

Научная статья

УДК 512.552

MSC: 08A35, 15B99, 16S50

doi: 10.17223/19988621/85/3

Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов

Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев

Томский государственный университет, Томск, Россия, nstsddts@yandex.ru

Аннотация. Пусть p – простое число, m, n – натуральные и $m \geq n > 0$. Кольцо формальных матриц $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, изоморфное кольцу эндоморфизмов

$E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$, может представлять интерес в шифровании данных. Мы покажем, что кольцо $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$, $m \geq n$, является 2-хорошим и 2-ниль-хорошим при $p > 2$ и не является хорошим при $p = 2$ и $m > n$.

Ключевые слова: кольцо, хорошее кольцо, кольцо контекста Мориты, кольцо эндоморфизмов абелевой группы

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Для цитирования: Норбосамбуев Ц.Д. Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3

Original article

Good formal matrix rings over residue class rings

Tsyrendorzhi D. Norbosambuev

Tomsk State University, Tomsk, Russia, nstsddts@yandex.ru

Abstract. For an arbitrary prime p ring $E((\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$ is a semilocal ring with p^5 elements that cannot be embedded in any matrix ring over commutative ring. In a more general case – a ring $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$, $m > n$, is isomorphic to a formal matrix ring $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$. There are cryptographic systems based on the arithmetic of

$E((\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$. We show that ring $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ is 2-good and 2-nil-good for $p > 2$ and not good for $p = 2$ and $m > n$.

Theorem 3.3. Let p be a prime and $p > 2$, $m \geq n$, then $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ is a 2-good ring. What if $p = 2$? In case of $m = n$, we have $E((\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})) = M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ which is 2-good.

Theorem 3.5. Let $m > n$, then for a matrix

$$A = \begin{pmatrix} a + 2^m \mathbf{Z} & b + 2^n \mathbf{Z} \\ c + 2^n \mathbf{Z} & d + 2^n \mathbf{Z} \end{pmatrix} \in E((\mathbf{Z} / 2^m \mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z} / 2^n \mathbf{Z})),$$

$a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, the following statements are true:

- 1) Matrix A is 2-good if a and d are even;
- 2) Matrix A is 3-good if a and d are odd;
- 3) Matrix A is not good if a and d are numbers of different parity.

Thus, formal matrix ring $E((\mathbf{Z}/2^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z}))$, $m > n$, is not good.

Keywords: ring, good ring, Morita context ring, endomorphism ring of abelian group

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2023-943).

For citation: Norbosambuev, T.D. (2023) Good formal matrix rings over residue class rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3

Введение

Далее все кольца – ассоциативные с единицей, $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов абелевой группы A , $U(R)$ – группа обратимых элементов кольца R , $\mathbf{Z}$ – кольцо (и группа) целых чисел, $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – кольцо (и группа) вычетов по модулю p^n , ■ – конец доказательства или его отсутствие.

Бергман [1] доказал, что если p – простое число, то $E((\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$ – полулокальное кольцо мощности p^5 , которое не может быть вложено в кольцо матриц ни над каким коммутативным кольцом. Климент, Наварро и Тортоса [2] показали, что $E((\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$ изоморфно некоторому кольцу матриц второго порядка с элементами из $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $p\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ (фактически получив кольцо формальных матриц). Они изучили арифметику этого кольца, описали группу его обратимых элементов, его центр. Далее ими была построена криптографическая система, основывающаяся на арифметике $E((\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}))$ [2–4]. Крылов и Туганбаев [5, 6] рассмотрели более общий случай – $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, $m > n$. Такое

кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу формальных матриц $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$.

В [7] Крылов вводит понятие определителя формальной матрицы второго порядка в общем случае и над кольцами вычетов, а также приводит некоторые свойства определителей формальных матриц. В своей недавней работе Степанова и Тимошенко [8] нашли необходимые и достаточные условия обратимости элементов $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, $m \geq n$, а также формулы для построения обратной формальной матрицы.

