

Научная статья

УДК 519.6:532.516

MSC 93A30

doi: 10.17223/19988621/86/14

Математическая модель транспорта растворенного кислорода при развитии термобара

Баир Олегович Цыденов

Томский государственный университет, Томск, Россия, tsydenov@math.tsu.ru

Аннотация. Приведено описание 2.5D негидростатической модели переноса кислорода в пресноводном озере. Транспорт растворенного кислорода в модели осуществляется через кислородный обмен с атмосферой и физический перенос за счет эффекта термобара. На границе раздела воздух–вода учитывается внутрисуточное изменение скорости ветра, влияющей на интенсивность перехода кислорода из газовой фазы в жидкую. Получены пространственно-временные распределения температуры и растворенного кислорода во время развития весеннего термобара на примере Баргузинского залива озера Байкал.

Ключевые слова: термобар, растворенный кислород, температура максимальной плотности, математическая модель, численный эксперимент, экосистема водоема, озеро Байкал

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10020, <https://www.rscf.ru/project/23-71-10020/>

Для цитирования: Цыденов Б.О. Математическая модель транспорта растворенного кислорода при развитии термобара // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 176–187. doi: 10.17223/19988621/86/14

Original article

A mathematical model of dissolved oxygen transport during the thermal bar evolution

Bair O. Tsydenov

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, tsydenov@math.tsu.ru

Abstract. The article describes a 2.5D non-hydrostatic model of dissolved oxygen transport in a freshwater lake. The oxygen dynamics are carried out through oxygen exchange with the atmosphere and physical transfer due to the effect of the thermal bar. An intraday change in wind speed (that influences the rate of oxygen transition from gas to liquid) is taken into account at the air–water interface. Space–time distributions of temperature and dissolved oxygen concentration were obtained during the spring thermal bar on an example of Barguzin Bay of Lake Baikal. The results of simulation showed

that the vertical flows generated by the spring thermal bar contributed to an increase in dissolved oxygen content in the thermoactive region of the bay. Due to the action of the thermal bar, areas with different levels of oxygen are formed in the body of water. There is not only a quantitative but also a qualitative difference between the oxygen distributions obtained for the thermoactive and the thermoinert regions. It has been also found that the wind speed and the wind duration affect the oxygen saturation of water at the thermal bar. The results of this study confirm the barrier function of the thermal bar.

Keywords: thermal bar, dissolved oxygen, temperature of maximum density, mathematical model, numerical experiment, lake ecosystem, Lake Baikal

Acknowledgments: This study was funded by the Russian Science Foundation (project No. 23-71-10020, <https://www.rscf.ru/en/project/23-71-10020/>).

For citation: Tsydenov, B.O. (2023) A mathematical model of dissolved oxygen transport during the thermal bar evolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 176–187 doi: 10.17223/19988621/86/14

Введение

Прогрессирующая антропогенная нагрузка ведет к негативным изменениям экосистем крупнейших водоемов планеты. В частности, в озере Байкал в последние годы отмечалось массовое развитие чужеродных нитчатых водорослей, которое связано с городскими бытовыми и промышленными стоками с высоким содержанием биогенных элементов [1, 2]. К числу природных явлений, способствующих аккумулярованию планктона, частиц мусора и прочих загрязнителей в прибрежной части водоема, относится *термобар*, возникающий в периоды весеннего прогрева и осеннего охлаждения водоема в силу специфики пресной воды – аномальной зависимости плотности от температуры [3, 4]. Ограничивая горизонтальный водообмен, термобар делит озеро на две обособленные области – *теплоактивную* и *теплоинертную* в прибрежной и открытой частях соответственно [5], – отличающиеся друг от друга по физическим, химическим и биологическим характеристикам. При этом вертикальные потоки, формирующиеся на месте термобара, благоприятствуют переносу биогенных элементов в глубоководную зону.

Важнейшим индикатором качества воды и благополучия водоема служит уровень растворенного кислорода. Кислород участвует в жизненном цикле гидробионтов, процессах окисления органических примесей и самоочищения водных систем. Резкое снижение содержания кислорода в воде может привести к эвтрофированию водоема и гибели эндемичных аэробных организмов. В связи с этим проблема создания численной модели, учитывающей динамику растворенного кислорода во время существования термобара, является актуальной для современного этапа развития математических методов в задачах лимнологии.

