

УДК 519.1, 004.05

DOI 10.17223/20710410/59/5

АТТРАКТОРЫ И ЦИКЛИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ОРИЕНТАЦИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

А. В. Жаркова

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

E-mail: ZharkovaAV3@gmail.com

Рассматривается конечная динамическая система, состояниями которой являются все возможные ориентации данного полного графа, а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Характеризуются циклические состояния системы (принадлежащие аттракторам), приводится таблица с количеством циклических состояний и состояний, не являющихся циклическими, в системах ориентаций полных графов с количеством вершин от 1 до 8 включительно. Описывается формирование аттракторов системы, их вид, длина, приводится таблица с соответствующим количеством аттракторов в системах ориентаций полных графов с количеством вершин от 1 до 8 включительно.

Ключевые слова: аттрактор, граф, информационная безопасность, кибербезопасность, конечная динамическая система, ориентированный граф, отказоустойчивость, полный граф, циклическое состояние, эволюционная функция.

ATTRACTORS AND CYCLIC STATES IN FINITE DYNAMIC SYSTEMS OF COMPLETE GRAPHS ORIENTATIONS

A. V. Zharkova

Saratov State University, Saratov, Russia

Graph models occupy an important place in information security tasks. Finite dynamic systems of complete graphs orientations are considered. States of a dynamic system (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, are all possible orientations of a given complete graph K_n , and the evolutionary function transforms the complete graph orientation by reversing all arcs that go into sinks, and there are no other differences between the given and the next digraphs. The cyclic (belonging to attractors) states of the system are characterized, namely, state belongs to an attractor, if and only if it hasn't a sink or its indegrees vector is $(n-1, n-2, \dots, 0)$. A table is given with the number of cyclic and non-cyclic states in the systems of complete graphs orientations with the number of vertices from 1 to 8 inclusive. The formation of attractors of the system, their type and length are described, namely, there are attractors of length 1, each of which is formed by state without sink, and attractors of length n , each of which is formed by such states $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, in which indegrees vector is $(n-1, n-2, \dots, 0)$, wherein each such attractor represents a circuit, in which each next state is obtained from the previous one as follows: if $\vec{G}$ has vector of indegrees of its vertices in the order of their enumeration $(d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n))$, then $\alpha(\vec{G}) \in \Gamma_{K_n}$ has vector of indegrees of

its vertices in the order of their enumeration $(d^-(v_1) + 1, d^-(v_2) + 1, \dots, d^-(v_n) + 1)$, where the addition is calculated modulo n , and only these attractors. Note that in the considered finite dynamic systems the number of attractors of length n is equal to $(n - 1)!$ and the number belonging to the attractors states is equal to $n!$. A table is given with the corresponding number of attractors in the systems of complete graphs orientations with the number of vertices from 1 to 8 inclusive.

Keywords: *attractor, complete graph, cybersecurity, cyclic state, directed graph, evolutionary function, fault-tolerance, finite dynamic system, graph, information security.*

Введение

Графовые модели занимают важное место в задачах, связанных с информационной безопасностью. В вопросах кибербезопасности с помощью графовых моделей можно, например, выявлять связи между сущностями системы, группировать их, оценивать их поведение, выявлять различные аномалии. В задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей, отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг. При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем [1–3]. В модели [1] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. В настоящей работе полные графы изучаются с точки зрения динамического подхода к кибербезопасности и отказоустойчивости графовых систем.