Классический объект в математике – $M(n, R)$ – кольцо всех матриц порядка n над некоторым кольцом R . В последнее время внимание специалистов привлекают кольца формальных матриц, или, как еще говорят, кольца обобщенных матриц, или кольца контекста Мориты. Понятия формальной матрицы и кольца формальных матриц проистекают из работ японского математика Киити Мориты [9]. Детальный обзор истории изучения контекста Мориты можно найти в [10].

Напомним, *кольцом контекста Мориты*, или *кольцом формальных (обобщенных) матриц второго порядка*, мы называем кольцо матриц вида

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \middle| r \in R, m \in {}_R M_S, n \in {}_S N_R, s \in S \right\},$$

где R и S – кольца, ${}_R M_S$ – R - S -бимодуль, ${}_S N_R$ – S - R -бимодуль, $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$ – бимодульные гомоморфизмы, с поэлементным сложением и

умножением вида $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r' & m' \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' + \varphi(m \otimes n') & rm' + ms' \\ nr' + sn' & \psi(n \otimes m') + ss' \end{pmatrix}$, причем

должны выполняться равенства ассоциативности $\varphi(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \psi(n \otimes m')$ и $\psi(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \varphi(m \otimes n')$ для всех $m, m' \in M, n, n' \in N$. Часто кольцо K обозначают как $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$.

Естественным образом можно ввести в рассмотрение формальные матрицы порядка $n \geq 2$. Изучению произвольных колец формальных матриц посвящено множество работ (см., напр.: [5–16]).

1. О строении кольца $E((\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}))$

Пусть p – простое число. Рассмотрим произвольную конечную p -группу H ранга 2. Всегда можно подобрать группу вида $((\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}), +)$, где $m \geq n > 0$, так, что она будет изоморфна группе H .

Как устроено кольцо эндоморфизмов $E((\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}))$?

Знаем, что если G – абелева группа и $G = A \oplus B$ для каких-то подгрупп A и B , то

$$E(A \oplus B) \cong \begin{pmatrix} E(A) & \text{Hom}(B, A) \\ \text{Hom}(A, B) & E(B) \end{pmatrix},$$

где справа имеем кольцо формальных матриц. В качестве произведения гомоморфизмов $\gamma \in \text{Hom}(B, A)$, $\delta \in \text{Hom}(A, B)$ берем их композицию $\gamma\delta \in E(A)$. Аналогично $\delta\gamma \in E(B)$.

Возвращаясь к нашему случаю, $((\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}), +)$ – абелева группа, тогда

$$E((\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})) \cong \begin{pmatrix} E(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) & \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) & E(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) \end{pmatrix}.$$

Общеизвестны следующие факты. Пусть $m \geq n > 0$, тогда

1. Группа $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$ изоморфна группе $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$.
2. Группа $\text{Hom}(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})$ изоморфна группе $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$.
3. Кольцо $E(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z})$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}$.

Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} E((\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})) &\cong \begin{pmatrix} E(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) & \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}) \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) & E(\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) \end{pmatrix} \cong \\ &\cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

То есть всякому эндоморфизму θ группы $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ соответствует единственная формальная матрица $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, такая что

для всяких $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$ выполнено

$$\theta \begin{pmatrix} z_1 + p^m\mathbf{Z} \\ z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + p^{m-n}bz_2 + p^m\mathbf{Z} \\ cz_1 + dz_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

здесь элементы группы $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ записаны в столбец.

