УДК 519.176 DOI 10.17223/20710410/60/7

ПОИСК СЕМЕЙСТВА ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ В ГРАФАХ С ПОЛУСТЕПЕНЯМИ ВЕРШИН, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИМИ k

А. А. Медведев

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

E-mail: medvedevaa@student.bmstu.ru

Исследована алгоритмическая сложность задачи о поиске семейства простых циклов, обходящих каждую вершину орграфа с полустепенями вершин, не превосходящими k, при наличии дополнительных ограничений на вид списка смежности. Рассмотрены поисковый и оптимизационный её варианты. Показана параметрически полиномиальная разрешимость задачи в обоих вариантах, предложены алгоритмы со временем работы $O(nk^2 + n\log_2 n)$, $O(n(k^2+k) + n\log_2 n)$ и $O(n)$ для различных типов ограничений; n — количество вершин орграфа.

Ключевые слова: *ориентированные графы, простые циклы, задачи поиска, оптимизация, класс P, параметрическая сложность, полиномиальная разрешимость.*

FINDING A FAMILY OF SIMPLE CIRCUITS IN GRAPHS WITH VERTEX SEMIDEGREES BOUNDED BY k

A. A. Medvedev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

We study the algorithmic complexity of finding a family of simple circuits passing every vertice of a digraph with semidegree bounded by k. The problem is considered in two variants: as a search and as an optimization problem. Parametrically polynomial solvability of the problem is proved in both variants, Algorithms with complexity $O(nk^2 + n\log_2 n)$, $O(n(k^2+k) + n\log_2 n)$ and $O(n)$ for various types of constraints are proposed, where n is the number of digraph vertices.

Keywords: *digraphs, simple circuits, search problems, optimization, P class, parametrical complexity, polynomial solvability.*

Введение

Рассматриваются задачи о поиске в орграфах некоторых специальных классов остовного подграфа, состоящего из непересекающихся простых циклов. Эта задача представляет собой обобщение задачи о поиске гамильтонова цикла и исследуется как в разрешимостном, так и в оптимизационном вариантах. К настоящему времени доказано, что разрешимостная задача о гамильтоновом цикле является NP-полной в общей постановке [1], на трёхсвязных 3-регулярных двудольных графах [2], подграфах квадратных решёток [3] и кубических подграфах квадратных решёток [4], а также орграфах с полустепенями вершин, не превосходящими 2 [5], но принадлежит к классу полиномиально разрешимых в постановке на четырёхсвязных планарных графах [6];

выведены проверяемые за полиномиальное время достаточные условия гамильтоновости: Дирака — Оре [7, 8], Гуйя — Ури [9], Woodall [10], Christofides [11], Keevash [12], Kelly [13]. В работах [14–16] исследуются вопросы поиска простых циклов вообще и гамильтоновых в частности.

1. Определения

Определения из теории графов приводятся в соответствии с [17].

Определение 1. Ориентированным графом G называется пара множеств V и E, V — множество вершин орграфа G, E — множество дуг, т. е. упорядоченных пар вида (v_i, v_j), $v_i, v_j \in V$, $i \neq j$.

Определение 2. Неориентированным графом (или просто графом) G называется пара множеств V и E, V — множество вершин, E — множество рёбер, т. е. неупорядоченных пар вида $\{v_i, v_j\}$, $v_i, v_j \in V$, $i \neq j$.

Определение 3. Вершинно-простая цепь в ориентированном графе $G = (V, E)$ — последовательность из m вершин и $m-1$ дуг $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m$, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$ для всех $i = 1, \ldots, m-1$ и если $i \neq j$, то $v_i \neq v_j$, то есть все вершины различны.

Определение 4. Вершинно-простой цикл в ориентированном графе $G = (V, E)$ — последовательность из $(m+1)$ вершин и m дуг $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_m, e_m, v_1$, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$ для всех $i = 1, \ldots, m-1$, $e_m = (v_m, v_1)$ и если $i \neq j$ и $i, j \leqslant m$, то $v_i \neq v_j$, то есть все вершины, за исключением первой и последней, различны.

Определение 5. Вершинно-простые цепи и циклы называются неориентированными, если элементы e_i в них представляют собой неупорядоченные пары вида $\{v_p, v_q\}$.

Определение 6. Ориентированный (неориентированный) граф $G = (V, E)$ называется взвешенным, если для него определена функция $w(v, u)$, $v, u \in V$, равная некоторому значению из $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, если $(v, u) \in E$, и 0 в противном случае.

