

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.8

DOI 10.17223/20710410/60/11

РЕШЕНИЕ МАКСИ-СУММНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА СЕТИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАТРАТЫ¹

Г. Г. Забудский

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия***E-mail:** zabudsky@ofim.oscsbras.ru

Рассматривается задача оптимального размещения объекта на неориентированной взвешенной сети. Каждому ребру приписан положительный вес, а вершинам — два положительных параметра. Первый параметр отражает требование размещать объект как можно ближе к вершине, а второй — как можно дальше. Задано ограничение на суммарное взвешенное расстояние от объекта до вершин с учётом первого параметра. Необходимо найти допустимые места размещения объекта на рёбрах сети с максимальной суммой взвешенных расстояний от них до вершин с учётом второго параметра (локальные экстремумы). Предложен полиномиальный алгоритм поиска всех локальных экстремумов на рёбрах сети.

Ключевые слова: задача размещения, макси-суммный критерий, опасный объект, сеть.

SOLVING OF THE MAXISUM LOCATION PROBLEM ON NETWORK WITH A RESTRICTION ON TRANSPORT COSTS

G. G. Zabudsky

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

We consider the problem of the optimal location of a facility on an undirected weighted network. A positive weight is assigned to each edge. Two positive parameters are assigned to the vertices. The first parameter reflects the requirement to place the facility as close to the vertex as possible, and the second — as far as possible. There is a limit on the total weighted distance from the facility to the vertices, taking into account the first parameter. It is necessary to find acceptable locations of the facility on the edges of the network with the maximum sum of weighted distances from them to the vertices, taking into account the second parameter (local extremes). A polynomial algorithm is proposed to find all local extremums at the edges of the network.

Keywords: location problem, maxisum criterion, undesirable facility, network.

¹Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0020.

Введение

С развитием промышленного производства всё более актуальной становится проблема оптимального (рационального) размещения промышленных объектов. Увеличивается их влияние на природу, что может привести к экологическим проблемам. Растёт уровень жизни, и это повышает требования населения к окружающей среде. Поэтому необходимо размещать производства и другие объекты не только с учётом экономической эффективности, но при этом не ухудшать качество жизни для проживающего вблизи населения. Примерами объектов могут быть мусороперерабатывающие предприятия, свалки, аэропорты, хранилища опасных отходов. Они оказывают негативное влияние на жителей, проживающих вблизи. В то же время необходима доставка каких-либо материалов к этим объектам, например бытовых отходов населённых пунктов на мусороперерабатывающее предприятие. Транспортные расходы увеличиваются с удалением таких объектов от населения. Поэтому объекты должны размещаться как можно дальше от населённых пунктов, но не слишком далеко, чтобы расходы на обслуживание населения этими объектами не превышали некоторого бюджета. Исследования сложности решения задач такого класса можно найти в [1].

В теории оптимальных размещений ранее доминировали модели и методы определения размещений «желательных» объектов, таких, как магазины, больницы и пожарные депо, которые необходимо размещать вблизи населённых пунктов. Ситуация изменилась в 1970-х гг. с началом исследований по поиску размещений «нежелательных» (опасных) объектов. Позднее появление в литературе исследований таких задач имеет несколько причин, в частности то, что большинство нежелательных объектов являются побочными продуктами технологических достижений и индустриализации во второй половине XX века.

Критерием определения места размещения нежелательного объекта может быть максимизация некоторой возрастающей функции расстояний между объектом и клиентами. Критерии $\minisum$ (задача о медиане) и $\minimax$ (задача о центре) наиболее популярны для определения размещений желательных объектов. По аналогии, для нежелательных объектов часто применяются критерии $\maxisum$ и $\maximin$ [2–4]. Критерий $\maxisum$ применяется для максимизации суммы расстояний (среднего расстояния) между объектом и клиентами, в то время как цель $\maximin$ — максимизировать расстояние между объектом и ближайшим к нему клиентом. Клиентам могут быть приписаны параметры, чтобы отразить относительную несовместимость между клиентом и объектом. Критерии для нежелательных объектов часто называют критериями отталкивания ($push$), поскольку они отталкивают нежелательный объект от клиентов. Критерии для желательных объектов называют критериями притяжения ($pull$), поскольку они приближают объект к клиентам. Чтобы избежать размещения нежелательного объекта на бесконечном расстоянии от клиентов, что не имеет смысла в реальной задаче, рассматривается ограниченная область (сеть, многоугольник на плоскости). Задачи оптимизации размещения нежелательных объектов более трудные для решения. В отличие от задач размещения желательных объектов, они являются невыпуклыми с множеством локальных оптимумов.

