

Научная статья

УДК 536.46

doi: 10.17223/19988621/86/8

Модель нестационарного горения твердых топлив с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения

Сергей Александрович Рашковский

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва, Россия;*

Томский государственный университет, Томск, Россия, rash@ipmnet.ru

Аннотация. Рассмотрено нестационарное горение твердых топлив, горящих с образованием конденсированных продуктов, способных накапливаться на поверхности горения в виде каркасного слоя. Модель учитывает тепловую инерционность каркасного слоя и изменение его массы в процессе нестационарного горения. Показано, что при нестационарном горении таких топлив мгновенный состав продуктов (газообразных и конденсированных), покидающих поверхность горения, будет изменяться и отличаться от состава продуктов, покидающих поверхность горения при стационарном горении, а значит, отличаться от исходного состава топлива. Этот новый эффект, ранее не описанный в литературе, может приводить к дополнительной дестабилизации процесса в камере сгорания РДТТ и развитию акустической неустойчивости. В рамках разработанной модели нестационарного горения определена составляющая акустической проводимости зоны горения твердого топлива, связанная с новым эффектом.

Ключевые слова: смесевое твердое ракетное топливо, нестационарное горение, конденсированные продукты сгорания, каркасный слой, агломерация, неоднородность продуктов сгорания, математическое моделирование

Благодарности: Работа выполнена за счет гранта РФ (проект № 21-19-00541).

Для цитирования: Рашковский С.А. Модель нестационарного горения твердых топлив с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 104–119. doi: 10.17223/19988621/86/8

Original article

Model of non-stationary combustion of solid energetic materials with accumulation of condensed products on the burning surface

Sergey A. Rashkovskiy

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, rash@ipmnet.ru

Abstract. The unsteady combustion of solid propellants with the formation of condensed products accumulating on the burning surface in the form of a skeleton layer is considered. The model of the process takes into account the thermal inertia of the skeleton layer and the variation in its mass when burning. It is shown that during the unsteady combustion of such propellants, the instantaneous composition of both gaseous and condensed products leaving the burning surface changes and becomes different from that during the stationary combustion; thus, it differs from the initial composition of the propellant. This new effect, which was not previously described in the literature, can lead to additional destabilization of the process in a solid propellant rocket motor combustion chamber and to the development of acoustic instability. Within the framework of the presented model of unsteady combustion, the component of the acoustic conductivity of the solid propellant burning zone associated with the new effect is determined.

Keywords: composite solid propellant, unsteady combustion, condensed combustion products, skeleton layer, agglomeration, inhomogeneity of combustion products, mathematical modeling

Acknowledgments: This work was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 21-19-00541).

For citation: Rashkovskiy, S.A. (2023) Model of non-stationary combustion of solid energetic materials with accumulation of condensed products on the burning surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 104–119. doi: 10.17223/19988621/86/8

Введение

Одной из наиболее сложных проблем в теории горения конденсированных энергетических материалов (твердых ракетных топлив и порохов) является проблема нестационарного горения, которая в полной мере не решена до настоящего времени. Нестационарное горение проявляется во многих быстропротекающих процессах, таких как выход двигателя на режим, спад давления в конце работы двигателя, акустическая неустойчивость, низкочастотная неустойчивость и др.

Проблема нестационарного горения твердых топлив (ТРТ) осложняется тем, что реальные ТРТ являются смесевыми, и нестационарное горение каждого их компонента сопровождается взаимодействием компонентов через конденсированную и газовую фазы. Большую роль в нестационарном горении играет гетеро-

генность ТРТ, которая в настоящее время практически не учитывается. Дополнительную неопределенность теории нестационарного горения придает сложная кинетика химических процессов в конденсированной и газовой фазах, что характерно, впрочем, и для стационарного горения. По этой причине при анализе нестационарного горения ТРТ (как смесевых, так и квазигомогенных) обычно используются одномерные модели с упрощенной (одно-двухстадийной) кинетикой. В настоящее время существует два основных подхода к моделированию нестационарного горения ТРТ: FM-модель [1], в которой рассматривается одномерная тепловая задача с некоторой выбранной брутто кинетикой в конденсированной и газовой фазах, и феноменологическая теория нестационарного горения, основу которой составляет теория Зельдовича–Новожилова [2, 3]. Подробный обзор существующих моделей нестационарного горения ТРТ можно найти в работах [1, 4].

Высокоэнергетические смесевые ТРТ обычно содержат в своем составе порошкообразное горючее (главным образом алюминий или бор). Горение таких ТРТ сопровождается сложными гетерогенными процессами на поверхности горения, приводящими к образованию каркасного слоя (КС), состоящего из слипшихся частиц порошкообразного горючего, который периодически диспергируется с образованием агломератов. Агломерация и КС существенно влияют на тепловой баланс на поверхности горения и, следовательно, на стационарное и нестационарное горение ТРТ. Вместе с тем в литературе практически не рассматривались модели нестационарного горения ТРТ, учитывающие накопление конденсированных продуктов на поверхности горения и агломерацию частиц в КС. В настоящее время известна только одна работа в этом направлении [5], в которой не учитывается тепловая инерционность КС.

Цель данной работы – разработка модели нестационарного горения смесевых металлизированных ТРТ с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения, обобщающей модель [5] и учитывающей тепловую инерционность КС.

Модель горения

Как и в большинстве моделей нестационарного горения, будем рассматривать одномерную модель (рис. 1).

