

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья

УДК 517.977.56

doi: 10.17223/19988605/62/1

**Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков
в одной задаче оптимального управления, описываемой системой
гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра****Вафа Гюлага кызы Рзаева***Сумгаитский государственный университет, Сумгаит, Азербайджан, vafa.asgerova77@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с терминальным критерием качества при предположении открытости области управления. Вычислены первая и вторая вариации функционала качества. Получены аналог уравнения Эйлера и общее необходимое условие оптимальности второго порядка. Используя необходимое условие оптимальности второго порядка, с помощью специальных вариаций управления доказан аналог условия Лежандра–Клебша и получено необходимое условие оптимальности особых в классическом смысле управлений.

Ключевые слова: гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение; краевая задача; уравнение Эйлера; классическая экстремаль; необходимые условия оптимальности; особое управление.

Для цитирования: Рзаева В.Г. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления, описываемой системой гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 4–12. doi: 10.17223/19988605/62/1

Original article

doi: 10.17223/19988605/62/1

**Necessary conditions for optimality of first and second orders
in one optimal control problem described by system
of hyperbolic integro-differential equations of Volterra type****Vafa G. Rzayeva***Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan, vafa.asgerova@mail.ru*

Abstract. In this paper we consider minimization of the terminal functional

$$S(u) = \varphi(z(t_1, x_1))$$

under restrictions

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D,$$

$$z_{tx}(t, x) = f(t, x, z(t, x), u(t, x)) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)) ds d\tau,$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, x_1],$$

$$z(t, x_0) = b(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$a(x_0) = b(t_0).$$

Here $u(t, x)$ – is measurable and bounded r -dimensional vector-function of control actions, and U is given non-empty open and bounded sets, $\varphi(z)$ – is given twice continuously differentiable scalar function, $a(x)$ and $b(t)$ are given and absolutely continuous n -dimensional vector's of the functions, $f(t, x, z, u)$ and $g(t, x, \tau, s, z, u)$ are given n -dimensional vectors of the function having continuous partial derivatives up to the second order.

Each control function delivering the minimum value to functional under constraints is called optimal control. Using the analogue of the increment method, the first and second order variations of the quality functional are calculated. Using them, various necessary conditions of optimality of the first and second orders are obtained. Separately investigated the case of singular control in the classical sense.

Keywords: hyperbolic integro-differential equations; boundary condition; Euler equation; classical extreme; necessary optimality condition; singular control.

For citation: Rzaeva, V.G. (2023) Necessary conditions for optimality of first and second orders in one optimal control problem described by system of hyperbolic integro-differential equations of Volterra type. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62. pp. 4–12. doi: 10.17223/19988605/62/1

Введение

Многие процессы описываются различного типа уравнениями в частных производных (см., напр.: [1–4]). Поэтому задачи оптимального управления, описываемые уравнениями в частных производных, интенсивно исследуются (см.: [3–9]). Такие задачи оптимального управления называются задачами оптимального управления с распределенными параметрами.

Задачи оптимального управления, описываемые системами гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса, начали изучаться А.И. Егоровым [4, 5]. Был установлен ряд необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина [4–7] и изучены особые управления [8, 9].

Предлагаемая работа посвящена исследованию одной задачи оптимального управления, описываемой системой гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с краевыми условиями Гурса.

При предположении открытости области управления установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков, носящие конструктивный характер.

1. Постановка задачи

Пусть $U \subset R^r$ – заданные непустые и ограниченные множества, $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ – заданный прямоугольник.

Допустим, что управляемый процесс описывается системой гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$z_{tx}(t, x) = f(t, x, z(t, x), u(t, x)) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)) ds d\tau \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in [x_0, x_1],$$

$$z(t, x_0) = b(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

$$a(x_0) = b(t_0). \quad (2)$$

Здесь $f(t, x, z, u)$ и $g(t, x, \tau, s, z, u)$ – заданные n -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, u) до второго порядка включительно, $a(x)$ и $b(t)$ – заданные абсолютно непрерывные n -мерные вектор-функции, $u(t, x)$ r -мерная измеримая и ограниченная вектор-функция управляющих воздействий, удовлетворяющая ограничениям

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D. \quad (3)$$

Такую управляющую функцию назовем допустимым управлением.

