ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Управление, вычислительная техника и информатика № 62
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.233.22
doi: 10.17223/19988605/62/6

Максиминная задача оценивания параметров в условиях байесовского точечного засорения

Даниил Валерьевич Лисицин[1], Константин Викторович Гаврилов[2]

[1, 2] Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
[1] lisitsin@ami.nstu.ru
[2] k.gavrilov@corp.nstu.ru

Аннотация. Работа посвящена развитию теории устойчивого оценивания А.М. Шурыгина в части подхода, основанного на модели байесовского точечного засорения. Данный подход удобен для построения и анализа различных устойчивых *M*-оценок и по сравнению с классическими робастными процедурами предоставляет более широкие возможности. Вариационными методами получено решение максиминной задачи для наиболее широкого множества распределений засоряющей точки, что позволило установить единственность ранее найденного А.М. Шурыгиным решения. Также установлено, что функции, соответствующие решению задачи, определяют седловую точку функционала асимптотического квадратичного отклонения оценки.

Ключевые слова: *M*-оценки; байесовское точечное засорение; максиминная задача; медианная оценка; седловая точка.

***Для цитирования*:** Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. Максиминная задача оценивания параметров в условиях байесовского точечного засорения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 56–64. doi: 10.17223/19988605/62/6

Original article
doi: 10.17223/19988605/62/6

Maximin problem of parameter estimation in conditions of point Bayesian contamination

Daniil V. Lisitsin[1], Konstantin V. Gavrilov[2]

[1, 2] Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation
[1] lisitsin@ami.nstu.ru
[2] k.gavrilov@corp.nstu.ru

Abstract. The work is devoted to the development of the theory of stable estimation by A.M. Shurygin in terms of the approach based on the point Bayesian contamination model. This approach is convenient for constructing and analyzing various stable *M*-estimates and provides more opportunities compared to classical robust procedures. The maximin problem have been solved by variational methods for the widest set of contamination point distributions that allowed us to establish the uniqueness of the solution previously found by A.M. Shurygin. It is also established that the functions corresponding to the solution of the problem determine the saddle point of the functional of the asymptotic quadratic deviation of the estimate.

Keywords: *M*-estimates; point Bayesian contamination; maximin problem; median estimate; saddle point.

***For citation*:** Lisitsin, D.V., Gavrilov, K.V. (2023) Maximin problem of parameter estimation in conditions of point Bayesian contamination. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62. pp. 56–64. doi: 10.17223/19988605/62/6

Введение

Современные подходы к решению задачи оценивания параметров статистических моделей [1] позволяют обеспечить устойчивость получаемых решений к возможным отклонениям реальной ситуации от принятых предположений [2–5]. Примеры классических робастных решений для математического ожидания нормального распределения – оценка Хьюбера и выборочная медиана. Обе они являются оценками максимального правдоподобия, первая – для симметричной плотности, нормальной в центре и экспоненциально убывающей на «хвостах», вторая – для распределения Лапласа, также имеющего симметричную экспоненциально убывающую плотность.

Однако на практике «хвосты» могут быть более тяжелыми [4], кроме того, могут проявляться асимметричные искажения модельного распределения. А.М. Шурыгиным [3] была предложена довольно гибкая модель байесовского точечного засорения (БТЗ), которая позволяет решать в том числе и эти проблемы. Модель предполагает наличие серии выборок, каждая из которых имеет засорение в виде распределения, сосредоточенного в одной точке, являющейся фиксированной в пределах одной выборки, но имеющей некоторое распределение по серии выборок. Каждому распределению засоряющей точки соответствует некоторая наилучшая оценочная функция, полученная в результате минимизации функционала асимптотического квадратичного отклонения оценки [3].