Под поверхностью горения мы будем понимать границу, разделяющую к-фазу ТРТ и КС, образующийся после разложения летучих компонентов ТРТ (граница 4 на рис. 1). Таким образом, считается, что поверхность горения ТРТ – это поверхность газификации его компонентов, на которой происходит полное разложение таких компонентов ТРТ, как перхлорат аммония, октоген и т.п., а также активного связующего или унос летучих компонентов неактивного связующего, которые уносятся в окружающее пространство, а оставшаяся часть представляет собой конденсированные продукты (КПС – спекшиеся частицы, агломераты, конгломераты и т.п.), остающиеся на поверхности горения в виде пористого КС. Под линейной скоростью горения u будем понимать скорость перемещения поверхности горения в указанном выше смысле. Для ТРТ, горящих без образования КС, введенные выше понятия поверхности горения и скорости горения переходят в традиционные.

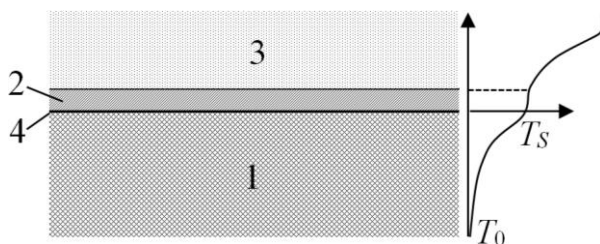


Рис. 1. Условная схема горящего ТРТ с накоплением компонентов на поверхности горения: 1 – твердое топливо; 2 – каркасный слой (агломераты частиц алюминия, бора и т.п., а также продукты неполного разложения компонентов ТРТ, главным образом углерод); 3 – газовое пламя; 4 – поверхность горения. Справа показан температурный профиль

Fig. 1. Scheme of the burning propellant with components accumulating on the burning surface: (1) solid propellant; (2) skeleton layer (agglomerates of aluminum, boron, and other particles and the products of incomplete decomposition of solid propellant components, mainly carbon); (3) gas flame; and (4) burning surface. The temperature profile is shown on the right side

Из общих соображений, аналогичных тем, что используются в феноменологической теории нестационарного горения [2, 3], для скорости горения можно записать выражение

$$u = u(p, \varphi, T_s) \quad (1)$$

где градиент температуры в к-фазе ТРТ у поверхности горения

$$\varphi = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_s \quad (2)$$

Считается, что зависимость (1) является универсальной, т.е. справедлива как для стационарного, так и для нестационарного горения ТРТ. Здесь аргумент φ в зависимости (1) позволяет описать тепловую инерционность к-фазы твердого топлива и ее влияние на скорость горения.

Учитывая, что КС состоит главным образом из спекшихся частиц алюминия или бора и их агломератов, коэффициент теплопроводности которых существенно выше коэффициента теплопроводности к-фазы ТРТ, будем пренебрегать градиентом температуры поперек КС. Более того, будем считать, что температура КС совпадает с температурой поверхности горения T_s .

Учитывая это, запишем законы сохранения энергии и массы для КС в виде:

$$\frac{d}{dt} (M_l c_l T_s) = -\lambda_s \varphi + \zeta_s \gamma u c_l T_s - \dot{m}_d c_l T_s + (1 - \zeta_s) \gamma u Q_g + \dot{m}_g Q_l + M_l Q_r + q_g, \quad (3)$$

$$\frac{dM_l}{dt} = \zeta_s \gamma u - \dot{m}_d - \dot{m}_g, \quad (4)$$

где первый член в правой части уравнения (3) описывает тепловой поток из КС в к-фазу ТРТ; c_l – удельная теплоемкость КС; λ_s – теплопроводность к-фазы ТРТ вблизи поверхности горения; M_l – масса КС (в расчете на единицу площади поверхности горения); γ – плотность ТРТ; $\dot{m}_d$ – массовая скорость уноса КС с поверхности горения (за счет механического отрыва отдельных его элементов – агломератов и конгломератов) в расчете на единицу площади поверхности горения; $\dot{m}_g$ – массовая скорость газификации КС (масса газообразных продуктов,

образующихся за счет газификации элементов КС в единицу времени в расчете на единицу площади поверхности горения ТРТ), например за счет горения частиц алюминия или бора либо испарения оксида бора в КС; ζ_s – массовая доля конденсированных продуктов сгорания ТРТ, остающихся на поверхности горения в виде КС; q_g – тепловой поток (кондуктивный, конвективный и радиационный), поступающий в КС из газовой фазы (от продуктов сгорания над КС и газообразных продуктов сгорания, фильтрующихся через КС); Q_g – тепловой эффект газификации ТРТ на поверхности горения; Q_l – тепловой эффект газификации элементов КС; Q_r – количество тепла, выделяющееся в единице массы КС в единицу времени за счет к-фазных химических реакций, происходящих в КС.

Приближенно можно считать, что ζ_s равна массовой доле α_0 порошкообразного горючего (алюминия, бора и т.п.) в ТРТ:

$$\zeta_s = \alpha_0. \quad (5)$$

Уравнение (3) с учетом (4) запишем в виде:

$$M_l c_l \frac{dT_s}{dt} = -\lambda_s \varphi + (1 - \zeta_s) \gamma u Q_g + (c_l T_s + Q_l) \dot{m}_g + q_g + M_l Q_r. \quad (6)$$

Как и в теории [2, 3], будем считать, что к-фаза ТРТ является химически инертной, т.е. химические реакции протекают только в узком реакционном слое у поверхности горения и в КС. В этом случае уравнения (1), (4), (6) должны быть дополнены уравнением теплопроводности для к-фазы ТРТ

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7)$$

где a – температуропроводность к-фазы ТРТ, которая, как и в теории [2, 3], считается постоянной. Здесь выбрана система координат, связанная с поверхностью горения: $x = 0$ соответствует поверхности горения S (поверхность 4 на рис. 1); ось x направлена в сторону продуктов сгорания; область $x < 0$ соответствует к-фазе ТРТ. Уравнение (7) решается в области $x < 0$ с граничными условиями

$$T(t, -\infty) = T_0, T(t, 0) = T_s(t), \quad (8)$$

где T_0 – начальная температура ТРТ.

