

## МЕХАНИКА

## MECHANICS

Научная статья

УДК 531.39, 52-17, 521.1

doi: 10.17223/19988621/86/1

**Численная модель движения искусственных спутников Земли**

**Анна Геннадьевна Александрова<sup>1</sup>, Никита Андреевич Попандопуло<sup>2</sup>,  
Никита Александрович Кучерявченко<sup>3</sup>,  
Виктор Анатольевич Авдюшев<sup>4</sup>,  
Татьяна Валентиновна Бордовицына<sup>5</sup>**

*1, 2, 3, 4, 5 Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> alexandrovaannag@mail.ru*

*<sup>2</sup> nikas.popandopulos@gmail.com*

*<sup>3</sup> wallguet@gmail.com*

*<sup>4</sup> scharmn@mail.ru*

*<sup>5</sup> bordovitsyna@mail.ru*

**Аннотация.** Представлена последняя версия программного комплекса «Численная модель движения искусственных спутников Земли», разработанного в НИИ прикладной математики и механики Томского госуниверситета. Описывается его математический инструментарий, а также новый пользовательский интерфейс. Программное обеспечение реализовано как для персонального компьютера, так и для среды с распараллеливанием вычислительных задач «Скиф Cyberia» ТГУ.

**Ключевые слова:** численные методы, искусственные спутники Земли (ИСЗ), орбитальная эволюция, хаотичность и устойчивость орбит, MEGNO

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-10022, <https://rscf.ru/project/19-72-10022/>

**Для цитирования:** Александрова А.Г., Попандопуло Н.А., Кучерявченко Н.А., Авдюшев В.А., Бордовицына Т.В. Численная модель движения искусственных спутников Земли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 5–20. doi: 10.17223/19988621/86/1

## Numerical model of the motion of artificial Earth satellites

Anna G. Aleksandrova<sup>1</sup>, Nikita A. Popandopulo<sup>2</sup>,  
Nikita A. Kucheryavchenko<sup>3</sup>, Viktor A. Avdyushev<sup>4</sup>,  
Tat'yana V. Bordovitsyna<sup>5</sup>

<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup> Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> [aleksandrovaannag@mail.ru](mailto:aleksandrovaannag@mail.ru)

<sup>2</sup> [nikas.popandopulos@gmail.com](mailto:nikas.popandopulos@gmail.com)

<sup>3</sup> [wallguet@gmail.com](mailto:wallguet@gmail.com)

<sup>4</sup> [scharm@mail.ru](mailto:scharm@mail.ru)

<sup>5</sup> [bordovitsyna@mail.ru](mailto:bordovitsyna@mail.ru)

**Abstract.** This paper presents the latest version of the software package "Numerical model of the motion of artificial Earth satellites". Two versions of the program have been developed: one for a personal computer and another for the "SKIF Cyberia" supercomputer complex with parallelization of computational tasks at Tomsk State University.

The software can take into account the following perturbing factors: geopotential non-sphericity effect, secular variations in the first zonal harmonics and tidal deformations within the Earth, gravitational influence of the Sun and Moon, radiation forces, atmospheric drag acceleration, influence of major planets, selenopotential harmonics, and relativistic effects.

To study the chaotic nature of the orbital motion of near-Earth satellites, the developed software package is improved with the possibility of calculating the MEGNO parameter. The numerical model allows the user to additionally calculate resonant parameters using analytical and numerical techniques when studying the features of the orbital evolution of near-Earth objects.

In the presented version of the software package for a personal computer, the interaction with the user is carried out by means of the software interface. The interface additionally allows one to create an input text file based on the completed data for further use in the version for the "SKIF Cyberia" supercomputer.

**Keywords:** numerical methods, artificial Earth satellites (AES), orbital evolution, chaotic and stable orbits, MEGNO

**Acknowledgments:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-72-10022), <https://rscf.ru/en/project/19-72-10022/>

**For citation:** Aleksandrova, A.G., Popandopulo, N.A., Kucheryavchenko, N.A., Avdyushev, V.A., Bordovitsyna, T.V. (2023) Numerical model of the motion of artificial Earth satellites. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 5–20. doi: 10.17223/19988621/86/1

### Введение

Первая версия «Численной модели движения искусственных спутников Земли (ИСЗ)» НИИ ПММ ТГУ была разработана еще в 80-х гг. прошлого века. Данная модель претерпевала различные доработки, связанные с выходом новых стандар-

тов Международного астрономического союза, появлением более современных вычислительных машин, в том числе кластера «Скиф Cyberia» Томского государственного университета [1, 2], с расширением круга задач, которые решаются с помощью данного программного обеспечения (ПО), например вычисление параметра хаотичности [3] или расчет вековых частот для исследования резонансной динамики ИСЗ [4]. Кроме того, применяемые интеграторы неоднократно заменялись более современными и эффективными (Эверхарта, Гаусса–Эверхарта, Lobbie) [1, 2, 5–7].

Цель данной работы – демонстрация последней важной модификации «Численной модели движения ИСЗ» – интерфейса, а также математических алгоритмов, которые легли в основу модели.

Ранее во всех версиях данной модели взаимодействие с пользователем осуществлялось посредством входного файла, что нередко служило причиной ошибок при его заполнении новыми пользователями. Такой формат работы с программой в настоящее время не представляется удобным, поэтому был разработан интерфейс для облегчения взаимодействия пользователя с программой.