Модель БТЗ служит теоретической основой для конструирования широкого спектра оптимальных устойчивых оценок, имеющих важное практическое значение, в том числе робастных решений, которые характеризуются заданием непараметрической («полноразмерной») окрестности модельного распределения [4, 6, 7]. Возможный метод построения оптимальных оценок заключается в выборе наихудшего в некотором смысле распределения засоряющей точки. В частности, *максиминный* подход [3] подразумевает поиск наихудшего распределения засоряющей точки для наилучшей оценочной функции относительно одного и того же функционала качества. В рамках модели БТЗ оказываются оптимальными известные робастные оценки параметра сдвига, например оценки Мешалкина, Эндрюса, Смита, Бернулли, бивес-оценка Тьюки, оценка Хьюбера типа урезанного среднего, обобщенные оценки Шарбонье [3, 8, 9].

А.М. Шурыгин в докторской диссертации [10] показал, что медианная оценка является непараметрическим максиминным решением для наиболее широкого множества распределений засоряющей точки, ограниченного лишь условиями регулярности. Частным случаем медианных оценок (при оценивании параметра сдвига симметричного распределения) выступает выборочная медиана [4, 5], которая при некоторых условиях является наиболее *B*-робастной и наиболее *V*-робастной оценкой, а также минимаксной относительно асимптотического смещения в модели засорения Хьюбера.

Однако предложенное А.М. Шурыгиным доказательство не отвечает на вопрос о единственности решения максиминной задачи. Вместе с тем он пишет о данной задаче, что найти наихудшую плотность распределения вариационными методами трудно из-за сложной зависимости от нее оптимизируемого функционала. Попытка получить медианную оценку путем прямого решения максиминной задачи, предпринятая А.М. Шурыгиным в [3] (теорема I.6.2), оказалась неудачной из-за ошибочного доказательства. Основная ошибка заключалась в том, что не учитывалась неявная зависимость знаменателя оптимизируемого функционала и параметра оценочной функции, обеспечивающего асимптотическую несмещенность оценки, от искомой плотности распределения засоряющей точки. В связи с этим мы восполняем данный пробел. В отличие от доказательства в [10], решение максиминной задачи вариационными методами позволяет установить единственность решения.

1. Элементы теории устойчивого оценивания

Пусть $x_1,...,x_m$ – наблюдения случайной величины ξ, распределенной с плотностью $f(x,\theta)$, где $x \in X \subseteq R$ и параметр $\theta \in \Theta \subseteq R$. *M*-оценка неизвестного параметра θ может определяться [1, 2, 4] как решение оптимизационной задачи

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \sum_{i=1}^{m} \rho(x_i, \theta),$$

где $\rho(x,\theta): X \times \Theta \to R$ – непрерывная, дифференцируемая почти всюду функция. Условие равенства нулю производной по θ оптимизируемой функции служит альтернативной (хотя и не эквивалентной [1, 2]) формулировкой задачи *M*-оценивания:

$$\sum_{i=1}^{m} \psi(x_i, \hat{\theta}) = 0,$$

называемой *оценочным уравнением*, где функция

$$\psi(x,\theta) = c(\theta)\,\dot{\rho}(x,\theta) \tag{1}$$

называется *оценочной функцией* для параметра θ, $c(\theta)$ – произвольная непрерывная функция, не равная нулю для всех $\theta \in \Theta$. Сомножитель $c(\theta)$ в оценочной функции задает семейство *эквивалентных оценочных функций*. Здесь и далее точкой сверху обозначено дифференцирование по оцениваемому параметру.

Оценочная функция также должна удовлетворять условию асимптотической несмещенности, которое принимает вид [1, 2, 11]:

$$\mathbf{E}\,\psi(\xi,\theta) = \int_X \psi(x,\theta)\, f(x,\theta)dx = 0, \tag{2}$$

где **E** – оператор математического ожидания.