Система уравнений (1), (2), (4)–(8) является основой теории нестационарного горения ТРТ с учетом накопления конденсированных продуктов сгорания на поверхности горения и тепловой инерционности КС.

Массовая скорость горения ТРТ $\dot{m}$, т.е. масса продуктов сгорания (газообразных и конденсированных), поступающих в окружающую среду с единицы поверхности горения за единицу времени, складывается из массовой скорости образования газообразных продуктов горения $(1 - \zeta_s) \gamma u + \dot{m}_g$ и массы КПС, отрывающихся от КС за единицу времени в расчете на единицу площади поверхности горения ТРТ $\dot{m}_d$:

$$\dot{m} = (1 - \zeta_s) \gamma u + \dot{m}_g + \dot{m}_d. \quad (9)$$

При нестационарном горении именно эта скорость горения, а не γu , должна использоваться при проведении внутрибаллистических расчетов нестационарных процессов в различных энергетических установках.

Учитывая (4), соотношение (9) можно переписать в виде:

$$\dot{m} = \gamma u - \frac{dM_l}{dt}. \quad (10)$$

При стационарном горении $\frac{dM_l}{dt} = 0$ и, как следует из (10),

$$\dot{m} = \gamma u \quad (11)$$

Таким образом, строго говоря, массовая скорость горения ТРТ равна γu только при стационарном горении. Как следует из (10), если при нестационарном горении по каким-то причинам масса КС на поверхности горения не изменяется, то массовая скорость горения также будет определяться «стационарной» зависимостью (11).

Рассмотрим частные случаи.

А. При отсутствии КС (при отсутствии накопления КПС на поверхности горения) $M_l = 0$, $\zeta_s = 0$ и $\dot{m}_g = 0$, поэтому уравнение (6) принимает вид:

$$-\lambda_s \phi + \gamma u Q_g + q_g = 0. \quad (12)$$

Учитывая, что для безынерционной газовой фазы $q_g = q_g(p, T_s)$, из уравнения (12) формально получим

$$T_s = T_s(p, \phi, u). \quad (13)$$

Формальное решение системы уравнений (1) и (13) относительно u и T_s приводит к функциональным зависимостям

$$u = u(p, \phi), \quad T_s = T_s(p, \phi), \quad (14)$$

которые являются основой феноменологической теории нестационарного горения Зельдовича–Новожилова [2, 3]. Таким образом, теория (1), (2), (4)–(8) в пределе $M_l = 0$, $\zeta_s = 0$ и $\dot{m}_g = 0$ переходит в обычную феноменологическую теорию нестационарного горения Зельдовича–Новожилова [2, 3] для ТРТ, горящих без накопления КПС на поверхности горения.

В. Как следует из (3), чем больше масса КС, тем меньше изменяется его температура при изменении внешних условий. Для массивного КС, когда его масса существенно превышает массу прогретого слоя в к-фазе ТРТ, т.е. $M_l \gg \gamma a/u$,

можно пренебречь изменением температуры КС: $\frac{dT_s}{dt} \approx 0$. В этом случае рас-

сматриваемая теория переходит в первоначальную феноменологическую теорию нестационарного горения Я.Б. Зельдовича с постоянной температурой поверхности горения [2, 3].

С. Пренебрегая тепловой инерционностью КС, т.е. считая, что в уравнении (6) инерционный член в левой части $M_l c_l \frac{dT_s}{dt}$ существенно меньше правой части

(но при этом $\frac{dT_s}{dt} \neq 0$), получим

$$-\lambda_s \phi + (1 - \zeta_s) \gamma u Q_g + (c_l T_s + Q_l) \dot{m}_g + q_g + M_l Q_r = 0. \quad (15)$$

Отсюда формально получим

$$T_s = T_s(p, \phi, M_l, u). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (1), формально получим $u = u(p, \phi, M_l)$, т.е. теорию [5].

Таким образом, все известные теории нестационарного горения являются частными случаями рассматриваемой модели горения ТРТ с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения.

Рассматриваемую теорию нестационарного горения ТРТ с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения можно квалифицировать как «полуфеноменологическую», в которой «феноменологичность» связана с соотношением (1), в то время как температура поверхности горения (температура КС) и масса КС на поверхности горения могут быть рассчитаны по уравнениям (4) и (6) на основе частных моделей, например моделей агломерации частиц алюминия и бора на поверхности горения [6, 7].

Отметим, что уравнение (6) можно формально записать в виде:

$$M_l c_l \frac{dT_S}{dt} = -\lambda_s (\varphi - \Phi), \quad (17)$$

где

$$\lambda_s \Phi = (1 - \zeta_s) \gamma u Q_g + (c_l T_S + Q_l) \dot{m}_g + q_g + M_l Q_r, \quad (18)$$

при этом функция

$$\Phi = \Phi(T_S, p, u, M_l) \quad (19)$$

считается одинаковой как при стационарном, так и при нестационарном горении ТРТ.

Аналогично уравнение (4) можно записать в виде:

$$\frac{dM_l}{dt} = \zeta_s \gamma (u - U), \quad (20)$$

где

$$\zeta_s \gamma U = \dot{m}_d + \dot{m}_g, \quad (21)$$

при этом функция

$$U = U(T_S, p, u, M_l) \quad (22)$$

считается одинаковой как при стационарном, так и при нестационарном горении ТРТ.

Для стационарного горения ($\frac{dM_l}{dt} = 0$ и $\frac{dT_S}{dt} = 0$) из уравнений (17), (19), (20) и (22) с учетом (1) получим

$$\Phi(T_S^0, p, u^0, M_l^0) = \varphi^0, \quad (23)$$

$$U(T_S^0, p, u^0, M_l^0) = u(p, \varphi^0, T_S^0), \quad (24)$$

где верхний индекс «0» соответствует параметрам стационарного горения.