С 2009 г. «Численная модель движения ИСЗ» существует в двух основных версиях: для персонального компьютера и для работы в среде с распараллеливанием вычислительных задач «Скиф Cyberia» ТГУ [1, 2]. В модели для кластера, помимо модификаций, перечисленных выше, способ распараллеливания был изменен на более эффективный в решении наших задач [1]. Интерфейс был разработан главным образом для версии ПО, предназначенной для персональных компьютеров, поскольку работа на кластере осуществляется через специализированные программы доступа. Однако разработанный интерфейс позволяет сгенерировать входной файл для кластерной модели, что также дает возможность избежать его некорректного формирования.

### **Описание программного комплекса в части прогноза движения ИСЗ**

Основной интерфейс представлен на рис. 1. При высокоточном прогнозе движения ПО позволяет учитывать следующие факторы, оказывающие влияние на движение ИСЗ: гармоника геопотенциала и селенопотенциала; дополнительные возмущения геопотенциала, рекомендованные в [8], такие как вековые изменения первых зональных гармоник (входят в учет влияния геопотенциала) и различные приливы; гравитационные влияния Солнца, Луны и больших планет; сопротивление атмосферы; световое давление (СД) и эффект Пойнтинга–Робертсона (на стартовом окне носит сокращение П-Р); а также релятивистские эффекты.

Пользователь сам определяет, какие возмущения необходимо учитывать при решении поставленной задачи, как это показано на рис. 1. Стоит отметить, что при учете влияния атмосферы необходимо задать «высоту сгорания», по умолчанию данный параметр равен 100 км (см. рис. 1). Если в результате прогноза движения объект достигает данной высотной отметки, расчеты для него прекращаются и спутник считается сгоревшим в атмосфере.

Пользователь задает начальный и конечный моменты прогноза, и при этом возможно выбрать выдачу в файл с любого момента внутри интервала прогноза. По умолчанию начальный момент для выдачи соответствует началу прогноза. Шаг выдачи данных можно задать двумя способами: либо в секун-

дах, либо в числе оборотов (период вычисляется программой для каждого околоземного спутника).

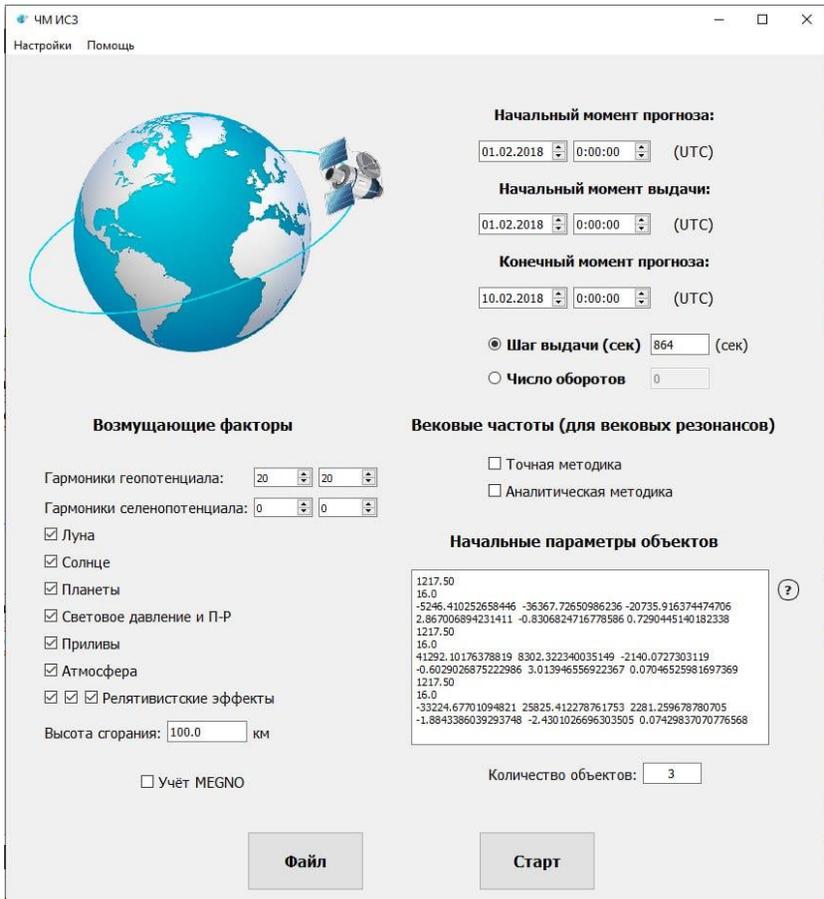


Рис. 1. Интерфейс «Численной модели движения ИСЗ»

Fig. 1. Interface of the "Numerical model of the artificial Earth satellite motion"

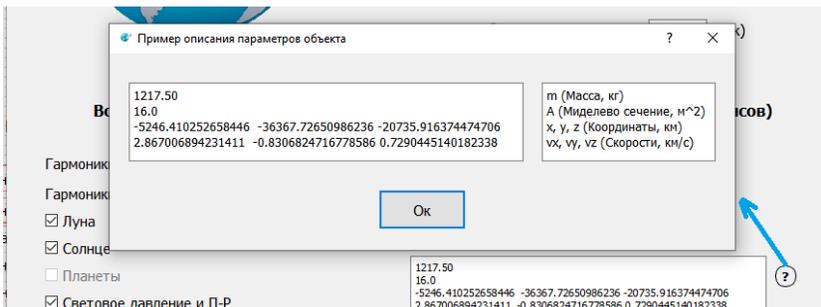


Рис. 2. Пояснение к заполнению поля «Начальные параметры»

Fig. 2. Explanation for the "Initial parameters" fill-in field

Начальные параметры ИСЗ, такие как масса, площадь миделева сечения, стартовые координаты и скорости, задаются в соответствующем окне (рис. 1, 2). При нажатии на знак вопроса рядом с данным окном выдаются пояснение и пример заполнения поля (см. рис. 2). После введения параметров объектов, если все задано верно, под окном ввода появится число, отражающее количество объектов.