Как устроена композиция эндоморфизмов группы $\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$? Пусть эндоморфизмам θ и θ' соответствуют формальные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}, a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbf{Z}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\theta\theta') \begin{pmatrix} z_1 + p^m\mathbf{Z} \\ z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} &= \theta \begin{pmatrix} a'z_1 + p^{m-n}b'z_2 + p^m\mathbf{Z} \\ c'z_1 + d'z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (aa' + p^{m-n}bc')z_1 + p^{m-n}(ab' + bd')z_2 + p^m\mathbf{Z} \\ (ca' + dc')z_1 + (p^{m-n}cb' + dd')z_2 + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} A \cdot A' &= \begin{pmatrix} a + p^m\mathbf{Z} & b + p^n\mathbf{Z} \\ c + p^n\mathbf{Z} & d + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' + p^m\mathbf{Z} & b' + p^n\mathbf{Z} \\ c' + p^n\mathbf{Z} & d' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} aa' + p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z} & ab' + bd' + p^n\mathbf{Z} \\ ca' + dc' + p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb' + dd' + p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

для матриц A и A' . То есть $\varphi((b + p^n\mathbf{Z}) \otimes (c' + p^n\mathbf{Z})) = p^{m-n}bc' + p^m\mathbf{Z}$ и $\psi((c + p^n\mathbf{Z}) \otimes (b' + p^n\mathbf{Z})) = p^{m-n}cb' + p^n\mathbf{Z}$ для любых $b, c, b', c' \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, далее можем не делать различий, в алгебраическом смысле, между эндоморфизмами из кольца $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ и формальными матрицами из кольца

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

2. Обратимые элементы в $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$

Степановой и Тимошенко [8] был получен полный ответ на вопрос о том, когда формальная матрица из кольца $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$, $m \geq n > 0$, будет обратной. Также они смогли получить формулы для построения обратной матрицы. Представляется, что ключевым моментом здесь стало то, что они воспользовались очень удачным обобщением понятия определителя на случай матриц из $E((\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}))$ из работы Крылова [7].

Иногда удается ввести аналог понятия определителя для некоторых колец формальных матриц, например для колец формальных матриц над коммутативным кольцом. Пусть R – кольцо. Рассмотрим кольцо формальных матриц второго

порядка $K_s = \begin{pmatrix} R & {}_R R_R \\ {}_R R_R & R \end{pmatrix}$ с бимодульными гомоморфизмами $\varphi, \psi : R \otimes_R R \rightarrow R$, $\varphi(x \otimes y) = sxy$, $\psi(x \otimes y) = sxy$ для некоторого центрального элемента s кольца R . Кольцо вида K_s называется кольцом формальных матриц над данным кольцом, или кольцом формальных матриц со значениями в данном кольце, элемент $s \in R$ называется *множителем* кольца K_s . Впервые такие кольца появились в работе Крылова [13]. Вообще, каждый центральный элемент $s \in R$ определяет свое кольцо формальных матриц K_s . Иногда кольцо K_s обозначают как $M(2, R, s)$. В [5] авторами было введено понятие определителя для формальных матриц со значениями в коммутативном кольце.

Определение 2.1 [5]. Пусть R – коммутативное кольцо, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, R, s)$.

Определителем матрицы A назовем элемент $d(A) = ad - s(bc)$ кольца R .

Также в [5] получен следующий важный результат, связывающий обратимость формальной матрицы A с обратимостью ее определителя.

Теорема 2.2 [5]. Матрица $A \in M(2, R, s)$ обратима тогда и только тогда, когда элемент $d(A)$ обратим в R . ■

Вернемся к кольцам формальных матриц над кольцами вычетов. Крылов в [7] дает следующее определение.

Определение 2.3 [7]. Пусть $A \in \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, $m > n$, и $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$,

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. *Определителем* формальной матрицы A назовем элемент $|A| = ad - p^{m-n}bc + p^n\mathbb{Z}$ кольца $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

Предложение 2.4 [7]. Для любых $A, A' \in \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, $m > n$, выполне-

но $|AA'| = |A| \cdot |A'|$. ■

Конечно, напрашиваются вопросы: каковы условия обратимости формальной матрицы над кольцами вычетов, есть ли связь с обратимостью ее определителя, можно ли получить формулу построения обратной матрицы? В [8] Степанова и Тимошенко дают полный ответ на эти вопросы.