Кроме того, для стационарного горения имеет место соотношение [2, 3]

$$a\varphi^0 = u^0 (T_S^0 - T_0). \quad (25)$$

Для замыкания модели нестационарного горения ТРТ с накоплением конденсированных продуктов на поверхности горения ее необходимо дополнить моделями диспергирования и газификации КС, позволяющими рассчитать скорости $\dot{m}_d$ и $\dot{m}_g$.

В простейшем случае можно пренебречь скоростью газификации КС и считать

$$\dot{m}_g = 0. \quad (26)$$

Это допущение фактически означает, что КС не содержит газифицирующихся компонентов и состоит главным образом из частиц порошкообразных компонен-

тов ТРТ (алюминий, бор), которые, учитывая их малое время пребывания в КС, не успевают заметно прореагировать с газообразными продуктами разложения других компонентов ТРТ (например, с кислородом).

Для расчета массоприхода $\dot{m}_d$, связанного с диспергированием КС, строго говоря, необходимо использовать детальные модели поведения (механического, теплового и химического) отдельных элементов КС с учетом их взаимодействия друг с другом и с газообразными продуктами разложения компонентов ТРТ, оттекающих от поверхности горения, например модели [6, 7]. Однако, учитывая феноменологический характер разрабатываемой модели нестационарного горения, не имеет смысла использовать столь сложные модели агломерации. Поэтому рассмотрим упрощенную модель диспергирования КС, предполагая, что

$$\dot{m}_d = \psi M_l, \quad (27)$$

где $\psi > 0$ – некоторый параметр. Смысл соотношения (27) очевиден: чем больше масса КС, тем быстрее в среднем происходит его диспергирование, так как на более толстый КС действует большая отрывающая сила.

Тогда уравнение (4) с учетом (5), (26) и (27) принимает вид:

$$\frac{dM_l}{dt} = \alpha_0 \gamma u - \psi M_l. \quad (28)$$

При стационарном горении получим (верхний индекс «0» соответствует стационарному горению)

$$\alpha_0 \gamma u^0 = \psi^0 M_l^0. \quad (29)$$

С помощью специальных, хотя и непростых экспериментов, аналогичных [8], можно определить зависимость $M_l^0(p, T_0)$. Учитывая общую логику процессов, происходящих в КС (см.: [6, 7]), можно ожидать, что масса КС M_l будет зависеть не отдельно от давления p и начальной температуры топлива T_0 , а от скорости горения: $M_l^0 = M_l^0(u^0)$.

Тогда из уравнения (29) можно найти параметр ψ^0 , который также будет функцией только скорости горения

$$\psi^0(u^0) = \alpha_0 \gamma u^0 / M_l^0(u^0). \quad (30)$$

Далее будем считать, что зависимость $\psi(u)$ является универсальной и справедлива как при стационарном, так и при нестационарном горении:

$$\psi(u) = \psi^0(u). \quad (31)$$

Тогда уравнение (28) принимает вид:

$$\frac{dM_l}{dt} = \alpha_0 \gamma u - \psi(u) M_l. \quad (32)$$

Формальное решение уравнения (32) с начальным условием $M_l(0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} M_l = M_l(0) \exp \left(- \int_0^t \psi(u(\tau)) d\tau \right) + \\ + \alpha_0 \gamma \int_0^t u(\tau) \exp \left(- \int_\tau^t \psi(u(\theta)) d\theta \right) d\tau. \end{aligned} \quad (33)$$

При этом массоприход $\dot{m}_d$ определяется соотношениями (27), (31) и (33).

Акустическая проводимость зоны горения твердого топлива

Одной из наиболее сложных и до конца не решенных проблем в теории ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) является проблема акустической неустойчивости: возникновение самоподдерживающихся колебаний давления на одной из собственных частот камеры сгорания РДТТ. Причиной акустической неустойчивости является резонанс между собственными колебаниями скорости горения ТРТ и акустическими колебаниями его продуктов сгорания в камере сгорания, т.е. возникновение положительной обратной связи между акустическими колебаниями давления и вызванными ими колебаниями скорости горения.

Несмотря на давнюю историю исследований акустической неустойчивости в РДТТ [9], в настоящее время не до конца понятен механизм возникновения указанной положительной обратной связи между акустическими колебаниями давления в камере сгорания и колебаниями скорости горения. Более того, не до конца ясна роль в этом процессе КПС, образующихся при горении металлизированных ТРТ. До недавнего времени считалось, что роль КПС сводится только к демпфированию колебаний в камере сгорания [9] за счет механического и теплового отставания частиц к-фазы от газовой фазы. Однако относительно недавно в работе [10] в результате численного моделирования было показано, что КПС, в частности агломераты частиц алюминия, отрывающиеся от поверхности горения, могут играть также и дестабилизирующую роль, вызывая термоакустическую неустойчивость за счет инерционности их горения. Хотя эффект, описанный в [10], является слабым (амплитуда связанных с ним акустических колебаний в камере сгорания РДТТ составляет менее 0.5%), он в сочетании с другими эффектами может приводить к потере устойчивости процесса.

Используя рассмотренную выше модель нестационарного горения ТРТ с накоплением КПС на поверхности горения, покажем, что существует еще один механизм возникновения акустической неустойчивости в РДТТ, который не был ранее описан в литературе и который может вносить гораздо больший вклад в акустическую неустойчивость в РДТТ, чем эффект, обнаруженный в [10].

