

Научная статья

УДК 533.17

doi: 10.17223/19988621/85/10

## Математическое моделирование взаимодействия одиной сверхзвуковой струи с подвижной преградой

Ануар Магжанович Кагенов<sup>1</sup>, Кирилл Владимирович Костюшин<sup>2</sup>,  
Анастасия Владимировна Червакова<sup>3</sup>,  
Иван Владимирович Еремин<sup>4</sup>,

*1, 2, 3, 4 Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> anuar@ftf.tsu.ru*

*<sup>2</sup> kostushink@niipmm.tsu.ru*

*<sup>3</sup> ch-nastya1997@mail.ru*

*<sup>4</sup> iveremin@niipmm.tsu.ru*

**Аннотация.** Описаны результаты исследования взаимодействия одиной сверхзвуковой струи с подвижной преградой. Преграда приближалась и отдалялась перпендикулярно оси струи от среза сопла со скоростью 1 м/с. Дистанция перемещения преграды составляла 0.03 м. При движении преграды по потоку преграда находилась в зоне возрастания чисел Маха, а при движении против – в зоне убывания. Получено, что для всех расчетных вариантов ударно-волновая структура не является стационарной. Показано, что при движении преграды против течения струи реализуется автоколебательный режим с массорасходным механизмом возникновения пульсаций. Для конфигурации с движением преграды против течения струи амплитуда колебаний в 3–5 раз выше, чем для конфигурации с движением преграды по течению струи.

**Ключевые слова:** газовая динамика, математическое моделирование, численные исследования, импактная сверхзвуковая струя, подвижная преграда, OpenFOAM

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-761.2022.1.1.

**Для цитирования:** Еремин И.В., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Червакова А.В. Математическое моделирование взаимодействия одиной сверхзвуковой струи с подвижной преградой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 146–156. doi: 10.17223/19988621/85/10

## Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with a moving barrier

Anuar M. Kagenov<sup>1</sup>, Kirill V. Kostyushin<sup>2</sup>,  
Anastasiya V. Chervakova<sup>3</sup>, Ivan V. Eremin<sup>4</sup>,

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> anuar@ftf.tsu.ru

<sup>2</sup> kostushink@niipmm.tsu.ru

<sup>3</sup> ch-nastya1997@mail.ru

<sup>4</sup> iveremin@niipmm.tsu.ru

**Abstract.** This paper presents the results of research on a single supersonic jet interaction with a moving obstacle. The problem is described mathematically using the Favre-averaged Navier-Stokes equations. OpenFOAM free software is used to implement physical and mathematical modeling and perform numerical calculations. The obstacle moves forward and back perpendicular to the axis of the jet from the nozzle section at a velocity of 1 m/s over a distance of 0.03 m. When the obstacle moves along the flow, it appears in the zone of increasing Mach numbers, and when it moves against the flow, in the zone of decreasing Mach numbers. For all calculation options, the shock-wave structure is found to be non-stationary. It is shown that when the obstacle moves against the jet flow, an auto-oscillatory mode with mass-consuming nature of pulsations occurs. The amplitude of oscillations is 3-5 times higher when using the configuration with the obstacle moving against the jet flow than when using the configuration with the obstacle moving along the jet flow.

**Keywords:** gas dynamics, mathematical modeling, numerical studies, impact supersonic jet, moving obstacle, OpenFOAM

**Acknowledgments:** This research was carried out with a financial support of the grant from the President of the Russian Federation MK-761.2022.1.1.

**For citation:** Eremin, I.V., Kagenov, A.M., Kostyushin, K.V., Chervakova, A.V. (2023) Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with a moving barrier. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 146–156. doi: 10.17223/19988621/85/10

### Введение

Развитие современной и перспективной ракетно-космической техники связано с решением ряда фундаментальных и прикладных задач. Одна из них – доставка космических аппаратов и полезной нагрузки на поверхности тел Солнечной системы. При выполнении космическим аппаратом старта или посадки важной проблемой являются нестационарные процессы взаимодействия сверхзвуковых струй с поверхностями, в результате чего образуются области торможения потока, а вдоль поверхности распространяется периферийное течение. В области между срезом сопла и поверхностью реализуется сложная конфигурация струи. Картина течения включает в себя контактные разрывы, волны разряжения и удар-

ные волны, присутствуют зоны смешения. На сегодняшний день опубликован ряд работ, посвященных изучению различных аспектов данной задачи. В большинстве из них рассматривается случай взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с плоской преградой. В работах [1–7] проведен ряд экспериментальных и численных исследований взаимодействия струй с поверхностями, показано два режима такого взаимодействия: стационарный и нестационарный. Авторами работы [8] проведены экспериментальные исследования нестационарного взаимодействия недорасширенной струи с преградой, рассмотрен ряд автоколебательных режимов и их особенностей. Более полный обзор литературы по взаимодействию сверхзвуковых струй с преградой приведен в [9, 10].

