

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 51-74

doi: 10.17223/19988621/86/11

MSC 93-03, 93-08

**Высокоточные представления инерционных вращений
и неустойчивость Луи Пуансо****Михаил Алексеевич Бубенчиков¹, Алексей Михайлович Бубенчиков²,
Дмитрий Владимирович Мамонтов³**^{1, 2, 3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *michael121@mail.ru*² *bubenchikov_am@mail.ru*³ *orevaore@mail.ru*

Аннотация. В результате синтеза прямых способов решения систем алгебраических уравнений с пошаговыми алгоритмами высокого порядка точности разработана схема высокоточных вычислений для описания сферических движений твердых тел. На основе развитого вычислительного приема рассчитана неустойчивость Луи Пуансо. Наряду с этим описан новый класс неустойчивых движений.

Ключевые слова: углы Эйлера, кватернионы вращения, вращение, положение тела в пространстве, неустойчивость сферического движения

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, № 19-71-10049.

Для цитирования: Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В. Высокоточные представления инерционных вращений и неустойчивость Луи Пуансо // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 149–158. doi: 10.17223/19988621/86/11

Original article

**High-precision representations of inertial rotations
and Louis Poinso instability****Mikhail A. Bubenchikov¹, Alexey M. Bubenchikov², Dmitriy V. Mamontov³**^{1, 2, 3} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*¹ *michael121@mail.ru*

² bubenchikov_am@mail.ru³ orevaore@mail.ru

Abstract. The coordinate method for determining the rotations of bodies in space is proposed. The method does not use Euler angles and hypercomplex Hamilton numbers. The developed computational technique is based on the point distribution of masses in space. If the body is replaced by a system of points and this approximation is sufficient, then the rest of the calculation results are highly accurate. The latter is achieved through the synthesis of an exact method for solving systems of algebraic equations with a high-precision step-by-step method for solving systems of differential equations resolved with respect to the derivatives of the desired quantities. Based on the developed computational method, unstable inertial rotations were studied. The existence of an instability different from the Louis Poinot instability is shown.

Keywords: Euler angles, rotation quaternions, rotation, body position in space

Acknowledgments: This work was partially supported by the Russian Science Foundation, № 19-71-10049.

For citation: Bubenchikov, M.A., Bubenchikov, A.M., Mamontov, D.V. (2023) High-precision representations of inertial rotations and Louis Poinot instability. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 149–158. doi: 10.17223/19988621/86/11

Введение

Теория кватернионов, или гиперкомплексных чисел Гамильтона, примененная к решению теоретических проблем кинематики вращательного движения, обеспечила прорыв в этой области. Построенная алгебра гиперкомплексных чисел оказала влияние на развитие теории групп, линейных пространств [1], геометрии и компьютерной графики [2, 3]. Она имеет также широкие практические применения во всех задачах управления движением, в частности воздушной и космической навигации [4–9].

Кватернионы и операции над ними были изобретены сэром Уильямом Гамильтоном в противовес эйлеровскому описанию с помощью углов прецессии, нутации и собственного вращения. Кватернионы позволили разрешить проблему так называемого «шарнирного замка», или, по-другому, проблему, связанную с использованием кинематических соотношений Эйлера, имеющих координатную особенность при углах нутации $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$ и т.д. Эта проблема была успешно решена способом выхода из пространства трех размерностей в четырехмерное векторное пространство, и круг задач управления движением был принципиально расширен. В теоретическом плане это очень элегантный прием. Однако при решении практических задач возникали трудности, связанные с пониманием применения кватернионов в задачах описания угловых перемещений в физическом пространстве.

В настоящей работе предлагается координатный подход для описания вращений, не использующий углы Эйлера, а также демонстрируется высокоточная вычислительная технология, опирающаяся на использование предложенного подхода, в котором также нет и кватернионов.

Математическая модель

В случае вращения по инерции роль уравнений, определяющих вращательные движения, выполняют кинематические соотношения для скоростей отдельных точек тела:

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k \quad (k=1, \dots, N). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{r}_k$ – радиус-вектор отдельной точки тела, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела, N – число разбиений тела на части.

