

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/62/4

Применение метода максимального правдоподобия для оценки параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени в рекуррентном альтернирующем полусинхронном потоке событий**Александр Михайлович Горцев¹, Анна Васильевна Веткина²**^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия¹ a-gortsev@mail.ru² anyavetkina@gmail.com

Аннотация. Исследуется полусинхронный поток событий, относящийся к классу дважды стохастических потоков событий. Поток функционирует в условиях непродлевающегося случайного мертвого времени, распределенного по равномерному закону на отрезке $[0, T^*]$. Рассматривается частный случай функционирования полусинхронного потока событий – альтернирующий поток, который является рекуррентным в общем и особом случаях соотношения его параметров. Производится оценивание параметра T^* равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени методом максимального правдоподобия. Приводятся результаты статистических экспериментов.

Ключевые слова: альтернирующий полусинхронный поток событий; непродлевающееся случайное мертвое время; оценка параметра; метод максимального правдоподобия.

Для цитирования: Горцев А.М., Веткина А.В. Применение метода максимального правдоподобия для оценки параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося мертвого времени в рекуррентном альтернирующем полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 36–49. doi: 10.17223/19988605/62/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/62/4

An application of the maximum likelihood estimation for the parameter of uniform distribution of the duration of unextendable dead time in recurrent alternating semi-synchronous flow**Alexander M. Gortsev¹, Anna V. Vetkina²**^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation¹ a-gortsev@mail.ru² anyavetkina@gmail.com

Abstract. The paper describes alternating recurrent semi-synchronous events flow that is a common mathematical model of information flows of messages operating in telecommunication and information-computing networks, and that belongs to the class of doubly stochastic event flows. General and special cases are considered. Operation of the

flow is considered with random unextendable dead time that has uniform distribution on the interval $[0, T^*]$. Parameter T^* of the dead time is estimated using the maximum likelihood estimation. Results of statistical experiments are presented

Keywords: recurrent semi-synchronous events flow; unextendable random dead time; uniform distribution; estimation of the parameter; maximum likelihood estimation.

For citation: Gortsev, A.M., Vetkina, A.V. (2023) An application of the maximum likelihood estimation for the parameter of uniform distribution of the duration of unextendable dead time in recurrent alternating semi-synchronous flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62. pp. 36–49. doi: 10.17223/19988605/62/4

Введение

Информационные потоки сообщений, функционирующие в современных телекоммуникационных системах и сетях различной конфигурации, наиболее адекватно и точно описываются дважды стохастическими потоками событий [1, 2] – такими потоками, у которых случайными являются и моменты наступления событий, и их интенсивность. В общем случае дважды стохастические потоки событий являются коррелированными потоками [2].

Дважды стохастические потоки делятся на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайный процесс [3, 4]; второй – потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний [5, 6]. В зависимости от способа перехода интенсивности потока из состояния в состояние выделяется три типа дважды стохастических потоков: 1) синхронные (потоки, у которых состояние сопровождающего процесса меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [7–10]; 2) асинхронные (потоки, у которых переход из состояния в состояние сопровождающего процесса происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [11–14]; 3) полусинхронные (потоки, у которых одна часть состояний сопровождающего процесса меняется в моменты наступления событий потока, другая часть состояний сопровождающего процесса меняется в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [15–18].

В реальных информационных системах часто встречаются ситуации, когда не все события потоков можно наблюдать. Причиной ненаблюдаемости, как правило, служит мертвое время регистрирующих приборов [19], порождаемое зарегистрированным событием, так что другие события, наступившие в этот период, становятся недоступными для наблюдения. Регистрирующие приборы при этом делятся на два вида: с непродлевающимся мертвым временем и продлевающимся. Кроме того, период ненаблюдаемости может быть как детерминированной величиной, одинаковой для всех событий, так и случайной с тем или иным законом распределения. Величина и характер мертвого времени у регистрирующих устройств зависят от многих факторов. При этом регистрирующие приборы обладают значением длительности мертвого времени, ограниченным сверху некоторой величиной. Поэтому, принимая мертвое время случайным [19], вполне естественно рассматривать его распределение как равномерное на некотором отрезке.

Для того чтобы выявить потери событий, возникающие из-за наличия искажающего фактора (непродлевающегося мертвого времени), требуется оценить значение длительности мертвого времени. В настоящей статье оценивается параметр длительности случайного мертвого времени, распределенного по равномерному закону, в полусинхронном дважды стохастическом потоке событий с интенсивностью, являющейся кусочно-постоянным случайным процессом с двумя состояниями. На параметр потока накладывается условие, так что исходный коррелированный поток вырождается в рекуррентный. Производится оценивание для двух случаев функционирования такого потока, общего и особого, с помощью метода максимального правдоподобия. Посредством имитационной модели наблюдаемого потока реализуются статистические эксперименты для получения численных результатов оценивания.

1. Математическая модель наблюдаемого потока. Постановка задачи

Рассматривается стационарный режим функционирования полусинхронного дважды стохастического потока событий, сопровождающий процесс (интенсивность) которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями S_1 и S_2 . Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса (потока) S_1 , если $\lambda(t) = \lambda_1$, и, наоборот, имеет место второе состояние процесса (потока) S_2 , если $\lambda(t) = \lambda_2$ ($\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$). Если имеет место первое состояние процесса S_1 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_1$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_1 . Если имеет место второе состояние процесса S_2 , то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_2$, поступает пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_2 . Переход из состояния S_1 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_2 возможен только в момент наступления события (свойство синхронности потока), при этом этот переход осуществляется с вероятностью p (с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в состоянии S_1). Переход из состояния S_2 процесса $\lambda(t)$ в состояние S_1 может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события (свойство асинхронности потока). При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии есть случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону $F(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$, $t \geq 0$, где α_2 – интенсивность смены состояния S_2 на S_1 . Так как переход из второго состояния в первое не привязан к моменту наступления события во втором состоянии, то поток называется полусинхронным дважды стохастическим потоком событий. В сделанных предположениях $\lambda(t)$ – скрытый марковский процесс ($\lambda(t)$ – принципиально ненаблюдаемый процесс; наблюдаемыми являются только моменты наступления событий потока).