Будем предполагать, что каждому допустимому управлению $u(t, x)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $z(t, x)$ краевой задачи (1), (2).

Пару $(u(t, x), z(t, x))$ назовем допустимым процессом.

Пусть $\varphi(z)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируема скалярная функция.

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала

$$S(u) = \varphi(z(t_1, x_1)) \quad (4)$$

при ограничениях (1)–(3).

Допустимое управление $u(t, x)$, доставляющее минимальное значение функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче.

2. Вычисление первой и второй вариаций (в классическом смысле) функционала (4)

Пусть $u(t, x)$ и $\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x)$ – некоторые допустимые управления. Через $z(t, x)$ и $\bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x)$ обозначим соответствующие им решения краевой задачи (1), (2) и запишем приращение функционала качества

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \varphi(\bar{z}(t, x)) - \varphi(z(t, x)). \quad (5)$$

Ясно, что приращение $\Delta z(t, x)$ состояния $z(t, x)$ является решением уравнения

$$\begin{aligned} \Delta z_{tx}(t, x) = & f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), u(t, x)) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [g(t, x, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] ds d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \Delta z(t_0, x) &= 0, \quad x \in [x_0, x_1], \\ \Delta z(t, x_0) &= 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $\psi(t, x)$ некоторая n -мерная вектор-функция.

Предполагаем, что вектор-функция $\psi(t, x)$ удовлетворяет тем условиям гладкости, которые будут использованы при дальнейших рассуждениях.

Из (6) получим справедливость тождеств

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) [f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), u(t, x))] dx dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \left[\int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [g(t, x, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] ds d\tau \right] dx dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем штрих (') – операция скалярного произведения для векторов, а для матриц – операция транспонирования.

Используя теорему Фубини (двумерный аналог формулы Дирихле (см., напр.: [10])) получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \left[\int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [g(t, x, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] ds d\tau \right] dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \psi'(\tau, s) [g(t, x, \tau, s, \bar{z}(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s))] ds d\tau \right] dx dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{u}} f[t, x] &\equiv f(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), u(t, x)), \\ \Delta_{\bar{u}} f_z[t, x] &\equiv f_z(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x)) - f_z(t, x, z(t, x), u(t, x)), \\ f_z[t, x] &\equiv f_z(t, x, z(t, x), u(t, x)), \\ \Delta_{\bar{u}} g[t, x, \tau, s] &\equiv g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)), \\ \Delta_{\bar{u}} g_z[t, x, \tau, s] &\equiv g_z(t, x, \tau, s, z(\tau, s), \bar{u}(\tau, s)) - g_z(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)), \\ H(t, x, z, u, \psi) &= -\psi' f(t, x, z, u) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x_1} \psi'(\tau, s) g(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)) ds d\tau, \\ \Delta_{\bar{u}} H[t, x] &\equiv H(t, x, z(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)), \\ H_z[t, x] &\equiv H_z(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \end{aligned}$$

и, учитывая тождества (8), (9), из формулы приращения (5) получаем

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \varphi(\bar{z}(t, x)) - \varphi(z(t, x)) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x))] dx dt. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу краевых условий (7) можно доказать, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt &= \psi'(t_1, x_1) \Delta z(t_1, x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \psi'_x(t_1, x) \Delta z(t_1, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \psi'_t(t, x_1) \Delta z(t, x_1) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'_{tx}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая тождество (11) и применяя формулу Тейлора, из (10) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \varphi'_z(z(t_1, x_1)) \Delta z(t_1, x_1) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, x_1) \varphi_{zz}(z(t_1, x_1)) \Delta z(t_1, x_1) + o_1(\|\Delta z(t_1, x_1)\|^2) + \\ &+ \psi'(t_1, x_1) \Delta z(t_1, x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \psi'_x(t_1, x) \Delta z(t_1, x) dx - \int_{t_0}^{t_1} \psi'_t(t, x_1) \Delta z(t, x_1) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'_{tx}(t, x) \Delta z(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H'_z[t, x] \Delta z(t, x) + H'_u[t, x] \Delta u(t, x)] dx dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta z'(t, x) H_{zz}[t, x] \Delta z(t, x) + 2 \Delta u'(t, x) H_{uz}[t, x] \Delta z(t, x) + \Delta u'(t, x) H_{uu}[t, x] \Delta u(t, x) + \\ &+ o_2(\|\Delta z(t, x) + \Delta u(t, x)\|^2)] dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Если предполагать, что вектор-функция $\psi(t, x)$ является решением краевой задачи