Если $m = n$, то $E((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ изоморфно кольцу матриц $M(2, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, и тогда операция умножения и определитель в $E((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ совпадают с привычными. Также и вопрос об обратимости матриц решается стандартным образом, а именно: матрица $A = (a_{ij}) \in M(l, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ обратима в $M(l, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда ее определитель $\det A$ обратим в кольце $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Если это условие выполнено, то обратная к A матрица имеет вид: $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^*$, где A^* – союзная матрица к матрице A . Заметим, здесь через $\det A$ обозначен обычный определитель матрицы A .

Таким образом, остается рассмотреть случай $m > n$.

Теорема 2.5 [8]. Пусть $m > n > 0$. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$,

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, равносильны следующие условия:

1. Числа a и d не делятся на p .
2. Элемент $|A|$ обратим в кольце $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
3. Матрица A обратима слева в кольце $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$.
4. Матрица A обратима справа в кольце $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$.
5. Матрица A обратима в кольце $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$.

Если эти условия выполнены, то матрица A^{-1} находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} W(1 + p^{m-n}bcF) + p^m\mathbb{Z} & -bF + p^n\mathbb{Z} \\ -cF + p^n\mathbb{Z} & aF + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix},$$

где $F + p^n\mathbb{Z} = |A|^{-1} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ и $W + p^m\mathbb{Z} = (a + p^m\mathbb{Z})^{-1} \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. ■

Замечание 2.6. $((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}), +)$ – абелева группа порядка p^{m+n} , а ее кольцо эндоморфизмов имеет мощность, равную p^{m+3n} .

Из теоремы 2.5 вытекает следующий факт.

Следствие 2.7. Пусть $m \geq n > 0$. Тогда мощность группы обратимых элементов кольца $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ равна $p^{m+3n-2}(p-1)^2$. ■

3. О некоторых свойствах кольца формальных матриц $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$

Большой интерес в теории колец представляют так называемые аддитивные задачи в кольцах – условия, при которых отдельные элементы колец представляются в виде сумм обратимых элементов, нильпотентов, идемпотентов (часто такие элементы обобщенно называют специальными элементами колец), или кольца целиком аддитивно порождаются множествами специальных элементов. Подробнее об аддитивных задачах в кольцах можно прочитать, например, в [15–19].

Определение 3.1. Пусть k – натуральное число, $k \geq 2$, R – кольцо. Элемент кольца R называется k -хорошим, если его можно записать в виде суммы k обратимых элементов кольца R . Кольцо R называется k -хорошим, если каждый его элемент является k -хорошим. Если кольцо R не является k -хорошим ни для какого $k \in \mathbb{N}$, но все элементы k -хорошие для разных k , то будем говорить, что R является ω -хорошим. Если элемент кольца R невозможно представить в виде конечной суммы обратимых элементов, то говорим, что такой элемент не является хорошим и все кольцо R не является хорошим.

Лемма 3.2. Пусть n – натуральное, p – простое. При $p > 2$ кольцо $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ является 2-хорошим, кольцо $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ является ω -хорошим.

Доказательство. Пусть $p > 2$, a – целое число. Тогда можем записать $a + p^n\mathbb{Z} = (a - 1) + p^n\mathbb{Z} + 1 + p^n\mathbb{Z}$ или $a + p^n\mathbb{Z} = (a - 2) + p^n\mathbb{Z} + 2 + p^n\mathbb{Z}$. И $1 + p^n\mathbb{Z}$, и $2 + p^n\mathbb{Z}$ обратимы в $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, поскольку числа 1 и 2 взаимно просты с p . Вместе с тем либо $a - 1$, либо $a - 2$ взаимно просты с p , а значит, хотя бы один из двух классов вычетов $(a - 1) + p^n\mathbb{Z}$ и $(a - 2) + p^n\mathbb{Z}$ обратим в $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Итак, $a + p^n\mathbb{Z}$ является 2-хорошим элементом, а $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ – 2-хорошим кольцом.

