ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.175.3 DOI 10.17223/20710410/59/4

АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ПОМЕЧЕННЫХ ПЛАНАРНЫХ ТЕТРАЦИКЛИЧЕСКИХ И ПЕНТАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

В. А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации РАН, г. Москва, Россия

E-mail: vitvobl@yandex.ru

Связный граф с цикломатическим числом равным k называется k-циклическим графом. Получена формула для числа помеченных непланарных пентациклических графов с заданным числом вершин, а также найдена асимптотика числа помеченных связных планарных тетрациклических и пентациклических графов с n вершинами при $n \to \infty$. Доказано, что при равномерном распределении вероятностей на множестве рассматриваемых графов вероятность того, что помеченный тетрациклический граф является планарным, асимптотически равна 1089/1105, а вероятность того, что помеченный пентациклический граф является планарным, асимптотически равна 1591/1675.

Ключевые слова: *помеченный граф, планарный граф, тетрациклический граф, пентациклический граф, блок, перечисление, асимптотика, вероятность.*

AN ASYMPTOTICS FOR THE NUMBER OF LABELLED PLANAR TETRACYCLIC AND PENTACYCLIC GRAPHS

V. A. Voblyi

Russian Institut for Scientific and Technical Information, Moscow, Russia

A connected graph with a cyclomatic number k is said to be a k-cyclic graph. We obtain the formula for the number of labelled non-planar pentacyclic graphs with a given number of vertices, and find the asymptotics of the number of labelled connected planar tetracyclic and pentacyclic graphs with n vertices as $n \to \infty$. We prove that under a uniform probability distribution on the set of graphs under consideration, the probability that the labelled tetracyclic graph is planar is asymptotically equal to 1089/1105, and the probability that the labeled pentacyclic graph is planar is asymptotically equal to 1591/1675.

Keywords: *labelled graph, planar graph, tetracyclic graph, pentacyclic graph, block, enumeration, asymptotics, probability.*

Введение

Планарные графы применяются при проектировании СБИС [1, 2], в теории кодирования [3], в физике при нахождении статистической суммы [4] и в компьютерном зрении [5]. Эти и другие применения планарных графов обуславливают актуальность их перечисления.

О. Гименез и М. Ной асимптотически перечислили помеченные планарные графы по числу вершин [6]. Е. Бендер нашёл асимптотику числа помеченных 2-связных планарных графов с n вершинами при $n \to \infty$ [7]. Однако в общем случае асимптотика числа помеченных планарных n-вершинных k-циклических графов при $n \to \infty$ неизвестна. В [8] получена явная формула для числа помеченных связных непланарных тетрациклических графов с заданным числом вершин. В [9] найдена явная формула для числа помеченных связных непланарных пентациклических блоков с заданным числом вершин, а также получена соответствующая асимптотика.

В данной работе получена формула для числа помеченных связных непланарных пентациклических графов с заданным числом вершин, а также найдена асимптотика числа помеченных связных планарных n-вершинных тетрациклических и пентациклических графов при $n \to \infty$.

1. Перечисление графов

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Определение 1. Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. *Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [10, с. 41].

Определение 2. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер и вершин графа, *k-циклический граф* — это граф с цикломатическим числом k.

Определение 3. Граф называется *планарным*, если его можно уложить на плоскости без пересечения рёбер [10, с. 127].

Определение 4. *Кактусом* называется связный граф, в котором нет рёбер, лежащих более чем на одном простом цикле [11, с. 93]. Все блоки кактуса — рёбра или простые циклы.

Определение 5. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу [12].

Пусть $P(n,k)$ $(\bar{P}(n,k))$ — число помеченных связных планарных (непланарных) k-циклических графов с n вершинами.

Теорема 1. Число $\bar{P}(n,5)$ помеченных связных непланарных пентациклических графов с n вершинами при $n \geqslant 6$ равно

$$\bar{P}(n,5) = (n-1)![z^{-1}]e^{nz}\Big(\frac{nz^7(2+z)}{48(1-z)^{11}} + \frac{z^5(12+47z+9z^2-8z^3)}{24(1-z)^{13}}\Big)z^{-n}. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим через $B(n,k)$ число помеченных k-циклических блоков с n вершинами; $B_k(z)$ — экспоненциальную производящую функцию для $B(n,k)$; $C(n,k)$ — число помеченных связных k-циклических графов с n вершинами.

