Научная статья
УДК 539.3
doi: 10.17223/19988621/85/12

Об обращении нелинейных определяющих соотношений для гиперупругих анизотропных материалов

Марина Юрьевна Соколова[1], Дмитрий Викторович Христич[2]

Тульский государственный университет, Тула, Россия
[1] m.u.sokolova@gmail.com
[2] dmitrykhristich@rambler.ru

Аннотация. Сформулированы условия, накладываемые на упругие потенциалы полиномиального вида, при выполнении которых возможно обращение нелинейных определяющих соотношений между напряжениями и деформациями. Исходя из полученных условий для изотропного материала и анизотропного материала, относящегося по типу симметрии свойств к кубической кристаллографической системе, получены выражения коэффициентов упругих податливостей второго и третьего порядков через константы упругости второго и третьего порядков.
Ключевые слова: анизотропия, гиперупругость, конечные деформации, тензорные базисы, нелинейные определяющие соотношения

Благодарности: Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Для цитирования: Соколова М.Ю., Христич Д.В. Об обращении нелинейных определяющих соотношений для гиперупругих анизотропных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 157–167. doi: 10.17223/19988621/85/12

Original article

On the inversion of nonlinear constitutive relations for hyperelastic anisotropic materials

Marina Yu. Sokolova[1], Dmitriy V. Khristich[2]

Tula State University, Tula, Russian Federation
[1] m.u.sokolova@gmail.com
[2] dmitrykhristich@rambler.ru

Abstract. The polynomial elastic potentials represented by the power functions of their arguments are considered for hyperelastic anisotropic materials. The conditions for the elastic free energy $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ and Gibbs potential $V(\mathbf{T})$ in isothermal processes are assigned so

that the nonlinear constitutive relations can be inverted. For polynomial elastic potentials, whose coefficients are dependent on elastic constants of the second and third orders, a dependence between the coefficients of the potential $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ (elasticity constants) and the coefficients of the potential $V(\mathbf{T})$ (elastic compliances) is obtained.
The relationships between the elastic constants and the coefficients of elastic compliance of the second and third orders for an isotropic material and for an anisotropic material corresponding to a cubic crystallographic system are found. For a copper crystal belonging to the cubic system, uniaxial loading along one of the anisotropy axes is considered. The stress-strain dependence obtained from direct and inverted relations coincides in the vicinity of zero.
The stress-strain dependence calculated using direct and inverted relations for copper crystals has made it possible to determine the strain range in which the results of calculations using direct and inverted relations differ by less than 5%.
Keywords: anisotropy, hyperelasicity, finite strains, tensor bases, nonlinear constitutive relations

Acknowledgments: This study was carried out within the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation (No. FEWG-2023-0002).

For citation: Sokolova, M.Yu., Khristich, D.V. (2023) On the inversion of nonlinear constitutive relations for hyperelastic anisotropic materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 157–167. doi: 10.17223/19988621/85/12

Введение

Современные материалы при воздействии эксплуатационных нагрузок, приводящих к конечным деформациям, проявляют нелинейность своих механических свойств. Во многих случаях достоверные математические модели таких явлений строятся на основе нелинейной теории упругости [1–4]. Учет геометрической нелинейности осуществляется путем использования различных мер конечных деформаций и сопряженных с ними тензоров напряжений [1–5]. Во многих случаях деформации сопровождаются проявлением физической нелинейности, что приводит к необходимости использования определяющих соотношений в виде нелинейной связи тензоров напряжений и деформаций [1, 4, 6].

Наиболее распространенной формой нелинейных определяющих соотношений являются соотношения, в которых напряжения представляются как некоторые функции деформаций (см., напр.: [7, 8]). При решении практических задач в случаях, когда задано напряженное состояние в теле, такая форма определяющих соотношений приводит к необходимости отыскания деформаций как решения некоторой нелинейной системы уравнений даже при простейших видах нагружения. Эта задача еще более усложняется, если рассматриваемый материал обладает анизотропией свойств. В этом случае обычно используют определяющие соотношения, в которых деформации определяются как функции напряжений [9, 10].

