

Научная статья

УДК 004.942:623.526.4

doi: 10.17223/19988621/86/6

## Верификация одномерной компьютерной модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при выстреле

Даниил Анатольевич Клюкин<sup>1</sup>, Иван Григорьевич Русяк<sup>2</sup>,  
Вадим Гарайханович Суфиянов<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова,*

*Ижевск, Россия*

<sup>1</sup> *anatoliikljukin@mail.ru*

<sup>2</sup> *primat@istu.ru*

<sup>3</sup> *vsufiy@mail.ru*

**Аннотация.** Представлены результаты верификации компьютерной одномерной математической модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при нагружении внутренним давлением и тепловым воздействием пороховых газов на основе сравнения с решением задачи, полученным в трехмерной постановке. В математической модели учитывались сила тяжести, неравномерное тепловое нагружение и распределение давления по длине ствола в процессе выстрела. Проведено сравнение результатов одномерного и трехмерного моделирования колебаний цилиндрического ствола переменного кольцевого сечения, цилиндрического ствола переменного кольцевого сечения с учетом технологических отклонений изготовления ствола и ствола с ребрами жесткости. Сравнение показало, что одномерная модель позволяет достаточно точно воспроизводить процесс колебаний ствола, отклонения от результатов моделирования в трехмерной постановке составили от 2,9 до 12,5%. При этом время расчета колебаний ствола сокращается существенно, на 4–5 порядков.

**Ключевые слова:** математическая модель, размерность модели, верификация результатов, продольно-поперечные колебания, ствол орудия

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы развития научных и научно-педагогических кадров ИЖГТУ имени М.Т. Калашникова.

**Для цитирования:** Клюкин Д.А., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г. Верификация одномерной компьютерной модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при выстреле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 79–93. doi: 10.17223/19988621/86/6

Original article

## Verification of a one-dimensional computer model of longitudinal-transverse vibrations of an artillery gun barrel on firing

Daniil A. Klyukin<sup>1</sup>, Ivan G. Rusyak<sup>2</sup>, Vadim G. Sufiyarov<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation

<sup>1</sup> anatoliikljukin@mail.ru

<sup>2</sup> primat@istu.ru

<sup>3</sup> vsufiy@mail.ru

**Abstract.** This paper presents the verification results for a one-dimensional computer mathematical model of longitudinal–transverse vibrations of an artillery gun barrel under internal pressure loading and the thermal effect of powder gases based on a comparison with a three-dimensional problem solution. The mathematical model takes into account gravity, non-uniform thermal loading, and pressure distribution along the barrel length on firing. A comparison of one-dimensional and three-dimensional modeling results for vibrations of a cylindrical barrel with variable annular cross-section and a cylindrical barrel of variable annular cross-section with account for manufacturing tolerance of the classical barrel and the barrel with stiffeners is carried out. The comparison shows that the one-dimensional model gives a reasonable approximation for barrel oscillations with a deviation from the three-dimensional model case ranging from 2.9% to 12.5%. Therewith, the time required to calculate the vibrations of the barrel in a one-dimensional formulation is significantly reduced (by 4-5 orders of magnitude) as compared to a three-dimensional formulation.

**Keywords:** mathematical model, model dimension, model verification, longitudinal-transverse vibrations, gun barrel

**Acknowledgments:** This research was financially supported by the Program for the Development of Scientific and Scientific-Pedagogical Personnel at the Kalashnikov Izhevsk State Technical University.

**For citation:** Kljukin, D.A., Rusyak, I.G., Sufiyarov, V.G. (2023) Verification of a one-dimensional computer model of longitudinal-transverse vibrations of an artillery gun barrel on firing. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 79–93. doi: 10.17223/19988621/86/6

### Введение

Верификация и валидация компьютерных моделей являются одними из ключевых задач с точки зрения их практического применения. Как указывается в статье [1], «современная концепция верификации и валидации основывается на работах К. Попера и Р. Карнапа». В области вычислительной механики твердого тела определение этих терминов представлено в стандарте [2], разработанном американским обществом инженеров-математиков. Отличие процесса верификации от валидации кратко описано одним из руководителей разработки данного

стандарта L.E. Schwer [3]: верификация – это правильное решение уравнений, а валидация – решение правильных уравнений. Пример верификации компьютерной одномерной модели колебаний балки, закрепленной с одного конца и свободной на другом, представлен в [4] на основе сравнения с известным точным аналитическим решением.

Стандарт ГОСТ Р 57700.37–2021 [5] относит термин «верификация» только к программному обеспечению компьютерного моделирования и определяет его как «подтверждение того, что программное обеспечение компьютерного моделирования выполняет подготовку исходных данных, расчеты и обработку результатов таких расчетов в соответствии с указанной математической моделью». Термин «валидация» также соотносится только с программным обеспечением компьютерного моделирования и определяется как «подтверждение того, что программное обеспечение компьютерного моделирования в заявленной области применения адекватно с заданной степенью точности выполняет подготовку исходных данных, расчеты и обработку результатов таких расчетов». Таким образом, верификация компьютерной модели (программного обеспечения компьютерного моделирования) рассматривается как ее соответствие математической модели в рамках установленных допущений, а валидация – как соответствие компьютерной модели физическим процессам в соответствующих областях применения.