После каждого зарегистрированного события в момент времени t_k наступает период мертвого времени случайной длительности, который порождается этим событием, так что другие события исходного потока, наступившие в течение этого периода мертвого времени, недоступны наблюдению и не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время). Принимается, что случайная длительность мертвого времени распределена по равномерному закону с плотностью вероятности $p(T) = 1/T^*$, где T – значение длительности мертвого времени, $0 \leq T \leq T^*$.

Исследуется частный случай функционирования полусинхронного потока событий, когда $\lambda_2 = 0$, т.е. рассматривается альтернирующий поток, у которого отсутствуют события во втором состоянии. При выполнении такого ограничения исходный полусинхронный поток, действующий в условиях детерминированного мертвого времени, становится рекуррентным потоком:

$$p(\tau_1, \tau_2 | T) = p(\tau_1 | T) p(\tau_2 | T), \quad \tau_1 \geq T, \tau_2 \geq T,$$

где $p(\tau | T)$ – плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке, $\tau = \tau_1, \tau_2$; $p(\tau_1, \tau_2 | T)$ – совместная плотность вероятности [20. С. 254].

Вместе с тем рассматриваются общий и особый случаи соотношения параметров данного потока: когда $\lambda_1 - \alpha_2 \neq 0$ и когда $\lambda_1 - \alpha_2 = 0$ соответственно.

Возможный вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где S_1 и S_2 – состояния случайного процесса $\lambda(t)$; временная ось $(0, t)$ – ось моментов наступления наблюдаемых событий в моменты времени $t_1, t_2, \dots$; временная ось $(0, t^{(1)})$ – ось наступления событий в моменты времени $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots$ в первом состоянии (S_1) процесса $\lambda(t)$, на которой также указаны значения длительностей $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots$ мертвых времен, порождаемых наблюдаемыми событиями потока; на временной оси $(0, t^{(2)})$ нет событий потока, так как $\lambda_2 = 0$; белыми кружками обозначены наблюдаемые события, черными – ненаблюдаемые, штриховкой – периоды мертвого времени; траектория процесса $\lambda(t)$ привязана к временной оси $(0, t^{(1)})$.

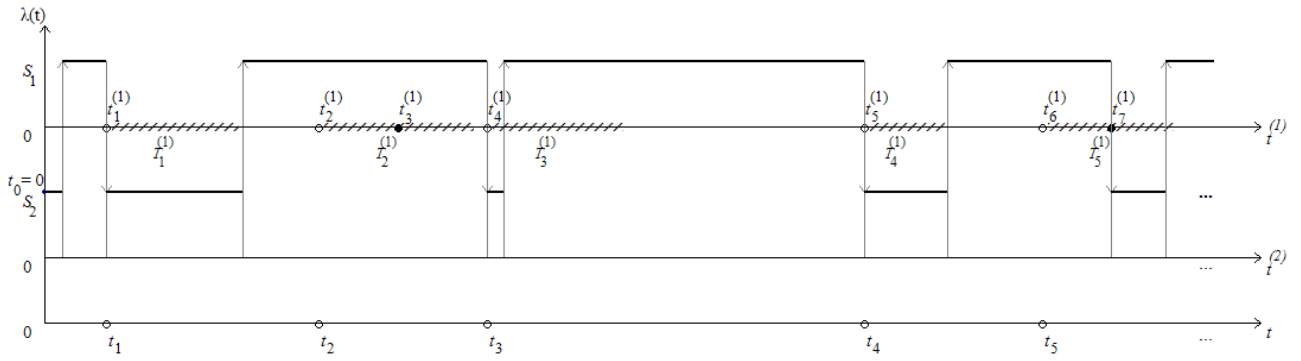


Рис. 1. Формирование наблюдаемого альтернирующего потока событий

Fig. 1. Formation of the observed altering events flow

Цели данной работы:

1. На основании выборки моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_n$ наблюдаемых потоков в общем и особом случаях на временном интервале $(0, T_m)$, где T_m – время наблюдения за потоком ($t_n < T_m$), оценить параметр равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени T^* методом максимального правдоподобия.

2. Исследовать оценку $\hat{T}^*$ для общего и особого случаев рассматриваемого потока. Для этого провести статистические эксперименты, устанавливающие стационарный режим и определяющие свойства полученных оценок.

2. Приближенная МП-оценка параметра T^*

Введем $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \dots$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями наблюдаемого потока ($\tau_k \geq 0$). В силу того, что рассматривается стационарный режим функционирования наблюдаемого потока, плотность вероятности значений длительности k -го интервала есть $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k , т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$.

Из работы [20. С. 217] имеем, что плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном альтернирующем полусинхронном потоке, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности T , в общем случае имеет вид:

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \gamma(T)\lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau-T)} + (1-\gamma(T))\alpha_2 e^{-\alpha_2(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\text{где } \gamma(T) = \frac{\alpha_2(\lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_1 p)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \alpha_2)} \left[1 + \frac{p(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_2 e^{(\lambda_1 p + \alpha_2)T}} \right], \quad \lambda_1 - \alpha_2 \neq 0.$$

Для альтернирующего полусинхронного потока событий с непродлевающимся мертвым временем фиксированной длительности T в особом случае $\lambda_1 - \alpha_2 = 0$ справедливы формулы [20. С. 220]

$$p(\tau|T) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \left[\lambda_1 - \lambda_1 \pi_2(T)(1 - \lambda_1(\tau - T)) \right] e^{-\lambda_1(\tau-T)}, & \tau \geq T, \end{cases}$$

$$\text{где } \pi_2(T) = \frac{p}{1+p} \left[1 + p e^{-\lambda_1(1+p)T} \right].$$

Подчеркнем, что внесение непродлевающегося случайного мертвого времени в математическую модель полусинхронного потока событий может только изменить (в меньшую или большую сторону) корреляцию в потоке по сравнению с ситуацией отсутствия мертвого времени ($T^* = 0$) либо с ситуацией наличия детерминированного мертвого времени ($T > 0$), но не устранить ее полностью.