Первой опубликованной работой о нахождении места размещения нежелательного объекта была работа [5]. Рассматривалась проблема поиска такой точки на общей сети, чтобы сумма взвешенных расстояний от неё до вершин сети была максимальной. Множество рассматриваемых решений было сокращено до конечного набора точек, которые представляют точки на рёбрах и висячие вершины сети. Впервые было показано, что задача с критерием $\maxisum$ — это невыпуклая задача, имеющая локальные опти-

мумы. Кроме того, не выполняется принцип оптимальности Хаками [6] (оптимальное решение можно искать в вершинах сети).

В данной работе рассматривается обобщение постановки задачи, предложенной в [5]. Заданы транспортная сеть, соединяющая населённые пункты, и бюджет на транспортные затраты по обслуживанию указанных пунктов некоторым объектом, оказывающим негативное влияние на население. Требуется разместить объект на сети таким образом, чтобы общие транспортные затраты не превышали бюджет и суммарное (среднее) отрицательное влияние объекта на население было минимальным. Предложен полиномиальный алгоритм поиска всех локальных экстремумов. Выбор конкретного места размещения из множества найденных локальных оптимумов может быть осуществлён лицом, принимающим решение, с учётом дополнительных требований к размещению.

1. Постановка задачи

Имеется некоторое число населённых пунктов (фиксированных объектов), соединённых между собой сетью дорог, и объект, который необходимо разместить на сети для обслуживания пунктов. Размещаемый объект оказывает негативное влияние на население. Влияние уменьшается с увеличением расстояния до объекта. Для каждого пункта заданы два параметра (веса). Первый отражает требование размещать объект ближе к пункту, например равен количеству населения в нем. Второй характеризует важность размещения объекта как можно дальше от пункта, например это величина, обратная количеству населения в пункте. Имеется бюджетное ограничение на общие транспортные затраты по обслуживанию объектом населённых пунктов. Требуется разместить объект на сети таким образом, чтобы общие транспортные затраты не превышали бюджет и суммарное отрицательное влияние на население было минимальным с учётом количества проживающих в пунктах (макси-суммный критерий).

Приведём математическую модель. Для этого введём обозначения: $G = (V, E)$ — неориентированная сеть, соответствующая населённым пунктам и дорогам; $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ — множество вершин, $N = \{1, \dots, n\}$ — множество их номеров; $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ — множество рёбер, $M = \{1, \dots, m\}$ — множество их номеров; (w_i, α_i) , $w_i > 0$, $\alpha_i > 0$ — веса вершины v_i , $i \in N$; если $w_i > w_j$, то желательно, чтобы объект был размещен ближе к v_i , чем к v_j ; если $\alpha_i < \alpha_j$, то желательно, чтобы объект находился на большем расстоянии от вершины v_i , чем от вершины v_j ; $c(v_i, v_j) > 0$ — длина ребра $e_i = (v_i, v_j)$, $i, j \in M$; z — размещаемый объект; $d(x, y)$ — длина кратчайшего пути между двумя точками x и y сети G ; S — бюджет на транспортные затраты по обслуживанию объектом населённых пунктов.