После задания всех необходимых параметров, перечисленных выше, пользователь может либо запустить расчеты, нажав «Старт», либо сгенерировать файл для запуска модели на кластере «Скиф Cyberia», если необходимо спрогнозировать динамическую эволюцию большого числа объектов и использование кластера в таком случае более целесообразно.

Приведем далее основные формулы, лежащие в основе прогноза движения ИСЗ в данной численной модели.

### Уравнения движения

Движение искусственного спутника Земли представим в виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{P} = \mathbf{M}^T \mathbf{P}_E + \mathbf{P}_{MSP} + \mathbf{P}_{SL} + \mathbf{P}_{ATM} + \mathbf{P}_R \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \quad (2)$$

где  $\mathbf{P}$  – ускорение спутника;  $\mathbf{P}_E$  – центральное притяжение Земли и возмущающее ускорение, обусловленное влиянием несферичности геопотенциала и приливами в системе координат, жестко связанной с Землей и вращающейся вместе с ней (ВСК);  $\mathbf{M}^T$  – матрица перехода из вращающейся в инерциальную систему координат;  $\mathbf{P}_{MSP}$  – возмущающее ускорение от притяжения третьего тела: Луны (M), Солнца (S) и больших планет (P) соответственно;  $\mathbf{P}_{SL}$  – ускорение спутника, вызванное СД и эффектом Пойнтинга–Робертсона;  $\mathbf{P}_{ATM}$  – ускорение от сопротивления атмосферы;  $\mathbf{P}_R$  – релятивистские эффекты.

### Возмущения от геопотенциала и селенопотенциала

Влияние геопотенциала на движение ИСЗ задается следующей формулой, вычисляемой, как уже отмечалось ранее, в ВСК:

$$\mathbf{P}_E = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \quad U = \frac{\mu_E}{R_E} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_E}{|\mathbf{x}|} \right)^{n+1} \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) \left[ \bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda \right] \right\}, \quad (3)$$

где  $\mu_E$  и  $R_E$  – постоянные, связанные с Землей, гравитационный параметр и экваториальный радиус соответственно;  $|\mathbf{x}|$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$  – сферические координаты спутника в ВСК;  $\bar{C}_{n,m}$ ,  $\bar{S}_{n,m}$  – числовые коэффициенты, характеризующие структуру гравитационного поля Земли, причем  $\bar{S}_{n,0} = 0$ ;  $\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi)$  – полностью нормированные присоединенные функции Лежандра.

Вычисление  $U$  и его производных выполняется через рекуррентный алгоритм Л. Каннингема [9], для этого соотношение (3) было представлено через шаровую функцию  $\bar{V}_{n,m}$ :

$$U = \text{Real} \mu_E \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_E^n (\bar{C}_{n,m} - i\bar{S}_{n,m}) \bar{V}_{n,m}, \quad (4)$$

$$\bar{V}_{n,m} \equiv \frac{\bar{P}_{n,m} (\sin \varphi) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda)}{|\mathbf{x}|^{n+1}}. \quad (5)$$

Поскольку

$$x_1 = |\mathbf{x}| \cos \varphi \cos \lambda, \quad x_2 = |\mathbf{x}| \cos \varphi \sin \lambda, \quad x_3 = |\mathbf{x}| \sin \varphi, \quad (6)$$

функции  $\bar{V}_{n,m}$  и их частные производные по  $x_1, x_2, x_3$  определяются в модели посредством соотношений:

$$\begin{aligned} V_{0,0} &= \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \\ \bar{V}_{n,m} &= \frac{\bar{P}_{n,m} (\sin \varphi) (x_1 + ix_2)^m}{\cos^m \varphi}, \\ \bar{V}_{n,m} &= \sqrt{\frac{E_m (2n+1)}{E_{m-1} 2m}} \frac{x_1 + ix_2}{|\mathbf{x}|^2} \bar{V}_{n-1,m-1}, \quad (m = n), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{V}_{n,m} = \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{n^2 - m^2}} \frac{x_3}{|\mathbf{x}|^2} \bar{V}_{n-1,m} - \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2 - m^2]}{(2n-3)(n^2 - m^2)}} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \bar{V}_{n-2,m},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_1} &= -\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\ &+ \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} \frac{\bar{V}_{n+1,m-1}}{2}, \quad (m > 0), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_1} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Real} \bar{V}_{n+1,1}, \quad (m = 0),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_2} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} i \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\ &+ \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} i \frac{\bar{V}_{n+1,m-1}}{2}, \quad (m > 0), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_2} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Imag} \bar{V}_{n+1,1}, \quad (m = 0),$$

$$\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x_3} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3}} \bar{V}_{n+1,m}. \quad (m \geq 0). \quad (10)$$

Описание вычислений дополнительных возмущений геопотенциала, рекомендованных IERS Conventions 2010, а именно: вековых изменений первых зональных гармоник и возмущений от разного вида приливов, изложены в [8], и здесь мы не будем на них останавливаться.

Что касается возмущений от селенопотенциала, то они вычисляются с помощью модели LP150Q [10].