Известна [13, 14] формула

$$C(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]e^{nz}Y_k(n1!B_1'(z), n2!B_2'(z), \dots, nk!B_k'(z))z^{-n}, \qquad (2)$$

где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета [15, с. 25], а $Y_k(x_1,\dots,x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Для этих многочленов известно выражение [16, с. 173]

$$Y_k(x_1,\dots,x_k) = \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1!\dots m_k!}\Big(\frac{x_1}{1!}\Big)^{m_1}\dots\Big(\frac{x_k}{k!}\Big)^{m_k},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k, то есть по всем неотрицательным решениям $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$ уравнения $m_1 + 2m_2 + \ldots + km_k = k$, $m_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Формула (2) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивого его подкласса [13]. Известно, что класс планарных графов является блочно-устойчивым [12].

Так как [15, с. 246]

$$Y_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 15x_1x_2^2 + 10x_1^2x_3 + 10x_2x_3 + 5x_1x_4 + x_5$$

и $x_i = ni!B_i'(z)$, имеем

$$\begin{gathered} C(n,5) = \frac{(n-1)!}{120n}[z^{-1}]e^{nz}\Big(n^5(B_1'(z))^5 + 20n^4(B_1'(z))^3B_2'(z) + 60n^3B_1'(z)(B_2'(z))^2 + \\ +60n^3(B_1'(z))^2B_3'(z) + 120n^2B_2'(z)B_3'(z) + 120n^2B_1'(z)B_4'(z) + 120nB_5'(z)\Big)z^{-n}. \end{gathered} \tag{3}$$

Обозначим через $\bar{B}(n,k)$ число помеченных непланарных k-циклических блоков с n вершинами, а через $\bar{B}_k(z)$ — экспоненциальную производящую функцию для $\bar{B}(n,k)$.

По теореме Понтрягина — Куратовского граф планарен только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу K_5 или полному двудольному графу $K_{3,3}$. Так как граф K_5 является 6-циклическим, а граф $K_{3,3}$ — 4-циклическим, все унициклические, бициклические и трициклические блоки не могут содержать таких подграфов и все эти блоки являются планарными графами. Поэтому в выражение для $\bar{P}(n,5)$ войдут только слагаемые из разложения (3), содержащие производящие функции $\bar{B}_4(z)$ и $\bar{B}_5(z)$ для непланарных блоков:

$$\bar{P}(n,5) = \frac{(n-1)!}{120n}[z^{-1}]e^{nz}\Big(120n^2B_1'(z)\bar{B}_4'(z) + 120n\bar{B}_5'(z)\Big)z^{-n}. \tag{4}$$

Так как унициклический блок — это простой цикл, имеем

$$B(n,1) = (n-1)!/2, \quad B_1(z) = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2}(n-1)!\frac{z^n}{n!}, \quad B_1'(z) = \frac{z^2}{2(1-z)}.$$

В [8] получена формула $\bar{B}(n,4) = \dfrac{n!}{72}\dbinom{n+2}{8}$, из которой следуют выражения

$$\bar{B}_4(z) = \frac{z^6}{72(1-z)^9}, \quad \bar{B}_4'(z) = \frac{2z^5 + z^6}{24(1-z)^{10}},$$

а также найдено значение

$$\bar{P}(n,4) = \frac{n!}{72}\sum_{k=6}^{n}\binom{k+2}{8}\frac{kn^{n-k-1}}{(n-k)!}. \tag{5}$$

В [9] доказана формула

$$\bar{B}(n,5) = \frac{n!}{380160}\binom{n+1}{7}(10n^4 + 118n^3 + 72n^2 - 1232n - 1968),$$