Определение 7. Пусть элементы множества вершин V пронумерованы. Матрицей весов W взвешенного орграфа (графа) называется такая таблица размера $|V| \times |V|$, что $W_{ij} = w(v_i, v_j)$.

Определение 8. Пусть элементы множества вершин V пронумерованы. Матрицей смежности A взвешенного орграфа называется такая таблица размера $|V| \times |V|$, что $A_{ij} = 1$, если $(v_i, v_j) \in E$, и $A_{ij} = 0$ в противном случае.

Определение 9. Пусть множество V графа $G = (V, E)$ упорядочено. Списком смежности этого графа называется набор из $|V|$ списков, по одному для каждой вершины из V; список, соответствующий вершине $v \in V$, состоит из номеров всех вершин u, для которых $(v, u) \in E$.

Определение 10 (орграф класса kRS). Ориентированным графом $G = (V, E)$ класса kRS назовём всякий орграф, представимый в виде списка смежности следующего вида: для каждой вершины существует лишь $k-1$, за исключением её самой, имеющих в точности такой же список смежности, и ни одна другая вершина, кроме этих k, не смежна по исходящей дуге с теми же вершинами, с которыми смежны они; полустепени всех вершин орграфа, как входящие, так и исходящие, равны k. То есть список смежности такого орграфа имеет структуру

$$\begin{aligned}
&u_{1,i} : v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{k,i},\\
&u_{2,i} : v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{k,i},\\
&\ldots\\
&u_{k,i} : v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{k,i},
\end{aligned} \tag{1}$$

где $|V|$ кратно k; $V \geqslant 2k$; $i = 1, \ldots, |V|/k$; если $p \neq q$, то $u_{p,i} \neq u_{q,i}$ и $v_{p,i} \neq v_{q,i}$, $p, q = 1, \ldots, k$; если $i \neq j$, то $\{u_{1,i}, \ldots, u_{k,i}\} \cap \{u_{1,j}, \ldots, u_{k,j}\} = \varnothing$ и $\{v_{1,i}, \ldots, v_{k,i}\} \cap \cap \{v_{1,j}, \ldots, v_{k,j}\} = \varnothing$.

Определение 11 (граф класса kRS). Неориентированным графом $G = (V, E)$ класса kRS назовём всякий граф, компоненты связности которого являются полными двудольными графами $K_{k,k}$, или, иначе, граф, представимый в виде списка смежности следующего вида:

$$\begin{aligned}
&u_{1,i} : v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{k,i},\\
&u_{2,i} : v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{k,i},\\
&\ldots\\
&u_{k,i} : v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{k,i},\\
&\\
&v_{1,i} : u_{1,i}, u_{2,i}, \ldots, u_{k,i},\\
&v_{2,i} : u_{1,i}, u_{2,i}, \ldots, u_{k,i},\\
&\ldots\\
&v_{k,i} : u_{1,i}, u_{2,i}, \ldots, u_{k,i}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $|V|$ кратно $2k$; $i = 1, \ldots, |V|/(2k)$; если $p \neq q$, то $u_{p,i} \neq u_{q,i}$ и $v_{p,i} \neq v_{q,i}$, $p, q = 1, \ldots, k$; если $i \neq j$, то $\{u_{1,i}, \ldots, u_{k,i}\} \cap \{u_{1,j}, \ldots, u_{k,j}\} = \varnothing$ и $\{v_{1,i}, \ldots, v_{k,i}\} \cap \cap \{v_{1,j}, \ldots, v_{k,j}\} = \varnothing$.

Определение 12. Исходящей полустепенью (полустепенью исхода) $\deg^{\text{out}} u$ вершины $u \in V$ орграфа $G = (V, E)$ назовём количество дуг вида $(u, v) \in E$, $v \in V$. Входящей степенью (полустепенью захода) $\deg^{\text{in}} u$ будем называть количество дуг вида $(v, u) \in E$, $v \in V$.

