множеств:

Для произвольного рекурсивно перечислимого множества A натуральных чисел можно построить такую формулу $\Phi_A(x_1)$ вида

$$(\exists x_2) \ldots (\exists x_m)\ \Psi,$$

где $\Psi = \mathop{\&}_{i=1}^{s} \varphi_i$ и каждая формула φ_i имеет один из следующих видов:

$$x_l + x_j = x_k, \quad x_j = x_k, \quad x_l x_j = x_k, \quad x_j = c$$

(здесь c — натуральное число), что для произвольного натурального числа n имеем $n \in A$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_A(n)$ истинна на множестве натуральных чисел.

По формуле $\Phi_A(x_1)$ построим формулу $\Phi_A^{(1)}(x_1)$ следующим образом:

$$\Phi_A^{(1)}(x_1) \rightleftharpoons (\exists x_2) \ldots (\exists x_m) \left(\Psi_1 \mathbin{\&} \left(\mathop{\&}_{i=2}^{m} \mathbb{N}_a(x_i)\right)\right),$$

где Ψ_1 получается из Ψ заменой каждой подформулы φ_i вида $x_l+x_j=x_k$ на $x_lx_j=x_k$, вида $x_j=x_k$ — на $x_j=x_k$, вида $x_j=c$ — на $x_j=a^c$ и вида $x_lx_j=x_k$ — на $M(x_l,x_j,x_k)$.

Подходящим образом переименовав переменные в формуле $\Phi_A^{(1)}(x_1)$, можем считать, что в формулу $\Phi_A^{(1)}(x)$ входят лишь переменные $x,x_1,\ldots,x_n$.

При построении формулы $\Phi_A^{(1)}(x_1)$ по формуле $\Phi_A(x_1)$ мы заменяли каждую подформулу $x_lx_j=x_k$ на $M(x_l,x_j,x_k)$. В итоге конъюнкция $\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m} x_{l_p}x_{j_p}=x_{k_p}$ заменилась на $\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m} M(x_{l_p},x_{j_p},x_{k_p})$ и справедлива следующая эквивалентность:

$M_2\models \mathop{\&}\limits_{p=1}^{m} M(x_{l_p},x_{j_p},x_{k_p})$ тогда и только тогда, когда найдутся такие натуральные числа s_p, t_p и r_p $(p=1,\ldots,m)$, что $x_{l_p}=a^{s_p}$, $y_{j_p}=a^{t_p}$, $z_{k_p}=a^{r_p}$ и $s_pt_p=r_p$.

Выпишем в явном виде конъюнкцию $\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m} M(x_{l_p},x_{j_p},x_{k_p})$ и приведём её к виду

$$\begin{gathered}\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m}(\exists y)(\exists z)\Big(\mathbb{N}_a(x_{l_p})\ \&\ \mathbb{N}_a(x_{j_p})\ \&\ \mathbb{N}_a(x_{k_p})\ \&\\ \&\ (\exists v_p)(\exists u_p)(\exists h_p)\big(u_p(bx_{l_p})=(bx_{l_p})u_p\ \&\ v_pb=bv_p\ \&\\ \&\ abh_p=h_pab\ \&\ x_{j_p}\leqslant h_p\ \&\ v_p\leqslant h_p\ \&\ x_{k_p}\leqslant u_p\ \&\ v_p\leqslant u_p\big)\ \&\\ \&\ \big(y=x_{j_1}v_1\ldots x_{j_m}v_mx_{k_1}v_1\ldots x_{k_m}v_m\ \&\ z=h_1\ldots h_mu_1\ldots u_m\ \&\ |y|=|z|\big)\Big).\end{gathered}$$

Последнюю формулу также будем обозначать через $\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m} M(x_{l_p},x_{j_p},x_{k_p})$.

Покажем, что для произвольных слов A_p, B_p и C_p $(p=1,\ldots,m)$ на свободном моноиде M_2 формула

$$\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m} M(A_p,B_p,C_p) \tag{4}$$

истинна тогда и только тогда, когда существуют такие натуральные числа s_p, t_p и r_p $(p=1,\ldots,m)$, что $A_p=a^{s_p}$, $B_p=a^{t_p}$, $C=a^{r_p}$ и $r_p=s_pt_p$.

Если на свободном моноиде M_2 истинна формула (4), то существуют такие натуральные числа s_p, t_p и r_p $(p=1,\ldots,m)$, что $A_p=a^{s_p}$, $B_p=a^{t_p}$, $C=a^{r_p}$. Остаётся показать, что $r_p=s_pt_p$.