из которой следует

$$\bar{B}_5(z) = \frac{z^6(2+5z-2z^2)}{24(1-z)^{12}}, \quad \bar{B}_5'(z) = \frac{z^5(12+47z+9z^2-8z^3)}{24(1-z)^{13}}.$$

Подставляя выражения для $\bar{B}_4(z)$ и $\bar{B}_5(z)$ в (4), получим формулу (1). ■

В таблице представлены числа $\bar{P}(n,4)$ и $\bar{P}(n,5)$, вычисленные с помощью формул (5), (1) и пакета программ Maple.

n	6	7	8	9	10	11	12
$\bar{P}(n,4)$	10	1050	73920	4483080	256032000	14353651620	807516864000
$\bar{P}(n,5)$	60	8610	781200	58688280	4034520000	266400523620	17353002522240

2. Асимптотика и вероятность

Теорема 2. Для числа $P(n,4)$ помеченных связных планарных тетрациклических графов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотика

$$P(n,4) \sim \frac{121 n^{n+4}}{13440}\,. \tag{6}$$

Доказательство. Очевидно, имеем $P(n,4) = C(n,4) - \bar{P}(n,4)$.

Пусть $f(n, n+k)$ — число помеченных графов с n вершинами и $(n+k)$ рёбрами. Е. Райт нашёл асимптотику при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/2})$ [17]:

$$\begin{gathered} f(n,n+k) \sim \rho_k n^{n+(3k-1)/2}, \quad \rho_k = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_k}{2^{(3k-1)/2}\Gamma((3k/2)+1)}, \\ \sigma_0 = \frac{1}{4}, \quad \sigma_1 = \frac{5}{16}, \quad \sigma_2 = \frac{15}{16}, \quad \sigma_{k+1} = \frac{3}{2}(k+1)\sigma_k + \sum_{s=1}^{k-1} \sigma_s\sigma_{k-s}, \ k \geqslant 2. \end{gathered} \tag{7}$$

С помощью формулы для гамма-функции $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ при $n \to \infty$ найдём

$$\begin{gathered} f(n,n+3) \sim \rho_3 n^{n+4}, \quad \rho_3 = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_3}{2^4\Gamma(11/2)} = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_3}{16\frac{9!!}{2^5}\sqrt{\pi}} = \frac{2\sigma_3}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} = \frac{2\sigma_3}{945}, \\ \sigma_3 = \frac{9}{2}\sigma_2 + \sigma_1^2 = \frac{9}{2}\cdot\frac{15}{16} + \frac{25}{256} = \frac{1105}{256}, \quad \rho_3 = \frac{2\cdot 1105}{945\cdot 256} = \frac{221}{24192}, \\ C(n,4) = f(n,n+3) \sim \frac{221}{24192} n^{n+4}. \end{gathered} \tag{8}$$

Используем следующую лемму:

Лемма 1 [18]. Обозначим

$$A_n(m,q) = [z^{-1}]\frac{p(z,q)e^{nz}z^{-n}}{(1-z)^m}, \quad p(z,q) = \sum_{i=0}^{q} c_i z^i,$$

тогда при фиксированных m, q и $n \to \infty$ верна асимптотика

$$A_n(m,q) \sim \frac{\sqrt{\pi}p(1,q))n^{n+m/2}}{n!2^{m/2}\Gamma((m+1)/2)}.$$

Из выражения (2) для тетрациклических графов с помощью леммы 1 получим

$$\bar{P}(n,4)=\frac{(n-1)!}{24n}[z^{-1}]e^{nz}24n\bar{B}_4'(z)z^{-n}=\frac{n!}{n}[z^{-1}]e^{nz}\frac{2z^5+z^6}{24(1-z)^{10}}z^{-n}\sim\frac{n!}{24n}\frac{\sqrt{\pi}3n^{n+5}}{n!2^5\Gamma(11/2)}=\frac{n^{n+4}}{7560},$$

$$P(n,4)=C(n,4)-\bar{P}(n,4)\sim\frac{221}{24192}n^{n+4}-\frac{n^{n+4}}{7560}=\frac{121}{13440}n^{n+4}.$$

Теорема 2 доказана. ■

Зададим на множестве помеченных тетрациклических графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 1. Вероятность $P_4(n)$ того, что помеченный связный тетрациклический граф является планарным, асимптотически равна $1089/1105 \approx 0{,}9855$.