Настоящая работа нацелена на разработку и описание численной модели транспорта растворенного кислорода в пресноводном озере с учетом кислородного обмена с атмосферой и физического переноса вследствие плотностной неустойчивости, а также на получение пространственно-временных распределений прогностических переменных модели при развитии весеннего термобара на примере Баргузинского залива озера Байкал.

Математическая модель

Негидростатическая модель транспорта растворенного кислорода в пресноводном озере, учитывающая влияние силы Кориолиса, включает в себя следующие уравнения:

а) уравнение динамики растворенного кислорода

$$\frac{\partial O_2}{\partial t} + \frac{\partial u O_2}{\partial x} + \frac{\partial w O_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial O_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial O_2}{\partial z} \right) + F_{air-lake} d^{-1}; \quad (1)$$

б) уравнения количества движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2\Omega_z v - 2\Omega_y w; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u v}{\partial x} + \frac{\partial v w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + 2\Omega_x w - 2\Omega_z u; \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u w}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{g p}{\rho_0} + 2\Omega_y u - 2\Omega_x v; \quad (4)$$

в) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (5)$$

г) уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial w T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_p} \frac{\partial H_{sol}}{\partial z}; \quad (6)$$

д) уравнение баланса минерализации

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u S}{\partial x} + \frac{\partial w S}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial S}{\partial z} \right), \quad (7)$$

где O_2 – концентрация растворенного кислорода; u , v – горизонтальные компоненты скорости; w – вертикальная компонента скорости; D_x (K_x) и D_z (K_z) – коэффициенты турбулентной диффузии (вязкости) в соответствующих направлениях; Ω_x , Ω_y и Ω_z – компоненты вектора угловой скорости вращения Земли; g – ускорение свободного падения; d – глубина; c_p – удельная теплоемкость; T – температура; S – минерализация; p – давление; ρ_0 – плотность воды при стандартном атмосферном давлении, характерной температуре и минерализации.

Кислородообмен между атмосферой и озером описывается законом

$$F_{air-lake} = v k_{O_2} (O_2^* - O_2). \quad (8)$$

Для вычисления концентрации насыщения воды кислородом O_2^* используется аппроксимация эмпирических табличных данных [6] в диапазоне температур 0–20°C:

$$O_2^* = 456.96 - 12.86 \cdot T_C + 0.2771 \cdot T_C^2 - 0.0033 \cdot T_C^3, \quad (9)$$

где T_C – температура воды в °C.

Интенсивность перехода кислорода из газовой фазы в жидкую рассчитывается как [7]

$$v k_{O_2} = 0.31 U_{10}^2 \sqrt{\frac{Sc_{CO_2}}{Sc_{O_2}}}, \quad (8)$$

где $U_{10} = \sqrt{u_{10}^2 + v_{10}^2}$ – скорость ветра, Sc_{CO_2} и Sc_{O_2} – число Шмидта для CO_2 и O_2 соответственно. Для пресной воды

$$Sc_{O_2} = 1800.6 - 120.1 \cdot T_C + 3.7818 \cdot T_C^2 - 0.047608 \cdot T_C^3; \quad (9)$$

$$Sc_{CO_2} = 1911.1 - 118.11 \cdot T_C + 3.4527 \cdot T_C^2 - 0.04132 \cdot T_C^3. \quad (10)$$

Поглощение солнечной радиации рассчитывается по закону Бугера–Ламберта–Бэра:

$$H_{sol} = H_{Sol,0} (1 - r_s) \exp(-\varepsilon_{abs} d), \quad (11)$$

где $r_s \approx 0.2$ – коэффициент отражения воды, $\varepsilon_{abs} \approx 0.3 \text{ м}^{-1}$ – коэффициент поглощения.

Приток солнечной радиации на поверхность озера определяется соотношением

$$H_{Sol,0} = \begin{cases} S_0 \cdot (a_g - a_w) \cdot \cos \zeta [a(C) + b(C) \ln(\cos \zeta)], & \text{если } \cos \zeta > 0; \\ 0, & \text{если } \cos \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (12)$$

здесь $S_0 \approx 1367 \text{ Вт/м}^2$ – солнечная постоянная, $a(C), b(C)$ – эмпирические коэффициенты [8], зависящие от степени покрытия небесного свода облачностью S , ζ – зенитный угол Солнца, эмпирические функции a_g и a_w представляют соответственно молекулярное рассеяние и поглощение излучения парами воды и оксидами углерода [9].