Нетрудно понять, что существуют такие числа α_p и γ_p $(p=1,\ldots,m)$, что $h_p=(ab)^{\alpha_p}$ и $v_p=b^{\gamma_p}$. Тогда неравенства $x_{j_p}\leqslant h_p\ \&\ v_p\leqslant h_p$ влекут неравенства $t_p\leqslant\alpha_p\ \&\ \gamma_p\leqslant\alpha_p$.

Аналогично существуют такие числа β_p $(p=1,\ldots,m)$, что $u_p=(ba^{s_p})^{\beta_p}$. Тогда неравенства $x_{k_p}\leqslant u_p\ \&\ v_p\leqslant u_p$ влекут неравенства $r_p\leqslant s_p\beta_p\ \&\ \gamma_p\leqslant\beta_p$.

Равенство $|y|=|z|$ влечет равенство

$$\begin{gathered}t_1+\gamma_1+\ldots+t_m+\gamma_m+r_1+\gamma_1+\ldots+r_m+\gamma_m=\\ =\alpha_1+\alpha_1+\ldots+\alpha_m+\alpha_m+s_1\beta_1+\beta_1+\ldots+s_m\beta_m+\beta_m,\end{gathered}$$

что вместе с предыдущими неравенствами

$$\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m}(t_p\leqslant\alpha_p\ \&\ \gamma_p\leqslant\alpha_p)\ \&\ \mathop{\&}\limits_{p=1}^{m}(r_p\leqslant s_p\beta_p\ \&\ \gamma_p\leqslant\beta_p)$$

даёт систему равенств $\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m}(t_p=\alpha_p\ \&\ \gamma_p=\alpha_p\ \&\ r_p=s_p\beta_p\ \&\ \beta_p=\gamma_p)$, из которых следует требуемое: $\mathop{\&}\limits_{p=1}^{m} r_p=s_pt_p$.

Обратное утверждение доказывается по той же схеме.

Приведём полученную формулу $\Phi_A^{(1)}(x)$ к виду

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a, b) \leqslant u_i(x_1, \ldots, x_n, a, b) \ \& \ |x_1| = |x_2|.$$

Полученную формулу обозначим через $\Phi_A^{(2)}(x)$. Тогда для произвольного натурального числа m справедлива следующая эквивалентность: $m \in A$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi_A^{(2)}(a^m)$ истинна на моноиде M_2.

Для завершения доказательства теоремы достаточно взять в качестве A рекурсивно перечислимое, но нерекурсивное множество натуральных чисел. ■

Заключение

В работе построено такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободном моноиде M_2 (свободной полугруппе S_2)

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) \ \& \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \ \& \ |x_1|_b = |x_2|_b$$

с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, константами a и b и параметром x, где A — некоторое подмножество множества $\{\{t, s\} : 1 \leqslant t, s \leqslant n\}$, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение следующее уравнение с ограничениями на решения:

$$w(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) \ \& \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \ \& \ |x_1|_b = |x_2|_b.$$

Построено такое однопараметрическое семейство уравнений с ограничениями на решения в свободном моноиде M_2

$$w(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(x, x_1, \ldots, x_n, a, b) \ \& \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \ \& \ x_1 \in L_1$$

с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, константами a и b и параметром x, где A — некоторое подмножество множества $\{\{t, s\} : 1 \leqslant t, s \leqslant n\}$, что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа m определить, имеет ли решение следующее уравнение с ограничениями на решения:

$$w(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) = v(a^m, x_1, \ldots, x_n, a, b) \ \& \mathop{\&}_{\{i,j\} \in A} |x_i| = |x_j| \ \& \ x_1 \in L_1.$$

Для введённого V. Diekert отношения частичного порядка доказано, что невозможно построить алгоритм, позволяющий для произвольной системы неравенств с одним ограничением вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a, b) \leqslant u_i(x_1, \ldots, x_n, a, b) \ \& \ |x_1| = |x_2|$$

определить, имеет ли она решение в свободном моноиде M_2 (свободной полугруппе S_2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дурнев В. Г., Зеткина А. И.* Об уравнениях в свободных моноидах с ограничениями на решения // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов Междунар. науч. конф. Воронеж, 13–15 декабря 2021 г. Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2022. С. 1571–1575.