Доказательство. С помощью формул (6) и (8) при $n \to \infty$ найдём

$$P_4(n)=\frac{P(n,4)}{C(n,4)}\sim\frac{121n^{n+4}24192}{13440n^{n+4}221}=\frac{1089}{1105}\approx 0{,}9855.$$

Следствие 1 доказано. ■

Теорема 3. Для числа $P(n,5)$ помеченных связных планарных пентациклических графов с n вершинами при $n \to \infty$ верна асимптотика

$$P(n,5)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1591n^{n+11/2}}{1474560}. \tag{9}$$

Доказательство. Справедливо равенство $P(n,5)=C(n,5)-\bar{P}(n,5)$.
С помощью асимптотики (7) при $n \to \infty$ найдём

$$C(n,5)=f(n,n+4)\sim\rho_4 n^{n+11/2},\quad \rho_4=\frac{\sqrt{\pi}\sigma_4}{2^{11/2}\Gamma(7)},$$

$$\sigma_4=6\sigma_3+\sum_{s=1}^{2}\sigma_s\sigma_{3-s}=6\sigma_3+2\sigma_1\sigma_2=6\,\frac{1105}{256}+2\,\frac{5}{16}\,\frac{15}{16}=\frac{1695}{64}, \tag{10}$$

$$\rho_4=\frac{\sqrt{\pi}1695}{32\sqrt{2}\cdot 720\cdot 64}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{339}{294912},\quad C(n,5)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{339}{294912}n^{n+11/2}\ .$$

С помощью формулы (1) и леммы 1 получим

$$\bar{P}(n,5)=(n-1)![z^{-1}]e^{nz}\Big(\frac{nz^7(2+z)}{48(1-z)^{11}}+\frac{z^5(12+47z+9z^2-8z^3)}{24(1-z)^{13}}\Big)z^{-n}\sim$$

$$\sim n!\frac{\sqrt{\pi}3n^{n+11/2}}{n!482^{11/2}\Gamma(6)}+\frac{n!}{n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}60n^{n+11/2}}{242^{13/2}\Gamma(7)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1}{61440}+\frac{1}{18432}\Big)n^{n+11/2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{13n^{n+11/2}}{184320},$$

$$P(n,5)=C(n,5)-\bar{P}(n,5)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{339}{294912}n^{n+11/2}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{13n^{n+11/2}}{184320}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1591n^{n+11/2}}{1474560}\ .$$

Теорема 3 доказана. ■

Зададим на множестве помеченных пентациклических графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 2. Вероятность $P_5(n)$ того, что помеченный связный пентациклический граф является планарным, асимптотически равна $1591/1695 \approx 0{,}9386$.

Доказательство. С помощью формул (9) и (10) при $n \to \infty$ найдём

$$P_5(n) = \frac{P(n,5)}{C(n,5)} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1591 n^{n+11/2}}{1474560} \frac{294912}{339 n^{n+11/2}\sqrt{\pi/2}} = \frac{1591}{1695} \approx 0{,}9386.$$

Следствие 2 доказано. ■

В [6] доказано, что число помеченных связных планарных графов с n вершинами при $n \to \infty$ асимптотически равно $cn^{-7/2}\gamma^n n!$, где c, γ — константы. Кроме того, известно, что число помеченных связных графов с n вершинами асимптотически равно числу помеченных не обязательно связных графов с n вершинами, то есть $2^{n(n-1)/2}$ [11]. Из этого следует, что почти все помеченные связные графы с n вершинами являются непланарными. Для фиксированного цикломатического числа k поведение числа помеченных планарных графов с n вершинами при $n \to \infty$ другое.