Дифференцируя (2) по θ и допуская возможность изменения порядка дифференцирования и интегрирования, можно записать следующие равенства [4, 11]:

$$N(\theta) \overset{df}{=} -\lim_{t\to\theta} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\,\psi(\xi,t) = -\mathbf{E}\,\dot{\psi}(\xi,\theta) = \int_X \psi(x,\theta)\,\dot{f}(x,\theta)dx. \tag{3}$$

Условия регулярности. Потребуем, чтобы в некоторой окрестности истинного значения параметра θ:

1) выполнялось условие (2);

2) были справедливы равенства (3), функция $N(\theta)$ была непрерывной и не равной нулю [4];

3) выполнялось условие $\left| \lim_{t\to\theta} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}\,\psi(\xi,t) \right| < \infty$;

4) выполнялось условие $\mathbf{E}\psi^2(\xi,\theta) < \infty$.

При выписанных условиях *M*-оценка $\hat{\theta}$ является $\sqrt{m}$-состоятельной и асимптотически нормальной [1, 2, 12].

Рассмотрим подход Шурыгина, основанный на модели БТЗ [3, 13]. Пусть плотность распределения случайной величины имеет вид:

$$(1-\alpha)\,f(x,\theta) + \alpha\,\delta(x-\upsilon),$$

где α – доля аномальных наблюдений, $0 \le \alpha < 1$; δ – функция Дирака; υ – засоряющая точка, такая что в пределах одной выборки $\upsilon = \mathrm{const}$, а в серии выборок представляет собой случайную величину, распределенную на *X* с плотностью $s = s(x,\theta)$.

Пусть α – бесконечно малая величина с порядком малости, меньшим 1/2, т.е. $\alpha = \gamma\, m^{-\zeta/2}$, где $\gamma > 0$ и $0 < \zeta < 1$. Тогда асимптотическое квадратичное отклонение оценки

$$\gamma^{-2} \lim_{m\to\infty} m^{\zeta}\ \mathbf{E}(\hat{\theta}-\theta)^2$$

не зависит от параметров γ, ζ и определяется выражениями [3, 13]:

$$U(\psi,s,f) = \frac{1}{N^2(\theta)} \int_X \psi^2(x,\theta)\ s(x,\theta)\ dx = \int_X \mathrm{IF}^2(x;\psi,f)\ s(x,\theta)\ dx, \tag{4}$$

где $\mathrm{IF}(x;\psi, f) = \psi(x,\theta)/N(\theta)$ – функция влияния Хампеля [5] для *M*-оценок. В [3] показано, что функционал (4) достигает минимума по ψ на функции

$$\psi_S(x,\theta) = c(\theta)\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta) + \beta(\theta)\right]\frac{f(x,\theta)}{s(x,\theta)}, \tag{5}$$

где функция $c = c(\theta)$ имеет тот же смысл, что и в (1), функция $\beta = \beta(\theta)$ определяется из условия (2). Выражение (5) определяет наилучшую оценочную функцию в модели БТЗ.

Для краткости далее часто будем опускать аргументы функций. Например, (5) можно записать в виде: $\psi_S = c(\dot f + \beta f)/s$.

2. Максиминная задача

Пусть S – некоторое множество плотностей $s(x,\theta)$, где $x \in X$, $\theta \in \Theta$. Максиминная оценочная функция ψ_* в модели БТЗ получается в результате решения оптимизационной задачи [3]

$$s_*(x,\theta) = \arg\max_{s\in S}\min_{\psi} U(\psi, s, f) = \arg\max_{s\in S} U(\psi_S, s, f) \tag{6}$$

и последующей подстановки (6) в (5). Здесь ψ_S определена выражением (5), функционал U определен в (4). Плотность (6) – это наихудшая плотность распределения засоряющей точки на множестве плотностей S.

Лемма 1. Задача (6) имеет следующую эквивалентную формулировку:

$$\Phi(s, f) = \int_X \frac{(\dot f + \beta f)^2}{s}\, dx \to \min_{s\in S}, \tag{7}$$

где функция β та же, что и в выражении (5).