Для расчета плотности в гравитационном члене уравнения (4) используется уравнение состояния Чена–Миллера [10], связывающее плотность воды с температурой, минерализацией и давлением. Оно справедливо в диапазоне $0 \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, $0 \leq S \leq 0.6 \text{ г/кг}$, $0 \leq p \leq 180 \text{ бар}$.

Замыкание системы уравнений (1)–(12) осуществляется с помощью алгебраических соотношений для определения турбулентной диффузии [11] и двухпараметрической k – ω –модели турбулентности Уилкокса [12].

Начальные и граничные условия

Начальные условия для уравнений (1)–(12) задаются в виде:

$$u = 0; v = 0; w = 0; O_2 = [O_2]_L; T = T_L; S = S_L \text{ при } t = 0,$$

где $[O_2]_L$, T_L и S_L – концентрация растворенного кислорода, температура и минерализация в озере соответственно; t – время. Начальное поле давления определяется из решения уравнений состояния и гидростатики с граничным условием на поверхности $p = p_a$ методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности.

Граничные условия имеют вид:

а) на поверхности озера

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{surf}^u}{\rho_0}; K_z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{surf}^v}{\rho_0}; w = 0; D_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{H_{net}}{\rho_0 \cdot c_p}; \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

где H_{net} – тепловой поток, состоящий из потоков длинноволновой радиации, явного и скрытого тепла [13]. Сдвиговое напряжение ветра на поверхности озера описывается законом

$$\tau_{surf}^u = c_{10}\rho_a \sqrt{v_{10}^2 + u_{10}^2} \cdot u_{10};$$

$$\tau_{surf}^v = c_{10}\rho_a \sqrt{v_{10}^2 + u_{10}^2} \cdot v_{10},$$

где ρ_a – плотность воздуха у поверхности воды; u_{10}, v_{10} – составляющие скорости ветра на высоте 10 м; $c_{10} = 1.3 \times 10^{-3}$.

б) на твердых границах

$$u = 0; v = 0; w = 0; \frac{\partial O_2}{\partial n} = 0; \frac{\partial T}{\partial n} = 0; \frac{\partial S}{\partial n} = 0,$$

где n – направление внешней нормали к области;

в) на границе входа реки

$$u = u_R; v = 0; w = 0; O_2 = [O_2]_R; T = T_R; S = S_R,$$

где u_R – скорость притока в устье реки; $[O_2]_R, T_R$ и S_R – концентрация растворенного кислорода, температура и минерализация воды в реке соответственно.

г) на открытой границе задаются условия радиационного типа [14]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (\varphi = u, v, O_2, T, S)$$

и простые градиентные условия

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Численный метод решения уравнений модели

Решение задачи опирается на метод конечного объема, согласно которому скалярные величины (концентрация растворенного кислорода, температура, минерализация, турбулентные характеристики) определяются в центре сеточной ячейки, а компоненты вектора скорости – в средних точках на гранях ячеек. Для приближения расчетной области к озерной котловине используется метод блокировки фиктивных областей [15]: за счет больших значений коэффициентов вязкости в выключенной зоне сводятся к нулю значения компонентов скорости.

В основе численного алгоритма нахождения распределения растворенного кислорода, температуры, поля течения лежит разностная схема Кранка–Николсон. Аппроксимация конвективных слагаемых в уравнениях производится по противопотоковой схеме QUICK [16]. Для согласования полей скорости и давления используется оригинальный метод SIMPLED [17] для течений с плавучестью, который является модификацией известного алгоритма SIMPLE Патанкара [15]. Процедура SIMPLED корректирует поля скорости и давления с учетом вариации плотности в гравитационном члене уравнения (4). Системы разностных уравнений решаются методом Н.И. Булеева [18] на каждом шаге по времени.

Область исследования и параметры задачи

В качестве области исследования выбрано вертикальное сечение Баргузинского залива озера Байкал, начало системы координат совпадает с устьем р. Баргузин (рис. 1, а). Вычислительная область имеет длину 20 км и глубину 100 м

(рис. 1, *b*). Расчетная область покрыта равномерной ортогональной сеткой с шагами $h_x = 25$ м и $h_z = 2.5$ м. Шаг по времени – 10 с.