Другой подход к решению данной проблемы заключается в возможном обращении определяющих соотношений и представлении их как функции деформаций от напряжений. Вопрос об обращении нелинейной формы связи между тензорами напряжений и деформаций рассматривался в работе [1] для изотропных материалов. Автор работы пришел к выводу, что вопрос об обращении нелинейной связи между двумя тензорами в общем случае не может быть решен. В случае гиперупругих (имеющих потенциал напряжений) изотропных материалов обращение связи между тензорами напряжений и деформаций возможно с помощью обратного преобразования Лежандра. Еще один вариант обращения такой нелинейной связи в [1] основывался на использовании тригонометрических преобразований В.В. Новожилова [2]. Для анизотропных материалов в работах [11, 12] использовался термодинамический подход к определению связи между модулями упругости второго и третьего порядков с коэффициентами упругой податливости.

В данной статье для гиперупругих анизотропных материалов формулируются условия, накладываемые на производные потенциалов напряжений и деформаций, при выполнении которых возможно обращение нелинейной связи между напряжениями и деформациями. Рассматриваются упругие потенциалы полиномиального вида, представляемые степенными функциями своих аргументов. На основе сформулированных условий для изотропного материала и анизотропного материала, относящегося к кубической кристаллографической системе [3, 4, 13], получены соотношения между модулями упругости и коэффициентами упругой податливости второго и третьего порядков. Результаты решения задачи на одноосное нагружение нелинейных кубических кристаллов с использованием прямых и обращенных соотношений позволяют определить диапазон деформаций, в котором для рассматриваемого материала обращение нелинейной связи между напряжениями и деформациями производится с допустимой точностью.

Связь между упругими потенциалами

Рассмотрим конечные деформации однородного анизотропного гиперупругого материала. Введем потенциал напряжений $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ так, что его дифференциал совпадает с удельной (отнесенной к единице начального объема) элементарной работой напряжений:

$$dW = \mathbf{T} : d\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций Коши–Грина, $\mathbf{T}$ – энергетический тензор напряжений (второй тензор Пиолы–Кирхгоффа) [1, 4]. Знаком [:] обозначено двойное скалярное произведение (свертка) тензоров.

Если для рассматриваемого материала упругий потенциал известен, то в соответствии с (1) напряжения определяются соотношениями

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{2}$$

В простейшем случае, когда упругий потенциал представляется квадратичной функцией деформаций $W=0.5\mathbf{N}^{\mathrm{IV}} :: \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}$, соотношения (2) приводят к линейной связи между напряжениями и деформациями

$$\mathbf{T} = \mathbf{N}^{\mathrm{IV}} : \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3}$$

где $\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}$ – постоянный тензор четвертого ранга, симметричный по парам индексов [4].

В случае бесконечно малых деформаций тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$ совпадает с линейным тензором деформаций, тензор $\mathbf{T}$ – с тензором истинных напряжений Коши, а линейные соотношения (3) – с обобщенным законом Гука для анизотропного материала [3, 4].

Соотношения (3) естественным образом обращаются, что приводит к выражению

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{\mathrm{IV}} : \mathbf{T}\,, \tag{4}$$

где тензор четвертого ранга $\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}$ называют тензором упругой податливости [3, 4].

Тензоры $\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}$ взаимно обратные, связаны условием

$$\mathbf{N}^{\mathrm{IV}} : \mathbf{A}^{\mathrm{IV}} = \mathbf{I}^{\mathrm{IV}}\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{I}^{\mathrm{IV}}$ – единичный тензор четвертого ранга такой, что $\mathbf{I}^{\mathrm{IV}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}$.

Если для упругого потенциала $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ принято более сложное представление, то связь между напряжениями и деформациями оказывается нелинейной [11, 12, 14]:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right). \tag{6}$$

Нелинейные соотношения (6) при бесконечно малых деформациях также должны асимптотически совпадать с обобщенным законом Гука: при $\boldsymbol{\varepsilon} \to 0$ тензорная функция $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) \to \mathbf{N}^{\mathrm{IV}} : \boldsymbol{\varepsilon}$, поэтому асимптотическое представление нелинейных соотношений (6) $\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon})$ при $\boldsymbol{\varepsilon} \to 0$ допускает обращение так же, как и соотношения (3). Возникает вопрос о возможности обращения нелинейных соотношений (6) в общем случае для анизотропного материала. Пользуясь подходом, описанным в монографии [1] для изотропных материалов, рассмотрим общий случай гиперупругих анизотропных материалов.