Доказательство. Применим теорему 2 в [14], согласно следствию из которой асимптотическое квадратичное отклонение (4) для оценочной функции (5) может быть записано в виде:

$$U(\psi_S, s, f) = \frac{1}{N^2}\int_X \psi_S^2\, s\, dx = c^2 \Big/ \int_X \psi_S^2\, s\, dx,$$

Подставив сюда $\psi_S = c(\dot f + \beta f)/s$, убеждаемся, что $U(\psi_S, s, f) = 1/\Phi(s, f)$. Таким образом, задачи $U(\psi_S, s, f) \to \max\limits_{s\in S}$ и $\Phi(s, f) \to \min\limits_{s\in S}$ эквивалентны. Лемма доказана.

Далее нам понадобится результат, обобщающий лемму Дюбуа–Реймона [15, 16] на случай неограниченного промежутка.

Лемма 2. Пусть $X = (x_1; x_2)$ – ограниченный или неограниченный промежуток, для которого формально допускаются границы вида $x_1 = -\infty$ или $x_2 = +\infty$. Если для непрерывной, ограниченной функции $b(x): X \to R$ и всех непрерывных функций $v(x): X \to R$, таких что $\int_{x_1}^{x_2} v(x)\, dx = 0$, выполняется $\int_{x_1}^{x_2} b(x)v(x)\, dx = 0$, то $b(x) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть $w(x) = \int_{x_1}^{x} v(t)\, dt$ – первообразная к функции $v(x)$. Нетрудно видеть, что $w(x_1) = w(x_2) = 0$. Учитывая непрерывность и ограниченность функции $b(x)$, можно записать

$$\int_{x_1}^{x_2} b(x)v(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} b(x)\, dw(x) = b(x)w(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} w(x)\, db(x) = -\int_{x_1}^{x_2} w(x)\, db(x) = 0.$$

Последнее равенство, очевидно, выполняется при $b(x) = \mathrm{const}$. Покажем, что это единственно возможный вариант. Допустим, $b(x) \neq \mathrm{const}$. Рассмотрим произвольный промежуток знакопостоянства $(a_1;\ a_2)$ функции $b'(x)$. Положим, что функция $w(x) > 0$ на $x \in (a_1;\ a_2)$, а вне этого промежутка $w(x) = 0$. При этом $w(x)$ является непрерывно дифференцируемой, что обеспечивает существование соответствующей $v(x)$. В качестве конкретного примера можно привести функцию

$$w(x) = \begin{cases} 1 + \cos\dfrac{\pi(2x - a_1 - a_2)}{a_2 - a_1}\ , & x \in (a_1;\ a_2)\ ; \\ 0\ , \ x \notin (a_1;\ a_2)\ . \end{cases}$$

Тогда, очевидно,

$$\int_{x_1}^{x_2} b(x)v(x)\ dx = -\int_{a_1}^{a_2} w(x)b'(x)\ dx \neq 0\ .$$

Пришли к противоречию, следовательно $b(x) = \mathrm{const}$. Лемма доказана.

Рассмотрим медианную оценку с оценочной функцией [10]:

$$\psi_{\mathrm{med}} = c\,\mathrm{sgn}(\dot{f} + \beta f)\ , \tag{8}$$

где функции c и β имеют тот же смысл, что и в (5). Покажем вариационными методами, что (8) является единственной максиминной оценочной функцией в модели БТЗ для наиболее широкого множества S (ограниченного лишь условиями регулярности).

Теорема. Пусть функции f и $\dot{f}$ непрерывны по x, S – множество непрерывных функций плотности s, таких что $|\psi_S| < \infty$ равномерно на S. Тогда максиминная оценочная функция ψ_* единственная и соответствует медианной оценке с оценочной функцией (8).

Доказательство. Согласно лемме 1 оценочной функции ψ_* соответствует плотность s_*, являющаяся решением задачи (7). Таким образом, требуется найти экстремаль s_* функционала $\Phi(s, f)$ и соответствующую функцию (5), затем показать, что s_* доставляет минимум функционалу.