### Возмущения от третьего тела

Влияние притяжения от третьего тела в (1) задается силой, определяемой формулой [11]

$$\mathbf{P}_{M,S,P} = \mu_{M,S,P} \left( \frac{\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_{M,S,P}}{|\mathbf{x}_{M,S,P}|^3} \right). \quad (11)$$

Здесь  $\mu_{M,S,P}$  и  $\mathbf{x}_{M,S,P}$  – гравитационные параметры и геоцентрические векторы положения Луны, Солнца и больших планет соответственно. Гравитационный параметр Земли задан в IERS соглашениях 2003 и 2010 гг. [8, 12]. Остальные гравитационные параметры, отношения массы Солнца к массам больших планет, а также координаты больших планет и Луны берутся из фонда DE438/LE438 [13].

При одновременном учете возмущений от Луны, Солнца и больших планет в правой части уравнений (1) будут три слагаемых типа (11):

$$\mathbf{P}_{MSP} = \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_P.$$

### Возмущения от СД и эффекта Пойнтинга–Робертсона

Ускорение спутника, вызванное влиянием СД и эффекта Пойнтинга–Робертсона, задается выражением [14–15]

$$\mathbf{P}_{SL} = \Phi L \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\Delta_S} - \Phi L \left( \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}}{c \Delta_S} \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\Delta_S} + \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}}{c} \right), \quad L = k \theta \frac{a_E^2}{\Delta_S^2} \frac{\sigma}{m}, \quad (12)$$

где  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_S$ ;  $\Delta_S$  – расстояние между спутником и Солнцем;  $c$ ,  $k$ ,  $a_E$ ,  $\theta$  – константы: скорость света, солнечная постоянная, астрономическая единица и постоянная, характеризующая отражающие свойства объекта соответственно;  $\Phi$  – функция тени, определяемая ниже;  $\sigma/m$  – отношение площади миделевого сечения к массе ИСЗ.

В численной модели заданы формулы, обусловленные конической формой тени, и  $\Phi$  вычисляется по следующему алгоритму. Пусть  $r_E$  и  $r_M$  – угловые расстояния относительно исследуемого объекта между центрами Солнца и заслоняющего его тела (Земли или Луны). Радиусы дисков Солнца  $b_S$ , Земли  $b_E$ , Луны  $b_M$  и  $r_E$ ,  $r_M$  определяются как

$$b_E = \arcsin \frac{R_E}{|\mathbf{x}|}, \quad b_{S,M} = \arcsin \frac{R_{S,M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{S,M}|},$$

$$r_E = \arccos \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|}, \quad r_M = \arccos \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_M}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_M|} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|},$$

где  $R_S$ ,  $R_E$ ,  $R_M$  – соответствующие радиусы объектов в пространстве.

В таком случае теневая функция планеты (Земли или Луны) рассчитывается по формулам

$$\Phi_{E,M} = \begin{cases} 1, & r_{E,M} > b_{E,M} + b_S, \\ 0, & b_{E,M} > r_{E,M} + b_S, \\ \frac{b_S^2 - b_{E,M}^2}{b_S^2}, & b_S > r_{E,M} + b_{E,M}, \\ 1 - \frac{b_S^2 (g - \sin g) + b_{E,M}^2 (G - \sin G)}{2\pi b_S^2}, & \end{cases} \quad (13)$$

где  $g = 2 \arccos(z)$ ,  $G = 2 \arccos\left(\frac{r_{E,M} - b_S}{b_{E,M}} z\right)$ ,  $z = \frac{b_S^2 + r_{E,M}^2 - b_{E,M}^2}{2r_{E,M}b_S}$ .

Общая теневая функция определяется как произведение теневых функций Земли и Луны:

$$\Phi = \Phi_E \cdot \Phi_M. \quad (14)$$

Теневая функция рассматривает четыре случая: отсутствие затенения; полная тень; затеняющая планета меньшего размера, находящаяся полностью на фоне Солнца; частичное перекрытие дисков Солнца и планеты.

Более тонкие эффекты: учет искажения диска Солнца и сжатия Земли в атмосфере, учет солнечного затмения с эффектом потемнения диска Солнца к краям, а также переотраженное и тепловое излучение от Земли, – подробно изложены в работах [16, 17].

### ***Возмущения от сопротивления атмосферы***

Возмущение от сопротивления атмосферы учитывается при прогнозе движения спутников на высотах до 1 500 км. Сила  $P_{ATM}$ , действующая на ИСЗ, имеет направление, противоположное скорости спутника относительно воздуха, а ее величина определена формулой

$$P_{ATM} = \frac{1}{2} \sigma c_d \rho v_{отн}^2, \quad (15)$$

где  $c_d$  – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха;  $v_{отн}$  – скорость спутника относительно атмосферы;  $\rho$  – плотность воздуха, для вычисления которой используется модель NRLMSISE-00 [18].

Уравнения для учета релятивистских эффектов подробно изложены в работах [19–20], и, поскольку они редко учитываются при прогнозе движения, здесь мы их приводить не будем.

### **Описание программного комплекса в части вычисления параметра MEGNO**

Как уже было сказано выше, ПО позволяет проводить исследования хаотичности движения ИСЗ. Для этого необходимо включить опцию «учет MEGNO» (рис. 3), поскольку MEGNO и его осредненное значение были выбраны в качестве параметров хаотичности [5, 21, 22].

Для исследования хаотичности в динамике спутников нет необходимости в учете тонких эффектов, которые следует учитывать при высокоточном моделировании, список возмущающих сил при расчете MEGNO уменьшен. В связи с этим

при выборе опции «учет MEGNO» на стартовом окне блокируется возможность выбора возмущений, которые не учитываются при расчете параметра хаотичности (см. рис. 3), поскольку должно быть полное соответствие между учетом возмущений в уравнениях движения и уравнениях для MEGNO.