Если система точек, представляющих пространственное распределение массы тела, установлена, и погрешность, возникающая за счет точечного массораспределения, нас устраивает, то можно говорить о высокоточном представлении вращений, производимых точечной конструкцией исследуемого объекта. При заданном характере изменения угловой скорости со временем или при постоянной ее величине можно построить аналитическое решение системы (1). Однако в рассматриваемом классе задач $\boldsymbol{\omega}(t)$ подлежит определению. Так или иначе система (1) требует задания начальных условий:

$$t = 0; \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k^0 \quad (k=1, \dots, N); \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0. \quad (2)$$

Три компоненты угловой скорости тела определяются из условий сохранения трех проекций кинетического момента:

$$\begin{aligned} A\omega_x + F\omega_y + E\omega_z &= K_x^0, \\ F\omega_x + B\omega_y + D\omega_z &= K_y^0, \\ E\omega_x + D\omega_y + C\omega_z &= K_z^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора мгновенной угловой скорости тела; A, B, C, D, E, F – компоненты тензора инерции:

$$\begin{aligned} A &= \sum \alpha_k (y_k + z_k)^2, \quad B = \sum \alpha_k (x_k + z_k)^2, \quad C = \sum \alpha_k (x_k + y_k)^2, \\ D &= -\sum \alpha_k y_k z_k, \quad E = -\sum \alpha_k x_k z_k, \quad F = -\sum \alpha_k x_k y_k, \end{aligned} \quad (4)$$

α_k – абсолютные или относительные массы частей тела. Выбор абсолютного базиса является произвольным, поэтому недиагональные компоненты тензора инерции D, E, F обычно отличны от нуля, но их можно сделать нулевыми, если привести тензор инерции к главным осям. В этом случае изменяются и диагональные компоненты A, B и C ; их новые значения обозначим через A', B' и C' . Нас интересует определитель системы (3). Он должен быть отличным от нуля и обеспечивать однозначное определение $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. В главных осях этот определитель есть произведение: $A'B'C'$. Сам вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ можно рассматривать как инвариантную векторную функцию тензорного аргумента, т.е. как объект, не зависящий от системы отсчета. Этот объект и должен быть таким, исходя из физического смысла рассматриваемой величины. Поскольку определитель системы (3) тоже является инвариантом симметричного тензора инерции мы можем записать

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & D & B \\ E & D & C \end{vmatrix} = A'B'C' > 0. \quad (5)$$

Неравенство (5) всегда является строгим, поскольку каждая из величин A', B', C' имеет сугубо положительное значение как осевой момент инерции тела, равный сумме произведений масс его частей на квадраты расстояний от оси до центров масс этих частей. Таким образом, определитель системы (3) отличен от нуля, и она имеет единственное решение при любой правой части, т.е. (3) является крамеровской системой. Если в качестве масштаба длины взять a – один из линейных размеров тела, масштаба скорости ω^0 – величину начальной угловой скорости тела, а для масштаба времени использовать $(1/\omega^0)$ и отнести (1)–(4) к этим масштабам, то постановка задачи останется прежней, в ней не появится ни одного безразмерного комплекса. Необходимо лишь в качестве α_k использовать относительные массы частей тела $\alpha_k = m_k/M$ (M – полная масса тела). Поскольку при обезразмеривании задачи не появилось ни одного безразмерного комплекса, все расчеты в размерных величинах будут совпадать с точностью до масштабного множителя. Правые части алгебраических уравнений (3) определяются по величинам, отвечающим начальному моменту времени. Причем компоненты тензора инерции, имеющие индекс «0», определяются по начальным координатам точек тела, представляющих положения центров масс его частей:

$$\begin{aligned} K_x^0 &= A^0 \omega_x^0 + F^0 \omega_y^0 + E^0 \omega_z^0, \\ K_y^0 &= F^0 \omega_x^0 + B^0 \omega_y^0 + D^0 \omega_z^0, \\ K_z^0 &= E^0 \omega_x^0 + D^0 \omega_y^0 + C^0 \omega_z^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Расчетная схема

Эволюционные уравнения (1) интегрируются численно с использованием пошаговой схемы четвертого порядка точности относительно шага по времени. В схемах класса Рунге–Кутты для повышения точности расчетов используется идея перевычисления правых частей дифференциальных уравнений в дополнительных позициях отдельного шага по времени. В правые части уравнений входят проекции угловой скорости тела. Эти проекции находятся из системы линейных алгебраических уравнений, представляющих собой совокупность трех интегралов уравнений вращательного движения. Таким образом, в каждой вспомогательной позиции отдельного шага по времени по правилу Крамера решается система уравнений (3). Для схемы четвертого порядка точности таких позиций будет четыре. В результате, если система линейных алгебраических уравнений для нахождения компонент угловой скорости тела каждый раз будет разрешаться точно, мы обеспечим все условия для высокоточного нахождения координат центров масс всех частей тела. Таким образом, прямой метод нахождения проекций вектора мгновенной угловой скорости встроен в технологию нахождения всех необходимых координат.