В соответствии с методом вариаций [16] введем обозначения:

$$s = s_* + t\,\delta s\ , \tag{9}$$

$\varphi(t) = \Phi(s, f)$ – функция, в которой все переменные, входящие в (7), кроме t, полагаются фиксированными. Здесь s_* – неизвестная наихудшая плотность (6), δs – допустимая вариация плотности s, т.е. не равная тождественно нулю непрерывная функция, такая что $\int_X \delta s\ dx = 0$, и $t \in [t_1;\ t_2]$ – число, такое что $s \geq 0$ для всех $x \in X$. Границы отрезка $[t_1;\ t_2]$ определяются в зависимости от δs в соответствии с выражениями

$$t_1 = \sup_x \inf\{t : s_* + t\ \delta s \geq 0\} \leq 0\ ;\ t_2 = \inf_x \sup\{t : s_* + t\ \delta s \geq 0\} \geq 0\ .$$

Поскольку в нулях плотности s (если они имеются) интегрант может иметь бесконечные разрывы, рассмотрим эту ситуацию подробнее. Плотность s имеет нули, во-первых, при $t = t_1$ и $t = t_2$; во-вторых, при всех $t \in [t_1;\ t_2]$, если нули имеет s_* и хотя бы один из них совпадает с нулем δs. В этих случаях регулярность выражения должна обеспечиваться нулями в соответствующих точках числителя интегранта.

Найдем производную функции $\varphi(t)$, используя условие (2) и учитывая, что функция β, вообще говоря, зависит от t через s [17]:

$$\varphi'(t) = \int_X \left[2\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{(\dot{f} + \beta f)f}{s} - \frac{(\dot{f} + \beta f)^2}{s^2}\delta s \right] dx =$$

$$= \frac{2}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t}\int_X \psi f\ dx - \int_X \frac{(\dot{f} + \beta f)^2}{s^2}\delta s\ dx = -\int_X \frac{(\dot{f} + \beta f)^2}{s^2}\delta s\ dx\ .$$

Убедимся, что дифференцирование под знаком интеграла здесь возможно. Действительно, условие $|\psi_S| < \infty$ эквивалентно условию $(\dot{f} + \beta f)^2 / s^2 < \infty$, а из него следует условие $(\dot{f} + \beta f)^2 / s < \infty$. Это обеспечивает непрерывность подынтегральных выражений $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ в точках *x*, где $s = 0$ (если они имеются). Кроме того, это условие обеспечивает равномерную сходимость интеграла $\varphi'(t)$ в случае неограниченного *X*. Непрерывность подынтегральных выражений по *x* также обеспечивается непрерывностью входящих в них функций, по *t* – видом зависимости (9).

Условие стационарности функционала имеет вид:

$$\delta\Phi(s_*, f) = \varphi'(0) = -\int_X \frac{(\dot{f} + \beta f)^2}{s_*^2} \delta s \, dx = 0 .$$

Для данного выражения выполнены условия леммы 2, поэтому

$$(\dot{f} + \beta f)^2 / s_*^2 = \lambda = \text{const}$$

или, учитывая неотрицательность *s*,

$$s_* = |\dot{f} + \beta f| / \sqrt{\lambda} . \tag{10}$$

Подставив найденную плотность s_* в (5), получаем выражение (8), где функция *c* поглощает λ. Таким образом, медианная оценка соответствует экстремали функционала $\Phi(s, f)$. Обратим внимание, что решение (10) удовлетворяет условиям регулярности.