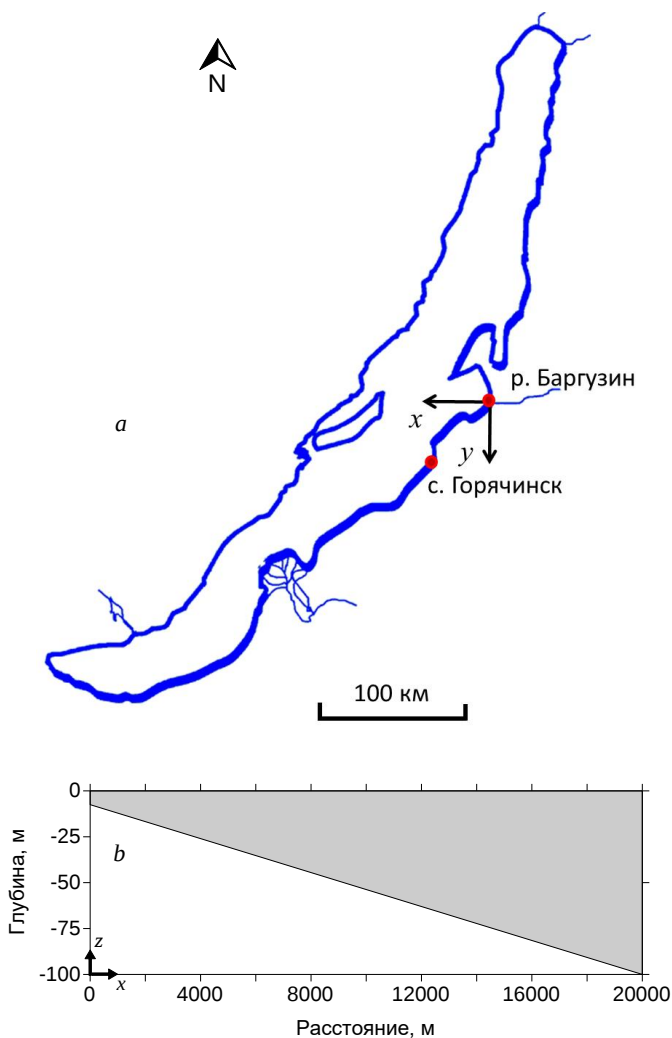


Рис. 1. Схема разреза (*a*) и вычислительная область (*b*)
Fig. 1. Lake Baikal cross-section (*a*) and calculation domain (*b*)

Начальное распределение температуры воды в озере принято равным 3°C , что приблизительно соответствует осредненным данным вертикального распределения температуры верхнего 100-метрового слоя в средней котловине озера Байкал в июне месяце [19]. Начальная концентрация растворенного кислорода в озере соответствует $312 \text{ ммоль } \text{O}_2/\text{м}^3$. Температура воды в устье р. Баргузин монотонно растет с 12 до 18°C . Минерализация воды в озере составляет 96 мг/л [19], в реке – 149 мг/л [20]. Скорость течения р. Баргузин при впадении в залив – 0.5 см/с . Коэффициенты горизонтальной диффузии и вязкости заданы в виде константы:

$D_x = K_x = 2.5 \text{ м}^2/\text{с}$ [21]. Сдвиговое напряжение ветра и компоненты тепловых потоков, контактирующих с водной поверхностью, вычислены согласно данным из архива погодных условий метеостанции п. Усть-Баргузин за июнь 2023 г. [22]. Характеристики ветра представлены на рис. 2.

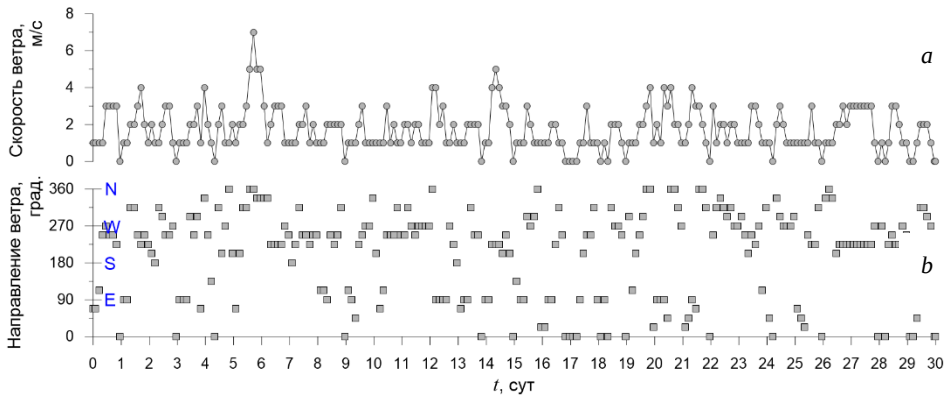


Рис. 2. Скорость (a) и направление (b) ветра в июне 2023 г.