Большинство экспериментальных и теоретических работ посвящено исследованию взаимодействия сверхзвуковых струй с неподвижными поверхностями. Наблюдается недостаток исследований особенностей газодинамических процессов, происходящих при взаимодействии сверхзвуковых струй с подвижными преградами. Цель данной работы – математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с подвижной преградой.

### Физико-математическая постановка задачи и метод решения

Для математического описания задачи использовалась система уравнений Навье–Стокса, осредненная по Фавру в декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  [11].

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j] = 0, \quad (1)$$

где  $\bar{\rho}$  – плотность;  $t$  – время;  $\tilde{u}_j$  – скорость;  $x_j$  – координата.

Уравнение импульса:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - \tilde{\tau}_{ij}] = 0, \quad (2)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $\bar{p}$  – давление;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{E} + \tilde{u}_j \bar{p} + \tilde{q}_j - \tilde{u}_i \tilde{\tau}_{ij}] = 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{E}$  – полная внутренняя энергия;  $\tilde{q}_j$  – тепловой поток.

Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнением состояния идеального газа и моделью турбулентности SST  $k - \omega$  [8].

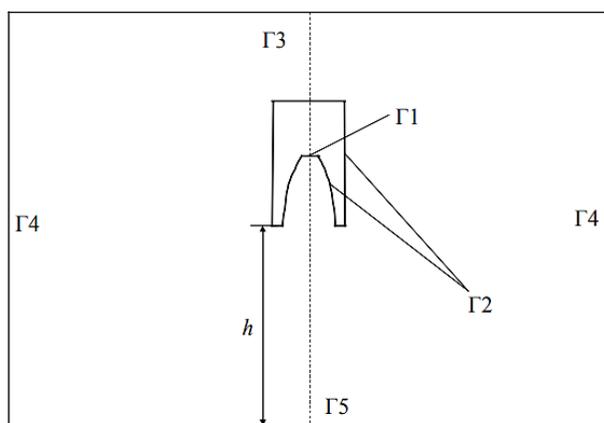
Тензор вязких напряжений имеет следующий вид:

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''},$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

Расчеты выполнялись от минимального сечения сопла аналогично работе [6]. Схема расчетной области приведена на рис. 1. В качестве граничных условий на границе  $\Gamma 1$  задавался вектор скорости  $\bar{u} = u_* \bar{n}$  (где  $\bar{n}$  – вектор внутренней нор-

мали к границе  $\Gamma 1$ ), давление и температура:  $P = P_*$ ,  $T = T_*$ , кинетическая энергия турбулентности и диссипация кинетической энергии турбулентности:  $k = k_*$ ,  $\omega = \omega_*$ , где индексом \* обозначены параметры в критическом сечении сопла. На границах  $\Gamma 2$ ,  $\Gamma 5$  для скорости задавались условия прилипания:  $\bar{u} = [0, 0, 0]$ ; для температуры условия тепловой изоляции:  $\text{grad}(T) = 0$ ; для давления:  $\text{grad}(P) = 0$ . Для постановки граничных условий для характеристик турбулентности на стенках используется метод пристеночных функций. Граничные условия для  $\Gamma 3$  имеют следующий вид:  $P = P_a$ ,  $T = T_a$ ,  $\bar{u} = [0, 0, 0]$ , где индексом  $a$  обозначены параметры на бесконечности. Для границы  $\Gamma 4$  использовались мягкие граничные условия:  $\partial/\partial n = 0$ . Граница  $\Gamma 5$  движется по направлению против потока со скоростью 1 м/с. В качестве начальных условий во всей расчетной области задаются параметры невозмущенной среды:  $P = P_a$ ,  $T = T_a$ ,  $\bar{u} = [0, 0, 0]$ .