Тогда искомая плотность вероятности $p(\tau)$ примет вид:

$$p(\tau) = \int_{(T)} p(\tau, T) dT = \int_{(T)} p(T) p(\tau | T) dT,$$

где $p(\tau, T)$ – совместная плотность вероятности значений τ и T ; условная плотность вероятности $p(\tau | T)$ определяется выписанными выше выражениями для общего и особого случаев; равномерная плотность $p(T)$ определена в разд. 1; (T) – область интегрирования значений случайной величины – длительности непродлевающегося случайного мертвого времени. Отметим, что внесение непродлевающегося случайного мертвого времени в математическую модель для случая рекуррентного альтернирующего потока, когда $\lambda_2 = 0$, оставляет наблюдаемый поток в классе рекуррентных потоков, так как последнее является следствием значений параметров потока или их соотношений.

Область значений случайной величины мертвого времени представляет собой объединение двух областей, когда $0 \leq \tau < T^*$ и когда $\tau \geq T^*$, поэтому общее выражение для плотности $p(\tau)$ имеет следующий вид:

$$p(\tau) = \begin{cases} p_1(\tau) = \int_0^{\tau} p(T) p(\tau | T) dT, & 0 \leq \tau < T^*, \\ p_2(\tau) = \int_0^{T^*} p(T) p(\tau | T) dT, & \tau \geq T^*. \end{cases}$$

Подставляя выражение $p(\tau, T)$ для общего случая в последнюю формулу, находим

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ 1 - e^{-\lambda_1 \tau} - e^{-\alpha_2 \tau} + e^{-(\lambda_1 p + \alpha_2) \tau} \right\}, \quad 0 \leq \tau < T^*, \quad (1)$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ e^{-\lambda_1 \tau} \left[-1 + C_1 e^{\lambda_1 T^*} + C_2 e^{(\lambda_1 - \lambda_1 p - \alpha_2) T^*} \right] + e^{-\alpha_2 \tau} \left[-1 + C_1 e^{-\lambda_1 p T^*} + C_2 e^{\alpha_2 T^*} \right] \right\}, \quad \tau \geq T^*, \quad (2)$$

где $C_1 = \frac{\alpha_2 (\lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_1 p)}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \alpha_2)}$, $C_2 = \frac{\lambda_1^2 p}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \alpha_2)}$, $0 < p < 1$, $C_1 + C_2 = 1$, $\lambda_1 \neq \alpha_2$.

Подставляя выражение $p(\tau, T)$ для особого случая в общую формулу для $p(\tau)$, получаем

$$p_1(\tau) = \frac{1}{T^*} \left\{ 1 - 2e^{-\lambda_1 \tau} + e^{-\lambda_1 (1+p) \tau} \right\}, \quad 0 \leq \tau < T^*, \quad (3)$$

$$p_2(\tau) = \frac{1}{(1+p)T^*} \left\{ \left(-2 + e^{\lambda_1 T^*} + e^{-\lambda_1 p T^*} \right) (1+p) + \lambda_1 p (\tau - T^*) \left(e^{\lambda_1 T^*} - e^{-\lambda_1 p T^*} \right) \right\} e^{-\lambda_1 \tau}, \quad \tau \geq T^*. \quad (4)$$

В статье авторов [21] для оценивания параметра T^* использован метод моментов [22]. В настоящей работе для случая рекуррентного альтернирующего полусинхронного потока событий для нахождения оценки параметра T^* воспользуемся методом максимального правдоподобия [22], поскольку длительности интервалов между соседними событиями потока являются взаимно независимыми случайными величинами. Подчеркнем, что аналогичный подход использован в работе [23], где рассмотрена подобная задача для рекуррентного обобщенного асинхронного потока.

Предположим, что в процессе наблюдения за потоком на полуинтервале времени $(t_0, t]$ измерено n значений: $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Тогда функция правдоподобия запишется в виде:

$$L(T^* | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{k=1}^n p(\tau_k | T^*), \quad T^* > 0, \quad (5)$$

где $p(\tau_k | T^*)$ – плотность вероятности, определенная формулами (1), (2) для общего случая и формулами (3), (4) для особого случая альтернирующего потока, в которых $\tau = \tau_k$ ($\tau^{(k)}$ – измерение); T^* – переменная величина ($T^* > 0$).

Выражение (5) перепишем в следующем виде:

$$L(T^* | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = L_1(T^* | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) L_2(T^* | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \quad (6)$$

$$L_1(T^* | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{k: \tau_k < T^*} p_1(\tau_k | T^*), \quad L_2(T^* | \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{k: \tau_k \geq T^*} p_2(\tau_k | T^*).$$

Упорядочим величины τ_k , $k = \overline{1, n}$, по возрастанию: $0 < \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(n)} < \infty$. Тогда выражение (6) примет вид:

$$L(T^* | \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)}) = \prod_{k=1}^n p_2(\tau^{(k)} | T^*), \quad 0 < T^* < \tau^{(1)};$$

$$L(T^* | \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)}) = p_1(\tau^{(1)} | T^*) \prod_{k=2}^n p_2(\tau^{(k)} | T^*), \quad \tau^{(1)} \leq T^* < \tau^{(2)};$$

$$\dots$$

$$L(T^* | \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)}) = \prod_{k=1}^{n-1} p_1(\tau^{(k)} | T^*) p_2(\tau^{(n)} | T^*), \quad \tau^{(n-1)} \leq T^* < \tau^{(n)};$$

$$L(T^* | \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(n)}) = \prod_{k=1}^n p_1(\tau^{(k)} | T^*), \quad \tau^{(n)} \leq T^* < \infty. \quad (7)$$

Теорема. Функция $p(\tau^{(k)} | T^*)$ переменной T^* ($T^* > 0$) как в общем, так и в особом случае достигает своего глобального максимума в точке $T^* = \tau^{(k)}$.