2. *Дурнев В. Г., Зеткина А. И.* Алгоритмические проблемы для уравнений в свободных группах и полугруппах с ограничениями на решения // Всерос. науч. конф. «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Тверь, 3–8 декабря 2021 г. Тверь: ТвГУ, 2021. С. 25–41.
3. *Перязев Н. А.* Позитивные теории свободных моноидов // Алгебра и логика. 1993. Т. 32. № 2. С. 148–159.
4. *Косовский Н. К.* Некоторые свойства решений уравнений в свободной полугруппе // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1972. Т. 32. С. 21–28.
5. *Дурнев В. Г.* Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36. № 5. С. 1067–1080.
6. *Хмелевский Ю. И.* Уравнения в свободной полугруппе. М.: Наука, 1971. 218 с.
7. *Матиясевич Ю. В.* Связь систем уравнений в словах и длинах с 10-й проблемой Гильберта // Исследования по конструктивной математике и математической логике. Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1968. Т. 8. С. 132–143.
8. *Косовский Н. К.* О множествах, представимых в виде решений уравнений в словах и длинах // Вторая Всесоюз. конф. по матем. логике. Тезисы кратких сообщений. М., 1972. С. 23.
9. *Косовский Н. К.* О решении систем, состоящих одновременно из уравнений в словах и неравенств в длинах слов // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1973. Т. 33. С. 24–29.
10. *Дурнев В. Г.* Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Матем. заметки. 1974. Т. 16. № 5. С. 717–724.
11. *Buchi J. R. and Senger S.* Definability in the existential theory of concatenation // Z. Math. Log. und Grundl. Math. 1988. V. 34. No. 4. P. 337–342.
12. *Маканин Г. С.* Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // ДАН СССР. 1977. Т. 233. № 2. С. 287–290.
13. *Маканин Г. С.* Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе // Матем. сб. 1977. Т. 103 (145). № 2 (6). С. 147–236.
14. *Маканин Г. С.* Уравнения в свободных группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 6. С. 1199–1274.
15. *Дурнев В. Г.* Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Т. 211. № 4. С. 772–774.
16. *Дурнев В. Г.* О позитивных формулах на свободных полугруппах // Сиб. матем. журн. 1974. Т. 25. № 5. С. 1131–1137.
17. *Важенин Ю. М., Розенблат Б. В.* Разрешимость позитивной теории свободной счетнопорожденной полугруппы // Матем. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 120–127.
18. *Маканин Г. С.* Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. № 4. С. 735–749.
19. *Мерзляков Ю. И.* Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 4. С. 25–42.
20. Коуровская тетрадь. 11-е изд., доп. / ред. В. Д. Мазуров и др. Новосибирск, 1990. 126 с.
21. *Малхасян А. Ш.* О разрешимости в подгруппах уравнений в свободной группе // Прикладная математика. 1986. Вып. 2. С. 42–47.
22. *Schulz K. U.* Makanin's algorithm for word equations — two improvements and a generalization // LNCS. 1990. V. 572. P. 85–150.

23. *Diekert V., Gutierrez C., and Hagenah C.* The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete // LNCS. 2001. V. 2010. P. 170–182.

24. *Diekert V., Gutierrez C., and Hagenah C.* The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete // Information and Computation. 2005. V. 202. P. 105–140.

25. *Матиясевич Ю. В.* Диофантовость перечислимых множеств // ДАН СССР. 1970. Т. 130. № 3. С. 495–498.

26. *Robinson J.* Existential definability in arithmetic // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. P. 437–439.

REFERENCES

1. *Durnev V. G. and Zetkina A. I.* Ob uravneniyakh v svobodnykh monoidakh s ogranicheniyami na resheniya [On equations in free monoids with restrictions on solutions]. Aktual'nye Problemy Prikladnoy Matematiki, Informatiki i Mekhaniki, Voronezh, 2022, pp. 1571–1575. (in Russian)

2. *Durnev V. G. and Zetkina A. I.* Algoritmicheskie problemy dlya uravneniy v svobodnykh gruppakh i polugruppakh s ogranicheniyami na resheniya [Algorithmic problems for equations in free groups and semigroups with constraints on solutions]. Vseros. nauch. konf. "Matematicheskie Osnovy Informatiki i Informatsionno-Kommunikatsionnykh Sistem", Tver, TvSU, 2021, pp. 25–41. (in Russian)

3. *Peryazev N. A.* Pozitivnye teorii svobodnykh monoidov [Positive theories of free monoids]. Algebra i Logika, 1993, vol. 32, no. 2, pp. 148–159. (in Russian)

4. *Kosovskiy N. K.* Nekotorye svoystva resheniy uravneniy v svobodnoy polugruppe [Some properties of solutions of equations in a free semigroup]. Zapiski Nauch. Seminarov Leningr. Otd. Mat. In-ta im. V. A. Steklova, 1972, vol. 32, pp. 21–28. (in Russian)

5. *Durnev V. G.* Nerazreshimost' pozitivnoy $\forall\exists^3$-teorii svobodnoy polugruppy [Undecidability of the positive $\forall\exists^3$-theory of a free semigroup]. Sib. Matem. Zhurn., 1995, vol. 36, no. 5, pp. 1067–1080. (in Russian)

6. *Khmelevskiy Yu. I.* Uravneniya v svobodnoy polugruppe [Equations in a free semigroup.]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 218 p. (in Russian)