1. Основные определения и постановка задачи

Под *ориентированным графом* (или, для краткости, *орграфом*) понимается пара $\vec{G} = (V, \beta)$, где V — конечное непустое множество (*вершины* орграфа), а $\beta \subseteq V \times V$ — отношение на множестве V (пара $(u, v) \in \beta$ называется *дугой* орграфа с *началом* u и *концом* v). Отношение β называют *отношением смежности*. Отсутствие *петель* (дуг с совпадающими началом и концом) в орграфе $\vec{G} = (V, \beta)$ означает антирефлексивность его отношения смежности β . *Неориентированным графом* (или, для краткости, *графом*) называется пара $G = (V, \beta)$, где β — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V . Дуги неориентированного графа называют *рёбрами*. Орграф $\vec{G} = (V, \beta)$ называется *направленным графом* (или *диграфом*), если отношение α антисимметрично. *Степенью исхода* вершины $v \in V$ называется число $d^+(v)$ дуг орграфа $\vec{G} = (V, \beta)$, имеющих своим началом v . *Степенью захода* вершины v — это количество $d^-(v)$ дуг, имеющих v своим концом. Орграф называется *функциональным*, если $d^+(v) = 1$ для любой его вершины v . Граф $G = (V, \beta)$ называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается символом K_n . Вершины u и v графа G называются *связанными*, если в G существует проходящий через них путь. Отношение связности является эквивалентностью на множестве вершин графа. Классы этого отношения называются *компонентами связности* (или просто *компонентами*) графа. Маршрут, в котором никакая дуга не встречается более одного раза, называется *путём*. Путь, каждая вершина которого принадлежит не более чем двум его дугам, является *простым*. Простой циклический путь в орграфе называется *контуром*. Говорят, что вершина v *достижима* из вершины u , если в орграфе существует путь из u в v . Вершина орграфа, недостижимая из других его вершин, называется *источником*, а вершина, из которой не достижима никакая другая вершина, — *стоком* [4].

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество, элементы которого называются *состояниями системы*; $\delta : S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой функциональный орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности орграфа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур, в свою очередь, называется предельным циклом, или *аттрактором*. Состояние, принадлежащее аттрактору, называется *циклическим*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без проведения динамики. К числу таких характеристик относятся принадлежность состояния аттрактору, описание аттракторов системы. Автором описаны свойства принадлежности состояний аттракторам, сами аттракторы конечных динамических систем ориентаций некоторых типов графов (например, [5, 6]). В данной работе приводится критерий принадлежности состояний аттракторам в конечных динамических системах ориентаций полных графов, описывается формирование аттракторов в данных системах, их вид, длина.

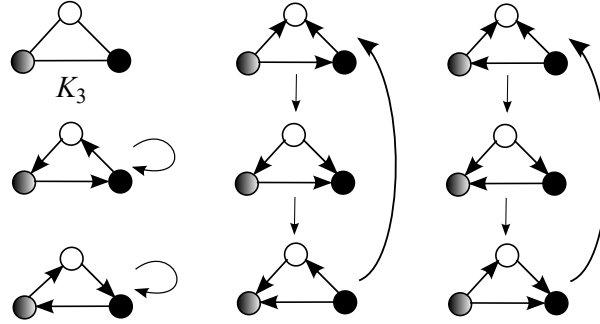
2. Описание конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α)

Пусть дан полный граф $G = K_n$, $n \geq 1$, $m = n(n-1)/2$ — число рёбер. Пометим вершины и придадим рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф $\vec{G} = (V, \beta)$, где отношение смежности β антирефлексивно и антисимметрично. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α , которая одновременно переориентирует все дуги, входящие в стоки, а остальные дуги оставляет без изменения, в результате получим орграф $\alpha(\vec{G})$. Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту конечной динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

Таким образом, будем рассматривать конечную динамическую систему (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, где через Γ_{K_n} обозначим множество всех возможных ориентаций данного полного графа K_n , $|\Gamma_{K_n}| = 2^m$, а эволюционная функция α задаётся следующим образом: если дан некоторый орграф $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, то его динамическим образом $\alpha(\vec{G})$ является орграф, полученный из $\vec{G}$ одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между $\vec{G}$ и $\alpha(\vec{G})$ нет.

На рис. 1 представлен граф K_3 и карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α) .

В работе [1] рассматривается конечная динамическая система (Ω, α) , где Ω — множество всех бесконтурных ориентаций данного связного графа, и замечается, что для полного графа существует $n!$ бесконтурных ориентаций, где $n!$ — количество перестановок его вершин, при этом система имеет $(n-1)!$ бассейнов, каждый из которых состоит исключительно из аттрактора длины n , то есть все состояния данной системы являются циклическими.


 Рис. 1. Граф K_3 и карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α)

3. Циклические состояния конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α)

Определение 1. Под *вектором степеней захода* орграфа будем понимать вектор, компонентами которого являются расположенные в убывающем порядке степени захода всех его вершин.

Например, на рис. 1 расположенный сверху слева оргграф имеет вектор степеней захода $(1, 1, 1)$.

Теорема 1. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, состояние $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ принадлежит аттрактору (является циклическим) тогда и только тогда, когда оргграф $\vec{G}$

- 1) не имеет стока
или
- 2) имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть состояние $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, принадлежит аттрактору, то есть является циклическим. Очевидно, что в оргграфе $\vec{G}$ может быть не более одного стока. Рассмотрим циклические состояния системы в зависимости от наличия в них стока.