Определение 13 (орграф класса kS). Орграфом $G = (V, E)$ класса kS назовём всякий орграф, такой, что:

1) $|V|$ кратно k, $V \geqslant 2k$;
2) $\forall v \in V (\deg^{\text{out}} v \leqslant k \ \& \ \deg^{\text{in}} v \leqslant k)$;
3) $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{|V|/k} \ \wedge \ \forall i, j \in \{1, \ldots, |V|/k\} (i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \varnothing) \ \wedge \ \exists i \in \in \{1, \ldots, |V|/k\} (|V_i| = k)$;
4) $V = U_1 \cup \ldots \cup U_{|V|/k} \ \wedge \ \forall i, j \in \{1, \ldots, |V|/k\} (i \neq j \Rightarrow U_i \cap U_j = \varnothing) \ \wedge \ \exists i \in \in \{1, \ldots, |V|/k\} (|U_i| = k)$;
5) $\forall i \in \{1, \ldots, |V|/k\} \, (V_i \cap U_i = \varnothing)$;
6) $\forall v, u \in V \big((v, u) \in E \Rightarrow \exists i \, (v \in V_i \wedge u \in U_i)\big)$;
7) $\forall i \in \{1, \ldots, |V|/k\} \, \exists v \in V_i \, (\deg^{\text{out}} v = k)$.

Пример kS-графа приведён на рис. 1.

Определение 14 (задача НСЦ-k, неоптимизационная). Пусть дан взвешенный ориентированный или неориентированный граф $G = (V, E)$ класса kRS или kS. Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы каждая вершина из V содержалась ровно в одном из них.

Определение 15 (задача ОНСЦ-k, оптимизационная). Пусть дан взвешенный ориентированный или неориентированный граф $G = (V, E)$ класса kRS или kS и вещественное число q. Требуется найти такой набор вершинно-простых циклов, чтобы

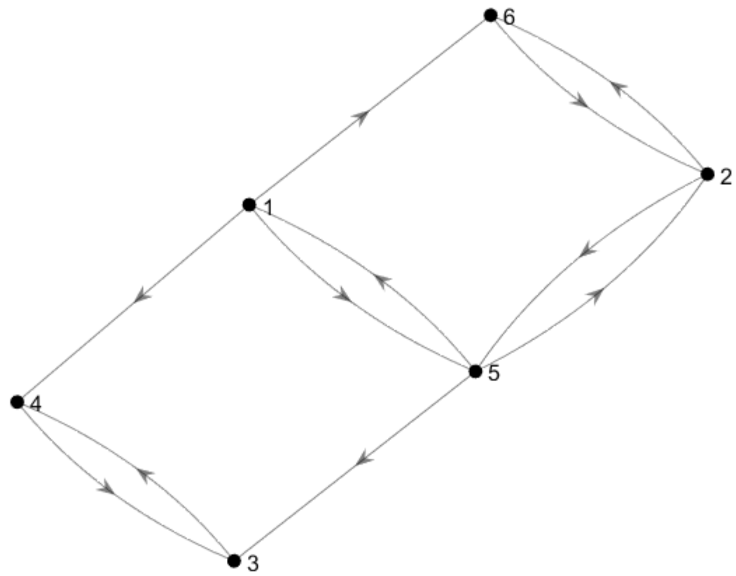

Рис. 1. Пример kS-орграфа: $k = 3$, $V_1 = \{1, 2, 3\}$, $V_2 = \{4, 5, 6\}$, $U_1 = \{4, 5, 6\}$, $U_2 = \{1, 2, 3\}$

каждая вершина из V содержалась ровно в одном из них, а суммарный вес всех дуг, содержащихся в циклах набора, превосходил q.

Определение 16. Ориентированный или неориентированный граф $G = (V, E)$ называется двудольным, если множество V можно разбить на две части U_1 и U_2, такие, что $U_1 \cup U_2 = V$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ и ни одна вершина из U_1 не смежна никакой другой вершине из U_1, равно как ни одна вершина из U_2 не смежна никакой другой вершине из U_2.

Определение 17. Паросочетанием в ориентированном или неориентированном графе G называется набор попарно несмежных дуг (рёбер).

Определение 18 (задача о назначениях, или о паросочетаниях). Имеется неположительная (или неотрицательная) матрица весов двудольного орграфа (графа). Требуется найти максимальное совершенное паросочетание, то есть такое паросочетание, чтобы вес его был наибольшим возможным и каждая вершина орграфа (графа) являлась началом или концом какой-либо дуги (ребра) этого паросочетания.

2. Задача о семействе циклов в kRS-орграфе

Лемма 1 [18]. Пусть дан взвешенный ориентированный граф G; всякий его остовный подграф, имеющий для каждой вершины ровно одну исходящую и одну входящую дугу, является семейством вершинно-простых циклов, обходящим все вершины графа G. Если такого семейства граф G не содержит, то нет и остовного подграфа, обладающего указанным свойством.

Теорема 1. Задача ОНСЦ-k на kRS-орграфе может быть решена за время $O(nk^2 + n \log_2 n)$.