В качестве производящей функции обратного преобразования используем потенциал деформаций $V(\mathbf{T})$, связанный с потенциалом напряжений $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ соотношением

$$V(\mathbf{T}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{7}$$

Можно показать [4, 15], что упругие потенциалы $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$ в случае изотермических процессов совпадают с удельными (отнесенными к единице начального объема) термодинамическими потенциалами свободной энергии и Гиббса соответственно, а в случае адиабатических процессов – с удельными (отнесенными к единице начального объема) термодинамическими потенциалами внутренней энергии и энтальпии.

Дифференциал потенциала (7) с учетом выражения (1) имеет вид:

$$dV = -\boldsymbol{\varepsilon} : d\mathbf{T}\,. \tag{8}$$

Из представления (8) следует, что деформации определяются через потенциал $V(\mathbf{T})$ по формулам

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{T}}\,. \tag{9}$$

Для тензоров напряжений и деформаций имеет место соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} = \mathbf{I}^{\mathrm{IV}}\,, \tag{10}$$

которое на основании выражений (2) и (9) приводит к связи между вторыми производными потенциалов $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2} = -\mathbf{I}^{\mathrm{IV}}\,. \tag{11}$$

Продифференцируем (11) по тензору напряжений:

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3} (:) \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2}\right) : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} : \frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3} = \mathbf{0}$$

или

$$-\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3}(:)\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2}\right):\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}:\frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3}=\mathbf{0}\,. \tag{12}$$

В соотношениях (12) знаком [(:)] обозначено двойное скалярное произведение средней диады тензора шестого ранга $\partial^3 W/\partial\boldsymbol{\varepsilon}^3$ и левой диады тензора четвертого ранга $\partial^2 V/\partial\mathbf{T}^2$. Соотношения (11) и (12) устанавливают связи между вторыми и третьими производными потенциалов $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$. При выполнении условий (11) и (12) в общем случае нелинейная связь между напряжениями и деформациями (2) может быть обращена. Обращённые определяющие соотношения имеют вид (9).

Рассмотрим случай, когда потенциалы $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$ имеют полиномиальный вид:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2!}\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}::\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{3!}\mathbf{N}^{\mathrm{VI}}:::\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{13}$$

$$V(\mathbf{T})=\frac{1}{2!}\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}::\mathbf{T}\mathbf{T}+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^{\mathrm{VI}}:::\mathbf{T}\mathbf{T}\mathbf{T}\,, \tag{14}$$

где тензоры четвертого $\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}$ и шестого $\mathbf{N}^{\mathrm{VI}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{VI}}$ рангов постоянные, определяются через константы упругости второго и третьего порядков соответственно.

В этом случае

$$\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}=\left.\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}}, \qquad \mathbf{N}^{\mathrm{VI}}=\left.\frac{\partial^3 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^3}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}}; \tag{15}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}=-\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{T}^2}\right|_{\mathbf{T}=\mathbf{0}}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{VI}}=-\left.\frac{\partial^3 V}{\partial \mathbf{T}^3}\right|_{\mathbf{T}=\mathbf{0}}. \tag{16}$$

Тогда в окрестности ненапряженного и недеформированного состояния соотношения (11) и (12) приводят к связи между тензорами (15) и (16) в виде:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}:\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}=\mathbf{I}^{\mathrm{IV}}, \qquad \left(\mathbf{N}^{\mathrm{VI}}(:)\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}\right):\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}+\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}:\mathbf{A}^{\mathrm{VI}}=\mathbf{0}\,.$$

Первое из этих соотношений повторяет связь между тензорами упругости и упругой податливости (5), получающуюся при обращении линейных соотношений. Умножим второе из этих соотношений слева на $\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}$ и преобразуем с учетом первого соотношения к виду:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{VI}}=-\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}:\left(\mathbf{N}^{\mathrm{VI}}(:)\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}\right):\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}\,. \tag{17}$$