$$\psi_{tx}(t, x) = H_z[t, x], \quad (13)$$

$$\psi_t(t, x_1) = 0, \quad \psi_x(t_1, x) = 0, \quad (14)$$

$$\psi(t_1, x_1) = -\varphi_z(z(t_1, x_1)),$$

то формула приращения (12) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H_u'[t, x] \Delta u(t, x) dx dt + \frac{1}{2} \left[\Delta z'(t_1, x_1) \varphi_{zz}(z(t_1, x_1)) \Delta z(t_1, x_1) - \right. \\ & \left. - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta z'(t, x) H_{zz}[t, x] \Delta z(t, x) + 2 \Delta u'(t, x) H_{uz}[t, x] \Delta z(t, x) + \Delta u'(t, x) H_{uu}[t, x] \Delta u(t, x)] dx dt \right] + \\ & + o_1 \left(\|\Delta z(t_1, x_1)\|^2 \right) - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_2 \left(\|\Delta z(t, x) + \Delta u(t, x)\|^2 \right) dx dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $R(t, x, \tau, s) (n \times n)$ – матричная функция, являющаяся решением линеаризованной краевой задачи

$$\begin{aligned} R_{ts}(t, x, \tau, s) &= R(t, x, \tau, s) f_z[\tau, s] + \int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x, \alpha, \beta) g_z[\alpha, \beta, \tau, s] d\alpha d\beta, \\ R_t(t, x, \tau, s) &= 0, \quad R_s(t, x, \tau, s) = 0, \\ R(t, x, t, x) &= E, \end{aligned}$$

где $E (n \times n)$ – единичная матрица.

Из краевой задачи (6), (7) следует, что приращение $\Delta z(t, x)$ состояния $z(t, x)$ является решением уравнения

$$\Delta z_{tx}(t, x) = f_z[t, x] \Delta z(t, x) + f_u[t, x] \Delta u(t, x) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [g_z[t, x, \tau, s] \Delta z(\tau, s) + g_u[t, x, \tau, s] \Delta u(\tau, s)] ds d\tau + \quad (16)$$

$$+ o_3 \left(\|\Delta z(t, x) + \Delta u(t, x)\| \right) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x o_4 \left(\|\Delta z(\tau, s) + \Delta u(\tau, s)\| \right) ds d\tau,$$

$$\begin{aligned} \Delta z(t_0, x) &= 0, \\ \Delta z(t, x_0) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Если интерпретировать уравнение (16) как линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение относительно $\Delta z(t, x)$, то решение краевой задачи (16), (17) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) = & \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R(t, x, \tau, s) f_u[\tau, s] \Delta u(\tau, s) ds d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x, \alpha, \beta) g_u[\alpha, \beta, \tau, s] d\alpha d\beta \right] \Delta u(\tau, s) ds d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R(t, x, \tau, s) o_3 \left(\|\Delta z(\tau, s) + \Delta u(\tau, s)\| \right) ds d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x, \alpha, \beta) o_4 \left(\|\Delta z(\tau, s) + \Delta u(\tau, s)\| \right) d\alpha d\beta \right] ds d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть ε – малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D$ – произвольная r -мерная, измеримая и ограниченная вектор-функция.

Через $\Delta u(t, x; \varepsilon)$ обозначим специальное приращение управления $u(t, x)$ по формуле

$$\Delta u(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta u(t, x), (t, x) \in D. \quad (19)$$

Пусть $\Delta z(t, x; \varepsilon)$ – специальное приращение состояния $z(t, x)$, отвечающее специальному приращению (19) управления $u(t, x)$.