При равномерном распределении вероятностей на множестве помеченных связных n-вершинных k-циклических графов вероятность их планарности при $n \to \infty$ зависит от k и не равна нулю. Пусть $Ca(n,k)$ — число помеченных k-циклических кактусов с n вершинами. В [19] при фиксированном k и $n \to \infty$ получена асимптотика

$$Ca(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma\big((k+1)/2\big)} n^{n+(3k-4)/2}.$$

Так как кактусы являются планарными графами, справедливы неравенства

$$Ca(n,k) \leqslant P(n,k) \leqslant C(n,k), \ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2} k! \Gamma\big((k+1)/2\big)} n^{n+(3k-4)/2} \leqslant P(n,k) \leqslant \rho_k n^{n+(3k-4)/2}.$$

Гипотеза. При фиксированном k и $n \to \infty$ верна асимптотика

$$P(n,k) \sim c_k n^{n+(3k-4)/2},$$

где c_k — константа, зависящая от k.

В частности, $c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$, $c_2 = \frac{5}{24}$, $c_3 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{5}{128}$, $c_4 = \frac{121}{13440}$, $c_5 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1591}{1474560}$. Таким образом, гипотеза верна для $k \leqslant 5$.

В заключение отметим, что Е. Ф. Дмитриев [20] другим способом перечислял помеченные планарные тетрациклические и пентациклические графы, но не опубликовал доказательства своих результатов.

Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рихтер М. Р.* Алгоритм трассировки при проектировании СБИС // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2011. Вып. 5. С. 111–118.
2. *Aggarwal A., Klawe M., and Shor P.* Multilayer grid embedding for VLSI // Algorirhmica. 1991. No. 6. P. 129–151.
3. *Haymaker K. and O'Pella J.* Locally recoverable codes from planar graphs // J. Algebra Comb. Discrete Appl. 2020. V. 7. No. 1. P. 35–53.
4. *Карандашев Я. М., Мальсагов М. Ю.* Полиномиальный алгоритм точного вычисления статистической суммы для модели бинарных спинов на планарных графах // Тр. НИИСИ РАН. 2017. Т. 7. № 1. С. 18–24.

5. *Schmidt F. R., Toppe E., and Cremers D.* Efficient planar graphs cuts with applications in computer vision // IEEE Computer Society Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Miami, Florida, 2009. P. 1–6.
6. *Gimenez O. and Noy M.* Asymptotic enumeration and limit laws of planar graphs // J. Amer. Math. Soc. 2009. V. 92. No. 2. P. 169–210.
7. *Bender E. A., Gao Z., and Wormand N. C.* The number of labeled 2-connected planar graphs // Electron. J. Combinatorics. 2002. No. 9. Article R43.
8. *Воблый В. А., Мелешко А. К.* Перечисление помеченных непланарных тетрациклических графов // Материалы XVIII Междунар. семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения». Кировоград, 2016. С. 33–36.
9. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных непланарных пентациклических блоков // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и её прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 193. С. 28–32.
10. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
11. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.
12. *McDiarmid C. and Scott A.* Random graphs from a block stable class // Europ. J. Combin. 2016. V. 58. P. 96–106.
13. *Воблый В. А.* Об одном подходе к перечислению помеченных связных графов: обзор результатов // Итоги науки и техн. Совр. матем. и её прилож. Темат. обзоры. 2020. Т. 188. С. 106–118.
14. *Воблый В. А.* Перечисление помеченных эйлеровых пентациклических графов // Прикладная дискретная математика. 2020. № 50. С. 87–92.
15. *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990. 504 с.
16. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982. 256 с.
17. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs // J. Graph Theory. 1977. V. 1. No. 4. P. 317–330.
18. *Воблый В. А.* Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных тетрациклических графов // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и её прилож. Темат. обзоры. 2020. Т. 187. С. 31–35.
19. *Воблый В. А.* О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и ребер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23. № 2. С. 5–20.
20. *Дмитриев Е. Ф.* Перечисление отмеченных графов с данными структурными свойствами. Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. Институт математики АН БССР, Минск, 1986.