Для случая вращения по инерции известны два простых первых интеграла: интеграл энергии, выражающий собой сохранение кинетической энергии тела, и интеграл моментов, выражающий собой сохранение величины кинетического момента в процессе движения тела. Для полного решения задачи необходимы три первых интеграла. Непосредственное решение задачи инерционного вращения, сформулированной в абсолютных осях, позволяет найти зависимости проекций

вектора мгновенной угловой скорости от времени, а простейшие интегралы использовать для проверки точности вычислений. На рис. 1 показана относительная погрешность расчетов представленной выше модели. Здесь T – кинетическая энергия тела, рассчитанная для текущего момента времени, T_0 – начальное значение кинетической энергии тела.

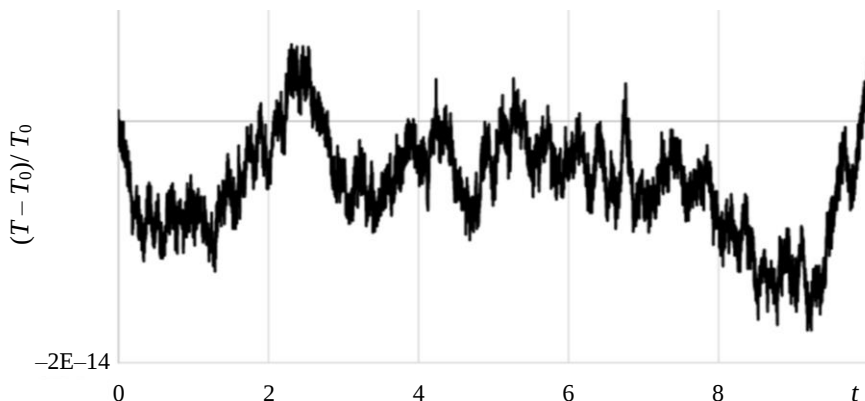


Рис. 1. Относительная погрешность вычислений

Fig. 1. Relative calculation error

Таким образом, при инерционном движении существует интеграл энергии

$$T = J \frac{\omega^2}{2} = \text{const}, \quad (7)$$

причем $J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\alpha\gamma + 2F\alpha\beta$, где α , β , γ – направляющие косинусы мгновенной оси вращения:

$$\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \beta = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \gamma = \frac{\omega_z}{\omega}, \quad \omega = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{1/2}.$$

Подставляя найденные в результате решения задачи распределения $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$, $\omega_z(t)$ в (6), мы получаем систему значений, отличающихся от величины начальной кинетической энергии на 10^{-14} относительных единиц.

Результаты расчетов

Классическая неустойчивость Луи Пуансо проявляется тогда, когда главные оси инерции, связанные с телом, определяют различные моменты инерции и вращение происходит вокруг промежуточной оси, т.е. оси, имеющей среднее значение момента инерции. Возьмем тело в виде параллелепипеда с тремя различными ребрами: $3 \times 6 \times 18$ (безразмерные единицы). Придадим ему начальные вращения вокруг оси, проходящей через его центр масс, параллельной среднему ребру. Такая ось и является промежуточной, потому что момент инерции тела от этой оси будет иметь среднее по величине значение.

На рис. 2 показаны траектория характерной точки тела (одной из вершин трехгранного угла параллелепипеда) и годограф вектора мгновенной угловой скорости тела (справа) для случая, когда тело совершает перевороты вокруг соб-

ственной оси с минимальным моментом инерции (вокруг параллельной большому ребру параллелепипеда). Такие кувырки фиксировал космонавт В. Джанибеков в одном из своих исследовательских полетов. Кинематический портрет этой неустойчивости изображается в виде витков на плоскости Пуансо.