Fig. 2. Wind speed (a) and wind direction (b) in June 2023

Результаты моделирования

Пространственно-временные распределения температуры, полученные на основе численного моделирования, указывают, что на 3-и сут термобар располагался на расстоянии 2.4 км от устья р. Баргузин (рис. 3, *aI*). Еще через 3 сут он продвинулся на 1.8 км дальше (рис. 3, *бI*). На 9-е сут фронт термобара распространился на 6 км от берега (рис. 3, *вI*). Приведенные на рис. 3 изотермы, представляющие собой наклонные профили, направленные от подводного склона (на дне) в сторону открытого озера (на поверхности), имеют классическую структуру [3, 5]. Важно заметить, что кратковременное усиление ветра северного направления до 7 м/с на 6-е сут отразилось на распределении температуры в теплоактивной области водоема (см. рис. 3, *бI*).

Активное поступление кислорода в водную толщу происходит за счет плотностной неустойчивости, генерируемой термобаром. Максимальная концентрация растворенного кислорода локализована не на самом термобаре, а смещена в сторону теплоактивной области, где термобар запускал процессы перемешивания ранее. Стоит отметить, что ветровая активность на 6-е сут не только оказала влияние на поле температуры в теплоактивной области (см. рис. 3, *бI*), но и способствовала горизонтальному распределению кислорода в теплоинертной области (см. рис. 3, *вI*). С развитием гидродинамических процессов расстояние между местоположением термического фронта и кислородным максимумом увеличивается. Наибольшее значение концентрации кислорода сосредоточено в приповерхностном слое на 3-и сут на расстоянии 2 км ($327 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$), на 6-е сут – 3.5 км ($342 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$) и на 9-е сут – 4.2 км ($346 \text{ ммоль O}_2/\text{м}^3$) от устья р. Баргузин (см. рис. 3, справа).

Представленный на рис. 4 график зависимости позиции температуры максимальной плотности на поверхности озера от времени (пунктирная линия) демонстрирует общую динамику развития термобара. Вследствие доминирующего влияния речного стока на гидрофизические процессы в приустьевой области поведение термобара менее чувствительно к атмосферным факторам. Однако по мере удаления термического фронта от устья реки эффект тепловых потоков и ветрового трения, воздействующих на водное зеркало, усиливается: в дневное время прогрев поверхностных вод ускоряет горизонтальное распространение термобара, и наоборот, в ночное время охлаждение водоема его замедляет. После 8-х сут из-за влияния ветра противоположного направления и дефицита тепловой энергии ночью наблюдается перемещение термобара в обратном направлении (в сторону берега).

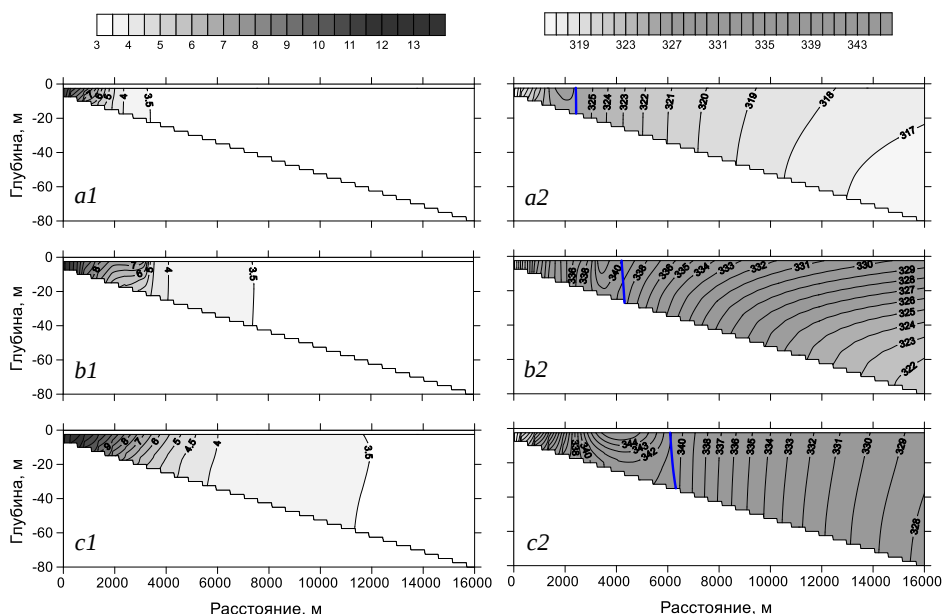


Рис. 3. Распределение температуры [$^{\circ}\text{C}$] (1) и растворенного кислорода [$\text{ммоль O}_2/\text{м}^3$] (2) на 3-й (a), 6-й (b) и 9-й (c) сутки моделирования (жирной линией показан профиль температуры максимальной плотности)