Связь между напряжениями и деформациями является следствием соотношений (2), (9). Для потенциалов в форме (13) и (14) эта связь имеет вид:

$$\mathbf{T}=\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}:\boldsymbol{\varepsilon}+\frac{1}{2}\mathbf{N}^{\mathrm{VI}}::\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}:\mathbf{T}+\frac{1}{2}\mathbf{A}^{\mathrm{VI}}::\mathbf{T}\mathbf{T}\,. \tag{19}$$

Если тензоры $\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}$, $\mathbf{N}^{\mathrm{VI}}$, входящие в соотношения (18), и тензоры $\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{VI}}$, входящие в соотношения (19), удовлетворяют условиям (5) и (17), то нелинейные соотношения (19) представляют собой обращение нелинейных соотношений (18) так же, как соотношения (4) представляют собой обращение линейных соотношений (3).

Обращение нелинейных определяющих соотношений для некоторых материалов

Для различных типов анизотропных материалов различным оказывается число независимых компонент тензоров упругости четвертого и шестого рангов, входящих в определяющие соотношения (18) и (19), поэтому различным является и число независимых упругих констант второго и третьего порядков. Наиболее простые представления для тензоров (15) и (16) получаются при разложении их по собственным упругим состояниям материала [4, 16] в виде:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{IV}} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{IV}} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} A_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{N}^{\mathrm{VI}} = \sum_{\beta=1}^{\beta=k} n_\beta \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{VI}} = \sum_{\beta=1}^{\beta=k} a_\beta \mathbf{B}^{(\beta)}. \quad (20)$$

В разложениях (20) $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, m$, – собственные тензоры для тензоров упругих свойств четвертого ранга, $\mathbf{B}^{(\beta)}$, $\beta = 1, \ldots, k$, – собственные тензоры для тензоров упругих свойств шестого ранга. Число m равно количеству различных собственных значений тензора упругости четвертого ранга и числу независимых констант упругости второго порядка, а число k – количество различных собственных значений тензора шестого ранга и, следовательно, число независимых констант упругости третьего порядка. В соответствии с соотношениями (20) тензоры упругости и тензоры упругой податливости одинаковых рангов раскладываются по одним и тем же собственным базисным тензорам.

В работах [4, 16] были получены представления для собственных тензоров $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$ в главных осях анизотропии для материалов, относящихся ко всем кристаллографическим системам, в том числе и для изотропного материала. В работах [14, 17] получены представления собственных тензоров шестого ранга $\mathbf{B}^{(\beta)}$ для изотропного материала и анизотропного материала, относящегося к кубической кристаллографической системе.

Собственные тензоры $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\beta)}$ удобно представлять в тензорных базисах четвертого и шестого рангов, построенных на основе канонического тензорного базиса А.А. Ильюшина [4]:

$$\mathbf{I}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\right), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\right), \quad \mathbf{I}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\right),$$

$$\mathbf{I}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\right), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\right);$$

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\right), \quad \mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{6}\left(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\right),$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, 5$, а векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ – единичные ортогональные векторы, направленные в случае анизотропных материалов вдоль главных (канонических) осей анизотропии [4, 14].

Известно [1, 4], что упругие свойства изотропного материала характеризуются двумя константами второго порядка и тремя константами третьего порядка. Для изотропного материала разложения (20) принимают вид:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{IV}} = N_1\mathbf{\Omega}^{(1)} + N_2\mathbf{\Omega}^{(2)}, \quad \mathbf{N}^{\mathrm{VI}} = n_1\mathbf{B}^{(1)} + n_2\mathbf{B}^{(2)} + n_3\mathbf{B}^{(3)},$$
$$\mathbf{A}^{\mathrm{IV}} = A_1\mathbf{\Omega}^{(1)} + A_2\mathbf{\Omega}^{(2)}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{VI}} = a_1\mathbf{B}^{(1)} + a_2\mathbf{B}^{(2)} + a_3\mathbf{B}^{(3)}, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00},\ \mathbf{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55},\ \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000},$$
$$\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055},$$
$$\mathbf{B}^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}\left(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}\right) + \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345}\right).$$

Подставляя разложения (21) в условия (5) и (17), после непосредственных вычислений можно определить связь между константами упругости и константами упругой податливости второго и третьего порядков для изотропного материала в наиболее простом виде [15]:

$$A_1 = N_1^{-1},\quad A_2 = N_2^{-1},\quad a_1 = -A_1^3 n_1,\quad a_2 = -A_1 A_2^2 n_2,\quad a_3 = -A_2^3 n_3 .$$

Найденная связь между константами решает вопрос об обращении нелинейных соотношений (18) для изотропного материала. В обращенных соотношениях (19) тензоры упругих свойств $\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{VI}}$ имеют вид (21).