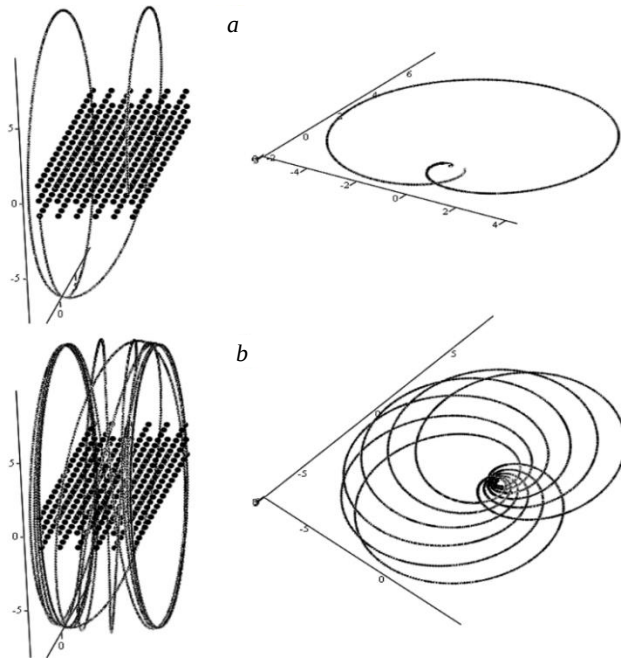


Рис. 2. Траектория характерной точки тела и вектора его мгновенной угловой скорости
Fig. 2. Trajectory of the characteristic point of the body and vector of its instantaneous angular velocity

На рис. 2, *a* (справа) один виток, 2, *b* (справа) – шесть витков. Рисунок 2, *b* представляет продленный расчет, когда в шесть раз увеличено время вычислений. Расчет можно продолжать сколь угодно долго, тогда постепенно витки заполняют весь круг на плоскости индуцированных компонент вектора угловой скорости. Однако при ближайшем рассмотрении можно установить, что площадь индуцированных движений есть кольцо, так как всегда в центре остается незаполненный круг малого радиуса. Поскольку, перемещаясь по витку, вектор мгновенной угловой скорости значительно отклоняется от своего первоначального положения, а витки шаг за шагом поворачиваются в определенном направлении (в данном случае против стрелки часов), то это движение можно назвать вращением с прецессией. Несмотря на то, что в этом движении присутствуют и нутационные перемещения, установленное выше кольцо по соображениям простоты будем называть кольцом прецессии.

На рис. 3 показано изменение величины мгновенной угловой скорости со временем. Видно, что кувырки совершаются при переменной по величине угловой скорости. Результирующее изменение скорости за счет наличия положительного углового ускорения в классических кувырках составляет 25%.

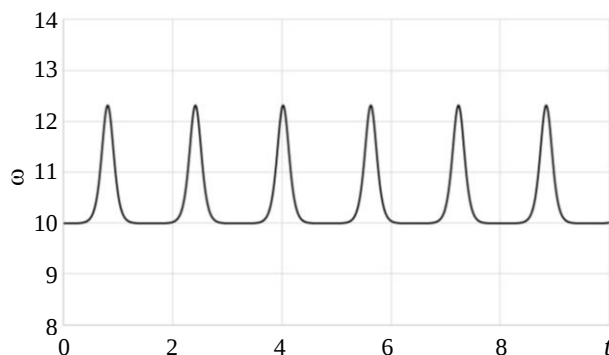


Рис. 3. Величина мгновенной угловой скорости
Fig. 3. The magnitude of the instantaneous angular velocity

Теперь рассмотрим удлиненное тело в виде бруска, у которого поперечные размеры будут одинаковы. У таких тел нет собственной промежуточной оси. Действительно, вращая тело вокруг каждой из собственных осей, мы получим простое вращение, т.е. неустойчивого движения не будет. Если теперь собственную ось вытянутого тела отклонить на 30° в плоскости Oyz от оси Oy и поочередно вращать вокруг осей абсолютного базиса, получим следующий результат. Предварительно отметим, что моменты инерции относительно этих осей для рассматриваемого тела будут следующими: $A = 0.76$, $B = 1$, $C = 0.28$. В результате вращения вокруг оси Ox (эта ось будет промежуточной, так как $C < A < B$) получим кувырки, показанные на рис. 4 (траекторный след, левая часть рисунка) и годограф угловой скорости (справа).