Как известно [2], реакция горящего ТРТ на падающую на его поверхность акустическую волну характеризуется акустической проводимостью зоны горения ТРТ

$$\zeta = -\rho_0 c_0 \Delta v / \Delta p, \quad (34)$$

которая связана с отношением комплексных амплитуд отраженной и падающей акустических волн соотношением

$$\sigma_a = (1 - \zeta) / (1 + \zeta), \quad (35)$$

где ρ_0 и c_0 – средняя плотность газа и скорость звука в камере сгорания; Δv и Δp – комплексные амплитуды колебаний скорости продуктов сгорания, оттекающих от поверхности горения, и давления. Усиление акустической волны при отражении от поверхности горящего ТРТ ($|\sigma_a| > 1$) происходит при условии

$$\operatorname{Re} \zeta < 0, \quad (36)$$

что является необходимым условием для возникновения акустической неустойчивости в РДТТ.

При расчете акустической проводимости зоны горения ТРТ скорость v продуктов сгорания должна определяться на расстоянии от поверхности горения, где полностью завершилось горение наиболее медленно горящих компонентов. Для

металлизированных ТРТ (например, содержащих алюминий или бор) это расстояние определяется временем сгорания частиц КПС (например, алюминия или бора), покидающих поверхность горения. Согласно оценкам [10] полное сгорание частиц КПС (агломератов) происходит на расстоянии 10–50 мм от поверхности горения. Это расстояние будем обозначать L_p , а слой продуктов сгорания, имеющий толщину L_p над поверхностью горения, будем называть зоной горения ТРТ.

Интегрируя уравнение неразрывности для продуктов горения ТРТ по толщине зоны горения получим

$$(\rho v)_p = (\rho v)_l - \frac{dM_p}{dt} \quad (37)$$

где индекс « l » относится к верхней границе КС, с которой происходит унос частиц КПС в зону горения, индекс « p » – к верхней границе зоны горения; M_p – масса продуктов сгорания, находящихся в зоне горения.

Учитывая, что нас интересуют малые колебания, в линейном приближении колебания различных параметров могут быть рассмотрены независимо. По этой причине при описании интересующего нас эффекта мы будем пренебрегать отставанием частиц k -фазы от газовой фазы, считая, что они имеют одинаковую скорость и находятся в термодинамическом равновесии.

Очевидно,

$$M_p = \int_{t-t_p}^t \dot{m}(t') dt', \quad (38)$$

где $\dot{m}(t)$ – мгновенная массовая скорость горения ТРТ, t_p – время сгорания наиболее крупных частиц КПС, вылетающих с поверхности горения. Отметим, что при нестационарном горении длительность t_p является функцией времени, т.е. t_p – это длительность горения самых крупных частиц КПС, которые полностью сгорели в момент t (соответственно, их отрыв от КС и начало горения произошли в момент времени $t - t_p$).

Дифференцируя (38) по времени, получим

$$\frac{dM_p}{dt} = \dot{m}(t) - \dot{m}(t - t_p) \left(1 - \frac{dt_p}{dt} \right). \quad (39)$$

Здесь учтено, что время сгорания частиц t_p в разные моменты времени может быть разным за счет колебаний давления, температуры и скорости горения частиц.

Подставляя (39) в (37), получим

$$(\rho v)_p = (\rho v)_l - \dot{m}(t) + \dot{m}(t - t_p) \left(1 - \frac{dt_p}{dt} \right). \quad (40)$$

Учитывая, что по определению $(\rho v)_l = \dot{m}(t)$, получим

$$(\rho v)_p = \dot{m}(t - t_p) \left(1 - \frac{dt_p}{dt} \right), \quad (41)$$

или

$$v_p = \frac{1}{\rho_p} \left(1 - \frac{dt_p}{dt} \right) \dot{m}(t - t_p), \quad (42)$$

где v_p и ρ_p – скорость продуктов сгорания и их плотность на верхней границе зоны горения (т.е. на расстоянии L_p от верхней границы КС).

Обозначим v_0 , ρ_0 , $\rho_0 v_0 \equiv \dot{m}_0 = \gamma u^0$ и t_0 – скорость продуктов сгорания, их плотность в сечении L_p , массовая скорость горения ТРТ и время сгорания наиболее крупных частиц КПС при стационарном процессе в камере сгорания (или при среднем давлении, если происходят колебания давления).

Тогда из (42) получим

$$\frac{\Delta v_p}{v_0} = -\frac{\Delta \rho_p}{\rho_0} + \frac{\Delta \dot{m}(t-t_0)}{\dot{m}_0} - \frac{1}{\dot{m}_0} \frac{d\dot{m}(t-t_0)}{dt} \Delta t_p - \frac{dt_p}{dt}, \quad (43)$$

где

$$\Delta v_p = v_p - v_0, \quad \Delta \rho_p = \rho_p - \rho_0, \quad \Delta \dot{m} = \dot{m} - \dot{m}_0, \quad \Delta t_p = t_p - t_0. \quad (44)$$

Согласно (10),

$$\Delta \dot{m} = \gamma \Delta u - \frac{dM_l}{dt}. \quad (45)$$

Рассмотрим отдельные члены в правой части (43).

Первый член соответствует колебаниям плотности продуктов сгорания при колебаниях давления в камере сгорания. При вычислении ρ_p , а значит, и $\Delta \rho_p$ необходимо иметь в виду, что плотность продуктов сгорания зависит от их состава и давления (здесь и далее предполагается, что между газовой фазой и КПС в каждый момент времени устанавливается термодинамическое равновесие; отклонение от термодинамического равновесия в рамках рассматриваемой здесь линейной теории, как уже было указано, может быть учтено независимо). Иными словами, плотность данной порции продуктов сгорания определяется давлением и тем, в каких пропорциях в нее изначально вошли газообразные продукты разложения ТРТ, газифицирующиеся на поверхности горения, и КПС.