В данной работе рассматривается вопрос верификации компьютерной одномерной математической модели упругих продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных [6], дополненную возможностью расчета ствола с кольцевым поперечным сечением, а также учетом неравномерного теплового нагружения ствола в процессе выстрела [7]. Различные варианты одномерных математических моделей колебания ствола представлены в работах [8, 9]. В [8] моделируются колебания ствола 70-мм пушки методом конечных элементов (МКЭ) в одномерной постановке, построена имитационная модель поперечных колебаний ствола при многократной нагрузке во время стрельбы и получены кривые колебаний. В [9] построена имитационная модель поперечных колебаний ствола при многократных нагрузках. Исследованиям напряженно-деформированного состояния (НДС) артиллерийских и стрелковых орудий посвящены работы исследователей из Чехии, Китая, Кореи и других стран [10–15]. Однако в этих работах отсутствует сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными или с трехмерной постановкой, что не позволяет оценить качество соответствующих моделей и алгоритмов их реализации.

В существующих работах верификация программного кода математических моделей, как правило, проводится на основе оценки сеточной сходимости или путем сравнения с аналитическими решениями упрощенных вариантов, например при отсутствии внутренних сил, постоянном давлении и т.п. К сожалению, в рассматриваемой постановке точные аналитические решения продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия получить невозможно. В этой связи верификацию компьютерной модели предполагается провести на основе сравнения с результатами трехмерного математического моделирования.

Условно точное решение поставленной задачи, с учетом сложной геометрической формы при различных условиях неравномерного теплового и силового нагружения, можно получить на основе трехмерного моделирования колебаний

ствола с использованием средств инженерного конечно-элементного моделирования, таких как ANSYS, ЛОГОС, Abaqus, MSC Nastran, COMSOL и др. Недостатком пространственного моделирования МКЭ являются значительные временные затраты на вычисления, которые могут достигать 120 часов для одного варианта на ЭВМ с 16 вычислительными ядрами. Поэтому актуальной задачей является снижение пространственной размерности математической модели, позволяющей описать колебания ствола артиллерийского орудия с точностью, сопоставимой с расчетами в программах трехмерного конечно-элементного моделирования.

Цель данной работы – верификация и оценка адекватности компьютерной одномерной математической модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия на основе сравнения с решением в трехмерной постановке в ANSYS.

### 1. Математическая модель колебаний ствола в одномерной постановке

Математическую модель колебаний ствола построим на основе работ [6, 7, 16]. Будем полагать, что ствол представляет собой трубу переменного сечения длины  $L$ . Площадь поперечного сечения ствола обозначим  $F = F(x)$ , площадь канала ствола –  $S = S(x)$ . Уравнение баланса сил, действующих в продольном направлении по оси  $Ox$  записывается в виде [6]:

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\rho F g \sin \varphi - q_1 + \frac{\partial}{\partial x} (F \sigma^{xx}) - p_1 \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – величина продольных колебаний ствола;  $\rho$  – плотность материала ствола;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\varphi$  – угол возвышения ствола;  $q_1 = q_1(x, t)$  – распределенные внешние силы, действующие в продольном направлении;  $p_1 = p_1(x, t)$  – распределение избыточного давления внутри ствола:

$$p_1 = p(x, t) - p_a, \quad (2)$$

$p(x, t)$  – распределение давления пороховых газов внутри канала ствола, которое определяется из решения основной задачи внутренней баллистики;  $p_a$  – атмосферное давление;  $\sigma^{xx} = \sigma^{xx}(x, t)$  – продольные напряжения в сечении ствола:

$$\sigma^{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{F} \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) df - \frac{\alpha E}{F} \int_F T(x, r, t) df, \quad (3)$$

где  $E$  – Модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $T(x, r, t)$  – температура ствола в точке с координатами  $x$  и  $r$  в момент времени  $t$ , определяемая по квазиодномерной математической модели [17].

Второе слагаемое в соотношении (3) в одномерной модели предлагается, как и в [6], определять на основе решения задачи Ламе [18]. Тогда можно положить

$$\frac{1}{F} \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) df = 2p_1 \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (4)$$

где  $r_1$ ,  $r_2$  – переменные внутренний и внешний радиусы ствола соответственно. Для стволов не кольцевого сечения значение  $r_2$  определяется по формуле  $r_2 = \sqrt{(F + S)/\pi}$ .

В качестве начальных условий для уравнения (1) примем условия покоя:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

где  $u_0(x)$  – начальное продольное перемещение, определяемое из решения стационарной задачи о прогибе ствола под действием силы тяжести [6].

В качестве граничных условий будем полагать, что у казенного среза ствол закреплен и продольные перемещения отсутствуют:

$$u(0,t) = u_0(0), \quad (6)$$

а на дульном срезе на ствол внешние силы не действуют:

$$FE \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (7)$$

Уравнение поперечных колебаний ствола в вертикальной плоскости  $Oxy$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = & -\rho F g \cos \varphi - q_2 + (F \sigma^{xx} + p_1 S) \frac{\partial^2 (v + v_{00})}{\partial x^2} + \\ & + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) y df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha E \int_F T(x, r, t) y df \right), \end{aligned} \quad (8)$$

с начальными условиями

$$v(x,0) = v_0(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (9)$$

и граничными условиями

$$v(0,t) = v_0(0), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad EJ_z \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0, \quad (10)$$

где  $v = v(x,t)$  – величина поперечных колебаний в вертикальной плоскости;  $v_0 = v_0(x)$  – величина начального прогиба в вертикальной плоскости;  $q_2 = q_2(x,t)$  – распределенные внешние силы, действующие по оси  $Oy$ ;  $v_{00} = v_{00}(x)$  – технологическое смещение центра канала ствола относительно оси  $Oy$ ;  $J_z = J_z(x)$  – момент инерции сечения относительно оси  $Oz$ .