Для анизотропных материалов, по типу симметрии свойств относящихся к кубической кристаллографической системе, разложения (20) имеют вид:

$$\mathbf{N}^{\mathrm{IV}} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} N_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)},\quad \mathbf{A}^{\mathrm{IV}} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} A_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)},\quad \mathbf{N}^{\mathrm{VI}} = \sum_{\beta=1}^{\beta=6} n_\beta \mathbf{B}^{(\beta)},\quad \mathbf{A}^{\mathrm{VI}} = \sum_{\beta=1}^{\beta=6} a_\beta \mathbf{B}^{(\beta)}, \tag{22}$$

где

$$\mathbf{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00},\quad \mathbf{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22},\quad \mathbf{\Omega}^{(3)} = \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55};$$
$$\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000},\quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022},\quad \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055},$$
$$\mathbf{B}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}\right),\ \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244}\right),\ \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{I}^{345}.$$

После подстановки разложений (22) в соотношения (5) и (17) получаем связь между константами упругости и упругой податливости второго и третьего порядков для материалов, относящихся к кубической кристаллографической системе:

$$A_1 = N_1^{-1},\quad A_2 = N_2^{-1},\quad A_3 = N_3^{-1},$$
$$a_1 = -A_1^3 n_1,\quad a_2 = -A_1 A_2^2 n_2,\quad a_3 = -A_1 A_3^2 n_3,$$
$$a_4 = -A_2^3 n_4,\quad a_5 = -A_2 A_3^2 n_5,\quad a_6 = -A_3^3 n_6 . \tag{23}$$

Рассмотрим в качестве примера кубический кристалл меди, для которого по данным работ [18, 19, 20] определены значения констант упругости второго порядка (в МПа): $N_1 = 4.13\cdot10^5$, $N_2 = 0.47\cdot10^5$, $N_3 = 1.51\cdot10^5$, и третьего порядка (в МПа): $n_1 = -7.22\cdot10^6$, $n_2 = -4.23\cdot10^6$, $n_3 = -2.71\cdot10^6$, $n_4 = 2.14\cdot10^6$, $n_5 = -2.33\cdot10^6$, $n_6 = -0.81\cdot10^6$, а упругие податливости вычислены по формулам (23). Упругие податливости второго порядка (в МПа$^{-1}$): $A_1 = 2.42\cdot10^{-6}$, $A_2 = 2.13\cdot10^{-5}$, $A_3 = 6.64\cdot10^{-6}$. Упругие податливости третьего порядка (в МПа$^{-2}$): $a_1 = 1.03\cdot10^{-10}$, $a_2 = 4.64\cdot10^{-9}$, $a_3 = 2.89\cdot10^{-10}$, $a_4 = -2.06\cdot10^{-8}$, $a_5 = 2.19\cdot10^{-9}$, $a_6 = 2.36\cdot10^{-10}$. Таким образом, для этого материала по формулам (22) определены тензоры $\mathbf{N}^{\mathrm{IV}}$, $\mathbf{N}^{\mathrm{VI}}$ и $\mathbf{A}^{\mathrm{IV}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{VI}}$, входящие в определяющие соотношения (18) и обращенные соотношения (19).

Рассмотрим одноосное растяжение призматического образца, ось которого совпадает с одной из главных осей анизотропии кубического кристалла, а в поперечном сечении лежит квадрат, стороны которого параллельны двум другим главным осям анизотропии. Тензор напряжений в этом случае равен $\mathbf{T} = \sigma\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1$, где σ – задаваемое напряжение. По обращенным соотношениям (19) находим тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\sigma) = \varepsilon\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \varepsilon_2(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3)$. При подстановке полученных деформаций в соотношения (18) находим вычисляемые напряжения $\mathbf{T} = T\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1$. На рис. 1 представлены зависимости задаваемых σ (сплошная линия) и вычисляемых напряжений T (пунктирная линия) от продольной деформации ε, отнесенных к модулю упругости N_1.