Необходимо найти такие точки на рёбрах сети G для размещения объекта z , чтобы не нарушалось ограничение по бюджету и суммарное взвешенное расстояние до вершин сети было максимальным. Математическая модель задачи:

$$T_1(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i d(v_i, z) \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$T_2(z) = \sum_{i=1}^n w_i d(v_i, z) \leq S. \quad (2)$$

Задача без ограничения на бюджет впервые была исследована в работе [5]. В отличие от задачи о медиане, в которой минимизируется суммарное взвешенное расстояние от медианы до вершин, в рассматриваемой задаче указанное расстояние максимизируется. При поиске медианы доказано, что оптимальное решение достаточно искать на

множестве вершин сети [6]. Переход от задачи минимизации к задаче максимизации приводит к тому, что оптимальное решение может находиться на рёбрах сети. Поиск максимума функции (1) на всей сети G — это задача невыпуклого программирования. Основным результатом работы [5] состоит в том, что нахождение оптимального решения сводится к анализу конечного множества точек. Для решения задачи (1) предложен полиномиальный алгоритм трудоёмкости $O(n^2)$. Позднее в работе [7] предложен алгоритм трудоёмкости $O(mn)$. Частный случай задачи (1)–(2) рассмотрен в [8]. Отметим, что для произвольного числа размещаемых объектов задача (1) является NP-трудной для сети, которая состоит из одного ребра [1].

Двухкритериальная задача размещения объекта на сети дорог, в которой один из критериев — это максимизация суммы взвешенных расстояний от объекта до вершин сети, рассмотрена в [9].

2. Алгоритм решения задачи (1)–(2)

Далее приведена общая схема алгоритма решения задачи (1)–(2), алгоритмы построения области допустимых решений и нахождения локальных оптимумов на рёбрах. Кроме того, предложен вариант вычисления верхней оценки значения целевой функции, который сокращает множество рассматриваемых рёбер сети в случае, когда ставится задача нахождения глобального оптимума.

2.1. Определения. Общая схема алгоритма

Для описания алгоритма решения задачи (1)–(2) введём некоторые обозначения [1]. Выберем произвольно ребро (v_i, v_j) . Через z будем обозначать объект и расстояние от вершины v_i , $i < j$, на котором размещается объект z . Внутренняя точка s на ребре (v_i, v_j) делит его на два сегмента (v_i, s) и (v_j, s) , длины которых обозначим $c(v_i, s) > 0$ и $c(v_j, s) > 0$ соответственно. Предполагается, что кратчайшие расстояния между вершинами известны. Они могут быть эффективно вычислены с помощью различных алгоритмов, например из [10]. Если существует вершина v_k , такая, что

$$d(v_k, v_i) + c(v_i, s) = d(v_k, v_j) + c(v_j, s),$$

то s называется рёберной узкой точкой относительно вершины v_k . Через $B_A(v_k)$ обозначим множество указанных точек на сети по отношению к вершине v_k . Ребро (v_i, v_j) содержит узкие точки по отношению к вершине v_k , когда выполняется неравенство

$$|d(v_k, v_i) - d(v_k, v_j)| < c(v_i, v_j). \quad (3)$$

Аналогичное понятие узких точек можно определить для вершин. Если имеются рёбра (v_i, v_j) и (v_i, v_k) , инцидентные вершине v_i , и вершина v_l , такая, что выполняется равенство

$$d(v_l, v_j) + c(v_i, v_j) = d(v_l, v_k) + c(v_k, v_i),$$

то вершина v_i называется вершинной узкой точкой относительно вершины v_l . Множество таких точек обозначим через $B_N(v_l)$. Все рёберные и вершинные узкие точки принадлежат циклам в сети G .

Пусть $B_A = \bigcup_{k \in N} B_A(v_k)$ — множество рёберных узких точек, $B_N = \bigcup_{k \in N} B_N(v_k)$ — множество вершинных узких точек и $B = B_A \cup B_N$ — множество всех узких точек G . Через D обозначим множество висячих вершин G . Очевидно, что $D \cap B = \emptyset$, поскольку

узкие точки связаны с циклами. В [1] сформулирована и доказана теорема, применение которой позволяет искать оптимальное решение задачи (1) на множестве $D \cup B$.