Таким образом, можно записать

$$\rho_p = \rho_p(p, \alpha), \quad (46)$$

где α – массовая доля КПС в рассматриваемой порции продуктов сгорания, которая вошла в нее в момент ее формирования (т.е. в момент выхода продуктов сгорания из КС). В рассматриваемом приближении зависимость (46) можно получить термодинамическим расчетом при разных p и разных α , рассматривая составы с разным содержанием, например, алюминия или бора при постоянном соотношении остальных (т.е. газифицирующихся на поверхности горения) компонентов ТРТ: ПХА, октогена, связующего и т.п. Отметим, что в действительности за счет эффектов нестационарного горения мгновенное массовое соотношение газообразных продуктов разложения разных компонентов ТРТ, покидающих поверхность горения, также может изменяться и не будет соответствовать их содержанию в ТРТ. Однако в данной работе этот эффект не учитывается.

Как пример, рассмотрим ТРТ состава НТРВ/ПХА/АІ = 12/68/20, в котором в качестве связующего используется полибутадиен с концевыми гидроксильными группами (НТРВ).

На рис. 2 приведены зависимости $\rho_p(p, \alpha)$, полученные термодинамическим расчетом. Расчеты выполнены в диапазоне $p = (5 \dots 10)$ МПа и $\alpha = (10 \dots 30)\%$.

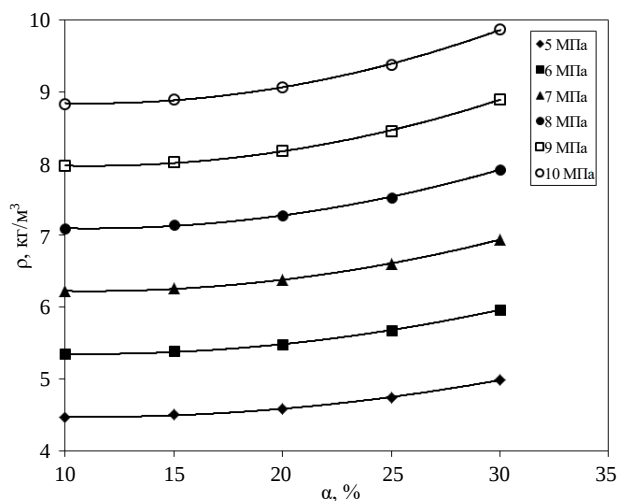


Рис. 2. Зависимость плотности продуктов сгорания от давления и содержания Al, полученная термодинамическим расчетом для состава НТРВ/ПХА/Al, где α – содержание алюминия в составе; соотношение связующего и ПХА остается постоянным: НТРВ/ПХА = 12/68. Значки – термодинамический расчет; линии – аппроксимация (47)

Fig. 2. Dependence of density of combustion products on pressure and aluminum content obtained by thermodynamic calculation for the composition of НТРВ/AP/Al, where α is the aluminum content in the composition, while the ratio of binder and AP remains constant: НТРВ/AP = 12/68. Symbols indicate thermodynamic calculations; lines indicate approximations (47)

Анализ зависимостей рис. 2 показывает, что для рассмотренного состава зависимость (46) хорошо аппроксимируется функцией

$$\rho_p = (0.924 - 0.00637\alpha + 0.0002865\alpha^2) p, \quad (47)$$

где α берется в процентах.

Учитывая (46), получим

$$\frac{\Delta \rho_p}{\rho_0} = \frac{\partial \ln \rho_p}{\partial \ln p} \frac{\Delta p(t)}{p_0} + \frac{\partial \ln \rho_p}{\partial \alpha} \Delta \alpha(t - t_0), \quad (48)$$

где производные берутся при $\alpha = \alpha_0$ и $p = p_0$; α_0 – содержание порошкообразного горючего (алюминия, бора) в ТРТ; p_0 – среднее давление в камере сгорания РДТТ при акустических колебаниях.

Здесь учтено запаздывание: порция продуктов сгорания, рассматриваемая в данный момент времени, на самом деле сформировалась в момент $t - t_p$.

Учитывая (48), запишем (43) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_p}{v_0} = & -\frac{\partial \ln \rho_p}{\partial \alpha} \Delta \alpha(t - t_0) - \frac{\partial \ln \rho_p}{\partial \ln p} \frac{\Delta p(t)}{p_0} + \\ & + \frac{\Delta \dot{m}(t - t_0)}{\dot{m}_0} - \frac{1}{\dot{m}_0} \frac{d\dot{m}(t - t_0)}{dt} \Delta t_p - \frac{dt_p}{dt}. \end{aligned} \quad (49)$$

Второй член в правой части (49) описывает колебания плотности продуктов сгорания, связанные с колебаниями давления в камере сгорания, при условии что продукты сгорания имеют номинальный состав, соответствующий исходному

составу ТРТ. Эта составляющая всегда учитывается при расчете акустической неустойчивости в РДТТ [9, 10]. Третий член описывает колебания массоприхода продуктов сгорания в камеру сгорания РДТТ, которые формально также учитываются при расчете акустической неустойчивости в РДТТ, однако при этом никогда не учитывалось, что колебания массоприходов газообразных продуктов сгорания и КПС для ТРТ, имеющих КС на поверхности горения, могут происходить по-разному. Четвертый и пятый члены в правой части (49) описывают колебания времени сгорания частиц КПС при колебаниях давления в камере сгорания РДТТ, т.е. эффект, который численно был обнаружен в работе [10].

В то же время первый член в правой части (49) описывает новый эффект в теории акустической неустойчивости процесса в РДТТ: колебания мгновенного состава продуктов сгорания, вытекающих с поверхности горения ТРТ, на которой могут накапливаться КПС в виде КС. Этот эффект связан с тем, что массоприходы газообразных продуктов сгорания и КПС могут изменяться независимо при колебаниях давления, что изменяет мгновенный состав продуктов сгорания, покидающих поверхность горения и, как следствие, их термодинамические характеристики.