Доказательство. I. Общий случай. Обозначим $p_1(\tau^{(k)} | T^*)$ – плотность вероятности, определенную формулой (1), в которой $\tau = \tau^{(k)}$ ($\tau^{(k)}$ – измерение), T^* – переменная величина ($T^* > 0$). Тогда очевидно, что $dp_1(\tau^{(k)} | T^*) / dT^* < 0$ для $T^* \geq \tau^{(k)}$, т.е. функция $p_1(\tau^{(k)} | T^*)$ является убывающей по переменной T^* и достигает своего глобального максимума в точке $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим теперь функцию $p_2(\tau^{(k)} | T^*)$ – плотность вероятности, определенную формулой (2), в которой $\tau = \tau^{(k)}$ ($\tau^{(k)}$ – измерение), T^* – переменная величина, $0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$. При этом $p_1(\tau^{(k)} | T^* = \tau^{(k)}) = p_2(\tau^{(k)} | T^* = \tau^{(k)})$, $k = \overline{1, n}$. Производная по T^* функции $p_2(\tau^{(k)} | T^*)$ выпишется в виде:

$$p_2'(\tau^{(k)} | T^*) = (1/T^*)^2 \psi(T^*), \quad 0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$\psi(T^*) = e^{-\lambda_1 \tau^{(k)}} + e^{-\alpha_2 \tau^{(k)}} + \frac{1}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \alpha_2)} \left\{ e^{-\lambda_1(\tau^{(k)} - T^*)} \left[\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_1 p - \alpha_2)(\lambda_1 T^* - 1) + \right. \right.$$

$$+ \lambda_1^2 p(T^*(\lambda_1 - \lambda_1 p - \alpha_2) - 1) e^{-(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*} \left. \right] + e^{-\alpha_2(\tau^{(k)} - T^*)} \left[\lambda_1^2 p(\alpha_2 T^* - 1) - \right.$$

$$\left. - \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_1 p - \alpha_2)(\lambda_1 p T^* + 1) e^{-(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*} \right] \left. \right\}. \quad (9)$$

Знак производной (8) определяется знаком функции (9), как функции переменной T^* ($0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$). Производная функции $\psi(T^*)$ по переменной T^* выпишется в виде:

$$\psi'(T^*) = \frac{T^*}{(\lambda_1 p + \alpha_2)(\lambda_1 - \alpha_2)} \left[\alpha_2 + p(\lambda_1 - \lambda_1 p - \alpha_2) e^{-(\lambda_1 p + \alpha_2) T^*} \right] \times$$

$$\times \left[(\lambda_1 - \lambda_1 p - \alpha_2) e^{-\lambda_1(\tau^{(k)} - T^*)} + p \alpha_2 e^{-\alpha_2(\tau^{(k)} - T^*)} \right]. \quad (10)$$

В (10) возможны четыре ситуации соотношения параметров рассматриваемого потока:

1) $\lambda_1 - \alpha_2 > 0$, $\lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_1 p > 0$,

- 2) $\lambda_1 - \alpha_2 > 0, \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_1 p < 0,$
- 3) $\lambda_1 - \alpha_2 > 0, \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_1 p = 0,$
- 4) $\lambda_1 - \alpha_2 < 0, \lambda_1 - \alpha_2 - \lambda_1 p < 0.$

Нетрудно показать, что для всех этих ситуаций имеет место $p_2'(\tau^{(k)} | T^*) > 0$ для $0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$. Последнее означает, что $p_2(\tau^{(k)} | T^*)$ – возрастающая функция переменной T^* ($0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$) и достигает своего глобального максимума в точке $T^* = \tau^{(k)}$. Объединяя два утверждения относительно глобальных максимумов функций $p_1(\tau^{(k)} | T^*)$ и $p_2(\tau^{(k)} | T^*)$, получаем утверждение теоремы для общего случая.

II. Особый случай. Аналогично общему случаю имеем $dp_1(\tau^{(k)} | T^*) / dT^* < 0$ для $T^* \geq \tau^{(k)}$, где $p_1(\tau^{(k)} | T^*)$ определена в (3). То есть функция $p_1(\tau^{(k)} | T^*)$ является убывающей по переменной T^* и достигает своего глобального максимума в точке $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим теперь функцию $p_2(\tau^{(k)} | T^*)$ – плотность вероятности, определенную формулой (4), в которой $\tau = \tau^{(k)}$ ($\tau^{(k)}$ – измерение), T^* – переменная величина, $0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$. При этом $p_1(\tau^{(k)} | T^* = \tau^{(k)}) = p_2(\tau^{(k)} | T^* = \tau^{(k)})$, $k = \overline{1, n}$. Производная по T^* функции $p_2(\tau^{(k)} | T^*)$ выпишется в виде (8), где

$$\begin{aligned} \psi(T^*) = & \frac{1}{1+p} e^{-\lambda_1 \tau^{(k)}} \left\{ 2(1+p) - e^{\lambda_1 T^*} \left(p + [1 + \lambda_1 T^*] [1 + \lambda_1 p(\tau^{(k)} - T^*)] \right) - \right. \\ & \left. - e^{-\lambda_1 p T^*} \left(1 + p [1 + \lambda_1 p T^*] [1 - \lambda_1 (\tau^{(k)} - T^*)] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Знак производной (8) определяется знаком функции (11) как функции переменной T^* ($0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$). Производная функции $\psi(T^*)$ по переменной T^* выпишется в виде:

$$\psi'(T^*) = T^* \frac{\lambda_1^2}{1+p} \left[1 - p + p \lambda_1 (\tau^{(k)} - T^*) \right] \left[1 - p^2 e^{-\lambda_1 (1+p) T^*} \right] e^{-\lambda_1 (\tau^{(k)} - T^*)}. \quad (12)$$

Из (12) вытекает, что $p_2'(\tau^{(k)} | T^*) > 0$ для $0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$. Последнее означает, что $p_2(\tau^{(k)} | T^*)$ – возрастающая функция переменной T^* ($0 \leq T^* \leq \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$) и достигает своего глобального максимума в точке $T^* = \tau^{(k)}$. Объединяя два утверждения относительно глобальных максимумов функций $p_1(\tau^{(k)} | T^*)$ и $p_2(\tau^{(k)} | T^*)$, получаем утверждение теоремы для особого случая, что завершает доказательство теоремы.