**Рис. 1.** Схема расчетной области  
**Fig. 1.** Scheme of a computational domain

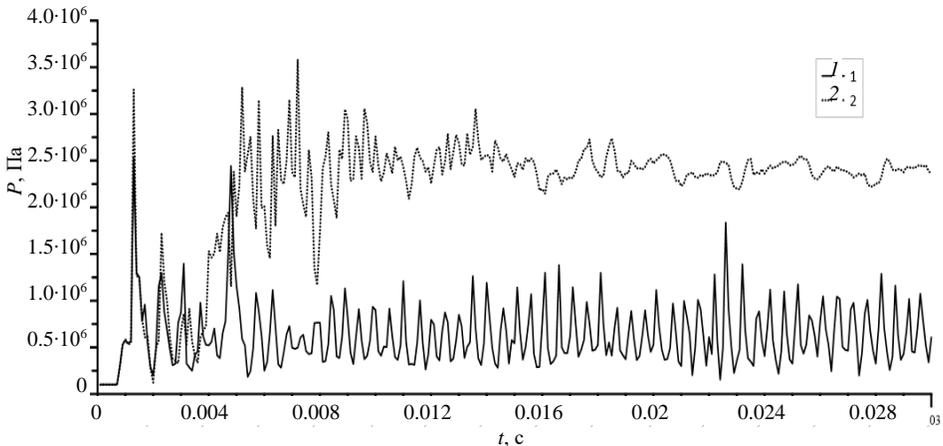
Для решения использовалась схема, основанная на методе С.К. Годунова второго порядка точности с ограничителем van Leer [12]. Дискретизация по времени производилась методом Рунге–Кутты второго порядка аппроксимации. Движение границы реализовано с использованием алгоритма, основанного на изменении координат вершин расчетных ячеек, лежащих на поверхности преграды, с сохранением топологии расчетной сетки [13]. Численное моделирование данной задачи было проведено с помощью открытого пакета OpenFOAM. Расчеты выполнены на базе суперкомпьютера СКИФ Cyberia. Распараллеливание задачи осуществлялось методом декомпозиции расчетной области Scotch с использованием технологий MPI [14].

### Результаты численных исследований

В расчетах использовался профиль сопла из работ [6, 7, 15]. Преграда приближалась перпендикулярно оси струи к срезу сопла со скоростью 1 м/с. В качестве

рабочего тела был использован воздух с параметрами: показатель адиабаты  $k = 1.4$ , газовая постоянная  $R = 287$  Дж/(кг·К), динамическая вязкость  $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$  Па·с, давление и температура в критическом сечении  $P^* = 56$  атм,  $T^* = 250$  К. Длина расчетной области составила 10 м, ширина – 10 м, высота – 4 м. Расстояние от среза сопла до преграды  $h = 0.308$  м. В расчетах использовалась генерируемая с помощью программного обеспечения Salome гексаэдральная структурированная расчетная сетка с числом ячеек 4 млн. Расчетная сетка обеспечивала 20 ячеек на радиус среза сопла. Расчет проводился до момента времени 0.03 с. Дистанция перемещения преграды составляла 0.03 м, что обеспечивало смещение поверхности преграды на расстояние, не превышающее половину длины второй «бочки» Маха невозмущенной струи. При движении преграды по потоку преграда находилась в зоне возрастания чисел Маха, а при движении против – в зоне убывания.

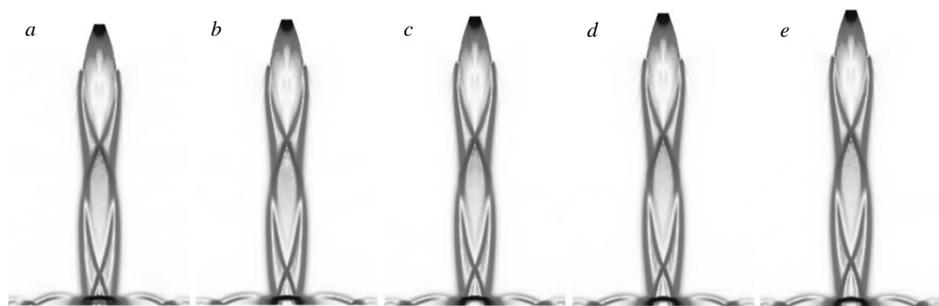
На рис. 2 показано изменение давления в критической точке на поверхности преграды для расчетных конфигураций с движением преграды по течению и против течения истекающей струи. Для расчетной конфигурации с движением преграды по течению струи получено хорошее количественное и качественное совпадение с результатами экспериментальной работы [7]. Анализ расчетных данных показывает, что для рассматриваемых расчетных конфигураций при удалении преграды на дистанцию более 5 мм уровень давления в критической точке при движении преграды по течению струи выше, чем при движении против течения, в 3.5 раза. При движении преграды против течения струи наблюдаются существенные колебания давления, амплитуда и частота колебаний значительно выше, чем при движении преграды по течению струи. Это обусловлено различной локальной нестационарной картиной течения в окрестности преграды. При незначительном удалении преграды (на расстояние менее 4 мм) уровень давления на преграде в критической точке для расчетных конфигураций с движением преграды по и против течения струи согласуется с экспериментальными [7] и расчетными [6, 15] данными для неподвижной преграды.