С помощью представления (18) доказывается справедливость разложения

$$\Delta z(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta z(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \quad (20)$$

где $\delta z(t, x)$ определяется из соотношения

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x_1} R(t, x, \tau, s) f_u[\tau, s] \delta u(\tau, s) ds d\tau + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x, \alpha, \beta) g_u[\alpha, \beta, \tau, s] d\alpha d\beta \right] \delta u(\tau, s) ds d\tau.$$

При введении обозначения

$$Q(t, x, \tau, s) = R(t, x, \tau, s) f_u[\tau, s] + \int_{\tau}^t \int_s^x R(t, x, \alpha, \beta) g_u[\alpha, \beta, \tau, s] d\alpha d\beta$$

последнее представление записывается в виде:

$$\delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x_1} Q(t, x, \tau, s) \delta u(\tau, s) ds d\tau. \quad (21)$$

Учитывая формулы (18) и (20), из формулы приращения (15) получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} S(u + \varepsilon \delta u) - S(u) &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u[t, x] \delta u(t, x) dx dt + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta z'(t, x) H_{zz}[t, x] \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) H_{uz}[t, x] \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}[t, x] \delta u(t, x) \right] dx dt + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Из разложения (22) следует, что первая и вторая вариации функционала (4) имеют соответственно вид:

$$\delta^1 S(u; \delta u) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u[t, x] \delta u(t, x) dx dt, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 S(u; \delta u) &= -l'(t_1, x_1) \phi_{zz}(z(t_1, x_1)) l(t_1, x_1) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta z'(t, x) H_{zz}[t, x] \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) H_{uz}[t, x] \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}[t, x] \delta u(t, x) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Если $u(t, x)$ – оптимальное управление, то вдоль него первая вариация (23) функционала (4) равна нулю, а вторая вариация (24) неотрицательна.

Следовательно, при сделанных предположениях для оптимальности допустимого процесса $(u(t, x), z(t, x))$ необходимо, чтобы для всех $\delta u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D$ выполнялись соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H'_u[t, x] \delta u(t, x) dx dt = 0, \quad (25)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta z'(t, x) H_{zz}[t, x] \delta z(t, x) + 2\delta u'(t, x) H_{uz}[t, x] \delta z(t, x) + \delta u'(t, x) H_{uu}[t, x] \delta u(t, x) \right] dx dt \geq 0. \quad (26)$$

Из тождества (25) в силу произвольности $\delta u(t, x)$ следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ необходимо, чтобы соотношение

$$H_u[\theta, \xi] = 0 \quad (27)$$

выполнялось для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$.

Здесь $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ – произвольная правильная точка (см., напр.: [11]) управления $u(t, x)$.

Условие (27), следуя классическому вариационному исчислению, назовем уравнением Эйлера для рассматриваемой задачи.

Уравнение Эйлера является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Каждое допустимое управление, являющееся решением уравнения Эйлера, назовем классической экстремалью. Вообще говоря, число классических экстремалей может быть достаточно большим. Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности, «сужающие» множество классических экстремалей.

Таким необходимым условием оптимальности является необходимое условие оптимальности (26). Но необходимое условие оптимальности (26) является неявным условием оптимальности.

Используя неравенство (26), получим необходимые условия оптимальности, непосредственно выраженные через параметры рассматриваемой задачи.

Займемся преобразованием некоторых слагаемых в неравенстве (26).

Используя представление (22), убедимся в справедливости тождеств

$$\begin{aligned} & \delta z'(t_1, x_1) \phi_{zz}(z(t_1, x_1)) \delta z(t_1, x_1) = \\ & = \int_D \int_D \delta u'(\tau, s) f_u[\tau, s] R'(t_1, x_1, \tau, s) \phi_{zz}(z(t_1, x_1)) R(t_1, x_1, \alpha, \beta) f_u[\alpha, \beta] \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(t, x) H_{uz}[t, x] \delta z(t, x) dx dt = \int_D \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(\tau, s) H_{uz}[\tau, s] Q(t, x, \tau, s) \delta u(t, x) ds d\tau \right] dx dt. \quad (29)$$