Fig. 3. Temperature [$^{\circ}\text{C}$] (1) and dissolved oxygen [$\text{ммоль O}_2/\text{м}^3$] (2) distribution on day (a) 3, (b) 6, and (c) 9. The thick line is the maximum density temperature profile

Рассчитанные значения концентрации растворенного кислорода в области расположения температуры максимальной плотности (рис. 4, сплошная линия) показывают, что интенсивное обогащение воды кислородом происходит за счет силы и продолжительности ветра (рис. 2). На 1-е сут достаточно длительная активность ветров юго-западных направлений (3 м/с) привела к повышению количества кислорода на месте термобара на 6 ммоль $\text{O}_2/\text{м}^3$, а на 6-е сут в результате форсинга северного ветра со скоростью 7 м/с (что является максимумом в июне 2023 г.) уровень кислорода увеличился с 330.5 до 340.5 ммоль $\text{O}_2/\text{м}^3$.

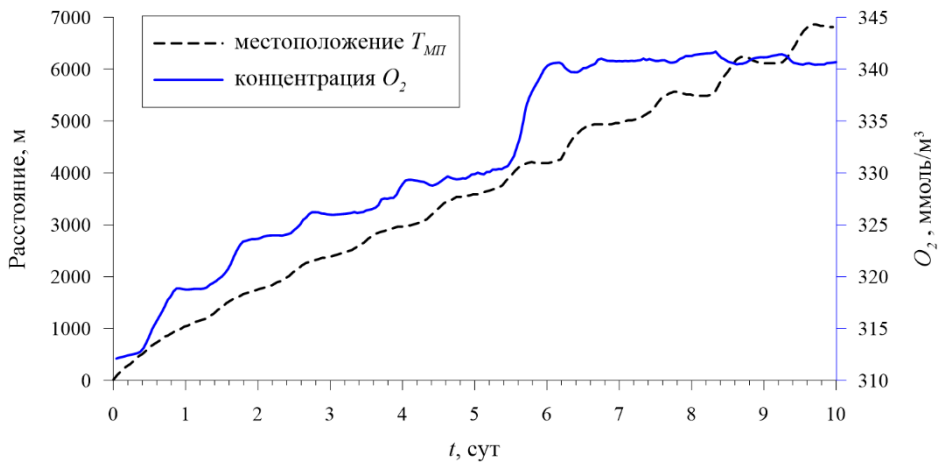


Рис. 4. Динамика горизонтального перемещения области расположения температуры максимальной плотности ($T_{МП}$) на поверхности озера (пунктирная линия) и концентрация растворенного кислорода (O_2) в этой области (сплошная линия)

Fig. 4. Dynamics of the horizontal motion of the maximum density temperature position (dashed line) and the dissolved oxygen (O_2) concentration at this position (solid line) on the lake surface

Дальнейшая тенденция роста содержания кислорода в рассматриваемой области прекратилась, его концентрация на 6–10-е сут варьировала в диапазоне 339.7–341.9 ммоль O_2/m^3 .

Заключение

Предложенная математическая модель позволяет воспроизводить процессы транспорта растворенного кислорода в пресноводном озере во время развития термобара. Результаты моделирования показали, что генерируемые весенним термобаром вертикальные потоки способствуют увеличению концентрации растворенного кислорода в теплоактивной области Баргузинского залива озера Байкал. Вследствие деятельности термобара в водоеме формируются участки с разным уровнем кислорода. Между полученными для теплоактивной и теплоинертной областей распределениями прогностических переменных модели наблюдается не только количественное, но и качественное различие. Также установлено, что скорость и длительность ветра оказывают влияние на динамику насыщения воды кислородом на термическом фронте. Результаты исследования подтверждают барьерную функцию термобара.