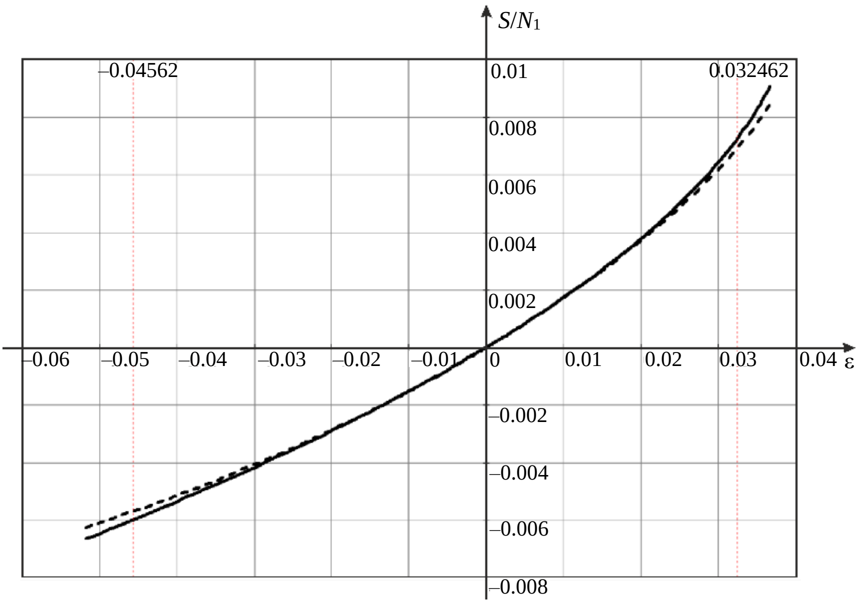

Рис. 1. Зависимость напряжений от деформаций при одноосном нагружении при расчетах по прямым (T) и обращенным (σ) соотношениям
Fig. 1. Stress-strain dependence under uniaxial loading in calculations using direct (T) and inverted (σ) relations

Приведенные на рис. 1 кривые полностью совпадают в окрестности нулевых деформаций. Это объясняется тем, что в области бесконечно малых деформаций соотношения (18) и (19) вырождаются в обобщенный закон Гука (3), (4) и допускают точное обращение. Поскольку тензоры упругих свойств (15) и (16) определены через упругие потенциалы $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и $V(\mathbf{T})$ вблизи значений $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ и $\mathbf{T} = 0$, то с ростом деформаций расчеты по прямым и обращенным соотношениям начинают расходиться. В частности, расхождение кривых, приведенных на рис. 1, увеличивается с ростом деформаций. Если при одной и той же осевой деформации $\varepsilon^* \neq 0$ определить напряжения σ^* и T^*, то относительная погрешность при расчетах по прямым и обращенным соотношениям характеризуется величиной $\delta = \left|(\sigma^* - T^*)/\sigma^*\right| \cdot 100\%$. При растяжении кубического кристалла меди величина δ достигает 5% при деформациях $\varepsilon^*_\text{p} = 0.032$, а при сжатии – при деформациях $\varepsilon^*_\text{c} = -0.046$. Найденные деформации определяют диапазон $[\varepsilon^*_\text{c}, \varepsilon^*_\text{p}]$, в котором с заданной точностью возможно использование как прямых, так и обращенных определяющих соотношений. Фактически этот диапазон превышает интервал изменения деформаций кристалла меди, в котором его можно считать нелинейно упругим материалом.

Заключение

В работе сформулированы условия, которым должны удовлетворять в изотермических процессах упругие потенциалы свободной энергии $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ и Гиббса $V(\mathbf{T})$ для того, чтобы построенные по ним нелинейные определяющие соотношения допускали обращение. Для упругих потенциалов полиномиального вида, коэффициенты которых связаны с упругими постоянными второго и третьего порядков, получена связь между коэффициентами потенциала $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ (константами упругости) и коэффициентами потенциала $V(\mathbf{T})$ (упругими податливостями). Полученные соотношения (5) и (17) записаны в инвариантной форме и могут быть конкретизированы для различных анизотропных сред, в том числе для изотропного материала.