**Рис. 2.** Давление на преграде в критической точке: 1 – с движением преграды против течения струи, 2 – с движением преграды по течению струи

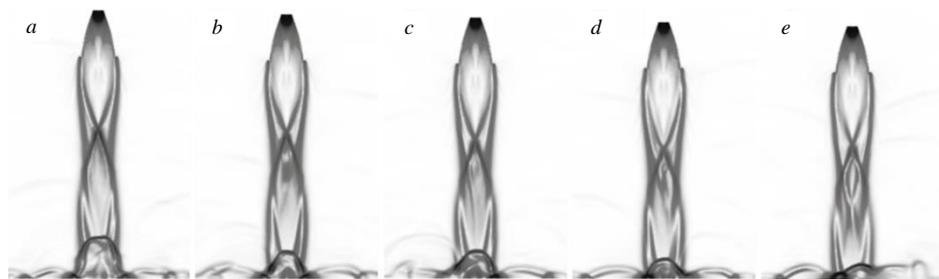
**Fig. 2.** Pressure on the obstacle at a critical point: the obstacle is moving (1) against and (2) along the jet flow

На рис. 3 и рис. 4 для иллюстрации ударно-волновой картины течения показан модуль градиента плотности для расчетных конфигураций с движением преграды по течению и против течения струи. Видно, что при движении преграды по течению струи сохраняется симметричная картина течения. Ударно-волновая структура не является стационарной, реализуются периодические колебания относительно вертикальной оси. На всем временном промежутке в окрестности преграды вблизи оси наблюдается отраженная ударная волна с криволинейным фронтом. Течение в области между отраженной ударной волной и преградой – дозвуковое, с увеличением расстояния до преграды высота зоны торможения остается практически неизменной. Колебания не превышают 10% толщины зоны торможения, а осредненного по объему давления в зоне торможения – 5%. Максимум давления на преграде располагается в окрестности критической точки (рис. 5, *b*).



**Рис. 3.** Градиент плотности для расчетной конфигурации с движением преграды по течению струи в моменты времени: *a* – 0.01 с, *b* – 0.015 с, *c* – 0.02 с, *d* – 0.025 с, *e* – 0.03 с

**Fig. 3.** Density gradient for the calculated configuration with the obstacle moving along the jet flow at the time instants of (*a*) 0.01, (*b*) 0.015, (*c*) 0.02, (*d*) 0.025, and (*e*) 0.03 s

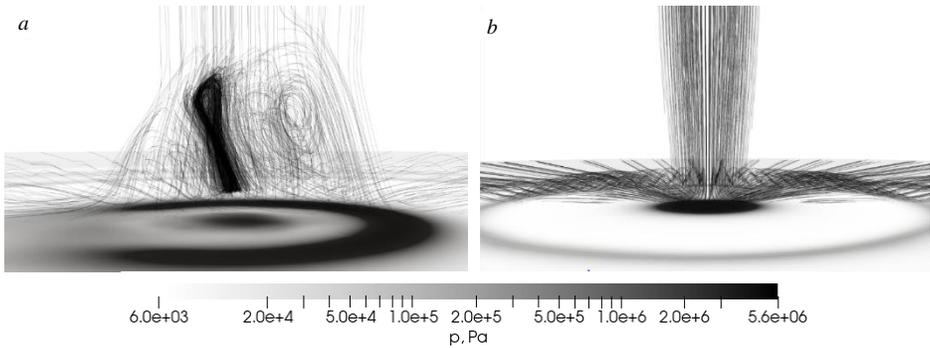


**Рис. 4.** Градиент плотности для расчетной конфигурации с движением преграды против течения струи в моменты времени: *a* – 0.01 с, *b* – 0.015 с, *c* – 0.02 с, *d* – 0.025 с, *e* – 0.03 с