Доказательство. Примем за элементарные операции (выполняемые за время $O(1)$) просмотр элемента в списке смежности и сложение двух чисел. Пусть $|V| = n$. Матрица весов орграфа имеет n/k групп по k строк, причём в строках из разных групп нет ни одного ненулевого элемента на одной и той же позиции.

При поиске семейства циклов, являющегося решением, в каждой группе строк надо выбрать k элементов с наибольшей суммой из разных строк и столбцов. Получаем задачу о паросочетаниях, которая может быть решена с помощью венгерского алгоритма [19] за время $O(k^3)$. В результате получим семейство циклов с наибольшим возможным весом. Если этот вес превосходит q, то полученное семейство есть решение задачи.

Группировка строк по блокам простой сортировкой потребует $O(n\log_2 n)$ операций, поиск решений для всех блоков — $O((n/k)k^3) = O(nk^2)$ операций. Итого для решения необходимо время $O(n\log_2 n) + O(nk^2) = O(nk^2 + n\log_2 n)$. ■

Следствие 1. Задача НСЦ-k на kRS-орграфе может быть решена за время $O(nk^2 + n\log_2 n)$.

Доказательство. Чтобы найти решение задачи НСЦ-k, достаточно решить на том же орграфе задачу ОНСЦ-k при $q = -\infty$. ■

Теорема 2. Задача НСЦ-k на kRS-орграфе может быть решена за время $O(n)$.

Доказательство. Рассмотрим ограф класса kRS. Для каждой группы строк вида (1) (для каждого i) выберем дуги $(u_{p,i}, v_{p,i})$, $p = 1,\ldots,k$, $i = 1,\ldots,k$. Получим подграф, в котором $\deg^{\text{in}} v = \deg^{\text{out}} v = 1$. Такой подграф, согласно лемме 1, является семейством вершинно-простых циклов, обходящим единожды все вершины рассматриваемого орграфа.

Выбор k дуг требует времени $O(k)$, количество групп, в которых он проводится, равно n/k. Таким образом, поиск решения потребует времени $O(n)$. ■

Пример 1. Пусть $q = 26$. Рассмотрим орграф, заданный следующим списком смежности (вес соответствующей дуги указан в фигурных скобках):

$$\begin{array}{ll}
4: & 1\{1\}, 2\{1\}, 3\{1\};\\
5: & 1\{-1\}, 2\{-2\}, 3\{5\};\\
6: & 1\{1\}, 2\{-7\}, 3\{3\};\\
1: & 4\{1\}, 5\{-1\}, 6\{10\};\\
2: & 4\{5\}, 5\{7\}, 6\{-8\};\\
3: & 4\{3\}, 5\{2\}, 6\{2\}.
\end{array}$$

Имеем разбиение строк на группы $\{4,5,6\}$ и $\{1,2,3\}$. Для каждой найдём паросочетание с максимальной суммой весов с помощью венгерского алгоритма:

$$\begin{array}{ll}
1) & \max S_1 = w(4,2) + w(5,3) + w(6,1) = 7;\\
2) & \max S_2 = w(1,6) + w(2,5) + w(3,4) = 20.
\end{array}$$

Таким образом, максимальное семейство циклов задаётся набором дуг $\{(4,2),(5,3),(6,1),(1,6),(2,5),(3,4)\}$. Оно состоит из двух циклов: 1) $1-6-1$ и 2) $2-5-3-4-2$; их общий вес равен 27.

Проверим решение, найдя максимальное семейство циклов поиском в глубину. Имеем следующие семейства (в скобках указан общий вес):

$$\begin{array}{llll}
\{1-4-1, 2-5-2, 3-6-3\} & (12); & \{1-4-1, 2-5-3-6-2\} & (9);\\
\{1-4-2-5-1, 3-6-3\} & (13); & \{1-4-2-5-3-6-1\} & (17);\\
\{1-4-3-6-2-5-1\} & (3); & \{1-4-3-6-1, 2-5-2\} & (10);\\
\{1-4-1, 2-6-3-5-2\} & (-3); & \{1-4-1, 2-6-2, 3-5-3\} & (-6);\\
\{1-4-2-6-3-5-1\} & (-2); & \{1-4-2-6-1, 3-5-3\} & (2);
\end{array}$$