В [5] отмечается свойство вогнутости целевой функции (1) на ребре, на основании которого не надо рассматривать рёбра, в вершинах которых не выполняется бюджетное ограничение (2). Кроме того, можно предложить алгоритм поиска локальных экстремумов на ребре. Схематично это можно представить так. Решаем задачу о медиане на сети. Если значение целевой функции превосходит бюджет, то исходная задача не имеет решения. Если задача разрешима, убираем из рассмотрения рёбра, для вершин которых нарушается ограничение по бюджету. Затем на каждом из оставшихся рёбер находим все узкие точки, строим допустимое множество решений и определяем локальный оптимум. Приведём алгоритм решения задачи (1)–(2) на ребре (v_i, v_j) .

2.2. Нахождение узких точек

После удаления из рассмотрения рёбер, для вершин которых нарушается ограничение (2), на оставшихся рёбрах определяем область допустимых решений. Если в одной или обеих вершинах ребра выполняется неравенство (2), то покажем, что область допустимых решений задачи (1)–(2) на ребре может представлять всё ребро, отрезок или два отрезка. Для каждого такого отрезка одним из его концов является вершина ребра.

Для поиска узких точек предлагается следующий алгоритм. Фиксируем ребро (v_i, v_j) и по очереди рассматриваем другие вершины сети G . Для текущей вершины v_k проверяем справедливость неравенства (3).

Если неравенство не выполняется, то ребро (v_i, v_j) не содержит рёберную узкую точку относительно v_k ; переходим к другой вершине G .

Если неравенство выполняется, то ребро (v_i, v_j) содержит рёберную узкую точку относительно вершины v_k . Это означает, что нет кратчайших путей от v_i до v_k и от v_k до v_j , содержащих ребро (v_i, v_j) . Кратчайший путь от v_k до v_i , ребро (v_i, v_j) и кратчайший путь от v_j до v_k образуют цикл $C[v_k, (v_i, v_j)]$ в G . Расстояние s от вершины v_i , на котором располагается узкая точка, равно

$$s = (|d(v_k, v_i) - d(v_k, v_j)| + c(v_i, v_j))/2. \quad (4)$$

Замечание 1. Так как все кратчайшие пути от v_k до v_i и от v_k до v_j равны по длине, то им будет соответствовать одна узкая точка относительно вершины v_k . Перебирая все вершины сети G , найдём все рёберные узкие точки на ребре (v_i, v_j) .

Замечание 2. Любая вершина, входящая в цикл $C[v_k, (v_i, v_j)]$, образует узкую точку на ребре (v_i, v_j) .

Замечание 3. Вершинные узкие точки необходимо находить при поиске глобального оптимума.

Замечание 4. Рёберные и вершинные узкие точки определяются только длинами кратчайших путей в сети G , которые не зависят от весов вершин. Поэтому множество узких точек для функций T_1 и T_2 совпадают.

2.3. Построение области допустимых решений

Если в одной или обеих вершинах ребра (v_i, v_j) выполняется ограничение по бюджету, то после построения всех узких точек на ребре определяем область допустимых решений. Так как функция (2) вогнутая и кусочно-линейная на ребре с точками перегиба в узких точках, находим узкие точки и упорядочиваем их по возрастанию

расстояний от вершины v_i : $s_1 < s_2 < \dots < s_n$. Последовательно вычисляем значение функции (2) в найденных точках по формуле

$$T_2(s_i) = \sum_{i \in N} w_i \min\{d(v_k, v_i) + s_i; d(v_k, v_j) + c(v_i, v_j) - s_i\}.$$

Возможны следующие варианты:

1) $T_2(v_i) < S$, $T_2(v_j) < S$.