**Fig. 4.** Density gradient for the calculated configuration with the obstacle moving against the jet flow at the time instants of (*a*) 0.01, (*b*) 0.015, (*c*) 0.02, (*d*) 0.025, and (*e*) 0.03 s

При движении преграды против течения струи реализуется автоколебательный режим течения с массорасходным механизмом возникновения пульсаций [4, 5]. В отличие от конфигурации с движением преграды по течению струи перемещения диска Маха относительно вертикальной оси на автоколебательном режиме происходят с большей амплитудой и частотой. Картина течения в окрестности преграды – существенно несимметричная (см. рис. 4). В окрестности оси струи

наблюдается рост массы газа. В области за центральной ударной волной происходит рост давления (рис. 6, *a*). Данное явление вызвано тем, что максимум давления на преграде располагается в окрестности границы струи. В результате происходит смещение прямой центральной ударной волны вверх по потоку (рис. 6, *b, c*) и выброс избыточной массы газа (рис. 6, *c–e*). В области между отраженной ударной волной и преградой отмечается наличие локальных зон сверхзвукового течения. В результате выброса массы газа через боковую поверхность давление вблизи преграды падает, а центральная ударная волна смещается по направлению к преграде (рис. 6, *e, f*). Процесс сопровождается образованием вихревого течения с тороидальным вихрем, расположенным под наклоном к поверхности преграды (рис. 5, *a*). Область в окрестности пересечения плоскости главного меридиана тороидального вихря и плоскости преграды соответствует зоне выброса массы газа.



**Рис. 5.** Линии тока и распределение давления на поверхности преграды в момент времени 0.02 с для расчетной конфигурации: *a* – с движением преграды против течения струи, *b* – с движением преграды по течению струи

**Fig. 5.** Streamlines and pressure distribution on the obstacle surface at a time of 0.02 s for the calculated configuration: the obstacle is moving (*a*) against and (*b*) along the jet flow

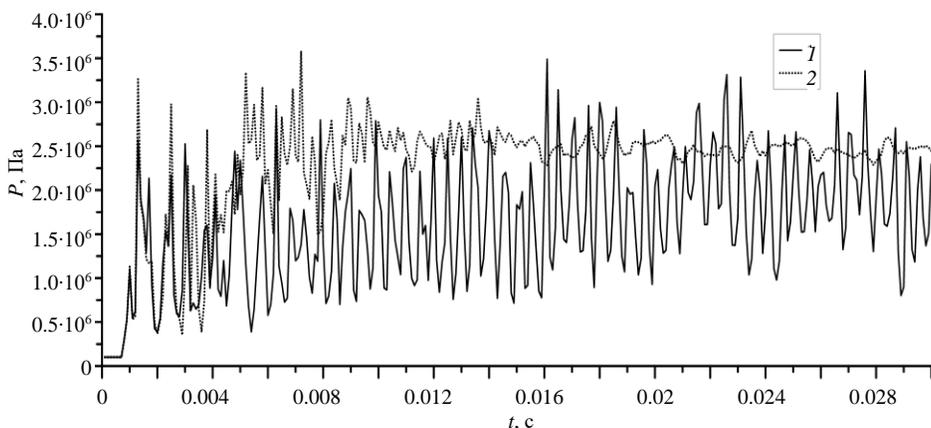


**Рис. 6.** Эволюция ударно-волновой структуры течения в окрестности преграды для расчетной конфигурации с движением преграды против течения струи в моменты времени: *a* – 0.0226 с, *b* – 0.0227 с, *c* – 0.0228 с, *d* – 0.0229 с, *e* – 0.023 с, *f* – 0.0231 с

**Fig. 6.** Evolution of a shock wave structure of the flow in the barrier vicinity for the calculated configuration with the obstacle moving against the jet flow at the time instants of (*a*) 0.0226, (*b*) 0.0227, (*c*) 0.0228, (*d*) 0.0229, (*e*) 0.023, and (*f*) 0.0231 s

Изменение максимального давления на поверхности преграды для рассматриваемых расчетных конфигураций с движением преграды по течению и против течения струи показано на рис. 7. Видно, что процессы выброса избыточной массы приводят к значительному увеличению амплитуды и частоты колебаний максимального давления. Для конфигурации с движением преграды против течения

струи амплитуда колебаний в 3–5 раз выше, чем для конфигурации с движением преграды против течения струи.