Результат теоремы указывает на то, что на отрезке $[0, \tau^{(1)}]$ изменения переменной T^* функция правдоподобия (7) является возрастающей функцией и достигает своего локального максимума в точке $T^* = \tau^{(1)}$. На полуинтервале $[\tau^{(n)}, \infty)$ изменения T^* функция правдоподобия (7) является убывающей функцией и достигает своего локального максимума в точке $T^* = \tau^{(n)}$.

Таким образом, для отыскания глобального максимума функции правдоподобия (7) необходимо исследовать отрезок $[\tau^{(1)}, \tau^{(n)}]$ изменения переменной T^* ($\tau^{(1)} \leq T^* \leq \tau^{(n)}$).

Так как функция $p(\tau^{(k)} | T^*)$ ($T^* > 0$) в точке $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, достигает глобального максимума, то будем считать точку $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, точкой, подозрительной на локальный максимум функции правдоподобия (7). Тогда алгоритм нахождения значения приближенной МП-оценки $\hat{T}^*$ параметра T^* будет выглядеть следующим образом:

- 1) вычисляются значения функции правдоподобия (7) в точках $T^* = \tau^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$;
- 2) находится максимальное значение функции (7) на множестве этих точек;
- 3) в качестве значения приближенной МП-оценки параметра T^* выбирается $\hat{T}^*$, обеспечивающее максимальное значение функции (7) на предыдущем шаге алгоритма.

3. Результаты статистических экспериментов для наблюдаемого потока

Для установления стационарного режима и определения свойств найденных оценок проведены статистические эксперименты.

Первый статистический эксперимент (установление стационарного режима). Получено 100 реализаций ($N = 100$) имитационной модели наблюдаемого потока для общего и особого случаев при $T^* = 1$ ед. времени и $T_m = 50, 100, \dots, 2\,000$ ед. времени. Для каждого набора параметров получено 100 оценок параметра T^* методом максимального правдоподобия. Каждое i -е решение есть значение оценки $\hat{T}_i^*$, $i = 1, \dots, 100$, параметра T^* . Заданный набор параметров для рекуррентного альтернирующего полусинхронного потока в общем случае: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha_2 = 0,2$, $p = 0,6$; в особом случае: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $p = 0,6$.

На основании полученных данных вычислялись выборочное среднее искомым оценок $\hat{M}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_i^*$ и их выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i^* - T^*)^2$, где T^* – известное из имитационной модели значение параметра.

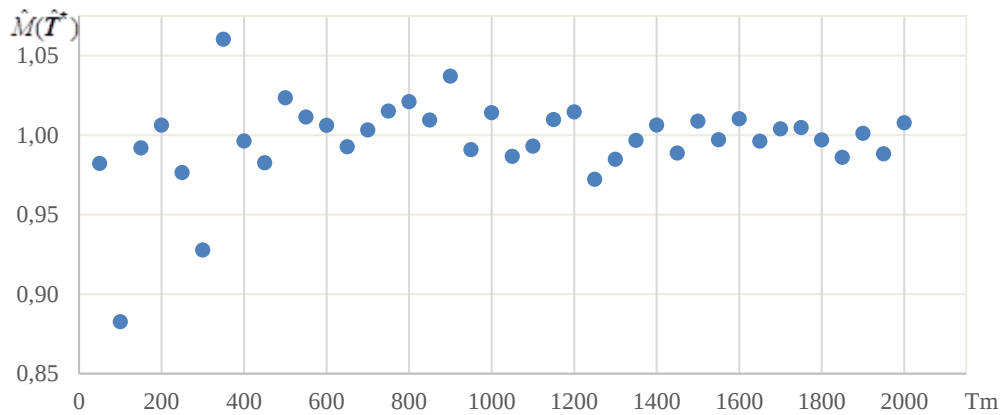
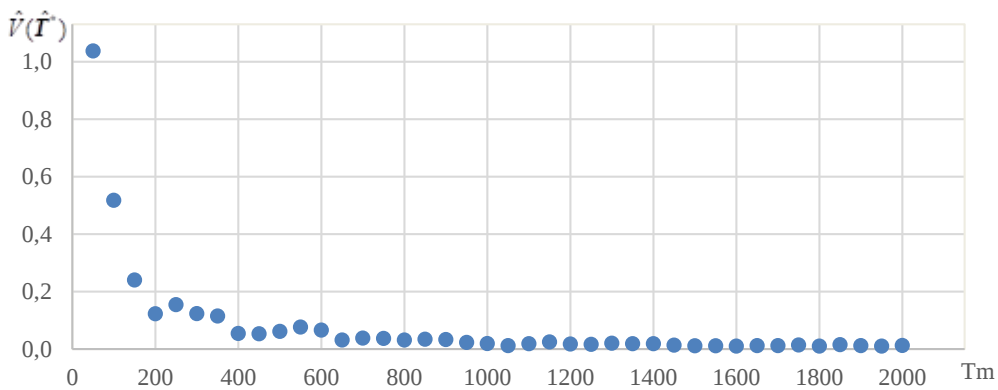
В табл. 1 приведены результаты для общего случая наблюдаемого потока при $T^* = 1$ ед. времени. В первой строке таблицы указано время моделирования T_m (время наблюдения за потоком) ($T_m = 50, 100, \dots, 2\,000$ ед. времени); во второй и третьей строках указано выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T}^*)$.