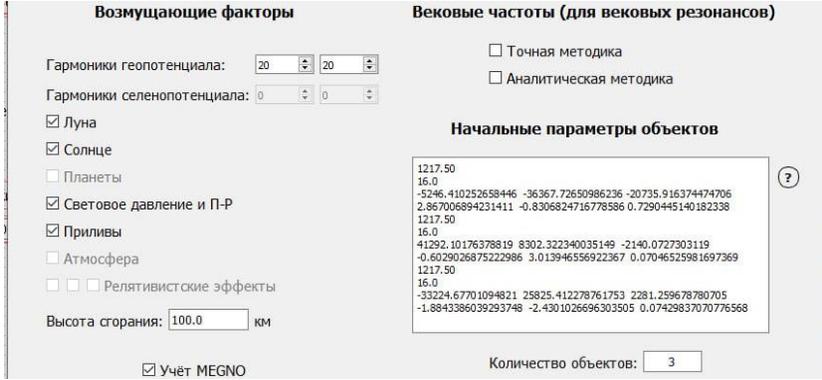


Рис. 3. Фрагмент интерфейса «Численной модели движения ИСЗ». Учет параметра MEGNO

Fig. 3. Fragment of the "Numerical model of the artificial Earth satellite motion" interface for calculating the MEGNO parameter

### Алгоритм определения параметра хаотичности

Вычисления строятся таким образом, что в соответствии с методикой, предложенной в [23], уравнения (1) интегрируются совместно с уравнениями

$$\dot{\delta}_\phi = \frac{d}{dt} \delta_\phi(t) = \mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t))) \delta_\phi(t), \quad \mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t))) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\phi(t)), \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} y = \frac{\dot{\delta} \cdot \delta}{\delta \cdot \delta} t, \quad \frac{d}{dt} w = 2 \frac{y}{t}. \quad (17)$$

В таком случае параметр MEGNO  $Y(t)$  и его усредненный вариант  $\bar{Y}(t)$  определяются по формуле

$$Y(t) = 2y(t) / t, \quad \bar{Y}(t) = w(t) / t. \quad (18)$$

Здесь  $\mathbf{f}(\phi(t))$  – правые части уравнений движения,  $(\phi(t))$ – решение системы (1),  $\delta_\phi(t)$  – вектор, который измеряет эволюцию начального бесконечно малого отклонения между решением  $\phi(t)$  и очень близкой орбитой. В численной модели  $\delta_0(t)$  задается малой вариацией начальных условий, а  $\delta_\phi(t)$  отражает расхождение текущих параметров в момент времени  $t$ . Матрица Якоби нашей системы уравнений (1)  $\mathbf{J}(\mathbf{f}(\phi(t)))$  имеет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{OA} \\ \mathbf{BO} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{O}$  и  $\mathbf{A}$  – нулевая и единичная матрицы, а  $\mathbf{B}$  определяется, исходя из учитываемых возмущающих факторов, следующим выражением:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^T \mathbf{J} \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}'} \right) + \mathbf{J}(\mathbf{P}_M) + \mathbf{J}(\mathbf{P}_S) + \mathbf{J}(\mathbf{P}_{SL}). \quad (20)$$

В формуле (20) матрица частных производных второго порядка от геопотенциала обозначена через  $\mathbf{J}(\partial U/\partial \mathbf{x}')$ , от возмущающих функций Луны и Солнца – через  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_{M,S})$ , от радиационных сил – через  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_{SL})$ .

**Производные второго порядка от геопотенциала**

Вторые частные производные от  $\bar{V}_{n,m}$  могут быть выражены через первые производные от (8)–(10) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1^2} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_1}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1^2} &= -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Real} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_2}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Real} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_2^2} &= \frac{i}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_2} + \frac{i}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_2}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_2^2} &= -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Imag} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_1 \partial x_3} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_3}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_1 \partial x_3} &= -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Real} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{nm}}{\partial x_2 \partial x_3} &= \frac{i}{2} \sqrt{X_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m+1}}{\partial x_3} + \frac{i}{2} \sqrt{Y_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m-1}}{\partial x_3}, (m > 0), \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_2 \partial x_3} &= -\sqrt{X_{n0}} \operatorname{Imag} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,1}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \bar{V}_{n0}}{\partial x_3^2} &= -\sqrt{Z_{nm}} \frac{\partial \bar{V}_{n+1,m}}{\partial x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Здесь

$$X_{nm} = \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}} \right) \frac{(2n+1)(n+m+1)(n+m+2)}{2n+3},$$

$$Y_{nm} = \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}} \right) \frac{(2n+1)(n-m+1)(n-m+2)}{2n+3},$$

$$Z_{nm} = \frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3},$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0. \end{cases} \quad \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0 \\ 1, & m > 0 \end{cases}; \quad \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m-1}} \right) = \begin{cases} 1, & m > 1 \\ 2, & m = 1 \end{cases}.$$

### Вычисление вторых частных производных для притяжения третьего тела

Используя выражения (11) для возмущающих тел, получаем следующие соотношения вторых частных производных для притяжения третьего тела  $\partial^2 \mathbf{P}_{M,S,P} / \partial \mathbf{x}^2$ :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{M,S,P}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\mu_{M,S,P}}{|\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x}|^3} \left( 3 \frac{(\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x})(\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x})^T}{|\mathbf{x}_{M,S,P} - \mathbf{x}|^2} - \mathbf{E} \right), \quad (22)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