Теперь пусть $p = 2$. Элемент $a + 2^n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ обратим тогда и только тогда, когда a – нечетное число. Очевидно, что для записи четного числа нужно четное количество нечетных слагаемых, а для записи нечетного – нечетное. Таким образом, $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ – ω -хорошее кольцо. ■

Теорема 3.3. Пусть p – простое и $p > 2$, $m \geq n$, тогда $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ – 2-хорошее кольцо.

Доказательство. Пусть $A \in E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ и $A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$,

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Тогда, учитывая лемму 3.2, можем записать матрицу A в виде следующей суммы:

$$A = \begin{pmatrix} a + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + p^m\mathbb{Z} & b + p^n\mathbb{Z} \\ 0 + p^n\mathbb{Z} & d_1 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + p^m\mathbb{Z} & 0 + p^n\mathbb{Z} \\ c + p^n\mathbb{Z} & d_2 + p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} = B + C,$$

где $a_1 + p^m\mathbb{Z}, a_2 + p^m\mathbb{Z} \in U(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ и $d_1 + p^n\mathbb{Z}, d_2 + p^n\mathbb{Z} \in U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Несложно про-

верить, что матрицы B и C обратимы в кольце $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ как в случае

$m = n$, так и в случае $m > n$ (по теореме 2.5). Таким образом, при $p > 2$ кольцо $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ – 2-хорошее. ■

Отдельная проблема – случай $p = 2$. Вообще, все классы вычетов $a + 2^n\mathbb{Z}$ из $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ можем условно разделить на «четные» и «нечетные», по четности их представителей a . Конечно, обратимыми в $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ будут «нечетные», а необратимыми – «четные». При $m = n$, как отмечалось выше, мы имеем привычное кольцо матриц $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$, – здесь матрица будет обратима тогда и только тогда, когда ее определитель «нечетен» (см. рассуждения перед теоремой 2.5).

Лемма 3.4. $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$, $n > 0$, – 2-хорошее кольцо.

Доказательство. Пусть $p = 2$. Далее в этом доказательстве будем обозначать все «четные» элементы $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ как «ev», а «нечетные» – как «od». Рассмотрим все возможные матрицы из $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ и покажем, что они 2-хорошие.

- 1) $\begin{pmatrix} ev & ev \\ ev & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & ev \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ev & 1 \end{pmatrix},$ 9) $\begin{pmatrix} ev & od \\ od & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & od \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ od & 1 \end{pmatrix},$
- 2) $\begin{pmatrix} od & ev \\ ev & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & ev-1 \\ ev-1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & ev \end{pmatrix},$ 10) $\begin{pmatrix} ev & od \\ ev & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & od \\ ev-1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & od \end{pmatrix},$
- 3) $\begin{pmatrix} ev & od \\ ev & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & od \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ev & 1 \end{pmatrix},$ 11) $\begin{pmatrix} ev & ev \\ od & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & ev-1 \\ od & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & od \end{pmatrix},$
- 4) $\begin{pmatrix} ev & ev \\ od & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & 0 \\ od & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & ev \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$ 12) $\begin{pmatrix} od & od \\ od & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & 0 \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & od \\ od & 1 \end{pmatrix},$
- 5) $\begin{pmatrix} ev & ev \\ ev & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ev-1 \\ ev-1 & od \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ev & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$ 13) $\begin{pmatrix} od & od \\ ev & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & od \\ ev-1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} od & 0 \\ 1 & od \end{pmatrix},$
- 6) $\begin{pmatrix} od & od \\ ev & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & 0 \\ ev-1 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & od \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$ 14) $\begin{pmatrix} od & ev \\ od & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ev-1 \\ od & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} od & 1 \\ 0 & od \end{pmatrix},$
- 7) $\begin{pmatrix} od & ev \\ od & ev \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & ev-1 \\ 0 & ev-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ od & 1 \end{pmatrix},$ 15) $\begin{pmatrix} ev & od \\ od & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev-1 & 0 \\ 0 & od \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & od \\ od & 0 \end{pmatrix},$
- 8) $\begin{pmatrix} od & ev \\ ev & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & ev-1 \\ ev-1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & od \end{pmatrix},$ 16) $\begin{pmatrix} od & od \\ od & od \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} od & 0 \\ 0 & od \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & od \\ od & 0 \end{pmatrix}.$