$\{1-4-3-5-1,2-6-2\}$	(-12);	$\{1-4-3-5-2-6-1\}$	(-5);
$\{1-5-2-4-1,3-6-3\}$	(8);	$\{1-5-3-6-2-4-1\}$	(5);
$\{1-5-1,2-4-2,3-6-3\}$	(9);	$\{1-5-3-6-1,2-4-2\}$	(13);
$\{1-5-1,2-4-3-6-2\}$	(-1);	$\{1-5-2-4-3-6-1\}$	(6);
$\{1-5-2-6-3-4-1\}$	(-4);	$\{1-5-3-4-1,2-6-2\}$	(-7);
$\{1-5-1,2-6-3-4-2\}$	(-3);	$\{1-5-3-4-2-6-1\}$	(1);
$\{1-5-1,2-6-2,3-4-3\}$	(-13);	$\{1-5-2-6-1,3-4-3\}$	(-6);
$\{1-6-3-5-2-4-1\}$	(19);	$\{1-6-2-4-1,3-5-3\}$	(16);
$\{1-6-3-5-1,2-4-2\}$	(20);	$\{1-6-1,2-4-2,3-5-3\}$	(24);
$\{1-6-2-4-3-5-1\}$	(10);	$\{1-6-1,2-4-3-5-2\}$	(17);
$\{1-6-3-4-1,2-5-2\}$	(22);	$\{1-6-2-5-3-4-1\}$	(19);
$\{1-6-3-4-2-5-1\}$	(23);	$\{1-6-1,2-5-3-4-2\}$	(27);
$\{1-6-2-5-1,3-4-3\}$	(13);	$\{1-6-1,2-5-2,3-4-3\}$	(20).

Максимальным является семейство $\{1-6-1,2-5-3-4-2\}$ с весом 27, что совпадает с решением, полученным на основании теоремы 1.

3. Задача о семействе циклов в kRS-графе

Теорема 3. Задача НСЦ-k на kRS-графе может быть решена за время $O(n)$.

Доказательство. Рассмотрим список смежности (2) произвольного kRS-графа. Для каждого $i=1,\ldots,n/(2k)$ выберем рёбра $\{u_{p,i},v_{p,i}\}$, $\{u_{p,i},v_{p+1,i}\}$, $p=1,\ldots,k{-}1$, а также рёбра $\{u_{k,i},v_{1,i}\}$ и $\{u_{k,i},v_{k,i}\}$. Вместе с инцидентными им вершинами они составляют неориентированный цикл $u_{1,i}$, $\{u_{1,i},v_{2,i}\}$, $v_{2,i}$, $\{v_{2,i},u_{2,i}\}$, $u_{2,i}$, $\{u_{2,i},v_{3,i}\}$, $\ldots$, $v_{k,i}$, $\{v_{k,i},u_{k,i}\}$, $u_{k,i}$, $\{u_{k,i},v_{1,i}\}$, $v_{1,i}$, $\{v_{1,i},u_{1,i}\}$, $u_{1,i}$.

Таким образом, получаем $n/(2k)$ циклов по $2k$ вершин, причём вершины различны как в пределах каждого цикла, так и между циклами, т. е. имеем семейство вершинно-простых неориентированных циклов, обходящих единожды все вершины графа — решение задачи НСЦ-k.

Выбор $2k$ рёбер при фиксированном i (каждому ребру соответствуют два элемента списка смежности) потребует времени $O(k)$. Различных значений i всего $n/(2k)$, значит, для построения всего решения нужно время $O(n)$. ■

Таким образом, для всякого kRS-графа задача НСЦ-k имеет решение.

Пример 2. Рассмотрим граф, заданный следующим списком смежности:

$$\begin{array}{ll} 4: & 1,2,3;\\ 5: & 1,2,3;\\ 6: & 1,2,3;\\ 1: & 4,5,6;\\ 2: & 4,5,6;\\ 3: & 4,5,6. \end{array}$$

В соответствии с процедурой, описанной в доказательстве теоремы 3, выберем рёбра $\{4,1\}$, $\{4,2\}$, $\{5,2\}$, $\{5,3\}$, $\{6,1\}$ и $\{6,3\}$. Получим вершинно-простой цикл $\{1-4-2-5-3-6-1\}$, который обходит все вершины графа.

4. Задача о семействе циклов в kS-орграфе

Теорема 4. Задача ОНСЦ-k на kS-орграфе может быть решена за время $O(n(k^2+k)+n\log_2 n)$.