### Производные от радиационных сил

Производные от радиационных сил (12) имеют вид:

$$\frac{\partial P_m}{\partial x_n} = L \Phi \left( \varepsilon_{nm} - \frac{3\tilde{x}_n \tilde{x}_m}{\Delta_s^2} \right) - \frac{L}{c \Delta_s^2} \Phi \left( (\dot{\tilde{x}}_k \cdot \tilde{x}_m) \varepsilon_{nm} + \dot{\tilde{x}}_n \tilde{x}_m - 2\dot{\tilde{x}}_m \tilde{x}_n - \frac{4\tilde{x}_m \tilde{x}_n (\dot{\tilde{x}}_n \cdot \tilde{x}_m)}{\Delta_s^2} \right), \quad (23)$$

$$\varepsilon_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}.$$

Здесь обозначения соответствуют (12). Основным отличием модели СД при высокоточном прогнозе и MEGNO-анализе является то, что при расчете параметра хаотичности мы ограничиваемся простой конической моделью тени без учета более тонких эффектов, упомянутых выше при описании возмущающих ускорений от СД. В нашей модели слагаемое, содержащее производную от теневой функции, упрощено, поскольку оно имеет ненулевое значение только в области полутени и дает незначительный вклад при значительной громоздкости вычислений. Если использовать полную запись, то в (23) появляется слагаемое вида (12), где вместо  $\Phi$  будет ее производная.

### Вековые частоты

В последнюю версию численной модели была добавлена возможность вычисления вековых частот объекта в процессе численного интегрирования. Для этого до начала прогноза в стартовом окне интерфейса (см. рис. 1) необходимо выбрать нужные опции расчета: точная (численная) методика или аналитическая, либо обе в зависимости от задачи. Как показали наши последние исследования [4, 24], наиболее оптимальным для анализа резонансной динамики является рассмотрение сразу обеих методик, поскольку каждая из них имеет свои недостатки, которые устраняются при совместном использовании численного и аналитического методов. Получаемые таким образом величины позволяют проводить исследова-

ния влияния вековых резонансов на спутниковую динамику. Подробно методика исследования и используемый для этого математический аппарат изложены в наших работах [4, 24].

### «Настройки» и «Помощь»

В верхнем левом углу стартового окна расположены две кнопки: «Настройки» и «Помощь» (рис. 1, 4). При нажатии на первую из них программа предложит задать параметры интегрирования (см. рис. 4): порядок интегратора, параметр интегратора (если выбран переменный шаг интегрирования) или размер шага в секундах (если выбран постоянный). В версиях численной модели без интерфейса выбор шага осуществлялся по условию: если параметр интегратора (порядок задаваемой точности) вводился равным отрицательному значению или нулю во входном файле, то использовалась величина постоянного шага интегрирования.

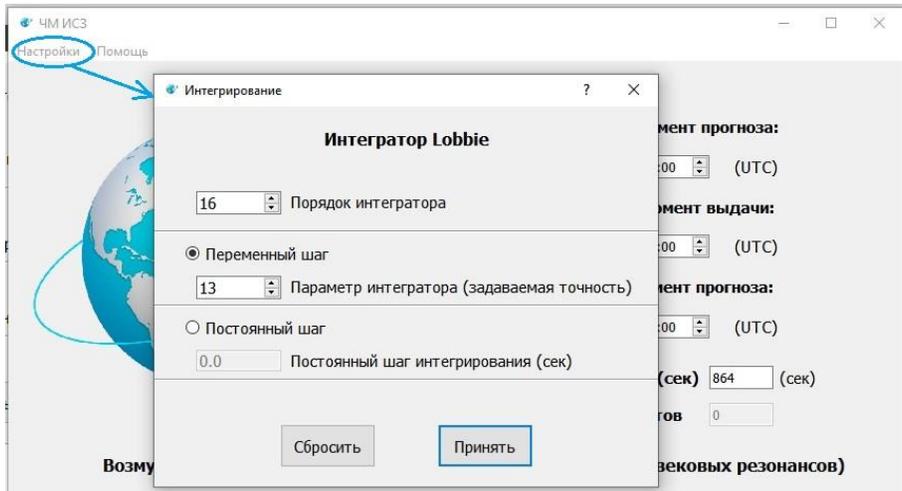


Рис. 4. Настройки интегратора численной модели

Fig. 4. Settings of a numerical model integrator

В текущую версию программного комплекса встроен новый коллокационный интегратор Lobbie [7], который обладает преимуществами при сравнении с другими интеграторами [1], используемыми в предыдущих версиях численной модели НИИ ПММ ТГУ. Схема интегрирования конструируется посредством прямого интегрирования полиномиальных интерполянтов правых частей дифференциальных уравнений [25–28]. Главные достоинства нового интегратора заключаются в том, что он позволяет решать смешанные системы дифференциальных уравнений первого и второго порядков, которые необходимы для определения MEGNO, а также имеет более высокую эффективность для работы с сильно вытянутыми эллиптическими орбитами.

При нажатии кнопки «Помощь» (см. рис. 1, 4) программа выдает окно с подробной инструкцией заполнения различных полей стартового окна и пояснением, какие расчеты возможно получить посредством выбора тех или иных опций, т.е. описанием полного функционала ПО.

## Заключение

Таким образом, в данной работе представлено описание «Численной модели движения ИСЗ», а именно математический аппарат, лежащий в ее основе, и разработанный интерфейс, предназначенный для упрощения работы пользователя с программой. Данная версия программного комплекса позволяет осуществлять высокоточный прогноз движения околоземных объектов, вычислять параметр MEGNO для исследования хаотичности движения ИСЗ, вычислять вековые частоты, используя численную (точную) и аналитическую методики, для проведения исследований резонансной динамики околоземных космических объектов. Показаны преимущества модели с интерфейсом для пользователя.