1.1. Последовательно просматриваем узкие точки. Найдётся пара точек s_t и s_{t+1} , такая, что $T_2(s_t) < S$ и $T_2(s_{t+1}) > S$. Строим уравнение прямой $l(s_t, s_{t+1})$ через точки $(s_t, T_2(s_t))$ и $(s_{t+1}, T_2(s_{t+1}))$. Решаем уравнение $l(s_t, s_{t+1}) = S$ и находим точку z_1 , в которой $T_2(z_1) = S$. Далее вычисляем значение функции T_2 в точках s_{t+2}, s_{t+3} и т. д. Найдётся k , такое, что $T_2(s_k) > S$, а $T_2(s_{k+1}) < S$. Строим уравнение прямой $l(s_k, s_{k+1})$ через указанную пару точек. Решаем уравнение $l(s_k, s_{k+1}) = S$ и находим точку z_2 , такую, для которой $T_2(z_2) = S$. Таким образом, на данном ребре найдены две точки z_1 и z_2 , такие, что $T_2(z_1) = T_2(z_2) = S$. Область допустимых решений представляет два отрезка $[v_i, z_1]$ и $[v_j, z_2]$.

1.2. Если найдётся пара точек s_t и s_{t+1} , такая, что $T_2(s_t) > T_2(s_{t+1})$ и $T_2(s_t) < S$, то все точки ребра образуют область допустимых решений.

2) $T_2(v_i) < S$, $T_2(v_j) > S$.

Найдётся пара точек s_t и s_{t+1} , такая, что $T_2(s_t) < S$ и $T_2(s_{t+1}) > S$. Строим уравнение прямой $l(s_t, s_{t+1})$ через точки $(s_t, T_2(s_t))$ и $(s_{t+1}, T_2(s_{t+1}))$. Решаем уравнение $l(s_t, s_{t+1}) = S$ и находим точку z_1 , в которой $T_2(z_1) = S$. Область допустимых решений представляет отрезок $[v_i, z_1]$.

3) $T_2(v_i) > S$, $T_2(v_j) < S$.

Найдётся пара точек s_t и s_{t+1} , такая, что $T_2(s_t) > S$ и $T_2(s_{t+1}) < S$. Строим уравнение прямой $l(s_t, s_{t+1})$ через точки $(s_t, T_2(s_t))$ и $(s_{t+1}, T_2(s_{t+1}))$ и решаем уравнение $l(s_t, s_{t+1}) = S$. Находим точку z_2 , такую, что $T_2(z_2) = S$. Область допустимых решений представляет отрезок $[z_2, v_j]$.

2.4. Локальные оптимумы на ребре. Верхняя оценка целевой функции

В случае 1.1 если $T_1(z_1) \geq T_1(z_2)$, то z_1 будет локальным максимумом на ребре, иначе — локальный максимум.

В случае 1.2 вычисляем значения функции T_1 в узких точках по формуле

$$T_1(s_t) = \sum_{k \in N} w_k \min\{d(v_k, v_i) + s_t; d(v_k, v_j) + c(v_i, v_j) - s_t\}$$

и выбираем узкую точку с максимальным значением. Если для пары точек s_t и s_{t+1} выполняется равенство $T_1(s_t) = T_1(s_{t+1})$, то локальный максимум на ребре представляет отрезок $[s_t, s_{t+1}]$.

В случае 2 z_1 — локальный максимум, а в случае 3 z_2 — локальный максимум.

В результате на ребре локальный максимум — это одна точка, две или отрезок. Трудоёмкость поиска узких точек равна $O(n^2)$. Тогда трудоёмкость алгоритма построения всех локальных оптимумов на сети оценивается как $O(mn^2)$.

Отметим, что глобальный оптимум можно найти, перебирая локальные оптимумы на рёбрах. При этом некоторые рёбра можно исключить из рассмотрения, используя верхнюю оценку значения функции T_1 . Так как функция T_1 вогнутая кусочно-линейная, то для получения верхней оценки её значения на ребре (v_i, v_j) можно найти ближайшую к v_i узкую точку и максимально удалённую от неё точку. Расстояние s

от вершины v_i до узкой точки определяется по формуле (4). Ближайшая узкая точка будет образована некоторой вершиной v_k , которой соответствует минимальная разность между длинами кратчайших путей от v_k до вершин v_i и v_j . Максимально удалённая от v_i узкая точка будет образована вершиной сети, для которой аналогичная разность будет максимальной. Таким образом определяются узкие точки s_1 и s_n . Строятся уравнения прямых через точки $(0, T_1(v_i))$ и $(s_1, T_1(s_1))$ и через точки $(s_n, T_1(s_n))$ и $(c(v_i, v_j), T_1(v_j))$. Из свойств функции T_1 следует, что точка пересечения указанных прямых — это верхняя оценка целевой функции на ребре (v_i, v_j) .