7. *Matiyasevich Yu. V.* Svyaz' sistem uravneniy v slovakh i dlinakh s 10-oy problemoy Gil'berta [Connection of systems of equations in words and lengths with Hilbert's 10th problem]. Zapiski Nauch. Seminarov Leningr. Otd. Mat. In-ta im. V. A. Steklova, 1968, vol. 8, pp. 132–143. (in Russian)

8. *Kosovskiy N. K.* O mnozhestvakh, predstavimykh v vide resheniy uravneniy v slovakh i dlinakh [On sets representable as solutions of equations in words and lengths]. Vtoraya Vsesoyuz. Konf. po Matem. Logike. Moscow, 1972, p. 23. (in Russian)

9. *Kosovskiy N. K.* O reshenii sistem, sostoyashchikh odnovremenno iz uravneniy v slovakh i neravenstv v dlinakh slov [On the solution of systems consisting simultaneously of equations in words and inequalities in word lengths]. Zapiski Nauch. Seminarov Leningr. Otd. Mat. In-ta im. V. A. Steklova, 1973, vol. 33, pp. 24–29. (in Russian)

10. *Durnev V. G.* Ob uravneniyakh na svobodnykh polugruppakh i gruppakh [On equations on free semigroups and groups]. Matem. Zametki, 1974, vol. 16, no. 5, pp. 717–724. (in Russian)

11. *Buchi J. R. and Senger S.* Definability in the existential theory of concatenation. Z. Math. Log. und Grundl. Math., 1988, vol. 34, no. 4, pp. 337–342.

12. *Makanin G. S.* Problema razreshimosti uravneniy v svobodnoy polugruppe [The problem of solvability of equations in a free semigroup]. DAN USSR, 1977, vol. 233, no. 2, pp. 287–290. (in Russian)

13. *Makanin G. S.* Problema razreshimosti uravneniy v svobodnoy polugruppe [The problem of solvability of equations in a free semigroup]. Matem. Sbor., 1977, vol. 103 (145), no. 2 (6), pp. 147–236. (in Russian)
14. *Makanin G. S.* Uravneniya v svobodnykh gruppakh [Equations in free groups]. Izv. AN USSR. Ser. Matem., 1982, vol. 46, no. 6, pp. 1199–1274. (in Russian)
15. *Durnev V. G.* Pozitivnaya teoriya svobodnoy polugruppy [Positive theory of a free semigroup]. DAN USSR, 1973, vol. 211, no. 4, pp. 772–774. (in Russian)
16. *Durnev V. G.* O pozitivnykh formulakh na svobodnykh polugruppakh [On positive formulas on free semigroups]. Sib. Matem. Zhurn., 1974, vol. 25, no. 5, pp. 1131–1137. (in Russian)
17. *Vazhenin Yu. M. and Rozenblat B. V.* Razreshimost' pozitivnoy teorii svobodnoy schetnoporozhdennoy polugruppy [Decidability of the positive theory of a free countably generated semigroup]. Matem. Sbornik, 1981, vol. 116, no. 1, pp. 120–127. (in Russian)
18. *Makanin G. S.* Razreshimost' universal'noy i pozitivnoy teoriy svobodnoy gruppy [Decidability of the universal and positive theories of a free group]. Izv. AN USSR. Ser. Matem., 1984, no. 4, pp. 735–749. (in Russian)
19. *Merzlyakov Yu. I.* Pozitivnye formuly na svobodnykh gruppakh [Positive formulas on free groups]. Algebra i Logika, 1966, vol. 5, no. 4, pp. 25–42. (in Russian)
20. Kourovskaya tetrad' [Kourovka Notebook]. V. D. Mazurov et al. (eds.). Novosibirsk, 1990. 126 p. (in Russian)
21. *Malkhasyan A. Sh.* O razreshimosti v podgruppakh uravneniy v svobodnoy gruppe [On the solvability in subgroups of equations in a free group]. Prikladnaya Matematika, 1986, iss. 2, pp. 42–47. (in Russian)
22. *Schulz K. U.* Makanin's algorithm for word equations — two improvements and a generalization. LNCS, 1990, vol. 572, pp. 85–150.
23. *Diekert V., Gutierrez C., and Hagenah C.* The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete. LNCS, 2001, vol. 2010, pp. 170–182.
24. *Diekert V., Gutierrez C., and Hagenah C.* The existential theory of equations with rational constraints in free groups is PSPACE-complete. Information and Computation, 2005, vol. 202, pp. 105–140.
25. *Matiyasevich Yu. V.* Diofantovost' perechislimykh mnozhestv [Diophantine property of enumerable sets]. DAN USSR, 1970, vol. 130, no. 3, pp. 495–498. (in Russian)
26. *Robinson J.* Existential definability in arithmetic. Trans. Amer. Math. Soc., 1952, vol. 72, pp. 437–439.