Уравнение поперечных колебаний ствола в горизонтальной плоскости  $Oxz$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & -q_3 + (F \sigma^{xx} + p_1 S) \frac{\partial^2 (w + w_{00})}{\partial x^2} + \\ & + w \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) z df \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \alpha E \int_F T(x, r, t) z df \right), \end{aligned} \quad (11)$$

с начальными условиями

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (12)$$

и граничными условиями

$$w(0,t) = w_0(0), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad EJ_y \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = 0, \quad (13)$$

где  $w = w(x,t)$  – величина поперечных колебаний в горизонтальной плоскости;  $w_0 = w_0(x)$  – величина начального прогиба в горизонтальной плоскости;  $q_3 = q_3(x,t)$  – распределенные внешние силы, действующие по оси  $Oz$ ;  $w_{00} = w_{00}(x)$  – технологическое смещение центра канала ствола относительно оси  $Oz$ ;  $J_y = J_y(x)$  – момент инерции сечения относительно оси  $Oy$ .

Обозначим моменты сил, действующие по осям  $Oy$  и  $Oz$  как  $M_y$  и  $M_z$  соответственно:

$$M_y = \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) y df - \alpha E \int_F T(x,r,t) y df, \quad (14)$$

$$M_z = \int_F (\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) z df - \alpha E \int_F T(x,r,t) z df.$$

При решении краевых задач колебаний ствола будем учитывать, что перерезывающие силы и изгибающие моменты на дульном срезе равны нулю [18]:

$$\left. \frac{\partial M_y}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (M_y)_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial M_z}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (M_z)_{x=L} = 0. \quad (15)$$

Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений в частных производных проводилась интегро-интерполяционным методом [19], который позволяет построить разностную схему для моделей с негладкими и разрывными коэффициентами.

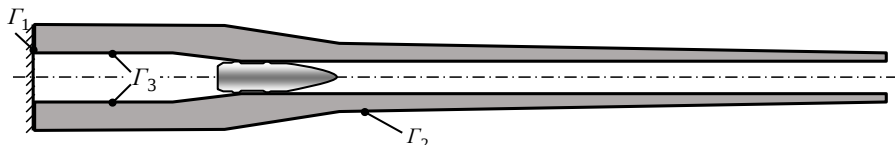
## 2. Математическая модель колебаний ствола в трехмерной постановке

Схема артиллерийского ствола в горизонтальном разрезе представлена на рис. 1. Заштрихованная область  $\Gamma_1$  соответствует границе закрепления ствола. На границе  $\Gamma_2$  задаются нулевые условия на напряжения. На границе  $\Gamma_3$  задается распределение избыточного давления  $p_1(x,t)$ , вычисляемое по формуле (2).

Решение задачи колебаний ствола в пространственной трехмерной постановке осуществлялось в программе ANSYS. Математическая модель напряженно-деформированного состояния ствола с учетом его нагрева в трехмерной постановке имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma^{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{yz}}{\partial z} - \rho g = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma^{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (16)$$

где  $u, v, w$  – перемещения по осям  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно;  $\sigma^{\alpha\beta}$  – компоненты тензора напряжений,  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$ .



**Рис. 1.** К постановке граничных условий для расчета НДС ствола:  $\Gamma_1$  – граница закрепления ствола;  $\Gamma_2$  – внешняя граница ствола;  $\Gamma_3$  – внутренняя граница канала ствола

**Fig. 1.** Representation of boundary conditions for calculating stress-strain state of a barrel:  $\Gamma_1$ , fixation boundary of the barrel;  $\Gamma_2$ , outer boundary of the barrel; and  $\Gamma_3$ , inner boundary of the bore

Связь между напряжениями и деформациями описывается законом Гука в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon^{xx} = \left( \sigma^{xx} - \nu(\sigma^{yy} + \sigma^{zz}) - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{yy} = \left( \sigma^{yy} - \nu(\sigma^{xx} + \sigma^{zz}) - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{zz} = \left( \sigma^{zz} - \nu(\sigma^{xx} + \sigma^{yy}) - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{xy} = (1 + \nu) \left( \sigma^{xy} - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{yz} = (1 + \nu) \left( \sigma^{yz} - \alpha ET \right) / E, \\ \varepsilon^{zx} = (1 + \nu) \left( \sigma^{zx} - \alpha ET \right) / E, \end{cases} \quad (17)$$

где  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  – компоненты тензора деформаций,  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$ .