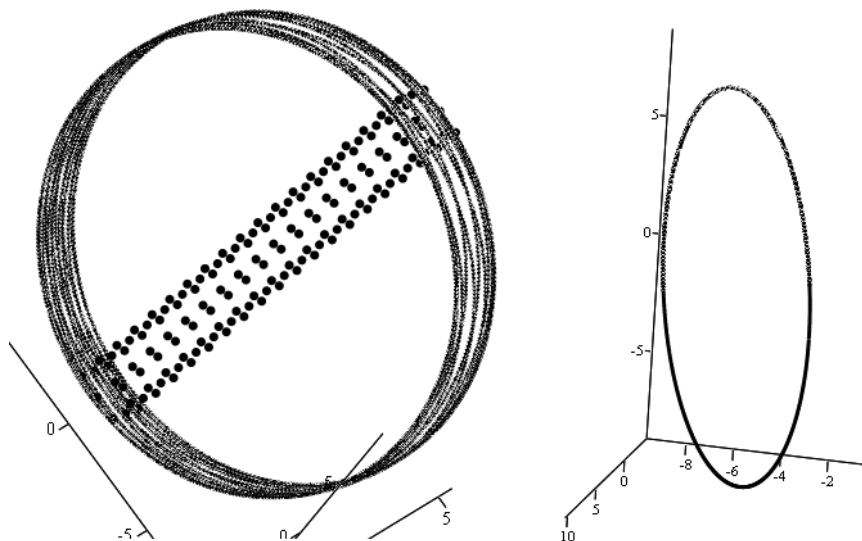


Рис. 4. Траектория угловой точки тела и вектора его мгновенной угловой скорости
Fig. 4. Trajectory of the angular point of the body and the vector of its instantaneous angular velocity

Видно, что вытянутое тело в процессе движения вокруг оси Ox еще переворачивается вокруг собственной оси, неизменно связанной с телом. При этом, однако, величина мгновенной угловой скорости сохраняет свое значение во все время движения, и годограф угловой скорости является окружностью, т.е. совпадает с годографом регулярной прецессии. Получилось, что в этом случае широкое прецессионное кольцо классической неустойчивости Луи Пуансо сжимается до окружности и вовсе отсутствуют нутационные перемещения вектора угловой скорости. Главное отличие полученных кувырксов от переворотов В. Джанибекова – это то, что они осуществляются при постоянной по модулю угловой скорости. Поэтому этот вид неустойчивого вращательного движения мы назвали неустойчивостью второго рода. Если начальное вращение реализуется вокруг оси Oy , которая в данном начальном расположении тела обеспечивает максимальный момент инерции, то возникает устойчивое вращение.

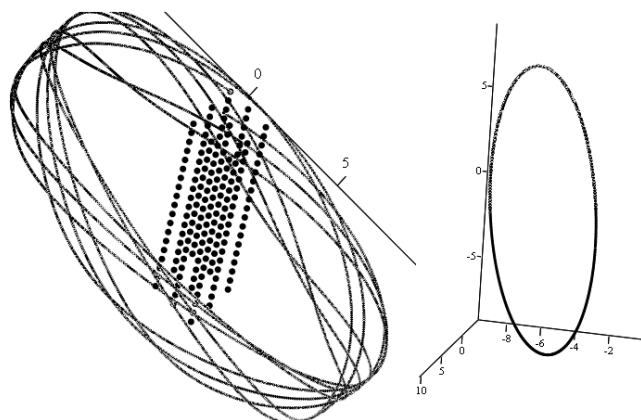


Рис. 5. Траектория угловой точки тела (слева) и герполоида угловой скорости (справа)
Fig. 5. Trajectory of the angular point of the body (left) and the angular velocity herpoloid (right)

Наконец, третий случай: вращение вокруг оси Oz , обеспечивающее при начальном расположении тела минимальный момент инерции $C = 0.28$. Левая часть рис. 5 (траекторный портрет) показывает, что в отличие от случая неустойчивости второго рода мы не наблюдаем здесь однонаправленных переворотов. В этом виде неустойчивости вместо последовательных переворотов присутствуют индуцированные первоначальным движением тела колебания вокруг собственной оси тела.

Заключение

Проведенные высокоточные расчеты инерционного вращения удлинённых тел позволили выделить новый класс неустойчивых вращений и установить важные детали классической неустойчивости Луи Пуансо. Новая неустойчивость относится к сферическому движению удлинённых тел, не имеющих собственной промежуточной оси инерции. При вращении таких тел относительно осей абсолютного базиса, смещённых относительно собственных осей, возникают неустойчивые сферические движения с переворотами и колебаниями вокруг собственной

оси тела. Герполоидами этих движений являются кривые, находящиеся в сильно сжатом кольце прецессии, т.е. кривые, очень близкие к окружностям, а само вращение осуществляется при постоянной величине мгновенной угловой скорости.