Далее по аналогии с [8] доказывается, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t, x) H_{zz}[t, x] \delta z(t, x) dx dt = \\ & = \int_D \int_D \left[\int_{\max(\tau, \alpha)}^{t_1} \int_{\max(s, \beta)}^{x_1} Q'(t, x, \tau, s) H_{zz}[t, x] Q(t, x, \alpha, \beta) dx dt \right] \delta u(\alpha, \beta) ds d\tau d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} B(\tau, s, \alpha, \beta) = & \int_{\max(\tau, \alpha)}^{t_1} \int_{\max(s, \beta)}^{x_1} Q'(t, x, \tau, s) H_{zz}[t, x] Q(t, x, \alpha, \beta) dx dt - \\ & - Q'(t_1, x_1, \tau, s) \phi_{zz}(z(t_1, x_1)) Q(t_1, x_1, \alpha, \beta). \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда, учитывая тождества (29), (30) и обозначение (31) в неравенстве (26), получим, что

$$\begin{aligned} & \int_D \int_D \delta u'(\tau, s) B(\tau, s, \alpha, \beta) \delta u(\alpha, \beta) d\tau ds d\alpha d\beta + 2 \int_D \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(\tau, s) H_{uz}[\tau, s] Q(\tau, s, t, x) ds d\tau \right] \times \\ & \times f_u[t, x] \delta u(t, x) dx dt + \int_D \delta u'(t, x) H_{uu}[t, x] \delta u(t, x) dx dt \leq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Следовательно, доказана

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $u(t, x)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (32) выполнялось для всех $\delta u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D$.

Необходимое условие оптимальности (32) является довольно общим условием оптимальности, учитывая произвольность допустимой вариации $\delta u(t, x)$ управления $u(t, x)$. Из него можно получить ряд легко проверяемых необходимых условий оптимальности, в частности аналог условия Лежандра–Клебша.

Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое произвольное число, $v \in R^r$ – произвольный вектор.

Специальную вариацию управления $u(t, x)$ определим по формуле

$$\delta u(t, x; \varepsilon) = \begin{cases} v, & (t, x) \in [\theta, \theta + \varepsilon) \times [\xi, \xi + \varepsilon), \\ 0, & (t, x) \in D \setminus [\theta, \theta + \varepsilon) \times [\xi, \xi + \varepsilon). \end{cases} \quad (33)$$

Учитывая формулу (33), в неравенстве (32) получим, что

$$\varepsilon^2 (v' H_{uu} [\theta, \xi] v + o(\varepsilon^2)) \leq 0.$$

Отсюда в силу произвольности и достаточной малости ε получаем

$$v' H_{uu} [\theta, \xi] v \leq 0. \quad (34)$$

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $u(t, x)$ необходимо, чтобы неравенство (33) выполнялось для всех $v \in U \subset R^r$ и $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$.

Заметим, что неравенство (34) является аналогом условия Лежандра–Клебша для рассматриваемой задачи.

Рассмотрим случай вырождения аналога условия Лежандра–Клебша.

Определение 1. Классическую экстремаль $u(t, x)$ назовем особым в классическом смысле управлением, если для всех $v \in U \subset R^r$ и $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$

$$v' H_{uu} [\theta, \xi] v = 0.$$

Из введенного определения ясно, что для особых в классическом смысле управлений аналог условия Лежандра–Клебша (34) вырождается.

Пусть $u(t, x)$ – особое в классическом смысле оптимальное управление. Тогда, используя формулу (33), из неравенства (32) после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon^4 [v' f''_{uu} [\theta, \xi] B[\theta, \xi; \theta, \xi] f_u [\theta, \xi] v + \\ & + \frac{1}{2} v' H_{uz} [\theta, \xi] f_u [\theta, \xi] v] + o(\varepsilon^2) \leq 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Из неравенства (35) в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t, x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$v' [f''_{uu} [\theta, \xi] B[\theta, \xi; \theta, \xi] f_u [\theta, \xi] + \frac{1}{2} H_{uz} [\theta, \xi] f_u [\theta, \xi]] v \leq 0$$

выполнялось для всех $v \in U \subset R^r$ и $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$.

Последнее неравенство является необходимым условием оптимальности для классически особых управлений.