Список источников

1. Volkova E.A., Bondarenko N.A., Timoshkin O.A. Morphotaxonomy, distribution and abundance of Spirogyra (Zygnematophyceae, Charophyta) in Lake Baikal, East Siberia // Phycologia. 2018. V. 57, № 3. P. 298–308. doi: 10.2216/17-69.1
2. Timoshkin O.A., Bondarenko N.A., Kulikova N.N., Lukhnev A.G., Maximova N.V., Malnik V.V., Moore M.V., Nepokrytykh A.V., Obolkina L.A., Rozhkova N.A., Shirokaya A.A., Tomberg I.V., Zaitseva E.P., Bukshuk N.A., Poberezhnaya A.E., Gula M.I., Timoshkina E.M., Volkova E.A.,

- Zvereva Yu.M. Protection of Lake Baikal requires more stringent, not more lenient, environmental regulation // *J. Great Lakes Res.* 2019. V. 45, № 3. P. 401–402. DOI: 10.1016/j.jglr.2019.04.002
3. Forel F.A. La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879–1880. Lac Léman // *L'Écho des Alpes.* 1880. № 3. P. 149–161.
4. Блохина Н.С., Показеев К.В. Уникальное природное явление - термобар // *Земля и Вселенная.* 2015. № 6. С. 78–88.
5. Тихомиров А.И. Термика крупных озер. Л. : Наука, 1982. 232 с.
6. The Engineering ToolBox. Oxygen – solubility in fresh and sea water vs. temperature. URL: https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d_841.html (accessed: 14.08.2023).
7. Wanninkhof R. Relationship between wind speed and gas exchange // *J. Geophys. Res.* 1992. № 97. P. 7373–7382. doi: 10.1029/92JC00188
8. Aleksandrova M.P., Gulev S.K., Sinit syn A.V. An improvement of parametrization of short-wave radiation at the sea surface on the basis of direct measurements in the Atlantic // *Russian Meteorology and Hydrology.* 2007. V. 32, № 4. P. 245–251. doi: 10.3103/S1068373907040048
9. Hurley P. The air pollution model (TAPM) Version 2. Part 1: Technical description. CSIRO Atmospheric Research, 2002.
10. Chen C.T., Millero F.G. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only limnologies range // *Limnol. Oceanogr.* 1986. V. 31, № 3. P. 657–662.
11. Цыденов Б.О., Старченко А.В. Применение двухпараметрической $k-\omega$ модели турбулентности для исследования явления термобара // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2014. № 5 (31). С. 104–113.
12. Wilcox D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA J.* 1988. V. 26, № 11. P. 1299–1310. doi: 10.2514/3.10041
13. Tsydenov B.O. A numerical study of the thermal bar in shallow water during the autumn cooling // *J. Great Lakes Res.* 2019. V. 45, № 4. P. 715–725. doi: 10.1016/j.jglr.2019.05.012
14. Orlanski I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows // *J. Comput. Phys.* 1976. V. 21, № 3. P. 251–269. doi: 10.1016/0021-9991(76)90023-1
15. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press, 1980. 197 p.
16. Leonard B. A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1979. V. 19, № 1. P. 59–98. doi: 10.1016/0045-7825(79)90034-3
17. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake // *Ocean Modelling.* 2016. V. 104. P. 73–83. doi: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009
18. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М. : Физматлит, 1995. 288 с.
19. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. Physical Limnology of Lake Baikal: A Review. Irkutsk–Okayama, 1994. 81 p.
20. Вотинцев К.К. Гидрохимия // *Проблемы Байкала* / ред. Г.И. Галазий, К.К. Вотинцев. Новосибирск, 1978. Т. 16, № 36. С. 124–146.
21. Holland P.R., Kay A., Botte V. Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake // *J. Mar. Syst.* 2003. V. 43, № 1-2. P. 61–81. doi: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7
22. Расписание Погоды. URL: <https://gp5.ru/> (дата обращения: 14.08.2023).

References

1. Volkova E.A., Bondarenko N.A., Timoshkin O.A. (2018) Morphotaxonomy, distribution and abundance of Spirogyra (Zygnematophyceae, Charophyta) in Lake Baikal, East Siberia. *Phycologia.* 57(3). pp. 298–308. DOI: 10.2216/17-69.1.