Конечно, предложенные выше разложения не единственно возможные, можно подобрать и другие варианты разбиений. ■

То есть $E((\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})) = M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ – 2-хорошее кольцо.

Что будет с хорошостью кольца формальных матриц $E((\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}))$ при $m > n$?

Теорема 3.5. Для формальной матрицы $A = \begin{pmatrix} a + 2^m\mathbb{Z} & b + 2^n\mathbb{Z} \\ c + 2^n\mathbb{Z} & d + 2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

из кольца $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, где $m > n$, справедливы следующие утверждения:

- 1) Если a и d – четные числа, то A – 2-хорошая матрица;
- 2) Если a и d – нечетные числа, то A – 3-хорошая матрица;
- 3) Если a и d – числа разной четности, то A не является хорошей матрицей.

Доказательство. Действительно, пусть $A = \begin{pmatrix} a + 2^m\mathbb{Z} & b + 2^n\mathbb{Z} \\ c + 2^n\mathbb{Z} & d + 2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$, где

1) a и d – четные числа, тогда можем записать $A = \begin{pmatrix} a - 1 + 2^m\mathbb{Z} & b + 2^n\mathbb{Z} \\ c + 2^n\mathbb{Z} & d - 1 + 2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 2^m\mathbb{Z} & 0 + 2^n\mathbb{Z} \\ 0 + 2^n\mathbb{Z} & 1 + 2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ – сумма двух обратимых (по теореме 2.5) матриц.

2) a и d – нечетные числа, тогда $A = \begin{pmatrix} a + 2^m\mathbb{Z} & b + 2^n\mathbb{Z} \\ c + 2^n\mathbb{Z} & d + 2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 2^m\mathbb{Z} & 0 + 2^n\mathbb{Z} \\ 0 + 2^n\mathbb{Z} & 1 + 2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 + 2^m\mathbb{Z} & 0 + 2^n\mathbb{Z} \\ 0 + 2^n\mathbb{Z} & 1 + 2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ – сумма трех обратимых матриц. Нечетные a и d предста-

вить в виде суммы четного количества нечетных слагаемых невозможно.

3) a и d – числа разной четности, тогда матрицу A не получится записать как сумму матриц с обратимыми элементами на главной диагонали. ■

Следствие 3.6. Таким образом, кольцо $E((\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}))$ при $m > n$ не является хорошим.

Итак, $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ – ω -хорошее кольцо, $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ – 2-хорошее, а $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ –

не хорошее при $m > n$.

Есть много работ, в которых рассматриваются свойства, похожие на хорошость. Например, Кэлугэрян и Лам [17] вводят в своей статье понятие изящности.

Определение 3.7. Элемент кольца называют *изящным*, если его можно записать как сумму нильпотентного и обратимого элементов. Соответственно, кольцо R называют *изящным*, если все его элементы, отличные от нулевого, являются изящными.

Данчев [18], обобщая свойство изящности, ввел в рассмотрение свойство ниль-хорошести.

Определение 3.8. Элемент кольца называют *ниль-хорошим*, если его можно записать как сумму нильпотентного элемента и элемента, который обратим или

равен 0. Соответственно, кольцо R называют *ниль-хорошим*, если все его элементы являются ниль-хорошими.

Понятно, что если кольцо изящно, то оно будет ниль-хорошим. Обратное неверно. Казалось бы, разница между этими двумя свойствами невелика, но второй класс колец значительно шире и обладает более интересными свойствами.