Доказательство. В силу определения kS-орграфа на нём заданы два разбиения $\{U_1, \ldots, U_{n/k}\}$ и $\{V_1, \ldots, V_{n/k}\}$ множества вершин на n/k подмножеств мощностью k и все дуги, исходящие из вершин подмножества V_i, приходят только в вершины подмножества U_i, $i = 1, \ldots, n/k$. Таким образом, можно без ограничения общности утверждать, что список смежности орграфа состоит из n/k блоков, обладающих структурой

$$\begin{array}{l} v_{i_1} : u_{i_{11}}, \ldots, u_{i_{1k_1}}, \\ v_{i_2} : u_{i_{21}}, \ldots, u_{i_{2k_2}}, \\ \cdots \\ v_{i_k} : u_{i_{k1}}, \ldots, u_{i_{kk_k}}, \end{array}$$

где i_{ab} — номера вершин подмножества U_i (среди них могут быть и равные, количество вершин в строке не превосходит k); i_j — номера вершин подмножества V_i (попарно различные).

Так как из определения kS-орграфа следует, что в каждом таком блоке есть хотя бы одна строка, содержащая k элементов, то есть все элементы подмножества U_i, можно ввести операцию дополнения kS-орграфа до kRS-орграфа. Для этого в каждой строке блока длиной меньше k добавляются фиктивные дуги, приходящие в вершины, номера которых есть в подмножестве U_i, но отсутствуют в данной строке. Данное преобразование осуществимо за время $n/k(O(k^2)) = O(kn)$, где $O(k^2)$ — наибольшее возможное количество дуг в блоке.

Далее будем решать на полученном kRS-орграфе задачу ОНСЦ-k с помощью алгоритма, описанного в доказательстве теоремы 1, при следующем ограничении: паросочетания не должны содержать фиктивных дуг. Назначим этим дугам вес $-n \max\limits_{(v,u)\in E} |w(v,u)|$, тогда вес любого паросочетания, не содержащего фиктивных дуг, будет заведомо больше веса любого паросочетания, включающего хотя бы одну такую дугу. К времени выполнения алгоритма добавляется время преобразования орграфа, итого получим $O(nk^2 + n\log_2 n) + O(kn) = O(n(k^2 + k) + n\log_2 n)$. ■

Пример 3. Пусть $q = 10$. Рассмотрим орграф, заданный следующим списком смежности (вес соответствующей дуги указан в фигурных скобках):

$$\begin{array}{ll} 4: & 2\{1\}; \\ 5: & 1\{9\}, 3\{-2\}; \\ 6: & 1\{2\}, 2\{3\}, 3\{-8\}; \\ 1: & 6\{1\}; \\ 2: & 4\{-7\}, 5\{-1\}, 6\{10\}; \\ 3: & 4\{5\}. \end{array}$$

Произведём дополнение до kRS-орграфа. Пометим фиктивные дуги штрихом и назначим им вес, равный наибольшему по модулю весу дуги в исходном орграфе, взятому со знаком «минус» и умноженному на число вершин:

$$\begin{array}{ll} 4: & 1'\{-60\}, 2\{1\}, 3'\{-60\}; \\ 5: & 1\{9\}, 2'\{-60\}, 3\{-2\}; \\ 6: & 1\{2\}, 2\{3\}, 3\{-8\}; \\ 1: & 4'\{-60\}, 5'\{-60\}, 6\{1\}; \\ 2: & 4\{-7\}, 5\{-1\}, 6\{10\}; \\ 3: & 4\{5\}, 5'\{-60\}, 6'\{-60\}. \end{array}$$

Приведём решение задачи о назначениях для каждого блока венгерским алгоритмом:

$$\begin{aligned}&1)\ \max S_1 = w(4,2) + w(5,1) + w(6,3) = 2;\\&2)\ \max S_2 = w(1,6) + w(2,5) + w(3,4) = 5.\end{aligned}$$

Таким образом, семейство циклов с максимальным весом задаётся набором дуг $\{(4,2),(5,1),\ (6,3),(1,6),(2,5),(3,4)\}$. Оно состоит из цикла $1-6-3-4-2-5-1$; общий вес равен 7. Это меньше q, следовательно, задача не имеет решения.

Проверим решение, найдя максимальное семейство циклов поиском в глубину. Имеем следующие циклы:

$$\begin{array}{lll}\{1-6-1\}; & \{1-6-2-5-1\}; & \{1-6-3-4-2-5-1\};\\ \{2-4-2\}; & \{2-5-3-4-2\}; & \{2-6-2\};\\ \{2-6-3-4-2\}. & & \end{array}$$

Из них могут быть составлены семейства (указан общий вес):

$$\begin{array}{ll}\{1-6-3-4-2-5-1\} & (7);\\ \{1-6-1, 2-5-3-4-2\} & (6).\end{array}$$

Следствие 2. Задача НСЦ-k на kS-орграфе может быть решена за время $O(n(k^2+k)+n\log_2 n)$.