Таблица 1

Численные результаты первого статистического эксперимента для $T^* = 1$, общий случай

T_m	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,9822	0,8826	0,9919	1,0062	0,9764	0,9277	1,0603	0,9963	0,9825	1,0234
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	1,0369	0,5177	0,2402	0,1225	0,1547	0,1230	0,1150	0,0541	0,0531	0,0614
550	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000	1 050
1,0114	1,0061	0,9927	1,0032	1,0150	1,0210	1,0094	1,0370	0,9909	1,0141	0,9866
0,0766	0,0661	0,0315	0,0379	0,0367	0,0313	0,0339	0,0328	0,0228	0,0191	0,0119
1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450	1 500	1 550	1 600
0,9931	1,0098	1,0145	0,9722	0,9848	0,9967	1,0063	0,9887	1,0087	0,9971	1,0103
0,0187	0,0250	0,0172	0,0162	0,0204	0,0188	0,0184	0,0133	0,0116	0,0111	0,0100
1 650	1 700	1 750	1 800	1 850	1 900	1 950	2 000			
0,9962	1,0039	1,0047	0,9970	0,9860	1,0011	0,9882	1,0078			
0,0117	0,0117	0,0140	0,0104	0,0150	0,0118	0,0102	0,0125			

Для наглядности на рис. 2, 3 приведены графики зависимостей $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от значения времени моделирования T_m , построенные по данным табл. 1.

Рис. 2. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$ в общем случаеFig. 2. Plot of $\hat{M}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ in general caseРис. 3. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$ в общем случаеFig. 3. Plot of $\hat{V}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ in general case

Из анализа результатов первого статистического эксперимента следует, что для рекуррентного полусинхронного потока событий в общем случае стационарный режим функционирования потока устанавливается при $T_m \geq 1600$ ед. времени, так как выборочное среднее $\hat{M}(\hat{T}^*)$ устанавливается вблизи постоянного значения, когда $T_m \geq 1600$ ед. времени.

Результаты первого статистического эксперимента для особого случая приведены в табл. 2 для $T^* = 1$, а также на рис. 4, 5.

Таблица 2

Численные результаты первого статистического эксперимента для $T^* = 1$, особый случай

T_m	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	0,9784	1,0115	0,9836	1,0096	1,0041	0,9964	0,9990	0,9969	0,9973	0,9915
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,0437	0,0185	0,0154	0,0095	0,0069	0,0062	0,0055	0,0043	0,0039	0,0044
550	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000	1 050
1,0026	1,0066	0,9964	0,9990	1,0002	0,9981	0,9973	1,0000	1,0020	0,9936	1,0006
0,0030	0,0027	0,0026	0,0029	0,0024	0,0022	0,0021	0,0016	0,0021	0,0018	0,0017
1 100	1 150	1 200	1 250	1 300	1 350	1 400	1 450	1 500	1 550	1 600
0,9985	1,0019	0,9990	1,0005	1,0006	0,9944	1,0025	1,0002	0,9968	1,0011	0,9980
0,0016	0,0020	0,0014	0,0014	0,0014	0,0010	0,0015	0,0013	0,0011	0,0010	0,0010
1 650	1 700	1 750	1 800	1 850	1 900	1 950	2 000			
0,9988	1,0000	0,9996	0,9993	0,9961	1,0001	1,0001	1,0017			
0,0011	0,0011	0,0011	0,0008	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008			

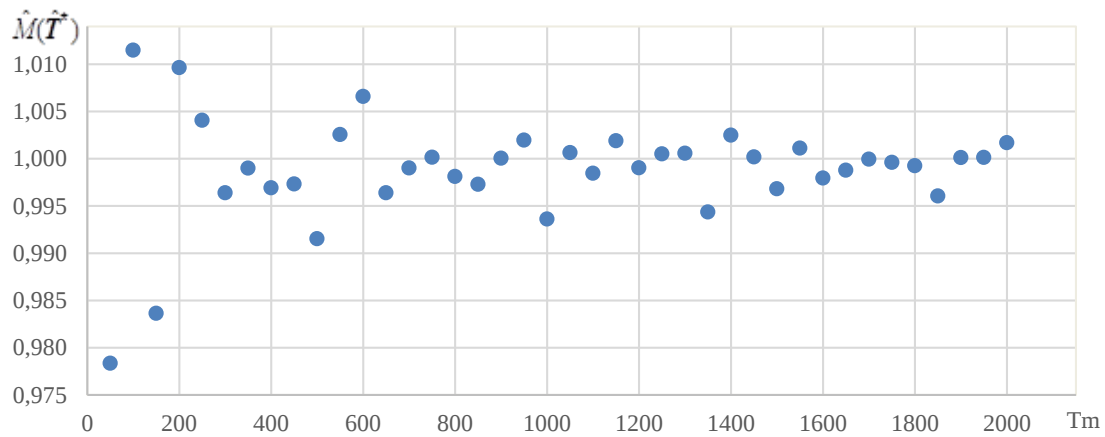


Рис. 4. График зависимости $\hat{M}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$ в особом случае

Fig. 4. Plot of $\hat{M}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ in special case

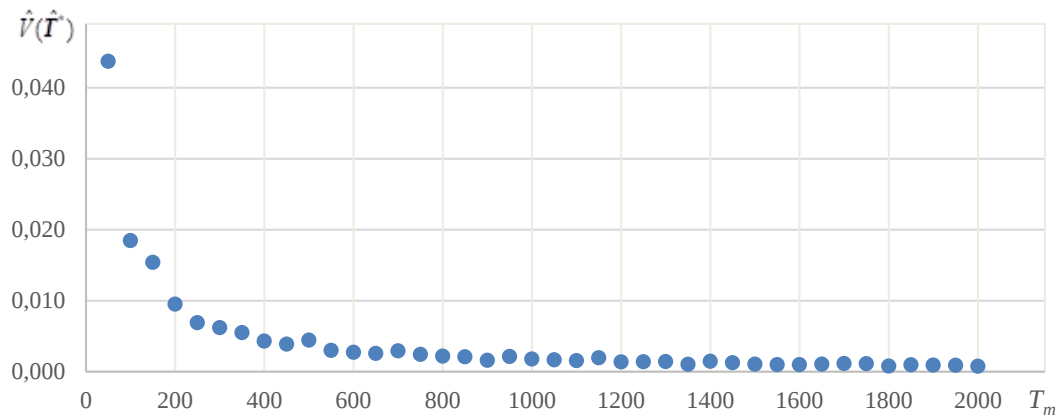


Рис. 5. График зависимости $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от T_m при $T^* = 1$ в особом случае

Fig. 5. Plot of $\hat{V}(\hat{T}^*)$ versus T_m with $T^* = 1$ in special case

Аналогично для особого случая рассматриваемого потока следует, что стационарный режим функционирования потока устанавливается при $T_m \geq 1300$ ед. времени.