Проведем оценку. Для составов, соответствующих рис. 2,

$$\frac{\partial \ln p_p}{\partial \ln p} = 1, \quad \frac{\partial \ln p_p}{\partial \alpha} = \frac{-0.00637 + 0.000573\alpha}{0.924 - 0.00637\alpha + 0.0002865\alpha^2}.$$

В частности, для $\alpha = \alpha_0 = 20\%$ получим $\frac{\partial \ln p_p}{\partial \alpha} = 0.0056$. Если колебания параметра α составляют $\Delta\alpha = 10\%$, то первое слагаемое в (49) равно 0.056, т.е. оно вызывает более чем 5%-ное изменение скорости продуктов сгорания, оттекающих от поверхности горения, что будет вносить заметный вклад в акустическую проводимость зоны горения ТРТ.

Отметим еще один новый эффект, который имеет место при нестационарном горении ТРТ с КПС, способными накапливаться на поверхности горения в виде КС. Это запаздывание массоприхода, которое учитывается тем, что колебания скорости горения $\Delta\dot{m}(t - t_0)$ берутся не в текущий момент t , а в момент образования данной порции продуктов сгорания $t - t_0$. Этот эффект также ранее не рассматривался. Для данной порции продуктов сгорания массовое отношение α формируется в момент выхода продуктов сгорания из КС. Они состоят из определенного количества первичных газообразных продуктов горения, образовавшихся на поверхности горения (граница 4 на рис. 1), и определенного количества КПС, оторвавшихся от КС в данный момент времени.

Согласно сказанному выше, массовая скорость образования первичных газообразных продуктов сгорания равна $(1 - \zeta_s)\gamma u + \dot{m}_g$, а массовая скорость образования КПС, поступающих в камеру сгорания с поверхности КС, равна $\dot{m}_d$. Таким образом, мгновенная массовая доля КПС в продуктах сгорания, поступающих в камеру сгорания РДТТ,

$$\alpha = (\dot{m}_d / \dot{m})100\%. \quad (50)$$

Учитывая (9), получим

$$\alpha = \frac{\dot{m}_d}{(1 - \zeta_s)\gamma u + \dot{m}_g + \dot{m}_d}100\%. \quad (51)$$

Поскольку в общем случае u , $\dot{m}_g$ и $\dot{m}_d$ при колебаниях давления могут изменяться независимо, приходим к выводу, что при колебаниях давления в камере сгорания параметр α колеблется и для порций продуктов сгорания, образовавшихся в разные моменты времени, он будет разным.

Для вычисления $\Delta\alpha$ предположим, что основной вклад в массоприход от КС вносит отрыв агломератов от поверхности горения, в то время как газификацией КС можно пренебречь ($\dot{m}_g = 0$). В этом случае из соотношения (51) в линейном приближении получим

$$\Delta\alpha = \alpha_0 (1 - \alpha_0) \left(\frac{\Delta\dot{m}_d}{\dot{m}_d^0} - \frac{\Delta u}{u^0} \right). \quad (52)$$

Здесь учтено, что при стационарном горении ТРТ количество образующихся газообразных продуктов сгорания и количество отрывающихся от поверхности горения КПС в процентном отношении соответствуют составу ТРТ, т.е. согласно (4) и (5) $\dot{m}_d^0 = \alpha_0 \gamma u^0$.

Учитывая (27) и (31), получим

$$\frac{\Delta\dot{m}_d}{\dot{m}_d^0} = \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} \frac{\Delta u}{u^0} + \frac{\Delta M_l}{M_l^0}. \quad (53)$$

Используя решение (33), получим

$$\Delta M_l = \alpha_0 \gamma u^0 \int_0^t \left[\frac{\Delta u(\tau)}{u^0} - \psi^0 \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} \int_{\tau}^t \frac{\Delta u(\theta)}{u^0} d\theta \right] \exp(-\psi^0(t-\tau)) d\tau. \quad (54)$$

Здесь пренебрегается начальными условиями, так как рассматривается периодический процесс.

Учитывая (29), получим

$$\frac{\Delta M_l}{M_l^0} = \psi^0 \int_0^t \left[\frac{\Delta u(\tau)}{u^0} - \psi^0 \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} \int_{\tau}^t \frac{\Delta u(\theta)}{u^0} d\theta \right] \exp(-\psi^0(t-\tau)) d\tau \quad (55)$$

Для периодического процесса

$$\frac{\Delta p(t)}{p_0} = \eta \exp(i\omega t), \quad \frac{\Delta u(t)}{u^0} = w \exp(i\omega t). \quad (56)$$

где η , w и ω – некоторые постоянные. Подставляя (56) в (55), получим

$$\frac{\Delta M_l}{M_l^0} = \frac{\psi^0}{\psi^0 + i\omega} \left(1 - \frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} \right) w \exp(i\omega t). \quad (57)$$

Подставляя (53), (56) и (57) в (52), получим

$$\Delta\alpha = \alpha_0 (1 - \alpha_0) \frac{i\omega}{\psi^0 + i\omega} \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} - 1 \right) w \exp(i\omega t). \quad (58)$$

Учитывая (34), (49) и (56) для составляющей акустической проводимости зоны горения ТРТ, связанной с изменением состава продуктов сгорания, оттекающих от поверхности горения, при колебаниях давления в камере сгорания (первый член в правой части (49)), получим

$$\zeta_\alpha = \gamma c_0 \frac{u_0}{p_0} \alpha_0 (1 - \alpha_0) \frac{\partial \ln p}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \ln \psi}{\partial \ln u} - 1 \right) \frac{i\omega}{\psi^0 + i\omega} \frac{w}{\eta} \exp(-i\omega t_0). \quad (59)$$

Здесь учтено, что $\rho_0 v_0 = \gamma u_0$. Причем параметр $\gamma c_0 u_0 / p_0$ определяется главным образом габаритами двигательной установки и температурой продуктов сгорания и слабо зависит от давления в камере сгорания.