Доказательство. Дополним kS-орграф до kRS-орграфа. Применим алгоритм для решения задачи ОНСЦ-k с модификацией для учёта фиктивных дуг, при этом примем $q=-\infty$. Таким образом, получаем время $O(n(k^2+k)+n\log_2 n)$. ■

Пример 4. Рассмотрим орграф, заданный списком смежности:

$$\begin{array}{ll}4: & 2;\\ 5: & 1,3;\\ 6: & 1,2,3;\\ 1: & 6;\\ 2: & 4,5,6;\\ 3: & 4.\end{array}$$

Произведём дополнение до kRS-орграфа; фиктивные дуги отмечены штрихом:

$$\begin{array}{ll}4: & 1',2,3';\\ 5: & 1,2',3;\\ 6: & 1,2,3;\\ 1: & 4',5',6;\\ 2: & 4,5,6;\\ 3: & 4,5',6'.\end{array}$$

Допустимые наборы дуг в первом и во втором блоке следующие:

$$\begin{array}{lll}1) & (4,2),(5,1),(6,3); & (4,2),(5,3),(6,1);\\ 2) & (1,6),(2,5),(3,4). & \end{array}$$

Выберем любой из наборов первого блока (например, второй) и совместим с единственным набором из второго, получим семество циклов $\{1-6-1, 2-5-3-4-2\}$. Задача решена.

Заключение

Рассмотрены поисковый и оптимизационный варианты задачи о поиске такого семейства непересекающихся простых циклов в орграфах класса kRS и kS, которое покрывает все вершины орграфа. Показана принадлежность задачи в обоих вариантах классу полиномиально разрешимых задач P, предложены алгоритмы, находящие решение поисковой и оптимизационной задач о максимизации веса семейства циклов за время $O(nk^2 + n\log_2 n)$ и $O(n(k^2 + k) + n\log_2 n)$ соответственно; показано, что на kRS-графах и kRS-орграфах поисковая задача может быть решена за линейное время вне зависимости от значения параметра k, а на kS-орграфах задача является полиномиальной со сложностью $O(n(k^2+k)+n\log_2 n)$. Поскольку решение оптимизационной задачи осуществляется путём сокращённого перебора по экспоненциальному пространству поиска, можно сделать предположение о существовании параметрически полиномиального алгоритма поиска гамильтонова цикла на рассматриваемых классах орграфов, так как среди решений задач НСЦ-k и ОНСЦ-k могут быть гамильтоновы циклы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karp R. M.* Reducibility among combinatorial problems // R. E. Miller, J. W. Thatcher, J. D. Bohlinger (eds). Complexity of Computer Computations. The IBM Research Symposia Series. Boston: Springer, 1972. P. 85–103.
2. *Akiyama T., Nisizeki T., and Saito N.* NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs // J. Inform. Processing. 1981. V. 3. No. 2. P. 73–76.
3. *Itai A., Papadimitiou Ch., and Szwarcfiter J.* Hamiltonian paths in grid graphs // SIAM J. Computing. 1982. V. 4. No. 11. P. 676–686.
4. *Buro M.* Simple Amazons endgames and their connection to Hamilton circuits in cubic subgrid graphs // LNCS. 2000. V. 2063. P. 250–261.
5. *Plesńik J.* The NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two // Inform. Process. Lett. 1979. V. 8. No. 4. P. 199–201.
6. *Chiba N. and Nishizeki T.* The Hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs // J. Algorithms. 1989. V. 10. No. 2. P. 187–211.
7. *Dirac G. A.* Some theorems on abstract graphs // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 2. No. 3. P. 69–81.
8. *Ore O.* Note on Hamiltonian circuits // American Math. Monthly. 1960. V. 67. P. 55.
9. *Ghouila-Houri A.* Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien // Comptes Rendus de l'Académie des Science Paris. 1960. V. 251. P. 495–497.
10. *Woodall D.* Sufficient conditions for cycles in digraphs // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 24. P. 739–755.
11. *Christofides D., Keevash P., Kühn D., and Osthus D.* A semi-exact degree condition for Hamiltonian cycles in digraphs // SIAM J. Discrete Math. 2010. V. 24. No. 3. P. 709–756.
12. *Keevash P., Kühn D., and Osthus D.* An exact minimum degree condition for Hamiltonian cycles in oriented graphs // J. London Math. Soc. 2009. V. 79. No. 1. P. 144–166.
13. *Kelly L., Kühn D., and Osthus D.* A Dirac-type result on Hamiltonian cycles in oriented graphs // Combinatorics, Probability and Computing. 2008. V. 17. No. 5. P. 689–709.
14. *Björklund A., Husfeldt T., and Khanna S.* Approximating longest directed paths and cycles // Automata, Languages and Programming. 2004. V. 3142. P. 222–233.
15. *Gabow H. N. and Nie S.* Finding long paths, cycles and circuits // LNCS. 2008. V. 5369. P. 752–763.
16. *Zamfirescu T.* On longest paths and circuits in graphs // Mathematica Scandinavica. 1976. V. 38. P. 211–239.

17. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003. 296 с.
18. *Медведев А. А.* Поиск семейства простых циклов в орграфе с полустепенями вершин, не превосходящими 2 // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2022. Т. 26. № 3. С. 150–164.
19. *Kuhn H. W.* Variants of the Hungarian method for assignment problems // Naval Research Logistics Quarterly. 1956. V. 3. P. 253–258.

REFERENCES

1. *Karp R. M.* Reducibility among combinatorial problems. R. E. Miller, J. W. Thatcher, J. D. Bohlinger (eds). Complexity of Computer Computations. The IBM Research Symposia Series. Boston, Springer, 1972, pp. 85–103.
2. *Akiyama T., Nisizeki T., and Saito N.* NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem for bipartite graphs. J. Inform. Processing, 1981, vol. 3, no. 2, pp. 73–76.
3. *Itai A., Papadimitiou Ch., and Szwarcfiter J.* Hamiltonian paths in grid graphs. SIAM J. Computing, 1982, vol. 4, no. 11, pp. 676–686.
4. *Buro M.* Simple Amazons endgames and their connection to Hamilton circuits in cubic subgrid graphs. LNCS, 2000, vol. 2063, pp. 250–261.
5. *Plesńik J.* The NP-completeness of the Hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two. Inform. Process. Lett., 1979, vol. 8, no. 4, pp. 199–201.
6. *Chiba N. and Nishizeki T.* The Hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs. J. Algorithms, 1989, vol. 10, no. 2, pp. 187–211.
7. *Dirac G. A.* Some theorems on abstract graphs. Proc. the London Math. Soc., 1952, vol. 2, no. 3, pp. 69–81.
8. *Ore O.* Note on Hamiltonian circuits. American Math. Monthly, 1960, vol. 67, p. 55.
9. *Ghouila-Houri A.* Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien [A sufficient condition for existence of a Hamiltonian circuit]. Comptes Rendus de l'Académie des Science Paris, 1960, vol. 251, pp. 495–497. (in French)
10. *Woodall D.* Sufficient conditions for cycles in digraphs. Proc. London Math. Soc., 1972, vol. 24, pp. 739–755
11. *Christofides D., Keevash P., Kühn D., and Osthus D.* A semi-exact degree condition for Hamiltonian cycles in digraphs. SIAM J. Discrete Math., 2010, vol. 24, no. 3, pp. 709–756.
12. *Keevash P., Kühn D., and Osthus D.* An exact minimum degree condition for Hamiltonian cycles in oriented graphs. J. London Math. Soc., 2009, vol. 79, no. 1, pp. 144–166.
13. *Kelly L., Kühn D., and Osthus D.* A Dirac-type result on Hamiltonian cycles in oriented graphs. Combinatorics, Probability and Computing, 2008, vol. 17, no. 5, pp. 689–709.
14. *Björklund A., Husfeldt T., and Khanna S.* Approximating longest directed paths and cycles. Automata, Languages and Programming, 2004, vol. 3142, pp. 222–233.
15. *Gabow H. N. and Nie S.* Finding long paths, cycles and circuits. LNCS, 2008, vol. 5369, pp. 752–763.
16. *Zamfirescu T.* On longest paths and circuits in graphs. Mathematica Scandinavica, 1976, vol. 38, pp. 211–239.
17. *Harary F.* Graph Theory. N.Y., Addison-Wesley Publ., 1969. 283 p.
18. *Medvedev A. A.* Poisk semeystva prostykh tsiklov v orgrafe s polustepenyami vershin, ne prevoskhodyashchimi 2 [Finding a family of simple circuits in an digraph with semidegree bound 2]. Intellektual'nyye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya, 2022, vol. 26. no. 3, pp. 150–164. (in Russian)
19. *Kuhn H. W.* Variants of the Hungarian method for assignment problems. Naval Research Logistics Quarterly, 1956, vol. 3, pp. 253–258.