Покажем теперь, что найденная экстремаль s_* является решением задачи (7) на множестве *S*. Для этого определим знак второй производной функции $\varphi(t)$, продифференцировав $\varphi'(t)$. Внесение операции дифференцирования под знак интеграла здесь произведем формально, поскольку нас интересует лишь знак второй производной. Действительно, положим $\varphi'(t) = \int_X y(x,t) dx$. Если подынтегральная функция $y(x,t)$ возрастает по *t* для каждого фиксированного *x*, т.е. $\partial y(x,t)/\partial t > 0$, то, очевидно, возрастает и $\varphi'(t)$, т.е. $\varphi''(t) > 0$. При поиске $\varphi''(t)$ не будем отбрасывать нулевое слагаемое в $\varphi'(t)$ и опять воспользуемся условием (2):

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t}\int_X \psi f \, dx - \int_X \frac{(\dot{f} + \beta f)^2}{s^2} \, \delta s \, dx\right] =$$

$$= \frac{2}{c}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}\int_X \psi f \, dx + 2\frac{\partial\beta}{\partial t}\int_X \left(\frac{f^2}{s}\frac{\partial\beta}{\partial t} - \frac{\dot{f} + \beta f}{s^2} f \, \delta s\right) dx +$$

$$+2\int_X \left[\frac{(\dot{f} + \beta f)^2}{s^3}(\delta s)^2 - \frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\dot{f} + \beta f}{s^2} f \, \delta s\right] dx =$$

$$= 2\int_X \left[\frac{f^2}{s}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\dot{f} + \beta f}{s^2} f \, \delta s + \frac{(\dot{f} + \beta f)^2}{s^3}(\delta s)^2\right] dx =$$

$$= \int_X \frac{2}{s}\left(f\frac{\partial\beta}{\partial t} - \frac{\dot{f} + \beta f}{s}\delta s\right)^2 dx > 0 .$$

Действительно, $\varphi''(t) = 0$, только если подынтегральное выражение данной функции тождественно равно нулю, но в этом случае $\partial\beta/\partial t = (\dot{f} + \beta f)\delta s / (f s)$, где правая часть равенства есть функция, зависящая от *x*, а левая – не зависящая, следовательно, это равенство не может являться тождеством.

Запишем разложение $\varphi(t)$ в ряд Маклорена по степеням *t* с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\,\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(\omega t) ,$$

где ω – некоторое число, $0<\omega<1$. Поскольку для всех допустимых вариаций δs имеют место $\varphi'(0)=0$ и $\varphi''(\omega t)>0$ для всех $t\in[t_1;\ t_2]$, экстремальная задача (7) без учета условий регулярности является выпуклой со строго выпуклым оптимизируемым функционалом. Отсюда следует $\Phi(s,\ f)\ge\Phi(s_*,\ f)$, причем равенство достигается только при $s=s_*$. То есть единственным решением данной экстремальной задачи [18] является плотность (10). Теорема доказана.

В [6] показано, что медианная оценка (8) является также минимаксным решением в модели БТЗ:

$$\psi_{\text{med}}=\arg\min_{\psi}\max_{s\in S}U(\psi,s,\ f)\,,$$

где S – множество плотностей, ограниченное лишь условиями регулярности. При этом значению $\max\limits_{s\in S}U(\psi,s,\ f)=\max\limits_{x\in X}(\psi/N)^2$ соответствует распределение засоряющей точки, сосредоточенное в точках максимума $|\psi/N|$, где функция N определена в (3). Однако, поскольку $|\psi_{\text{med}}|=\text{const}$ почти всюду на $x\in X$, нетрудно видеть (см. также [10]), что значение функционала (4) при $\psi=\psi_{\text{med}}$ не зависит от плотности s, т.е. он достигает своего максимального значения $\max\limits_{x\in X}(\psi_{\text{med}}/N)^2$ для любой непрерывной плотности s. По этой причине из минимаксной формулировки медианной оценки плотность s_* однозначно не определяется, но может быть получена в результате решения максиминной задачи (6). Решению $\psi_*=\psi_{\text{med}}$ соответствует плотность (10).