Второй статистический эксперимент (исследование влияния параметра T^ на качество оценок).* Второй статистический эксперимент поставлен при фиксированном времени моделирования, равным времени установления стационарного режима, полученном из первого статистического эксперимента. Варьирует параметр $T^* = 1; 2; 3; 4; 5$, остальные параметры приняты такими же, как и в первом эксперименте.

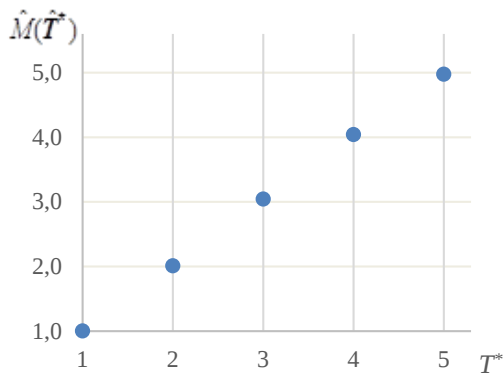
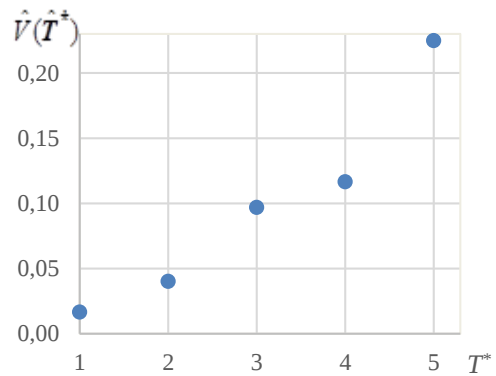
Результаты второго статистического эксперимента для общего случая рассматриваемого потока приведены в табл. 3 ($T_m = 1600$ ед. времени).

Таблица 3

Численные результаты второго статистического эксперимента, общий случай

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(\hat{T}^*)$	1,0022	2,0110	3,0442	4,0410	4,9749
$\hat{V}(\hat{T}^*)$	0,0166	0,0402	0,0969	0,1165	0,2249

На рис. 6, 7 приведены графики зависимости выборочного среднего $\hat{M}(\hat{T}^*)$ и выборочной вариации $\hat{V}(\hat{T}^*)$ от параметра $T^* = 1; 2; 3; 4; 5$, построенные по данным табл. 3.

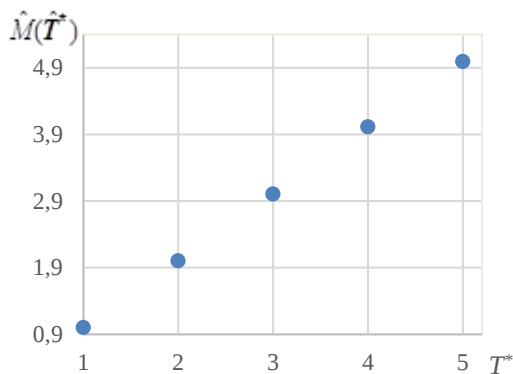
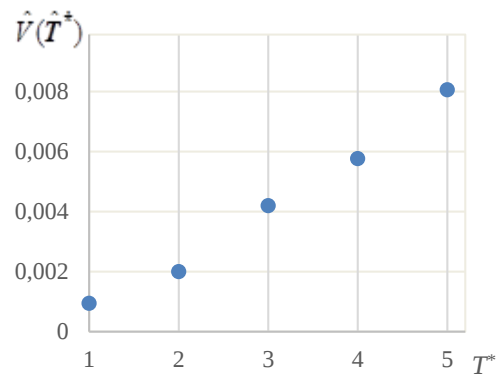
Рис. 6. График зависимости $\hat{M}(T^*)$ от T^* в общем случаеFig. 6. Plot of $\hat{M}(T^*)$ versus T^* in general caseРис. 7. График зависимости $\hat{V}(T^*)$ от T^* в общем случаеFig. 7. Plot of $\hat{V}(T^*)$ versus T^* in general case

Результаты второго статистического эксперимента для особого случая приведены в табл. 4 ($T_m = 1300$ ед. времени), а также на рис. 8, 9.

Таблица 4

Численные результаты второго статистического эксперимента, особый случай

T^*	1	2	3	4	5
$\hat{M}(T^*)$	0,9998	2,0032	3,0047	4,0119	4,9929
$\hat{V}(T^*)$	0,0009	0,0020	0,0042	0,0058	0,0081

Рис. 8. График зависимости $\hat{M}(T^*)$ от T^* в особом случаеFig. 12. Plot of $\hat{M}(T^*)$ versus T^* in special caseРис. 9. График зависимости $\hat{V}(T^*)$ от T^* в особом случаеFig. 13. Plot of $\hat{V}(T^*)$ versus T^* in special case

анный эксперимент демонстрирует тот факт, что при увеличении значений параметра равномерного распределения мертвого времени T^* увеличивается выборочная вариация оценки. Это объясняется тем, что при больших значениях T^* увеличивается число потерянных событий исходного потока и, как следствие, ухудшается качество оценивания. Отклонение значений $\hat{M}(T^*)$ от истинных значений параметра T^* вполне удовлетворительное. Таким образом, получено достаточно высокое качество оценивания параметра T^* методом максимального правдоподобия в смысле критерия выборочной вариации $\hat{V}(T^*)$.

Заключение

В работе рассмотрен рекуррентный альтернирующий полусинхронный дважды стохастический поток событий в общем и особом случаях соотношения его параметров с непродлевающимся случайным мертвым временем, распределенным по равномерному закону.