Начальные условия записываются в виде:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0, & v|_{t=0} = v_0, & w|_{t=0} = w_0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, & \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = 0, & \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (18)$$

граничные условия записываются в следующем виде:

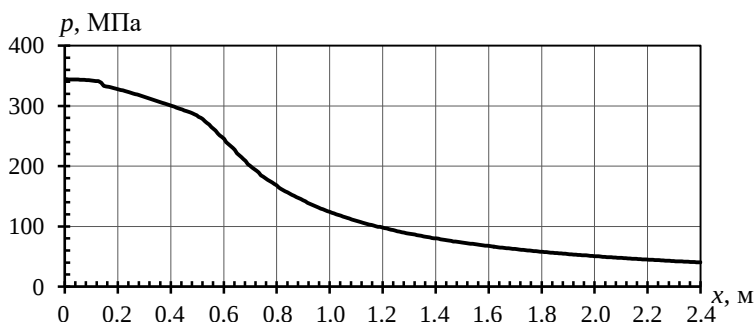
$$\begin{cases} u|_{\Gamma_1} = 0, & v|_{\Gamma_1} = 0, & w|_{\Gamma_1} = 0, \\ \sigma|_{\Gamma_2} = 0, \\ \sigma|_{\Gamma_3} = p_1(x, t), \end{cases} \quad (19)$$

где  $\sigma$  – напряжение, задаваемое по нормали к границе поверхности.

Тепловое нагружение ствола определялось из решения трехмерной задачи теплопроводности [20].

### 3. Результаты верификации одномерной модели колебаний ствола

Расчет внутренней баллистики 30-мм пушки с учетом последействия проводится по модели, учитывающей одномерное распределение параметров газа [7, 21]. Процесс выстрела длится 4 мс, в последующие 6 мс моделируется истечение газа из канала ствола [22]. Максимальное давление в стволе равно 344 МПа. Эпюра максимальных давлений пороховых газов при выстреле представлена на рис. 2.



**Рис. 2.** Эпюра максимальных давлений пороховых газов при выстреле  
**Fig. 2.** Maximum pressure distribution diagram for powder gases on firing

Задача НДС и продольно-поперечных колебаний ствола решалась для материала Structural Steel, характеристики которого представлены в таблице.

#### Характеристики материала ствола

| Характеристика                                      | Размерность       | Значение             |
|-----------------------------------------------------|-------------------|----------------------|
| Плотность $\rho$                                    | кг/м <sup>3</sup> | 7 850                |
| Модуль Юнга $E$                                     | ГПа               | 200                  |
| Коэффициент Пуассона $\nu$                          | –                 | 0,3                  |
| Удельная теплоемкость $c$                           | Дж/(кг·К)         | 567                  |
| Удельная теплопроводность $\lambda$                 | Вт/(м·К)          | 32                   |
| Коэффициент линейного теплового расширения $\alpha$ | 1/К               | $12,5 \cdot 10^{-6}$ |

Для одномерного моделирования НДС ствола под действием неравномерного теплового и силового нагружения была разработана программа на языке C#. Трехмерное моделирование осуществлялось в программе ANSYS Transient Structural с начальными значениями, задаваемыми из ANSYS Static Structural, при этом моделирование теплового нагружения осуществлялось в ANSYS Transient Thermal.

Проведено исследование сеточной сходимости методов. Выбор шагов численного интегрирования, обеспечивающих в норме максимум точность расчета 0,1%, осуществлялся в соответствии с принципом Рунге [19]. Количество ячеек сетки в области интегрирования, обеспечивающих заданную точность было равно: для одномерного приближения – 600, для трехмерного – 1,8 млн. Для одномерного приближения был выбран постоянный шаг по времени 1 мкс, для трехмерного – адаптивный шаг от 1 до 10 мкс.

Задача НДС решалась для классического ствола, для ствола при наличии технологических отклонений (рис. 3, а), и ствола с ребрами жесткости (рис. 3, б).

Рассматривался случай, когда технологические отклонения оси канала ствола  $v_{00} = v_{00}(x)$  и  $w_{00} = w_{00}(x)$  задавались линейной функцией координаты  $x$  (рис. 4).

Для стволов без технологических отклонений будем сравнивать только продольные и поперечные колебания в вертикальной плоскости, так как поперечные колебания в горизонтальной плоскости в данном случае отсутствуют. Сравнение продольных и поперечных колебаний классического ствола в одномерной и трехмерной постановках без учета теплового нагружения представлено на рис. 5.

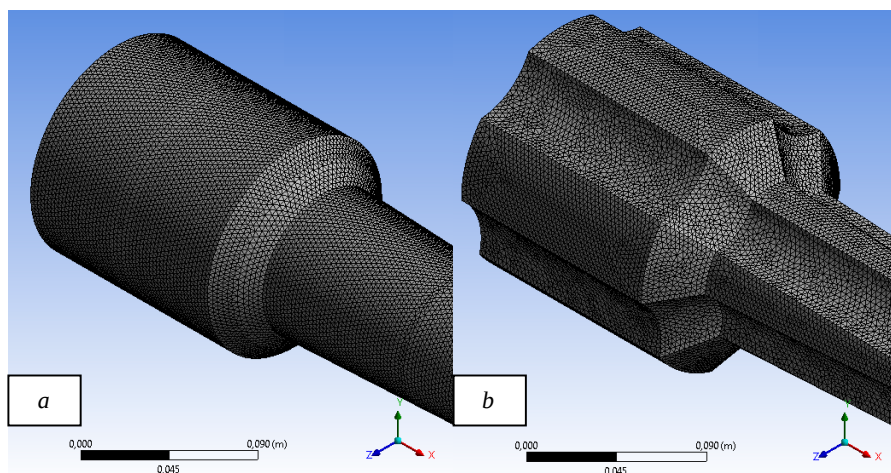


Рис. 3. Конечно-элементная сетка: *a* – классический ствол; *б* – ствол с ребрами жесткости  
Fig. 3. Finite element mesh for the: (a) classical barrel and (b) barrel with stiffeners