- 1) В оргграфе $\vec{G}$ нет стока.

Согласно заданной эволюционной функции α , получаем, что $\alpha(\vec{G}) = \vec{G}$, тем самым состояние $\vec{G}$ образует аттрактор единичной длины и, действительно, является циклическим.

- 2) В оргграфе $\vec{G}$ есть сток.

При $n = 2$ система (Γ_{K_2}, α) имеет два состояния, у каждого есть сток, и они образуют аттрактор длины 2, то есть являются циклическими, при этом оба состояния имеют вектор степеней захода $(1, 0)$.

Пусть $n \geq 3$ и стоком является вершина v_s , то есть $d^-(v_s) = n-1$. Покажем, что оргграф $\vec{G}$ имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$.

Предположим, что это не так. Допустим, вершины v_k и v_l имеют одинаковую степень захода: $d^-(v_k) = d^-(v_l) = p$. Заметим, что $p \neq 0$ и $p \neq n-1$, так как иначе в оргграфе $\vec{G}$ было бы несколько источников или стоков, что невозможно.

Применим эволюционную функцию к состоянию $\vec{G}$, получим $\alpha(\vec{G}) = \vec{G}'$, у которого $d^-(v'_s) = 0$ (для наглядности добавим ' к соответствующим вершинам), так как сток станет источником; $d^-(v'_k) = d^-(v'_l) = p+1$, так как v_k и v_l не являлись стоками и только единственные инцидентные им и вершине v_s дуги поменяли своё направление,

тем самым увеличив их степень захода. Заметим, что $p \neq n-2$, иначе в $\vec{G}'$ вершины v'_k и v'_l стали бы двумя стоками, что невозможно. Таким образом, $1 \leq p \leq n-3$.

Так как состояние $\vec{G}$ принадлежит аттрактору, то состояние $\vec{G}'$ также принадлежит этому же аттрактору, значит, в $\vec{G}'$ есть сток v'_o , то есть $d^-(v'_o) = n-1$, при этом в $\vec{G}$ $d^-(v_o) = n-2$. Получаем, что орграф $\vec{G}$ имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, p, p, \dots)$ и соответственно орграф $\vec{G}'$ имеет вектор степеней захода $(n-1, \dots, p+1, p+1, \dots, 0)$.

Продолжая аналогичные рассуждения и учитывая, что все состояния, получаемые при применении к текущему орграфу эволюционной функции, являются циклическими, дойдём до состояния, в котором у соответствующих вершин v_k и v_l степень захода равна $n-1$, то есть в нём окажется два стока, что невозможно. Получили противоречие. Таким образом, циклическое состояние системы, в орграфе которого есть сток, имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь.

1) Пусть в орграфе $\vec{G}$ нет стока, тогда аналогично п. 1 в доказательстве необходимости получаем, что данное состояние является циклическим.

2) Пусть орграф $\vec{G}$ имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$, покажем, что данное состояние является циклическим.

При $n=2$ система (Γ_{K_2}, α) имеет два состояния, каждое имеет вектор степеней захода $(1, 0)$, и они образуют аттрактор длины 2, то есть являются циклическими.

Пусть $n \geq 3$.

а) Пусть $\vec{G}_0 = \vec{G}$, а далее $\vec{G}_i = \alpha^i(\vec{G})$, $i \geq 1$.

Не теряя общности, пусть вектор степеней захода в орграфе $\vec{G}_0$ и вектор, составленный из степеней захода его вершин в порядке их нумерации, совпадают и равны $(n-1, n-2, \dots, 0)$. Тогда у орграфа $\vec{G}_i$ вектор, составленный из степеней захода его вершин в порядке их нумерации, равен $(n-1+i, n-2+i, \dots, 0+i)$, где сложение осуществляется по модулю n .

Получаем, что у орграфа $\vec{G}_n = \alpha^n(\vec{G}_0)$ вектор, составленный из степеней захода его вершин в порядке их нумерации, и вектор степеней захода совпадают и равны $(n-1, n-2, \dots, 0)$, то есть равны соответствующим векторам орграфа $\vec{G} = \vec{G}_0$.

б) Покажем по построению, что $\vec{G}_0 = \vec{G}_n$, то есть образуется аттрактор.