REFERENCES

1. *Rikhter M. R.* Algoritm trassirovki pri proektirovanii SBIS [Tracing algorithm for VLSI design]. Nauchno-Tekhnicheskie Vedomosti SPbGPU, 2011, iss. 5, pp. 111–118. (in Russian)
2. *Aggarwal A., Klawe M., and Shor P.* Multilayer grid embedding for VLSI. Algorirhmica, 1991, no. 6, pp. 129–151.
3. *Haymaker K. and O'Pella J.* Locally recoverable codes from planar graphs. J. Algebra Comb. Discrete Appl., 2020, vol. 7, no. 1, pp. 35–53.
4. *Karandashev Ya. M. and Mal'sagov M. Yu.* Polinomial'nyy algoritm tochnogo vychisleniya statisticheskoy summy dlya modeli binarnykh spinov na planarnykh grafakh [Polynomial algorithm for exact computation of the partition function for the binary spin model on planar graphs]. Proc. NIISI RAS, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 18–24. (in Russian)
5. *Schmidt F. R., Toppe E., and Cremers D.* Efficient planar graphs cuts with applications in computer vision. IEEE Computer Society Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, Miami, Florida, 2009, pp. 1–6.

6. *Gimenez O. and Noy M.* Asymptotic enumeration and limit laws of planar graphs. J. Amer. Math. Soc., 2009, vol. 92, no. 2, pp. 169–210.
7. *Bender E. A., Gao Z., and Wormand N. C.* The number of labeled 2-connected planar graphs. Electron. J. Combinatorics, 2002, no. 9, article R43.
8. *Voblyy V. A. and Meleshko A. K.* Perechislenie pomechennykh neplanarnykh tetratsiklicheskikh grafov [Enumeration of labeled non-planar tetracyclic graphs]. Materialy XVIII Mezhd. Seminara "Kombinatornye konfiguratsii i ikh prilozheniya", Kirovograd, 2016, pp. 33–36. (in Russian)
9. *Voblyy V. A.* Perechislenie pomechennykh neplanarnykh pentatsiklicheskikh blokov [Enumeration of labeled nonplanar pentacyclic blocks]. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Matem. i ee Prilozh. Temat. Obzory, 2021, vol. 193, pp. 28–32. (in Russian)
10. *Harary F.* Graph Theory. CRC Press, 1994. 288 p.
11. *Harary F. and Palmer E. M.* Graphical Enumeration. N.Y., London, Academic Press, 1973. 286 p.
12. *McDiarmid C. and Scott A.* Random graphs from a block stable class. Europ. J. Combin., 2016, vol. 58, pp. 96–106.
13. *Voblyy V. A.* Ob odnom podkhode k perechisleniyu pomechennykh svyaznykh grafov: obzor rezul'tatov [On an approach to enumeration of labeled connected graphs: A review]. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Matem. i ee Prilozh. Temat. Obzory, 2020, vol. 188, pp. 106–118. (in Russian)
14. *Voblyy V. A.* Perechislenie pomechennykh eylerovykh pentatsiklicheskikh grafov [Enumeration of labeled Eulerian pentacyclic graphs]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2020, no. 50, pp. 87–92. (in Russian)
15. *Goulden I. P. and Jackson D. M.* Combinatorial Enumeration. Dover, 2004. 608 p.
16. *Riordan D.* Combinatorial Identities. N.Y., Wiley, 1968. 256 p. (in Russian)
17. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs. J. Graph Theory, 1977, vol. 1, no. 4, pp. 317–330.
18. *Voblyy V. A.* Asimptoticheskoe perechislenie pomechennykh posledovatel'no-parallel'nykh tetratsiklicheskikh grafov [Asymptotical enumeration of labeled series-parallel tetracyclic graphs]. Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Matem. i ee Prilozh. Temat. Obzory, 2020, vol. 187, pp. 31–35. (in Russian)
19. *Voblyy V. A.* Enumeration of labeled connected graphs with given order and number of edges. J. Appl. Industr. Math., 2016, vol. 10, no. 2, pp. 302–310.
20. *Dmitriev E. F.* Perechislenie otmechennykh grafov s dannymi strukturnymi svoystvami [Enumeration of marked graphs with given structural properties]. PhD thesis. Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the BSSR, Minsk, 1986. (in Russian)