**Рис. 7.** Максимальное давление на поверхности преграды для расчетной конфигурации: 1 – с движением преграды против течения струи, 2 – с движением преграды по течению струи

**Fig. 7.** Maximum pressure on the obstacle surface for the calculated configuration: the obstacle is moving (1) against and (2) along the jet flow

Данный эффект может оказать значительное влияние на оценку процессов эрозии поверхности при воздействии сверхзвуковых струй посадочных аппаратов.

### Заключение

В результате выполнения данной работы проведены математическое моделирование и численные исследования взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с подвижной плоской преградой. Преграда приближалась и отдалялась перпендикулярно оси струи от среза сопла со скоростью 1 м/с на расстояние 30 мм. Показана эволюция ударно-волновой картины течения. Исследован характер нестационарного течения газа в окрестности торможения струи. Получено, что для всех расчетных вариантов ударно-волновая структура не является стационарной. При движении преграды по течению струи в области за прямым скачком отсутствует развитое вихревое течение, а колебания толщины зоны торможения не превышают 10%. При движении преграды против течения струи реализуется автоколебательный режим с массорасходным механизмом возникновения пульсаций.

### Список источников

1. Lamont P.J., Hunt B.L. The impingement of underexpanded axisymmetric jets on wedges // Journal of Fluid Mechanics. 1976. V. 76. P. 307–336. doi:10.1017/S0022112076000657
2. Мельникова М.Ф., Нестеров Ю.Н. Воздействие сверхзвуковой нерасчетной струи на плоскую преграду, перпендикулярную оси струи // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. 2, № 5. С. 44–58.
3. Alvi F.S., Ladd J.A., Bower W.W. Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets // AIAA Journal. 2002. V. 40 (4). P. 599–609. doi: 10.2514/2.1709

4. Киселев С.П., Киселев В.П., Зайковский В.Н. О механизме автоколебаний при натекании сверхзвуковой струи на преграду. 1. Преграда с иглой // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 4. С. 50–59.
5. Киселев С.П., Киселев В.П., Зайковский В.Н. О механизме автоколебаний при натекании сверхзвуковой струи на преграду. 2. Преграда без иглы // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 5. С. 21–28.
6. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. С. 1–14.
7. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Результаты экспериментальных исследований взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 69. С. 1–11.
8. Горшков Г.Ф., Усков В.Н. Особенности автоколебаний, возникающих при обтекании ограниченной преграды сверхзвуковой недорасширенной струей // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 4. С. 143–149.
9. Савельев А.Д. Использование составных компактных схем высокого порядка при решении задачи взаимодействия сверхзвуковой струи с поверхностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 10. С. 1746–1759. doi: 10.7868/S0044466913080103
10. Запрягаев В.И., Киселев Н.П., Кундасев С.Г. Структура течения при взаимодействии сверхзвуковой перерасширенной струи с плоской наклонной преградой // Вестник ПНИПУ. Аэрокосмическая техника. 2016. № 45. С. 32–49. doi: 10.15593/2223-9982/2016.45.02
11. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. La Canada, CA: DCW Industries. 1998. 460 p.
12. B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. V. 32 (1). P. 101–136. doi: 10.1016/00219991(79)90145-1
13. Костюшин К.В. Численное исследование нестационарных газодинамических процессов при старте твердотопливных ракет // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 127–143. doi: 10.17223/19988621/67/12
14. MPI Forum. URL: <https://www.mpi-forum.org> (accessed: 04.04.2021).
15. Глазунов А.А., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Еремин И.В., Котонозов В.А., Алигасанова К.Л. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с преградами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 87–101. doi: 10.17222/19988621/63/8