В статье получены соотношения между константами упругости и коэффициентами упругих податливостей второго и третьего порядков для изотропного материала и анизотропного материала, относящегося к кубической кристаллографической системе. Для кристалла меди, относящегося к кубической системе, рассмотрено одноосное нагружение вдоль одной из осей анизотропии. Связь между напряжениями и деформациями, полученная по прямым и обращенным соотношениям, совпадает в окрестности нуля. Получен диапазон деформаций, в котором результаты расчетов по прямым и обращенным соотношениям расходятся менее, чем на 5%.

Список источников

1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 512 с.
2. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л. : Судпромгиз, 1958. 370 с.
3. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М. : Наука, 1988. 192 с.
4. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
5. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды: развитие математического аппарата и основ общей теории. М. : Наука, 2017. 432 с.
6. *Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В.* Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С.38–45.
7. *Бакушев С.В.* Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6
8. *Козлов В.В., Маркин А.А.* Апробация определяющих соотношений нелинейной теории упругости при осевом сдвиге полого цилиндра // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 102–114. doi: 10.17223/19988621/63/9
9. *Lomakin E.V., Fedulov B.N.* Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. V. 50 P. 1527–1535. doi: 10.1007/s11012-015-0104-5.
10. *Трещев А.А., Гвоздев А.Е., Ющенко Н.С., Калинин А.А.* Нелинейная математическая модель связи тензоров второго ранга для композитных материалов // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 3. С. 224–237. doi: 10.22405/ 2226-8383-2022-23-224-237
11. *Brugger K.* Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients // Phys. Rev. 1964. V. 133. P. A1611–A1612. doi: 10.1103/PhysRev.133.A1611
12. *Barsch G.R.* Relation between third-order elastic constants of single crystals and polycrystals // Journal of Applied Physics 1968. V. 39 (8). P. 3780–3793. doi: 10.1063/1.1656855

13. *Thomas S.D.* Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry // American Mineralogist. 2018. V. 103 (6). P. 977–988. doi: 10.2138/am-2018-6285
14. *Соколова М.Ю., Христич Д.В.* Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 103–116. doi: 10.17223/19988621/70/9
15. *Соколова М.Ю., Христич Д.В., Артюх Е.В.* Обращение связи между напряжениями и деформациями в модели Мурнагана // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер/ Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 52–62. doi: 10.37972/chgpu.2022.53.3.006
16. *Остросаблин Н.И.* Об уравнениях линейной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. 1992. Вып. 3. С. 131–140.
17. *Astapov Y., Khristich D., Markin A., Sokolova M.* The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals // International Journal of Applied Mechanics. 2017. V. 9 (6). P. 1750080-1–1750080-15. doi: 10.1142/S1758825117500806
18. *Knowles K.M.* The plane strain Young's modulus in cubic materials // Journal of Elasticity. 2017. V. 128 (2). P. 1–27. doi: 10.1007/s10659-017-9621-x
19. *Li X.* First-principles study of the third-order elastic constants and related anharmonic properties in refractory high-entropy alloys // Acta Materialia. 2018. V. 142. P. 29–36. doi: 10.1016/j.actamat.2017.09.041.
20. *Lubarda V.A.* New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals // J. Mech. Phys. Solids. 1997. V. 45(4). P. 471–490. doi: 10.1016/s0022-5096(96)00113-5.