В [16] авторы ввели в рассмотрение свойство, связанное как с хорошостью, так и с другими аддитивными задачами в кольцах – k -ниль-хорошесть.

Определение 3.9. Пусть k – натуральное число, $k \geq 1$. Элемент кольца называют k -ниль-хорошим, если его можно записать как сумму одного нильпотентного и k обратимых элементов. Кольцо R называют k -ниль-хорошим, если все его элементы k -ниль-хорошие. Если кольцо R не является k -ниль-хорошим ни для какого k , но каждый элемент из R является k -ниль-хорошим для подходящего k , то будем говорить, что R есть ω -ниль-хорошее кольцо.

Несложно видеть, что если кольцо R является k -хорошим, то оно будет и k -ниль-хорошим.

Следствие 3.10. $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ – 2-ниль-хорошее кольцо при $p > 2$ и $m \geq n$.

Предложение 3.11. $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ – 2-ниль-хорошее, ниль-хорошее кольцо, но не изящное.

Доказательство. Поскольку кольцо $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ – 2-хорошее (лемма 3.4), то оно будет и 2-ниль-хорошим. Для проверки ниль-хорошести можно перебрать все возможные матрицы в $M(2, \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})$ и их разбиения в виде сумм нильпотентных матриц и обратимых либо нулевых так же, как в доказательстве леммы 3.4. Нужно лишь учитывать, что нильпотентными будут матрицы вида 1), 3), 4) и 16), а обратимыми – 8), 9) и 12)–15). Изящными не будут матрицы вида 1). ■

Вопрос 3.12. Будет ли $E((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}))$ изящным или хотя бы ниль-хорошим кольцом при $p > 2$? Что можно сказать о ниль-хорошести и изящности кольца $E((\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}))$, $m > n$? По всей видимости, в обоих случаях ни изящности, ни ниль-хорошести не будет.

Список источников

1. Bergman G.M. Some examples in PI ring theory // Israel Journal of Mathematics. 1974. V. 18. P. 257–277. doi: 10.1007/BF02757282
2. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. On arithmetic of endomorphism ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 2011. V. 22. P. 91–108. doi: 10.1007/s00200-011-0138-4.
3. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // International Journal of Computer Mathematics. 2012. V. 89. P. 1753–1763. doi: 10.1080/00207160.2012.696105
4. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. An extension of the noncommutative Bergman's ring with a large number of noninvertible elements // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 2014. V. 25. P. 347–361. doi: 10.1007/s00200-014-0231-6
5. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. № 1(19). С. 65–119.
6. Krylov P., Tuganbaev A. Formal matrices. Springer, 2017. (Algebra and Applications; v. 23). doi: 10.1007/978-3-319-53907-2
7. Крылов П.А. Определители обобщенных матриц порядка 2 // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. № 5 (20). С. 95–112.

8. Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А. Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. doi: 10.17223/19988621/74/4
9. Morita K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Science Reports of Tokyo Kyoiku Daigaku Section A. 1958. V. 6. P. 83–142.
10. Lousaunau P., Shapiro J. Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Springer, 1990. P. 80–92. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1448). doi: 10.1007/BFb0091253
11. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сибирский математический журнал. 2018. № 5 (59). С. 1116–1127. doi: 10.1134/S0037446618050129
12. Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Группа автоморфизмов одного класса алгебр формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 53. С. 16–22. doi: 10.17223/19988621/53/2
13. Крылов П.А. Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. № 4 (47). С. 456–463. doi: 10.1007/s10469-008-9016-y
14. Норбосамбуев Ц.Д. Ранг формальной матрицы. Система формальных линейных уравнений. Делители нуля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 5–13. doi: 10.17223/19988621/52/1
15. Норбосамбуев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015. № 36. С. 34–41. doi: 10.17223/19988621/36/4
16. Норбосамбуев Ц.Д., Тимошенко Е.А. О k -ниль-хороших кольцах формальных матриц // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 17–26. doi: 10.17223/19988621/77/2
17. Călugăreanu G., Lam T.Y. Fine rings: A new class of simple rings // J. Algebra Appl. 2016. V. 15 (9). Art. 1650173. doi: 10.1142/S0219498816501735
18. Danchev P. Nil-good unital rings // Int. J. Algebra. 2016. V. 10 (5). P. 239–252. doi: 10.12988/ija.2016.6212
19. Henriksen M. Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. 1974. V. 31. P. 182–193. doi: 10.1016/0021-8693(74)90013-1