Заключение

Рассмотрена задача поиска всех локальных экстремумов оптимального размещения опасного объекта на сети дорог, соединяющих населённые пункты. Предложен полиномиальный алгоритм решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tamir A.* Obnoxious facility location on graphs // *SIAM J. Discrete Math.* 1991. V. 4. No.4. P. 550–567.
2. *Drezner Z.* Facility Location. A Survey of Applications and Methods. N.Y.: Springer, 1995. 571 p.
3. *Eiselt H. A. and Marianov V.* Foundations of Location Analysis. N.Y.: Springer, 2011. 509 p.
4. *Zabudsky G. G. and Lisina M. S.* Approximately algorithm for maximin location problem on network // *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines. XII Intern. Conf. Omsk, Russia, 13–15 November 2018.* <https://ieeexplore.ieee.org/document/8601502>.
5. *Church R. L. and Garfinkel R. S.* Locating an obnoxious facility on a network // *Trans. Sci.* 1978. V. 12. No. 2. P. 107–118.
6. *Hakimi S. L.* Optimal location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph // *Oper. Res.* 1964. V. 12. No. 3. P. 450–459.
7. *Berman O. and Drezner Z.* A note on the location of an obnoxious facility on a network // *Eur. J. Oper. Res.* 2000. V. 120. No. 1. P. 215–217.
8. *Забудский Г. Г.* Размещение опасного объекта на сети с ограничением на транспортные затраты // *Проблемы машиноведения. VI Междунар. науч.-техн. конф. Омск, 22–23 марта 2022.* С. 162–165.
9. *Heydari R. and Melachrinoudis E.* Location of a semi-obnoxious facility with elliptic maximin and network minisum objectives // *Eur. J. Oper. Res.* 2012. V. 223. No. 2. P. 452–460.
10. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. 519 с.

REFERENCES

1. *Tamir A.* Obnoxious facility location on graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 1991, vol. 4, no. 4, pp. 550–567.
2. *Drezner Z.* Facility Location. A Survey of Applications and Methods. N.Y., Springer, 1995. 571 p.
3. *Eiselt H. A. and Marianov V.* Foundations of Location Analysis. N.Y., Springer, 2011. 509 p.
4. *Zabudsky G. G. and Lisina M. S.* Approximately algorithm for maximin location problem on network. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines. XII Intern. Conf., Omsk, Russia, 13–15 November 2018*, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8601502>.
5. *Church R. L. and Garfinkel R. S.* Locating an obnoxious facility on a network. *Trans. Sci.*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 107–118.

6. *Hakimi S. L.* Optimal location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Oper. Res.*, 1964, vol. 12, no. 3, pp. 450–459.
7. *Berman O. and Drezner Z.* A note on the location of an obnoxious facility on a network. *Eur. J. Oper. Res.*, 2000, vol. 120, no. 1, pp. 215–217.
8. *Zabudskiy G. G.* Razmeshchenie opasnogo ob"ekta na seti s ogranicheniem na transportnye zatraty [Location an undesirable facility on the network with a restriction on transportation costs]. *Mechanical Science and Technology Update, VI Intern. Conf.*, Omsk, Russia, 22–23 March 2022, pp. 162–165. (in Russian)
9. *Heydari R., Melachrinoudis E.* Location of a semi-obnoxious facility with elliptic maxmin and network minisum objectives. *Eur. J. Oper. Res.*, 2012, vol. 223, no. 2, pp. 452–460.
10. *Hu T. C.* *Integer Programming and Network Flows.* Addison-Wesley Publ., 1969. 452 p.