Таким образом, функционал (4) имеет седловую точку (ψ_*,s_*), которой соответствует медианная оценка (8), так что удовлетворяется условие

$$U(\psi_*,s,\ f)=U(\psi_*,s_*,\ f)\le U(\psi,s_*,\ f)$$

для любых допустимых ψ и s.

С точки зрения теории игр седловая точка является точкой равновесия в чистых стратегиях антагонистических игр [19]. Ей соответствует такая ситуация, при которой ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш, меняя решение в одностороннем порядке. При этом стратегия обоих игроков является наилучшей реакцией на действия своего оппонента. Положим, что оппонентом исследователя выступает природа, которая воздействует на оценки через плотность s. Выбором $\psi=\psi_*$ исследователь оказывается застрахованным от любой плотности s: какая бы из них ни реализовалась в природе, это не ухудшит качество оценки (правда, и не улучшит). С другой стороны, вместо незаинтересованной природы исследователь может столкнуться с намеренным искажением данных. В этом случае можно считать, что оппонент действует наихудшим для исследователя образом, зная, что тот стремится выбрать наилучшую оценочную функцию. При такой стратегии окажется $s=s_*$, а исследователь выбором $\psi=\psi_*$ получит заведомо лучшую оценку, чем при любом другом выборе.

Заключение

Модель БТЗ является достаточно универсальным инструментом исследователя, позволяющим конструировать различные устойчивые оценочные функции, оптимальные для тех или иных условий. В том числе на основе данной модели можно получить уже известные робастные решения, например выборочную медиану, оптимальную в классических теориях робастности. Выборочная медиана – это частный случай медианной оценки, предложенной А.М. Шурыгиным [3]. В работах [6] и [10] показано, что медианная оценка является соответственно минимаксным и максиминным решением в модели БТЗ при наиболее слабых ограничениях на множество распределений засоряющей точки.

Между тем оставался открытым вопрос единственности решения максиминной задачи. Для ответа на него задача в данной работе была решена вариационными методами, и в результате установлена единственность решения. Показано, что функции, соответствующие решению задачи, определяют седловую точку функционала асимптотического квадратичного отклонения оценки. Дана интерпретация решения с точки зрения теории игр, где седловые точки играют важную роль. В качестве дополнительного результата получено обобщение леммы Дюбуа–Реймона [15, 16] на случай неограниченного промежутка.

Список источников

1. Боровков А.А. Математическая статистика. СПб. : Лань, 2021. 704 с.
2. Shulenin V.P. Robust methods of mathematical statistics. Tomsk : Scientific Technology Publishing House, 2020. 260 p.
3. Шурыгин А.М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз. М. : Финансы и статистика, 2000. 224 с.
4. Хьюбер П. Робастность в статистике. М. : Мир, 1984. 303 с.
5. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике: подход на основе функций влияния. М. : Мир, 1989. 512 с.
6. Лисицин Д.В. Оценивание при байесовском точечном засорении: связь с подходом Хампеля и минимаксная оценка // Сборник научных трудов НГТУ. 2011. Вып. 3 (65). С. 61–66.
7. Shevlyakov G., Morgenthaler S., Shurygin A. Redescending M-estimators // J. Statist. Plann. Inference. 2008. V. 138. P. 2906–2917.
8. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. Оценивание параметров распределения ограниченной случайной величины, робастное к нарушению границ // Научный вестник НГТУ. 2016. № 2 (63). С. 70–89.
9. Lisitsin D.V., Usol'tsev A.G. Minimum gamma-divergence estimation for non-homogeneous data with application to ordered probit model // Applied methods of statistical analysis. Statistical computation and simulation. Proceedings of the Int. Workshop. Novosibirsk, 18–20 Sept. 2019. Novosibirsk : NSTU, 2019. P. 227–234.
10. Шурыгин А.М. Асимптотическая теория устойчивого оценивания : дис. … д-ра техн. наук. М., 2002. 225 с.
11. Смоляк С.А., Титаренко Б.П. Устойчивые методы оценивания: статистическая обработка неоднородных совокупностей. М. : Статистика, 1980. 208 с.
12. Van der Vaart A.W. Asymptotic Statistics. Cambridge : Cambridge University Press, 1998. 443 p.
13. Shurygin A.M. New Approach to Optimization of Stable Estimation // Proceedings of the First US/Japan Conference on the Frontiers of Statistical Modeling: An Informational Approach. Dordrecht: Kluwer, 1994. V. 3. P. 315–340.
14. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. Об устойчивом оценивании параметров модели при асимметричном засорении данных // Научный вестник НГТУ. 2008. № 1 (32). С. 33–40.
15. Du Bois-Reymond P. Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung // Math. Ann. 1979. V. 15. P. 283–314.
16. Габасов Р. и др. Методы оптимизации : пособие. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
17. Лисицин Д.В., Гаврилов К.В. О некоторых свойствах М-оценок // Сборник научных трудов НГТУ. 2011. Вып. 2 (64). С. 61–68.
18. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М. : Едиториал УРСС, 2003. 175 с.
19. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. СПб. : БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