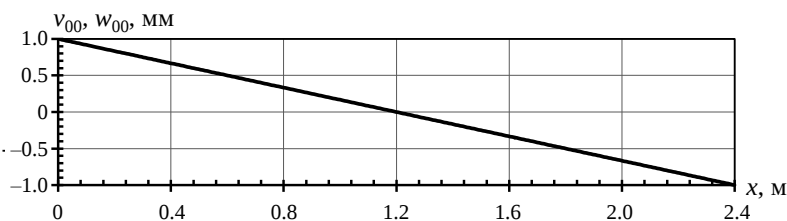


Рис. 4. Технологические отклонения линии центров канала ствола  
Fig. 4. Manufacturing tolerance of a barrel center line

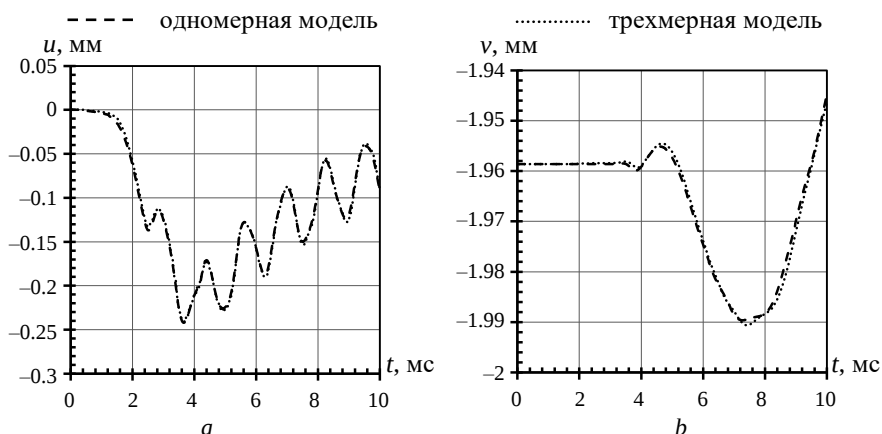


Рис. 5. Сравнение решений задачи колебаний классического ствола по одномерной и трехмерной моделям без учета теплового нагружения: *a* – продольные колебания; *б* – поперечные колебания в вертикальной плоскости  
Fig. 5. Comparison of solutions to the classical barrel vibration problem using the one- and three-dimensional models without thermal loading: (a) longitudinal and (b) vertical vibrations

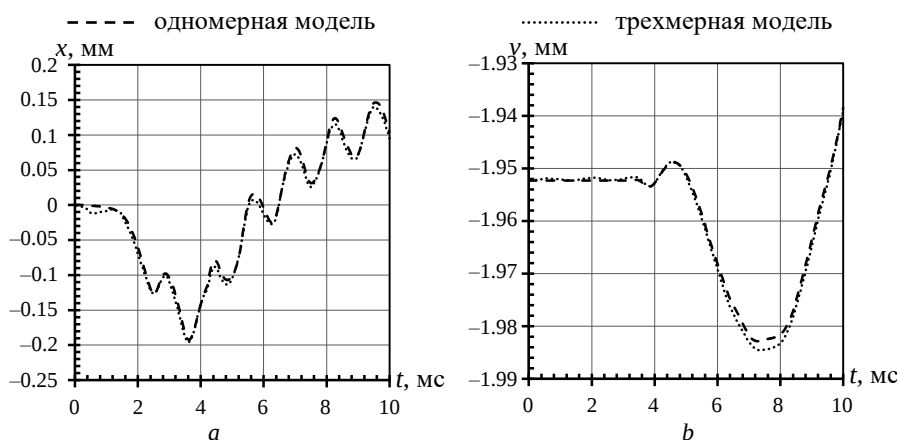
Сравнение решений производилось на основе вычисления максимальных отклонений по формуле

$$\varepsilon = \frac{\max_i |y_O(t_i) - y_A(t_i)|}{\max_i (y_A(t_i)) - \min_i (y_A(t_i))} \cdot 100\%, \quad (20)$$

где  $y_O(t_i)$  – значения перемещений на дульном срезе, вычисленных по одномерной модели в момент времени  $t_i$ ;  $y_A(t_i)$  – значение решения на дульном срезе по трехмерной модели в ANSYS в момент времени  $t_i$ .

Для классического ствола отклонения, определяемые по формуле (20), составили 2,9 и 3,8% для продольных и поперечных колебаний в вертикальной плоскости соответственно.

Сравнение продольных и поперечных колебаний для классического ствола с учетом теплового нагружения представлено на рис. 6.