2. Timoshkin O.A., Bondarenko N.A., Kulikova N.N., Lukhnev A.G., Maximova N.V., Malnik V.V., Moore M.V., Nepokrytykh A.V., Obolkina L.A., Rozhkova N.A., Shirokaya A.A., Tomberg I.V., Zaitseva E.P., Bukshuk N.A., Poberezhnaya A.E., Gula M.I., Timoshkina E.M., Volkova E.A., Zvereva Yu.M. (2019) Protection of Lake Baikal requires more stringent, not more lenient, environmental regulation. *Journal of Great Lakes Research*. 45(3). pp. 401–402. DOI: 10.1016/j.jglr.2019.04.002.
3. Forel F.A. (1880) La congélation des lacs Suisses et savoyards pendant l'hiver 1879–1880. Lac Léman. *L'Écho des Alpes*. 3. pp. 149–161.
4. Blokhina N.S., Pokazeev K.V. (2015) Unikal'noye prirodnoye yavleniye – termobar [A unique natural phenomenon, the thermal bar]. *Zemlya i Vseennaya*. 6. pp. 78–88.
5. Tikhomirov A. I. (1982) *Termika krupnykh ozer* [Thermal regime of large lakes]. Leningrad: Nauka.
6. The Engineering ToolBox. Oxygen – solubility in fresh and sea water vs. temperature [Electronic resource]. URL: https://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-solubility-water-d_841.html (accessed 14.08.2023).
7. Wanninkhof R. (1992) Relationship between wind speed and gas exchange. *Journal of Geophysical Research*. 97. pp. 7373–7382. DOI: 10.1029/92JC00188.
8. Aleksandrova M.P., Gulev S.K., Sinitsyn A.V. (2007) An improvement of parametrization of short-wave radiation at the sea surface on the basis of direct measurements in the Atlantic. *Russian Meteorology and Hydrology*. 32(4). pp. 245–251. DOI: 10.3103/S1068373907040048.
9. Hurley P. (2002) *The air pollution model (TAPM) Version 2. Part 1: technical description*. CSIRO Atmospheric Research.
10. Chen C.T., Millero F.G. (1986) Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range. *Limnology and Oceanography*. 31(3). pp. 657–662.
11. Tsydenov B.O., Starchenko A.V. (2014) Primenenie dvukhparametricheskoy $k-\omega$ modeli turbulentnosti dlya issledovaniya yavleniya termobara [Application of the two-parametric $k-\omega$ turbulence model for studying the thermal bar phenomenon]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 5(31). pp. 104–113.
12. Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*. 26(11). pp. 1299–1310. DOI: 10.2514/3.10041.
13. Tsydenov B.O. (2019) A numerical study of the thermal bar in shallow water during the autumn cooling. *Journal of Great Lakes Research*. 45(4). pp. 715–725. DOI: 10.1016/j.jglr.2019.05.012.
14. Orlanski I. (1976) A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*. 21(3). pp. 251–269. DOI: 10.1016/0021-9991(76)90023-1.
15. Patankar S. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC Press.
16. Leonard B. (1979) A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 19(1). pp. 59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3.
17. Tsydenov B.O., Kay A., Starchenko A.V. (2016) Numerical modeling of the spring thermal bar and pollutant transport in a large lake. *Ocean Modelling*. 104. pp. 73–83. DOI: 10.1016/j.ocemod.2016.05.009.
18. Il'in V.P. (1995) *Metody nepolnoy faktorizatsii dlya resheniya algebraicheskikh sistem* [Methods of incomplete factorization for solving algebraic systems]. Moscow: Fizmatlit.
19. Shimaraev M.N., Verbolov V.I., Granin N.G., Sherstyankin P.P. (1994) Physical Limnology of Lake Baikal: A Review. Irkutsk–Okayama.
20. Votintsev K.K. (1978) Gidrokimiya [Hydrochemistry], in: Galazii, G.I., Votintsev, K.K. (Eds.), *Problemy Baikala* [The problems of Lake Baikal], Novosibirsk. pp. 124–146.

21. Holland P.R., Kay A., Botte V. (2003) Numerical modelling of the thermal bar and its ecological consequences in a river-dominated lake. *Journal of Marine Systems*. 43(1–2). pp. 61–81. DOI: 10.1016/S0924-7963(03)00089-7.
22. Raspisaniye Pogody [Electronic resource]. URL: <https://rp5.ru/> (accessed 14.08.2023).

Сведения об авторе:

Цыденов Баир Олегович – кандидат физико-математических наук, заведующий научно-исследовательской лабораторией вычислительной геофизики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tsydenov@math.tsu.ru

Information about the author:

Tsydenov Bair O. (Candidate of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: tsydenov@math.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 19.09.2022; принята к публикации 04.12.2023

The article was submitted 19.09.2022; accepted for publication 04.12.2023