## References

1. Lamont P.J., Hunt B L. (1976) The impingement of underexpanded axisymmetric jets on wedges. *Journal of Fluid Mechanics*. 76(2). pp. 307–336. doi: 10.1017/S0022112076000657
2. Mel'nikova M.F., Nesterov Yu.N. (1971) Vozdeystvie sverkhzvukovoy nerashchetnoy strui na ploskuyu pregradu, perpendikulyarnuyu osi strui [The impact of an off-design supersonic jet on a flat barrier perpendicular to the jet axis]. *Uchenye zapiski TSAGI*. 2(5). pp. 105–108.
3. Alvi F.S., Ladd J.A., Bower W.W. (2002) Experimental and computational investigation of supersonic impinging jets. *AIAA Journal*. 40(4). pp. 599–609. doi: 10.2514/2.1709
4. Kiselev S.P., Kiselev V.P., Zaikovskii V.N. (2014) Mechanism of self-oscillations in a supersonic jet impact onto an obstacle 1. Obstacle with a spike. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 55(4). pp. 593–601. doi: 10.1134/S0021894414040063
5. Kiselev S.P., Kiselev V.P., Zaikovskii V.N. (2014) Mechanism of self-oscillations in a supersonic jet impact onto an obstacle 2. Obstacle with no spike. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 55(4). pp. 742–749. doi: 10.1134/S0021894414050034

6. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. (2013) Chislennoe modelirovanie vzaimodeystviya mnogoblochnykh sverkhzvukovykh turbulentnykh struy s pregradoy [Numerical simulation of the interaction of multiblock supersonic turbulent jets with an obstacle]. *Trudy MAI*. 70. pp. 1–14.
7. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. (2013) Rezul'taty eksperimental'nykh issledovaniy vzaimodeystviya mnogoblochnykh sverkhzvukovykh turbulentnykh struy s pregradoy [Results of experimental research of the interaction of multiblock supersonic turbulent jets with an obstacle]. *Trudy MAI*. 69. pp. 1–11.
8. Gorshkov G.F., Uskov V.N. (1999) Osobennosti avtokolebaniy, voznikayushchikh pri obtekanii ogranichennoy pregrady sverkhzvukovoy nedorasshirennoy strui [Features of self-oscillations arising during the flow around a limited obstacle by a supersonic underexpanded jet]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 40(4). pp. 143–149.
9. Savel'ev A.D. (2013) Ispol'zovanie sostavnykh kompaktnykh skhem vysokogo poryadka pri reshenii zadachi vzaimodeystviya sverkhzvukovoy strui s poverkhnost'yu [The use of composite compact high-order schemes in solving the problem of the interaction of a supersonic jet with a surface]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 53(10). pp. 1746–1759. doi: 10.7868/S0044466913080103
10. Zapryagaev V.I., Kiselev N.P., Kundasev S.G. (2016) Struktura techeniya pri vzaimodeystvii sverkhzvukovoy pererasshirennoy strui s ploskoy naklonnoy pregradoy [Flow structure during the interaction of a supersonic overexpanded jet with a flat inclined barrier]. *Vestnik PNIPU. Aerokosmicheskaya tekhnika – PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*. 2(45). pp. 32–49. doi: 10.15593/2223-9982/2016.45.02
11. Wilcox D.C. (1998) *Turbulence Modeling for CFD*. California: DCW industries.
12. B. van Leer. (1979) Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*. 32(1). pp. 101–136. doi: 10.1016/00219991(79)90145-1
13. Kostyushin K.V. (2020) Chislennoe issledovanie nestatsionarnykh gazodinamicheskikh protsessov pri starte tverdoplivnykh raket [Numerical investigation of unsteady gasdynamic processes at the launch of solid-propellant rockets]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 127–143. doi: 10.17223/19988621/67/12
14. *MPI Forum*. URL: <https://www.mpi-forum.org> (Accessed Apr 04, 2021).
15. Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aligasanova K.L. (2020) Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeystviya odinochnoy sverkhzvukovoy strui s pregradami [Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with obstacles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 87–101. doi: 10.17223/19988621/63/8

**Сведения об авторах:**

**Еремин Иван Владимирович** – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: [iveremin@niipmm.tsu.ru](mailto:iveremin@niipmm.tsu.ru)

**Кагенов Ануар Магжанович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: [anuar@ftf.tsu.ru](mailto:anuar@ftf.tsu.ru)

**Костюшин Кирилл Владимирович** – младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: [kostushink@niipmm.tsu.ru](mailto:kostushink@niipmm.tsu.ru)

**Червакова Анастасия Владимировна** – младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

***Information about the authors:***

**Eremin Ivan V.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

**Kagenov Anuar M.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

**Kostyushin Kirill V.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

**Chervakova Anastasiya V.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ch-nastya1997@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 08.12.2022; принята к публикации 10.10.2023*

*The article was submitted 08.12.2022; accepted for publication 10.10.2023*