**Рис. 6.** Сравнение решений задачи колебаний классического ствола по одномерной и трехмерной моделям с учетом теплового нагружения: *a* – продольные колебания; *б* – поперечные колебания в вертикальной плоскости

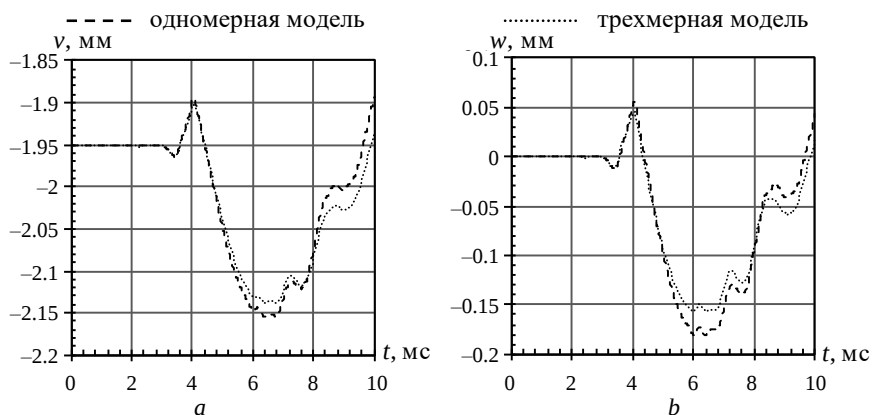
**Fig. 6.** Comparison of solutions to the classical barrel vibration problem using the one- and three-dimensional models with thermal loading: (a) longitudinal and (b) vertical vibrations

Максимальные отклонения решений с учетом теплового нагружения составили 3,3 и 4,3% для продольных и поперечных колебаний в вертикальной плоскости соответственно. Как видим, учет теплового нагружения на расхождение результатов влияет незначительно.

Сравнение поперечных колебаний в вертикальной и горизонтальной плоскостях для ствола с технологическими отклонениями без учета теплового нагружения представлено на рис. 7.

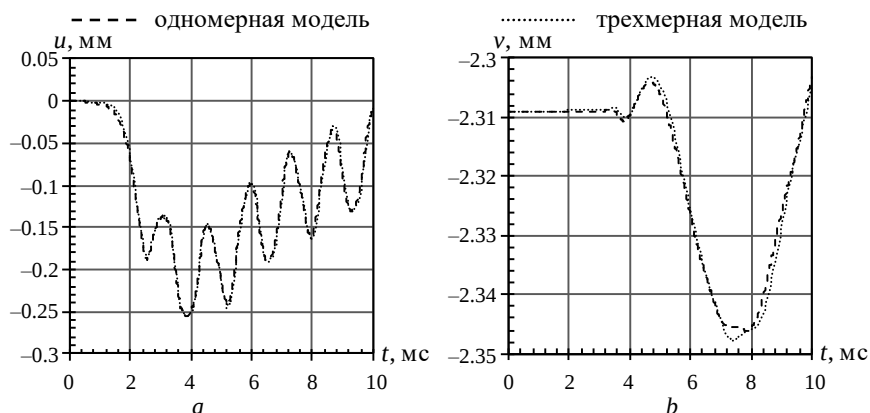
В данном случае максимальные отклонения решений составили 12,5 и 12,1% для поперечных колебаний в вертикальных и горизонтальных плоскостях соответственно.

Сравнение продольных и поперечных колебаний в вертикальной плоскости для ствола с ребрами жесткости представлено на рис. 8.



**Рис. 7.** Сравнение решений задачи поперечных колебаний классического ствола с технологическими отклонениями по одномерной и трехмерной моделям:  $a$  – в вертикальной плоскости;  $b$  – в горизонтальной плоскости

**Fig. 7.** Comparison of solutions to the problem of transverse vibrations of the classical barrel with manufacturing tolerance using the one- and three-dimensional models in: (a) vertical and (b) horizontal planes



**Рис. 8.** Сравнение решения задачи колебаний ствола с ребрами жесткости по одномерной и трехмерной моделям:  $a$  – продольные колебания;  $b$  – поперечные колебания в вертикальной плоскости

**Fig. 8.** Comparison of solutions to the barrel vibration problem with stiffeners using the one- and three-dimensional models: (a) longitudinal and (b) vertical vibrations

Максимальные отклонения решений с учетом ребер жесткости составили 4,5 и 8,6% для продольных и поперечных колебаний в вертикальной плоскости соответственно.

Полученные результаты показывают, что одномерная модель с достаточно высокой точностью описывает колебания ствола в процессе выстрела при сравнении решений с трехмерной моделью. При этом одномерное приближение позволяет получать результаты моделирования в сжатые сроки, что имеет важное значение при моделировании процесса стрельбы очередями, а также при решении оптимизационных задач.

## Заключение

В работе представлены результаты верификации компьютерной одномерной модели продольно-поперечных колебаний ствола при неравномерном тепловом и силовом нагружении пороховых газов на основе сравнения результатов моделирования с решением, полученным по трехмерной модели.

Проведена верификация одномерной модели продольно-поперечных колебаний ствола артиллерийского орудия при выстреле с учетом динамики и распределения давления по длине ствола, теплового нагружения, технологических отклонений оси канала ствола и наличия ребер жесткости. Показано, что отклонения решений, полученных по одномерной и трехмерной моделям, варьируют в пределах от 2,9% для классического ствола до 12,5% для классического ствола с учетом технологических отклонений оси канала ствола.

Использование одномерной модели позволяет на несколько порядков сократить время моделирования напряженно-деформированного состояния ствола при выстреле. Это открывает возможность за приемлемое время решать более сложные задачи, которые описывают процессы, существенно превышающие длительность одиночного выстрела, например стрельба из автоматической пушки очередями и задача оптимизации геометрической формы ствола.