## Список источников

1. Александрова А.Г., Авдюшев В.А., Попандопуло Н.А., Бордовицына Т.В. Численное моделирование движения околоземных объектов в среде параллельных вычислений // Известия вузов. Физика. 2021. Т. 64, № 8. С. 168–175. doi: 10.17223/00213411/64/8/168
2. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А., Чувашиов И.Н., Александрова А.Г., Томилова И.В. Численное моделирование движения систем ИСЗ в среде параллельных вычислений // Известия вузов. Физика. 2009. Т. 52, № 10/2. С. 5–11.
3. Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашиов И.Н. Комплекс алгоритмов и программ для исследования хаотичности в динамике искусственных спутников Земли // Известия вузов. Физика. 2010. Т. 53, № 8/2. С. 14–21.
4. Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В. Анализ динамической структуры вековых резонансов в окололунном орбитальном пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 110–124. doi: 10.17223/19988621/77/9
5. Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits // *Celestial Mechanics*. 1974. V. 10 (1). P. 35–55. doi: 10.1007/BF01261877
6. Everhart E. An efficient integrator that uses Gauss–Radau spacings // *An efficient integrator that uses Gauss–Radau spacings. Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution. Astrophysics and Space Science Library*. 1985. V. 115 (4). P. 185–202. doi: 10.1007/978-94-009-5400-7\_17
7. Авдюшев В.А. Новый коллокационный интегратор для решения задач динамики. I. Теоретические основы // Известия вузов. Физика. 2020. Т. 63, № 11 (755). С. 131–140. doi: 10.17223/00213411/63/11/131
8. Petit G., Luzum B. IERS Technical note 36. Frankfurt am Main : Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010.
9. Cunningham L.E. On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // *Celestial Mechanics*. 1970. V. 2. P. 207–216. doi: 10.1007/BF01229495
10. Lunar Prospector Spherical Harmonics and Gravity Models. 2006. URL: [https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity\\_models.htm](https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity_models.htm) (accessed: 03.05.2023).
11. Дубошин Н.Г. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968.
12. IERS Conventions 2003. URL: <http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003.html> (accessed: 03.05.2023).
13. Folkner W.M., Park R.S. Planetary ephemeris DE438 for Juno. Technical Report IOM392R-18-004. Pasadena, CA : Jet Propulsion Laboratory, 2018.
14. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2007.
15. Robertson H.P. Dynamical Effects of Radiation in the Solar System // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1937. V. 97. P. 423–438. doi: 10.1093/mnras/97.6.423

16. *Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F.* Solar radiation pressure perturbations for Earth's satellites, III globalatmospheric phenomena and albedo effect. // *Astronomy & Astrophysics*. 1993. V. 290. P. 324–334.
17. *Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F.* Solar radiation pressure perturbations for Earth satellites. IV. Effects of the Earth's polar flattening on the shadow structure and the penumbra transitions // *Astronomy & Astrophysics*. 1996. V. 307. P. 635–644.
18. *Picone M., Hedin A.E., Drob D.* Naval Research Laboratory. URL: <http://modelweb.gsfc.nasa.gov/atmos/nrlmsise00.html> (access: 30.11.2015).
19. *Brumberg V.A.* On Relativistic Equations of Motion of an Earth Satellite // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2004. V. 88. P. 209–225. doi: 10.1023/B:CELE.0000016821.33627.77
20. *Brumberg V.A., Ivanova T.V.* Precession/Nutation Solution Consistent with the General Planetary Theory // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2007. V. 97 (3). P. 189–210. doi: 10.1007/s10569-006-9060-7
21. *Cincotta P.M., Simó C.* Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials – I // *Astronomy and Astrophysics Supplement*. 2000. V. 147. P. 205–228. doi: 10.1051/aas:2000108
22. *Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C.* Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits // *Physica D*. 2003. V. 182. P. 151–178. doi: 10.1016/S0167-2789(03)00103-9
23. *Valk S., Delsate N., Lemaitre A., Carletti T.* Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator // *Advances in Space Research*. 2009. V. 43 (7). P. 1509–1526. doi: 10.1016/j.asr.2009.02.014
24. *Попандопуло Н.А., Александрова А.Г., Бордовицына Т.В.* К обоснованию численно-аналитической методики выявления вековых резонансов // *Известия вузов. Физика*. 2022. Т. 65, № 6 (775). С. 47–52. doi: 10.17223/00213411/65/6/47
25. *Guillou A., Soule J.L.* La Resolution Numerique des Problèmes Differentielles aux Conditions Initiales par des Méthodes de Collocation // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*. 1969. V. 3 (R3). P. 17–44.
26. *Wright K.* Some relationships between implicit Runge-Kutta, collocation and Lanczos methods, and their stability properties // *BIT Numerical Mathematics*. 1970. V. 10. P. 217–227.
27. *Hairer E., Norsett S. P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Springer, 2008.
28. *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Springer, 2006.