Построим последовательно ориентацию графа, у которой вектор, составленный из степеней захода его вершин в порядке их нумерации, и вектор степеней захода есть $(n-1, n-2, \dots, 0)$.

У вершины v_n степень захода равна 0: $d^-(v_n) = 0$, то есть она является источником, все рёбра ориентируем из неё.

У вершины v_{n-1} степень захода равна 1: $d^-(v_{n-1}) = 1$, то есть она достижима только из одной вершины, а именно из v_n , все остальные рёбра ориентируем из неё.

У вершины v_{n-2} степень захода равна 2: $d^-(v_{n-2}) = 2$, то есть она достижима только из двух вершин, а именно из v_n и v_{n-1} , все остальные рёбра ориентируем из неё.

Продолжая аналогично, доходим до вершины v_1 , у которой степень захода равна $n-1$: $d^-(v_1) = n-1$, то есть она является стоком, и на этом шаге все рёбра уже ориентированы в данную вершину.

Таким образом, получаем единственную ориентацию графа, у которой вектор, составленный из степеней захода его вершин в порядке их нумерации, и вектор степеней захода есть $(n-1, n-2, \dots, 0)$, то есть $\vec{G}_0 = \vec{G}_n$.

Таким образом, оргграф $\vec{G}$ с вектором степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$ принадлежит аттрактору, то есть является циклическим. ■

Например, в конечной динамической системе (Γ_{K_3}, α) (см. рис. 1) все восемь состояний системы являются циклическими, при этом два состояния не имеют стока и шесть состояний имеют вектор степеней захода $(2, 1, 0)$.

В табл. 1 приведены данные по количеству принадлежащих и не принадлежащих аттракторам состояний в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 \leq n \leq 8$, полученные с помощью вычислительных экспериментов.

Т а б л и ц а 1

Количество циклических состояний (ЦС) и состояний, не являющихся циклическими (НЦС), в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α)

n	Количество состояний	Количество ЦС	%	Количество НЦС	%
1	1	1	100	0	0
2	2	2	100	0	0
3	8	8	100	0	0
4	64	56	87,5	8	12,5
5	1024	824	$\approx 80,5$	200	$\approx 19,5$
6	32768	27344	$\approx 83,4$	5424	$\approx 16,6$
7	2097152	1872816	$\approx 89,3$	224336	$\approx 10,7$
8	268435456	251698560	$\approx 93,8$	16736896	$\approx 6,2$

Можно заметить, что количество циклических состояний в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) составляет абсолютное большинство по сравнению с состояниями, не являющимися циклическими.

4. Аттракторы конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α)

Теорема 2. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, существуют следующие аттракторы:

- 1) длины 1, каждый из которых образован состоянием $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которого нет стока;
- 2) длины n , каждый из которых состоит из состояний $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которых вектор степеней захода есть $(n-1, n-2, \dots, 0)$, при этом аттрактор представляет собой контур, в котором каждое следующее состояние получается из предыдущего таким образом: если $(d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n))$ — вектор, составленный из степеней захода вершин в порядке их нумерации для $\vec{G}$, то для $\alpha(\vec{G}) \in \Gamma_{K_n}$ соответствующий вектор равен $(d^-(v_1)+1, d^-(v_2)+1, \dots, d^-(v_n)+1)$, где сложение осуществляется по модулю n ,

и только они.

Доказательство. Рассмотрим конечную динамическую систему (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$. Состояниями системы являются все возможные ориентации полного графа K_n . Очевидно, что в данных оргграфах может быть не более одного стока. Рассмотрим состояния системы в зависимости от наличия в них стока.

- 1) У состояния нет стока.

Применим к такому состоянию $\vec{G}$ эволюционную функцию α , получим $\alpha(\vec{G}) = \vec{G}$, тем самым состояние $\vec{G}$ образует аттрактор единичной длины.

- 2) У состояния есть сток.

Согласно теореме 1, принадлежащие аттракторам состояния имеют вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$.

Рассмотрим произвольное циклическое состояние $\vec{G}$, перенумеруем его вершины таким образом, чтобы его вектор степеней захода и вектор, составленный из степеней захода его вершин в порядке нумерации, совпадали.