## Список источников

1. Сальников А.В., Французов М.С., Виноградов К.А., Пятунин К.Р., Никулин А.С. Верификация и валидация компьютерных моделей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2022. № 9 (750). С. 100–115. doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-100-115
2. American Society of Mechanical Engineers. Standard for Verification and validation in computational solid mechanics. ASME V&V 10–2019. 2020. 44 p.
3. Schwer L.E. Verification and validation in computational solid mechanics and the ASME Standards Committee // Fluid Structure Interaction and Moving Boundary Problems. 2005. V. 84. P. 109–117. doi: 10.2495/FSI050111
4. American Society of Mechanical Engineers. An illustration of the concepts of verification and validation in computational solid mechanics. ASME V&V 10.1–2012. 2012. 23 p.
5. ГОСТ Р 57700.37–2021. Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения. М. : Рос. ин-т стандартизации, 2021. 16 с.
6. Хоменко Ю.П., Иценко А.Н., Касимов В.З. Математическое моделирование внутрибаллистических процессов в ствольных системах. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 1999. 256 с.
7. Русяк И.Г., Суфиянов В.Г., Клюкин Д.А. Одномерная математическая модель колебаний ствола с поперечным сечением произвольной формы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 133–146. doi: 10.17223/19988621/80/12
8. Игнатов А.В., Богомолов С.Н., Федянин Н.Д. Метод расчета свободных поперечных колебаний ствола автоматической пушки при заданном условии закрепления // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 11, ч. 2. С. 70–77.
9. Zheng J., Teng H., Li F. Modeling and Simulation of Gun Barrel's Lateral Vibration // International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering. Wuhan, China. 2009. P. 1–4. doi: 10.1109/CISE.2009.5363267
10. Su Z.T., Xu D., Li X.W., Han Z.F. Finite-element time-history analysis for dynamic response of small-caliber guns with projectile-barrel coupling // Journal of Vibration and Shock. 2012. V. 31 (23). P. 104–108.

11. Esen I. Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation // *Math. Comput.* 2011. V. 16 (4). P. 171–182. doi: 10.3390/mca16010171
12. Cifuentes A.O. Dynamic response of a beam excited by a moving mass // *Finite Element Analysis*. V. 5 (3). 1989. P. 237–246. doi: 10.1016/j.dt.2019.07.018
13. Chaturvedi E. Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for T-finned machine gun barrels // *Defence Technology*. 2020. V. 16, is. 2. P. 460–469. doi: 10.1016/j.dt.2019.07.018
14. He H., Zhang X. A Variable-Rate Firing Optimization of Launcher Based on Particle Swarm Optimization // *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 2019. V. 44 (5). P. 647–653. doi: 10.1002/prep.201800364
15. Karahan F., Pakdemirli M. Vibration analysis of a beam on a nonlinear elastic foundation // *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. V. 62 (2). P. 171–178. doi: 10.12989/sem.2017.62.2.171
16. Суфиянов В.Г., Русяк И.Г., Клюкин Д.А. Математическое моделирование колебаний ствола с учетом технологических отклонений при стрельбе очередями // *Фундаментальные основы баллистического проектирования / под ред. Б.Э. Кэрта*. СПб. : БГТУ «Военмех», 2022. С. 90–97. doi: 10.53403/9785951505071\_2022\_386
17. Клюкин Д.А. Математическое моделирование теплового нагружения ствола артиллерийского орудия при выстреле // *Выставка инноваций – 2022 (весенняя сессия) : сб. материалов XXXIII Республ. выставки-сессии студенческих инновационных проектов, Ижевск, 29 апреля 2022 г. Ижевск : Ижевск. гос. техн. ун-т им. М.Т. Калашникова, 2022. С. 176–182. doi: 10.22213/ie022124*
18. Работнов Ю.Н. Сопrotivление материалов. М. : Физматгиз, 1963. 456 с.
19. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 553 с.
20. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М. : Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
21. Русяк И.Г., Тенев В.А. Моделирование баллистики артиллерийского выстрела с учетом пространственного распределения параметров и противодействия // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2020. Т. 12, № 5. С. 1123–1147. doi: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147
22. Липанов А.М., Русяк И.Г., Суфиянов В.Г. Исследование влияния колебаний ствола на угол вылета снаряда при выстреле // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 68. С. 80–94. doi: 10.17223/19988621/68/8

## References

1. Sal'nikov A.V., Frantsuzov M.S., Vinogradov K.A., Pyatunin K.R., Nikulin A.S. (2022) Verifikatsiya i validatsiya komp'yuternykh modeley [Digital simulation verification and validation]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye – BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 9(750). pp. 100–115. doi: 10.18698/0536-1044-2022-9-100-115
2. ASME V&V 10-2019 (2020) *Standard for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*.
3. Schwer L.E. (2005) Verification and validation in computational solid mechanics and the ASME Standards Committee. *Fluid Structure Interaction and Moving Boundary Problems*. 84. pp. 109–117. doi: 10.2495/FSI050111
4. ASME V&V 10.1-2012 (2012) *An Illustration of the Concepts of Verification and Validation in Computational Solid Mechanics*.
5. GOST R 57700.37-2021 (2021) *Komp'yuternye modeli i modelirovaniye. Tsifrovyye dvoyniki izdeliy. Obshchyye polozheniya* [Computer models and modeling. Digital twins of products. General requirements].
6. Homenko Yu.P., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z. (1999) *Matematicheskoye modelirovaniye vnutriballisticheskikh protsessov v stvol'nykh sistemakh* [Mathematical modeling of intra-ballistic processes in barrel systems]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.