References

1. Bergman G.M. (1974) Some examples in PI ring theory. *Israel Journal of Mathematics*. 18. pp. 257–277. DOI: 10.1007/BF02757282.
2. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. (2011) On arithmetic of endomorphism ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. 22. pp. 91–108. DOI: 10.1007/s00200-011-0138-4.
3. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. (2012) Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$. *International Journal of Computer Mathematics*. 89. pp. 1753–1763. DOI: 10.1080/00207160.2012.696105.
4. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. (2014) An extension of the noncommutative Bergman's ring with a large number of noninvertible elements. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. 25. pp. 347–361. DOI: 10.1007/s00200-014-0231-6.
5. Krylov P.A., Tuganbaev A.A. (2015) Formal matrices and their determinants. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 211(3). pp. 341–380. DOI: 10.1007/s10958-015-2610-3.
6. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal matrices*. (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
7. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
8. Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. (2021) Matrichnoye predstavleniye endomorfizmov primarnykh grupp malykh rangov [Matrix representation of endomorphisms of primary groups of

- small ranks]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.
9. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku Section A*. 6. pp. 83–142.
 10. Lousstaunau P., Shapiro J. (1990) Morita contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1448). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
 11. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Automorphisms of formal matrix algebras. *Siberian Mathematical Journal*. 59(5). pp. 885–893. DOI: 10.1134/S0037446618050129.
 12. Krylov P.A., Norbosambuev T.D. (2018) Gruppya avtomorfizmov odnogo klassa algebr formal'nykh matrits [Group of automorphisms of one class of formal matrix algebras]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 16–21. DOI: 10.17223/19988621/53/2.
 13. Krylov P.A. (2008) Isomorphism of generalized matrix rings. *Algebra and Logic*. 47(4). pp. 258–262. DOI: 10.1007/s10469-008-9016-y.
 14. Norbosambuev T.D. (2018) Rang formal'noy matritsy. Sistema formal'nykh lineynykh uravneniy. Deliteli nulya [Rank of a formal matrix. System of formal linear equations. Zero divisors]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 52. pp. 5–12. DOI: 10.17223/19988621/52/1.
 15. Norbosambuev T.D. (2015) O summakh diagonal'nykh i obratimyykh obobshchennykh matrits [On sums of diagonal and invertible formal matrices] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4(36). pp. 34–40. DOI: 10.17223/19988621/36/4.
 16. Norbosambuev T.D., Timoshenko E.A. (2022) O k -nil'-khoroshikh kol'tsakh formal'nykh matrits [About k -nil-good formal matrix rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 17–26. DOI: 10.17223/19988621/77/2.
 17. Călugăreanu G., Lam T.Y. (2016) Fine rings: A new class of simple rings. *Journal of Algebra and Its Applications*. 15(9). Article ID: 1650173. DOI: 10.1142/S0219498816501735.
 18. Danchev P. (2016) Nil-good unital rings. *International Journal of Algebra*. 10(5). pp. 239–252. DOI: 10.12988/ija.2016.6212.
 19. Henriksen M. (1974) Two classes of rings generated by their units. *Journal of Algebra*. 31. pp. 182–193. DOI: 10.1016/0021-8693(74)90013-1.

Сведения об авторе:

Норбосамбуйев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра, доцент механико-математического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: nstsddts@yandex.ru

Information about the author:

Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 24.11.2022; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 24.11.2022; accepted for publication 10.10.2023