По результатам проведенного исследования (для общего и особого случаев) можно сделать следующие выводы:

- 1) получен явный вид (7) функции правдоподобия для оценивания параметра T^* равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени;
- 2) показано, что точка глобального максимума функции правдоподобия (7) принадлежит отрезку $[\tau^{(1)}, \tau^{(n)}]$;
- 3) описана процедура построения МП-оценки $\hat{T}^*$;
- 4) полученные оценки экспериментально исследованы на качество; приведенные результаты численных расчетов показывают, что метод максимального правдоподобия позволяет в достаточной мере эффективно оценивать параметр мертвого времени T^* в смысле малости выборочной вариации оценок.

Список источников

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
2. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н., Клименок В.Н. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
3. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51 (3). P. 433–441.
4. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60 (4). P. 923–930.
5. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
6. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
7. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2003. № S6. С. 232–239.
8. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method // Telecommunications and Radio Engineering. 1996. V. 50 (1). P. 56–63.
9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2002. № S1-1. С. 24–29.
10. Nezhel'skaya L.A. Probability density function for modulated MAP event flows with unextendible dead time // Communication in Computer and Information Science. 2015. V. 564. P. 141–151.
11. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров асинхронного потока с инициированием лишних событий методом моментов // Вестник Томского государственного университета. 2006. № S18. С. 267–273.
12. Леонова М.А., Нежелская Л.А. Вероятность ошибки при оценивании состояний обобщенного асинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 2 (19). С. 88–101.
13. Горцев А.М., Зуевич В.Л. Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 44–65.
14. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
15. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.
16. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
17. Нежелская Л.А. Оптимальное оценивание состояний полусинхронного потока событий в условиях его частичной наблюдаемости // Вестник Томского государственного университета. 2000. № 269. С. 95–98.
18. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
19. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.

20. Нежелская Л.А. Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. 341 с.
21. Горцев А.М., Веткина А.В. Оценивание методом моментов параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий в общем и особом случаях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 61. С. 47–60.
22. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
23. Нежелская Л.А., Першина А.А. Оценивание методом максимального правдоподобия параметра распределения случайного мертвого времени в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 55. С. 53–64.

References

1. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
2. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.N. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated flows. Theory and application in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera.
3. Cox, D.R. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441. DOI: 10.1017/S0305004100030437
4. Kingman, Y.F.C. (1964) On doubly stochastic Poisson process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
5. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779.
6. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a batch markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46.
7. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2003) Otsenivaniye dlitel'nosti mertvogo vremeni i parametrov sinkhronnogo al'terniruyushchego potoka sobyitiy [Dead time period and parameter estimation of synchronous alternating flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 6. pp. 232–239.
8. Gortsev A.M. & Nezhelskaya, L.A. (1996) Estimation of parameters of synchronously alternating Poisson stream of events by the moment method. *Telecommunications and Radio Engineering*. 50(1). pp. 56–63.
9. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2002) Estimation of the parameters of a synchronous doubly stochastic event flow by the method of moments. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S1-1. pp. 24–29.
10. Nezhelskaya, L.A. (2015) Probability density function for modulated MAP event flows with unextendible dead time. *Communication in Computer and Information Science*. 564. pp. 141–151.
11. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2006) Otsenivaniye parametrov asinkhronnogo potoka s initsirovaniem lishnikh sobyitiy metodom momentov [Estimation of the parameters of an asynchronous flow with the initiation of unnecessary events by the method of moments]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. S18. pp. 267–273.
12. Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2012) The probability of wrong decisions in the estimation of states of a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(19). pp. 88–101.
13. Gortsev, A.M. & Zuevich, V.L. (2010) Optimal'naya otsenka sostoyaniy asinkhronnogo dvazhdy stokhasticheskogo potoka sobyitiy s proiz-vol'nym chislom sostoyaniy [Optimal estimation of the states of an asynchronous doubly stochastic flow of events with an arbitrary number of states]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 2(11). pp. 44–65.
14. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhelskaya, L.A. (2013) Sravnenie MP- i MM-otsenok dlitel'nosti mertvogo vremeni v obobshchenom asinkhronnom potoke sobyitiy [Comparison of MP- and MM-estimates of the duration of dead time in a generalized asynchronous flow of events]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 4(25). pp. 32–42.
15. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23–32. DOI: 10.17223/19988605/32/3
16. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time value at a generalized semisynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27–37.
17. Nezhelskaya, L. (2000) Optimal'noe otsenivaniye sostoyaniy polusinkhronnogo potoka sobyitiy v usloviyakh ego chastichnoy nablyudaemosti [Optimal estimation of the states of semi-synchronous event flow under conditions of its partial observability]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta – Tomsk State University Journal*. 269. pp. 95–98.

18. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) The joint probability density of duration of the intervals in a generalized semisynchronous flow of events with unprolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–29.
19. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [The statistical analysis of series of random events in physical experiment]. Minsk: Universitetskoe.
20. Nezhelskaya, L.A. (2016) *Otsenka sostoyaniy i parametrov dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobyitiy* [Estimation of States and Parameters of Doubly Stochastic Event Flows]. Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk. p. 341.
21. Gortsev, A.M. & Vetkina, A.V. (2022) Estimation by method of moments of the parameter of the uniform distribution of the duration of unextendable random dead time in recurrent semi-synchronous events flow in general and special case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 47–60. DOI: 10.17223/19988605/61/5
22. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Gomel: Francisk Skorina Gomel State University.
23. Nezhelskaya, L.A. & Pershina, A.A. (2021) Estimation of the uniform distribution parameter of unextendable dead time duration in a generalized recurrent asynchronous flow of events by the maximum likelihood method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 55. pp. 53–64. DOI: 10.17223/19988605/55/7

Информация об авторах:

Горцев Александр Михайлович – профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального Исследовательского Томского государственного университета. E-mail: a-gortsev@mail.ru

Веткина Анна Васильевна – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального Исследовательского Томского государственного университета. E-mail: anyavetkina@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Gortsev Alexander M. (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: a-gortsev@mail.ru

Vetkina Anna V. (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anyavetkina@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 14.09.2022; принята к публикации 01.03.2023

Received 14.09.2022; accepted for publication 01.03.2023