References

1. Lurie A.I. (2012) *Non-linear Theory of Elasticity*. North Holland.
2. Novozhilov V.V. (1961) *Theory of Elasticity*. London: Pergamon Press.
3. Chernykh K.F. (1988) *Vvedenie v anizotropnuyu uprugost'* [Introduction to anisotropic elasticity]. Moscow: Nauka.
4. Markin A.A., Sokolova M.Yu. (2015) *Thermomechanics of Elastoplastic Deformation*. Cambridge: Cambridge International Science Publishing.
5. Brovko G.L. (2017) *Opredelyayushchie sootnosheniya mekhaniki sploshnoy sredy: razvitie matematicheskogo apparata i osnov obshchey teorii* [Constitutive relations of continuum mechanics: development of the mathematical apparatus and the foundations of general theory]. Moscow: Nauka.
6. Markin A.A., Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2011) A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations. *Mechanics of Solids*. 46(1). pp. 30–35. doi: 10.3103/S0025654411010055
7. Bakushev S.V. (2022) Differentsial'nye uravneniya ravnovesiya sploshnoy sredy dlya ploskoy deformatsii v dekartovykh koordinatakh pri bikvadratichnoy approksimatsii zamykayushchikh uravneniy [Differential equations of continuum equilibrium for plane deformation in Cartesian axials at biquadratic approximation of closing equations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 70–86. doi: 10.17223/19988621/76/6
8. Kozlov V.V., Markin A.A. (2020) Aprobatsiya opredelyayushchikh sootnosheniy nelineynoy teorii uprugosti pri osevom sdvige pologo tsilindra [Testing of defining relations of nonlinear theory of elasticity in an axial strain of a hollow cylinder]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*]. 63. pp. 102–114. doi: 10.17223/19988621/63/9
9. Lomakin E.V., Fedulov B.N. (2015) Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites. *Meccanica*. 50. pp. 1527–1535. doi: 10.1007/s11012-015-0104-5
10. Treschev A.A., Gvozdev A.E., Yushchenko N.S., Kalinin A.A. (2022) Nelineynaya matematicheskaya model' svyazi tenzorov vtorogo ranga dlya kompozitnykh materialov

[Nonlinear mathematical model of relation of second-rank tensors for composite materials]. *Chebyshevskiy sbornik*. 23(3). pp. 224–237. doi: 10.22405/ 2226-8383-2022-23-224-237
11. Brugger K. (1964) Thermodynamic definition of higher order elastic coefficients. *Physical Review*. 133(6A). pp. A1611–A1612. doi: 10.1103/PhysRev.133.A1611
12. Barsch G.R. (1968) Relation between third-order elastic constants of single crystals and polycrystals. *Journal of Applied Physics*. 39(8). pp. 3780–3793. doi: 10.1063/1.1656855
13. Thomas S.D. (2018) Single-crystal elastic properties of minerals and related materials with cubic symmetry. *American Mineralogist.* 103(6). pp. 977–988. doi: 10.2138/am-2018-6285
14. Sokolova M.Yu., Khristich D.V. (2021) Konechnye deformatsii nelineyno uprugikh anizotropnykh materialov [Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 103–116. doi: 10.17223/19988621/70/9
15. Sokolova M.Yu., Khristich D.V., Artyukh E.V. (2022) Obrashchenie svyazi mezhdu napryazheniyami i deformatsiyami v modeli Murnagana [Reversal of the relationship between stresses and strains in the Murnaghan model]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya – Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 3(53). pp. 52–62. doi: 10.37972/chgpu.2022.53.3.006
16. Ostrosablin N.I. (1992) Equations of the linear theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 33(3). pp. 438–446. doi: 10.1007/BF00851743
17. Astapov Y., Khristich D., Markin A., Sokolova M. (2017) The construction of nonlinear elasticity tensors for crystals and quasicrystals. *International Journal of Applied Mechanics*. 9(6). Article 1750080. pp. 1–15. doi: 10.1142/S1758825117500806
18. Knowles K.M. (2017) The plane strain Young's modulus in cubic materials. *Journal of Elasticity*. 128(2). pp. 1–27. doi: 10.1007/s10659-017-9621-x
19. Li X. (2018) First-principles study of the third-order elastic constants and related anharmonic properties in refractory high-entropy alloys. *Acta Materialia*. 142. pp. 29–36. doi: 10.1016/ j.actamat.2017.09.041
20. Lubarda V.A. (1997) New estimates of the third-order elastic constants for isotropic aggregates of cubic crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 45(4). pp. 471–490. doi: 10.1016/s0022-5096(96)00113-5

***Сведения об авторах*:**
Соколова Марина Юрьевна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: m.u.sokolova@gmail.com
Христич Дмитрий Викторович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета, Тула, Россия. E-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

***Information about the authors*:**
Sokolova Marina Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: m.u.sokolova@gmail.com
Khristich Dmitriy V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 18.02.2023; принята к публикации 10.10.2023

The article was submitted 18.02.2023; accepted for publication 10.10.2023