Пусть $\vec{G}_0 = \vec{G}$, а далее $\vec{G}_i = \alpha^i(\vec{G})$, $i \geq 1$. Орграф $\vec{G}_i$ имеет вектор, составленный из степеней захода его вершин в порядке их нумерации, $(n-1+i, n-2+i, \dots, 0+i)$, где сложение осуществляется по модулю n , а также, согласно теореме 1, имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$. Аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что $\vec{G}_n = \vec{G}_0$, то есть образуется аттрактор длины n , который состоит из таких состояний $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которых вектор степеней захода есть $(n-1, n-2, \dots, 0)$, при этом аттрактор представляет собой контур, в котором каждое следующее состояние получается из предыдущего так: если $\vec{G}$ имеет вектор, составленный из степеней захода вершин в порядке нумерации, равный $(d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n))$, то для $\alpha(\vec{G}) \in \Gamma_{K_n}$ вектор, составленный из степеней захода вершин в порядке нумерации, равен $(d^-(v_1) + 1, d^-(v_2) + 1, \dots, d^-(v_n) + 1)$. ■

Например, в конечной динамической системе (Γ_{K_3}, α) на рис. 1 есть два аттрактора длины 1, каждый из которых образован состоянием, у которого нет стока, и два аттрактора длины 3, каждый из которых состоит из состояний с вектором степеней захода $(2, 1, 0)$ и соответствующими векторами, составленными из степеней захода его вершин в порядке нумерации, например, для состояний расположенного посередине аттрактора имеем $(2, 1, 0) \rightarrow (0, 2, 1) \rightarrow (1, 0, 2) \rightarrow (2, 1, 0)$.

Заметим, что в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, количество аттракторов длины n равно $(n-1)!$, а количество состояний, принадлежащих данным аттракторам, равно $n!$.

Например, карта конечной динамической системы (Γ_{K_6}, α) , $|\Gamma_{K_6}| = 32768$, состоит из 26 744 бассейнов, при этом 27 344 состояния принадлежат аттракторам (что составляет $\approx 83\%$ от общего числа состояний), которые образуют 26 624 аттрактора длины 1 и 120 аттракторов длины 6.

В табл. 2 приведены данные по количеству аттракторов в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 \leq n \leq 8$, полученные с помощью вычислительных экспериментов.

Т а б л и ц а 2

Количество аттракторов в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α)

n	Количество аттракторов (бассейнов)	Длины 1	Длины n
1	1	1	1
2	1	0	1
3	4	2	2
4	38	32	6
5	728	704	24
6	26744	26624	120
7	1868496	1867776	720
8	251663280	251658240	5040

Закключение

В работе приведён критерий принадлежности состояний аттракторам рассматриваемой конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, всех возможных ориентаций графа K_n , описано формирование аттракторов в данных системах, их вид, длина, что является полезным для задач, связанных с информационной безопасностью, в том числе для построения отказоустойчивых графовых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London: Chapman & Hall/CRC, 2001. 372 p.
2. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems // Ann. Combinatorics. 2004. V. 8. P. 425–439.
3. *Салий В. Н.* Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
4. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 368 с.
5. *Власова А. В.* Аттракторы динамических систем, ассоциированных с циклами // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2 (12). С. 90–95.
6. *Жаркова А. В.* Аттракторы в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями палым // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3 (25). С. 58–67.

REFERENCES

1. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London, Chapman & Hall/CRC, 2001. 372 p.
2. *Colon-Reyes O., Laubenbacher R., and Pareigis B.* Boolean monomial dynamical systems. Ann. Combinatorics, 2004, vol. 8, pp. 425–439.
3. *Salii V. N.* Ob odnom klasse konechnykh dinamicheskikh sistem [On a class of finite dynamic systems]. Vestnik TSU. Prilozheniye, 2005. no. 14, pp. 23–26. (in Russian)
4. *Bogomolov A. M. and Salii V. N.* Algebraicheskiye osnovy teorii diskretnykh sistem [Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1997. 368 p. (in Russian)
5. *Vlasova A. V.* Attraktory dinamicheskikh sistem, assotsiirovannykh s tsiklami [Attractors of dynamic systems associated with cycles]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 2 (12), pp. 90–95. (in Russian)
6. *Zharkova A. V.* Attraktory v konechnykh dinamicheskikh sistemakh dvoichnykh vektorov, assotsiirovannykh s oriyentatsiyami pal'm [Attractors in finite dynamic systems of binary vectors associated with palms orientations]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2014, no. 3 (25), pp. 58–67. (in Russian)