7. Rusyak I.G., Sufiyarov V.G., Klyukin D.A. (2022) Odnomernaya matematicheskaya model' kolebaniy stvola s poperechnym secheniem proizvol'noy formy [A one-dimensional mathematical model of barrel vibrations with arbitrary cross-sectional shapes]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 133–146. doi: 10.17223/19988621/80/12
8. Ignatov A.V., Bogomolov S.N., Fedyanin N.D. (2017) Metod rascheta svobodnykh poperechnykh kolebaniy stvola avtomaticheskoy pushki pri zadannom uslovii zakrepleniya [Calculation of free cross fluctuations of a barrel of the automatic gun under the specified conditions]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Proceedings of Tula State University. Technical Sciences*. 11(2). pp. 70–77.
9. Zheng J., Teng H., Li F. (2009) Modeling and simulation of gun barrel's lateral vibration. *International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering*. pp. 1–4. doi: 10.1109/CISE.2009.5363267
10. Su Z. T., Xu D., Li X. W., Han Z.F. (2012) Finite-element time-history analysis for dynamic response of small-caliber guns with projectile-barrel coupling. *Journal of Vibration and Shock*. 31(23). pp. 104–108.
11. Esen I. (2011) Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation. *Mathematical and Computational Applications*. 16(4). pp. 171–182. doi: 10.3390/mca16010171
12. Cifuentes A.O. (1989) Dynamic response of a beam excited by a moving mass. *Finite Element Analysis*. 5(3). pp. 237–246. doi: 10.1016/0168-874X(89)90046-2
13. Chaturvedi E. (2020) Numerical investigation of dynamic interaction with projectile and harmonic behaviour for T-finned machine gun barrels. *Defence Technology*. 16(2). pp. 460–469. doi: 10.1016/j.dt.2019.07.018
14. He H., Zhang X. (2019) A variable-rate firing optimization of launcher based on particle swarm optimization. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 44(5). pp. 647–653. doi: 10.1002/prep.201800364
15. Karahan F., Pakdemirli M. (2017) Vibration analysis of a beam on a nonlinear elastic foundation. *Structural Engineering and Mechanics*. 62(2). pp. 171–178. doi: 10.12989/sem.2017.62.2.171
16. Sufiyarov V.G., Rusyak I.G., Klyukin D.A. (2022) Matematicheskoe modelirovanie kolebaniy stvola s uchetyom tekhnologicheskikh otkloneniy pri strel'be ocherednymi [Mathematical modeling of barrel vibrations with regard to heat exchange in serial fire]. *Fundamental'nye osnovy ballisticheskogo proektirovaniya*. pp. 90–97. doi: 10.53403/9785951505071\_2022\_386
17. Klyukin D.A. (2022) Matematicheskoe modelirovanie teplovogo nagruzheniya stvola artilleriyskogo orudiya pri vystrele [Mathematical modeling of thermal loading of an artillery gun barrel during firing]. *Vystavka innovatsiy – 2022 (vesennyya sessiya) – Innovation Exhibition – 2022 (Spring Session)*. Izhevsk. pp. 176–182. doi: 10.22213/ie022124
18. Rabotnov Yu.N. (1963) *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow: Fizmatgiz.
19. Samarskiy A.A. (1971) *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka.
20. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. (2003) *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational heat transfer]. Moscow: Editorial URSS.
21. Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2020) Modelirovanie ballistiki artilleriyskogo vystrela s uchetyom prostranstvennogo raspredeleniya parametrov i protivodavleniya [Modeling of ballistics of an artillery shot taking into account the spatial distribution of parameters and backpressure]. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*. 12(5). pp. 1123–1147. doi: 10.20537/2076-7633-2020-12-5-1123-1147
22. Lipanov A.M., Rusyak I.G., Sufiyarov V.G. (2020) Issledovanie vliyaniya kolebaniy stvola na ugol vyleta snaryada pri vystrele [Study on the effects of gun barrel vibrations on the firing angle of a projectile]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 80–94. doi: 10.17223/19988621/68/8

**Сведения об авторах:**

**Клюкин Даниил Анатольевич** – аспирант, инженер-программист 1-й категории, ассистент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: anatoliikljukin@mail.ru

**Русяк Иван Григорьевич** – доктор технических наук, профессор, действительный член Российской академии ракетных и артиллерийских наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: primat@istu.ru

**Суфиянов Вадим Гарайханович** – доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова (Ижевск, Россия). E-mail: vsufiy@mail.ru

**Information about the authors:**

**Klyukin Daniil A.** (Software Engineer, Assistant of Department “Applied Mathematics and Information Technology”, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: anatoliikljukin@mail.ru

**Rusyak Ivan G.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Full Member of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences, Head of Department “Applied Mathematics and Information Technology”, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: primat@istu.ru

**Sufiyanov Vadim G.** (Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Department “Applied Mathematics and Information Technology”, Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk, Russian Federation). E-mail: vsufiy@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 07.08.2023; принята к публикации 04.12.2023*

*The article was submitted 07.08.2023; accepted for publication 04.12.2023*