Отношение w/η может быть вычислено по модели (1), (2), (4)–(8), (26), (27) по аналогии с тем, как это делается в феноменологической теории [2, 3]. В частности, как следует из результатов предыдущего анализа, приближенно можно использовать соответствующее решение теории [2, 3].

Составляющая (59) акустической проводимости зоны горения смесового ТРТ является новой и ранее не учитывалась при анализе акустической неустойчивости в РДТТ.

Заключение

Таким образом, рассмотрено нестационарное горение ТРТ, горящих с образованием конденсированных продуктов, способных накапливаться на поверхности горения в виде КС. Модель учитывает тепловую инерционность КС и изменение его массы в процессе нестационарного горения. В рамках разработанной модели нестационарного горения определена акустическая проводимость зоны горения ТРТ. Показано, что при нестационарном горении таких ТРТ изменяется мгновенный состав продуктов (газообразных и конденсированных), покидающих поверхность горения, который отличается от исходного состава ТРТ. Этот новый эффект, ранее не описанный в литературе, может приводить к дополнительной дестабилизации процесса в камере сгорания РДТТ и к развитию акустической неустойчивости.

Список источников

1. Zarko V.E., Gusachenko L.K. Critical review of phenomenological models for studying transient combustion of solid propellants // *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*. 2010. V. 2, № 2. P. 151–167. doi: 10.1260/1756-8277.2.2.151
2. Новожилов Б.В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М. : Наука, 1973. 176 с.
3. Зельдович Я.Б., Лейтунский О.И., Либрович В.Б. Теория нестационарного горения пороха. М. : Наука, 1975. 132 с.
4. Гусаченко Л.К., Зарко В.Е. Анализ нестационарных моделей горения твердых топлив (обзор) // *Физика горения и взрыва*. 2008. Т. 44, № 1. С. 35–48.
5. Гусаченко Л.К. Феноменологическая модель нестационарного горения ТТ с накоплением компонента на поверхности // *Физика горения и взрыва*. 1989. Т. 25, № 2. С. 38–42.
6. Рашковский С.А. Статистическое моделирование агломерации алюминия при горении гетерогенных конденсированных смесей // *Физика горения и взрыва*. 2005. Т. 41, № 2. С. 62–74.
7. Rashkovskiy S.A. Direct numerical simulation of boron particle agglomeration in combustion of boron-containing solid propellants // *Combustion Science and Technology*. 2017. V. 189, № 8. P. 1277–1293. doi: 10.1080/00102202.2017.1294586
8. Глотов О.Г., Ягодников Д.А., Воробьев В.С., Зарко В.Е., Симоненко В.Н. Воспламенение, горение и агломерация капсулированных частиц алюминия в составе смесового твердого топлива. II. Экспериментальные исследования агломерации // *Физика горения и взрыва*. 2007. Т. 43, № 3. С. 83–97.
9. Culick F.E.C. Unsteady Motions in Combustion Chambers for Propulsion Systems. RTO AGARD RTO-AG-AVT-039, 2006.

10. Gallier S., Godfroy F. Aluminum combustion driven instabilities in solid rocket motors // *Journal of propulsion and power*. 2009. V. 25, № 2. С. 509–521. doi: 10.2514/1.37664

References

1. Zarko V.E., Gusachenko L.K. (2010) Critical review of phenomenological models for studying transient combustion of solid propellants. *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*. 2(2). pp. 151–167. doi: 10.1260/1756-8277.2.2.151
2. Novozhilov B.V. (1973) *Nestatsionarnoe gorenje tverdykh raketnykh topliv* [Unsteady combustion of solid propellants]. Moscow: Nauka.
3. Zel'dovich YA.B., Leypunskiy O.I., Librovich V.B. (1975) *Teoriya nestatsionarnogo goreniya porokha* [Theory of unsteady combustion of gunpowder]. Moscow: Nauka.
4. Gusachenko L.K., Zarko V.E. (2008) Analysis of unsteady solid-propellant combustion models. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 44(1). pp. 31–42. doi: 10.1007/s10573-008-0006-0
5. Gusachenko L.K. (1989) Phenomenological model of unsteady burning of solid fuel with accumulation of a component on the surface. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 25(2). pp. 167–170. doi: 10.1007/BF00742009
6. Rashkovskii S.A. (2005) Statistical simulation of aluminum agglomeration during combustion of heterogeneous condensed mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 41. pp. 174–184. doi: 10.1007/s10573-005-0020-4
7. Rashkovskiy S.A. (2017) Direct numerical simulation of boron particle agglomeration in combustion of boron-containing solid propellants. *Combustion Science and Technology*. 189(8). pp. 1277–1293. doi: 10.1080/00102202.2017.1294586
8. Glotov O.G., Yagodnikov D.A., Vorob'ev V.S., Zarko V.E., Simonenko V.N. (2007) Ignition, combustion, and agglomeration of encapsulated aluminum particles in a composite solid propellant. II. Experimental studies of agglomeration. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 43(3). pp. 320–333. doi: 10.1007/s10573-007-0045-y
9. Culick F.E.C. (2006) *Unsteady Motions in Combustion Chambers for Propulsion Systems*. RTO AGARD RTO-AG-AVT-039.
10. Gallier S., Godfroy F. (2009) Aluminum combustion driven instabilities in solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*. 25(2). pp. 509–521. doi: 10.2514/1.37664

Сведения об авторе:

Рашковский Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории термогазодинамики и горения Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (Москва, Россия); ведущий научный сотрудник лаборатории проектирования рабочих элементов ракетно-космической техники Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: rash@ipmnet.ru

Information about the author:

Rashkovskiy Sergey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rash@ipmnet.ru

Статья поступила в редакцию 21.10.2023; принята к публикации 04.12.2023

The article was submitted 21.10.2023; accepted for publication 04.12.2023