Список источников

1. Панов А.П., Цисарж В.В., Конашков А.И. О группах и алгебрах негамильтоновых кватернионов, пятимерных векторов вращений в задачах // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. № 10 (ч. 1). С. 82–84.
2. Цисарж В.В., Марусик Р.И. Математические методы компьютерной графики. Киев : Факт, 2004. 464 с.
3. Побегайло А.П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике. Минск : БГУ, 2019. 223 с.
4. Исаев М.А., Исаев А.М., Кудинов Н.В., МIRONENKO Р.С. Алгоритм начальной инициализации кватерниона пространственной ориентации в параметрах Родрига–Гамильтона // Вестник Донского государственного технического университета. 2018. Т. 18, № 2. С. 238–245.
5. Никифорова Л.Н. Оптимальное управление в построении траекторий перелета вертолета в заданную точку пространства // Программные системы: теория и приложения. 2012. Т. 3, № 2. С. 61–75.
6. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация в астродинамике и управление траекторным движением // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 4, № 5. С. 2583–2585.
7. Переляев С.Е., Челноков Ю.Н. Алгоритмы ориентации движущегося объекта с разделением интегрирования быстрых и медленных движений // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 1. С. 18–32.
8. Челноков Ю.Н. Инерциальная навигация в космосе с использованием регулярных кватернионных уравнений астродинамики // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 6. С. 706–720.
9. Челноков Ю.Н. Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 6. С. 721–733.

References

1. Panov A.P., Tsisarzh V.V., Konashkov A.I. (2013) O gruppakh i algebrakh negamiltonovykh kvaternionov, pyatimernykh vektorov vrashcheniy v zadachakh [On groups and algebras of non-Hamiltonian quaternions, five-dimensional rotation vectors in problems]. *Mezhdunarodnyi zhurnal prikladnykh i fundamentalnykh issledovaniy*. 10. pp. 82–84.
2. Tsisarzh V.V., Marusik R.I. (2004) Matematicheskiye metody komp'yuternoy grafiki [Mathematical methods of computer graphics]. Kiev: Fakt.
3. Pobegaylo A.A. (2019) Primenenie kvaternionov v kompyuternoy grafike [Application of quaternions in computer geometry and graphics]. Minsk: BRU.
4. Isaev M.A., Isaev A.M., Kudinov N.V., Mironenko R.S. (2018) Algoritmnachal'noy initsializatsii kvaterniona prostanstvennoy oriyentatsii v parametrah Rodriga – Gamil'tona [Initial initialization algorithm for a spatially orientated quaternion in Rodrigues–Hamilton parameters]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Don State Technical University*. 18. pp. 238–245. 10.23947/1992-5980-2018-18-2-238-245.
5. Nikoiforova L.N. (2012) Optimal'noye upravleniye v postroyenii trayektorii pereleta vertoletav zadannuyu tochku prostanstva [Optimal control in constructing helicopter flight trajectories to a given point in the space]. *Programmnyye podsistemy: teoriya i prilozheniya*. 3(2). pp. 61–75.

6. Chelnokov Yu. N. (2011) Kvaternionnaya regularizatsiya v astrodinamike i upravleniye trayektornym dvizheniyem [Quaternion regularization in astrodynamics and trajectory motion control]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod*. 4(5). pp. 2583–2585.
7. Perelyaev S.E., Chelnokov Yu.N. (2017) Algoritmy oriyentatsii dvizhushchegosya ob'yekta s razdeleniyem integrirovaniya bystrykh i medlennykh dvizheniy [Algorithms for the orientation of a moving object with separation of the integration of fast and slow motions]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 81(1). pp. 11–20. DOI: j.jappmathmech.2017.07.002.
8. Chelnokov Y. (2018) Inertsial'naya navigatsiya v kosmose s ispol'zovaniyem regul'yarnykh kvaternionnykh uravneniy astrodinamiki [Inertial navigation in space using regular quaternion equations of astrodynamics]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 82(6). pp. 706–720. DOI: 10.31857/S003282350002735-8.
9. Chelnokov Y. (2018) Vozmushchennaya prostranstvennaya zadacha dvukh tel: regul'yarnyye kvaternionnyye uravneniya otnositel'nogo dvizheniya [The perturbed three-dimensional two body problem: regular quaternion equations of relative motion]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 82(6). pp. 721–733. DOI: 10.31857/S003282350002736-9.

Сведения об авторах:

Бубенчиков Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: michael121@mail.ru

Бубенчиков Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович – младший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: orevaore@mail.ru

Information about the authors:

Bubenchikov Mikhail A. (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

Bubenchikov Alexey M. (Doctor of Physics and Mathematics, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Mamontov Dmitriy V. (National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orevaore@mail.ru

Статья поступила в редакцию 26.09.2022; принята к публикации 04.12.2023

The article was submitted 26.09.2022; accepted for publication 04.12.2023