### References

1. *Aleksandrova A.G., Avdyushev V.A., Popandopulo N.A., Bordovitsyna T.V.* (2021) Numerical modeling of motion of near-Earth objects in a parallel computing environment. *Russian Physics Journal*. 64(8). pp. 1566–1575. doi: 10.1007/s11182-021-02491-3
2. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A., Chuvashov I.N., Aleksandrova A.G., Tomilova I.V.* (2009) Chislennoe modelirovanie dvizheniya sistem ISZ v srede parallel'nykh vychisleniy [Numerical simulation of the motion of satellite systems in a parallel computing environment]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 52(10/2). pp. 5–11.
3. *Bordovitsyna T.V., Aleksandrova A.G., Chuvashov I.N.* (2010) Kompleks algoritmov i programm dlya issledovaniya khaotichnosti v dinamike iskusstvennykh sputnikov Zemli [A set of algorithms and programs for the study of randomness in the dynamics of artificial Earth satellites]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 53(8/2). pp. 14–21.
4. *Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V.* (2022) Analiz dinamicheskoy struktury vekovykh rezonansov v okololunnom orbital'nom prostranstve [Analysis of a dy-

- dynamic structure of secular resonances in circumlunar orbital space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 110–124. doi: 10.17223/19988621/77/9
5. Everhart E. (1974) Implicit single-sequence methods for integrating orbits. *Celestial Mechanics*. 10(1). pp. 35–55. doi: 10.1007/BF01261877
  6. Everhart E. (1985) An efficient integrator that uses Gauss–Radau spacings. *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution. Astrophysics and Space Science Library*. 115(4). pp. 185–202. doi: 10.1007/978-94-009-5400-7\_17
  7. Avdyushev V.A. (2021) New collocation integrator for solving dynamic problems. I. Theoretical background. *Russian Physics Journal*. 63(11). pp. 1977–1988. doi: 10.1007/s11182-021-02260-2
  8. Petit G., Luzum B. (2010) *IERS Technical Note 36*. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie.
  9. Cunningham L.E. (1970) On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. *Celestial Mechanics*. 2. pp. 207–216. doi: 10.1007/BF01229495
  10. *Lunar Prospector Spherical Harmonics and Gravity Models* (2006) URL: [https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity\\_models.htm](https://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity_models.htm) (03.05.2023).
  11. Duboshin G.N. (1968) *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial mechanics. Fundamental problems and methods]. Moscow: Nauka.
  12. *IERS Conventions* (2003) URL: <http://tai.bipm.org/iers/conv2003/conv2003.html>
  13. Folkner W.M., Park R.S. (2018) *Planetary Ephemeris DE438 for Juno. Technical Report IOM392R-18-004*. Pasadena: Jet Propulsion Laboratory.
  14. Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A. (2007) *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli. Analiticheskie i chislennyye metody* [Theory of motion of artificial Earth satellites. Analytical and numerical methods]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
  15. Robertson H.P. (1937) Dynamical effects of radiation in the solar system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 97. pp. 423–438. doi: 10.1093/mnras/97.6.423
  16. Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F. (1993) Solar radiation pressure perturbations for Earth's satellites, III globalatmospheric phenomena and albedo effect. *Astronomy & Astrophysics*. 290. pp. 324–334.
  17. Vokrouhlicky D., Farinella P., Mignard F. (1996) Solar radiation pressure perturbations for Earth satellites. IV. Effects of the Earth's polar flattening on the shadow structure and the penumbra transitions. *Astronomy & Astrophysics*. 307. pp. 635–644.
  18. Picone M., Hedin A.E., Drob D.: *Naval Research Laboratory*. URL: <http://modelweb.gsfc.nasa.gov/atmos/nrlmsise00.html> (30.11.2015).
  19. Brumberg V.A. (2004) On relativistic equations of motion of an Earth satellite. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 88. pp. 209–225. doi: 10.1023/B:CELE.0000016821.33627.77
  20. Brumberg V.A., Ivanova T.V. (2007) Precession/nutation solution consistent with the general planetary theory. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 97(3). pp. 189–210. doi: 10.1007/s10569-006-9060-7
  21. Cincotta P.M., Simó C. (2000) Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials – I. *Astronomy and Astrophysics Supplement*. 147. pp. 205–228. doi: 10.1051/aas:2000108
  22. Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C. (2003) Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits. *Physica D*. 182. pp. 151–178. doi: 10.1016/S0167-2789(03)00103-9
  23. Valk S., Delsate N., Lemaitre A., Carletti T. (2009) Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator. *Advances in Space Research*. 43(7). pp. 1509–1526. doi: 10.1016/j.asr.2009.02.014
  24. Popandopulo N.A., Aleksandrova A.G., Bordovitsyna T.V. (2022) To the substantiation of a numerical-analytical method for revealing secular resonances. *Russian Physics Journal*. 65(6). pp. 959–965. doi: 10.1007/s11182-022-02719-w

25. Guillou A., Soule J.L. (1969) La resolution numerique des problèmes differentielles aux conditions initiales par des méthodes de collocation. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique – ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 3(R3). pp. 17–44.
26. Wright K. (1970) Some relationships between implicit Runge-Kutta, collocation and Lanczos methods, and their stability properties. *BIT Numerical Mathematics*. 10. pp. 217–227.
27. Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. (2008) *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer.
28. Hairer E., Lubich C., Wanner G. (2006) *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer.

**Сведения об авторах:**

**Александрова Анна Геннадьевна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник 50-го отдела Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: alexandrovaannag@mail.ru

**Попандопуло Никита Андреевич** – младший научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nikas.popandopulos@gmail.com

**Кучерявченко Никита Александрович** – младший научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: wallguet@gmail.com

**Авдюшев Виктор Анатольевич** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: scharmn@mail.ru

**Бордовицына Татьяна Валентиновна** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории 57 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bordovitsyna@mail.ru

**Information about the authors:**

**Aleksandrova Anna G.** (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: alexandrovaannag@mail.ru

**Popandopulo Nikita A.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nikas.popandopulos@gmail.com

**Kucheryavchenko Nikita A.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: wallguet@gmail.com

**Avdyushev Viktor A.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: scharmn@mail.ru

**Bordovitsyna Tat'yana V.** (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bordovitsyna@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 11.05.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 11.05.2023; accepted for publication 04.12.2023*