Заключение

В работе, учитывая открытость области управления и применяя один вариант метода приращений, вычислены первая и вторая вариации функционала качества.

Из условия равенства нулю первой вариации функционала качества получен аналог уравнения Эйлера.

Из условия неотрицательности второй вариации функционала качества вдоль оптимального процесса выведен ряд необходимых условий оптимальности второго порядка, носящих конструктивный характер.

Список источников

1. Рачинский В.В. Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964. 134 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. Сиразитдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.

4. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964. № 5. С. 613–623.
5. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1965. № 6. С. 1205–1260.
6. Ахиев С.С., Ахмедов Т.К. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Доклады АН Азербайджанской ССР. 1972. Т. 28, № 5. С. 12–16.
7. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системой Гурса–Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. № 1. С. 61–77.
8. Мансимов К.Б. К оптимальности особых в классическом смысле управлений в системах Гурса–Дарбу // Доклады АН СССР. 1986. Т. 286, № 4. С. 808–812.
9. Мансимов К.Б. Об оптимальности квазисобых управлений в системах Гурса–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1986. № 11. С. 1952–1960.
10. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005. 429 с.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1984. 384 с.

References

1. Rachinsky, V.V. (1964) *Vvedenie v obshchuyu teoriyu dinamiki sorbtsii i khromatografii* [Introduction to the general theory of sorption dynamics and chromatography]. Moscow: Nauka.
2. Tikhonov, A.N. & Samarskii, A.A. (1972) *Urvneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka.
3. Sirazitdinov, T.K. (1977) *Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* [Optimization of systems with distributed parameters]. Moscow: Nauka.
4. Egorov, A.I. (1964) Ob optimal'nom upravlenii protsessami v nekotorykh sistemakh s raspredelennymi parametrami [On optimal process control in some systems with distributed parameters]. *Avtomatika i telemekhanika*. 5. pp. 613–623.
5. Egorov, A.I. (1965) Optimal'nye protsessy v sistemakh s raspredelennymi parametrami i nekotorye zadachi teorii invariantnosti [Optimal processes in systems with distributed parameters and some problems of invariance theory]. *Izv. USSR Academy of Sciences, Ser. math.* 6. pp. 1205–1260.
6. Akhiev, S.S. & Akhmedov, T.K. (1972) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti dlya nekotorykh zadach teorii optimal'nogo upravleniya [Necessary optimality conditions for some problems in optimal control theory]. *Dokl. AN Azerbaijan. SSR*. 28(5). pp. 12–16.
7. Plotnikov, V.I & Sumin, V.I. (1972) Optimizatsiya ob"ektov s raspredelennymi parametrami, opisyyaemykh sistemoy Gursa–Darbu [Optimization of objects with distributed parameters, described by the Goursat–Darboux system]. *Zhurnal. Calc. mat. and mat. physics*. 1. pp. 61–77.
8. Mansimov, K.B. (1986) K optimal'nosti osobykh v klassicheskom smysle upravleniy v sistemakh Gursa–Darbu [On the optimality of singular controls in the classical sense in Goursat–Darboux systems]. *DAN SSSR*. 286(4). pp. 808–812.
9. Mansimov, K.B. (1986) Ob optimal'nosti kvaziosobykh upravleniy v sistemakh Gursa–Darbu [On the optimality of quasi-singular controls in Goursat–Darboux systems]. *Diferentsialnye Urvneniya*. 11. pp. 1952–1960.
10. Alekseev, V.M., Tikhomirov V.M., & Fomin, S.V. (2005) *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow: Fizmatlit.
11. Pontryagin, L.S., Boltyansky, V.G., Gamkrelidze, R.V. & Mishchenko, E.F. (1984) *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow: Nauka.

Информация об авторе:

Рзаева Вафа Гюлага кызы – старший преподаватель Сумгаитского государственного университета (Сумгаит, Азербайджан).
E-mail: vafa.asgerova77@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the author:

Rzayeva Vafa G. (Senior Lecturer of the Sumgayit State University, Sumgayit, Azerbaijan). E-mail: vafa.asgerova77@mail.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 08.07.2022; принята к публикации 01.03.2023

Received 08.07.2022; accepted for publication 01.03.2023