References

1. Borovkov, A.A. (2021) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. St. Petersbrug: Lan'.
2. Shulenin, V.P. (2020) *Robust methods of mathematical statistics*. Tomsk: Scientific Technology Publishing House.
3. Shurygin, A.M. (2000) *Prikladnaya stokhastika: robastnost', otsenivanie, prognoz* [Applied stochastics: robustness, estimation, forecast]. Moscow: Finansy i statistika.
4. Huber, P. (1984) *Robastnost' v statistike* [Robust Statistics]. Translated from English. Moscow: Mir.
5. Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P. & Stahel, W. (1989) *Robastnost' v statistike: podkhod na osnove funktsiy vliyaniya* [Robust Statistics: The approach based on Influence Functions]. Translated from English. Moscow: Mir.
6. Lisitsin, D.V. (2011) Otsenivanie pri bayesovskom tochechnom zasorenii: svyaz' s podkhodom Khampelya i minimaksnaya otsenka [Estimating in presence of Bayesian dot contamination: Connection with Hampel's approach and minimax estimator]. *Sbornik nauchnyh trudov NGTU*. 3(65). pp. 61–66.
7. Shevlyakov, G., Morgenthaler, S. & Shurygin, A. (2008) Redescending M-estimators. *Journal of Statist. Plann. Inference*. 138. pp. 2906–2917.
8. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2016) Otsenivanie parametrov raspredeleniya ogranichennoy sluchaynoy velichiny, robastnoe k narusheniyu granits [Estimation of distribution parameters of a bounded random variable robust to bound disturbance]. *Nauchnyy vestnik NGTU*. 2(63). pp. 70–89.
9. Lisitsin, D.V. & Usoltsev, A.G. (2019) Minimum gamma-divergence estimation for non-homogeneous data with application to ordered probit model. *Applied Methods of Statistical Analysis. Statistical Computation and Simulation*. Proc. of the International Workshop. Novosibirsk, September 18–20, 2019. Novosibirsk: NSTU. pp. 227–234.
10. Shurygin, A.M. (2002) *Asimptoticheskaya teoriya ustoychivogo otsenivaniya* [Asymptotic Theory of Stable Estimation]. Engineering Science. Dr. Diss. Moscow.
11. Smolyak, S.A. & Titarenko, B.P. (1980) *Ustoychivye metody otsenivaniya: statisticheskaya obrabotka neodnorodnykh sovokupnostey* [Stable estimation methods: statistical processing of heterogeneous aggregates]. Moscow: Statistika.

12. Van der Vaart, A.W. (1998) *Asymptotic Statistics*. Cambridge: Cambridge University Press. 443 p.
13. Shurygin, A.M. (1994) New Approach to Optimization of Stable Estimation. In: *Proceedings of the First US/Japan Conference on the Frontiers of Statistical Modeling: An Informational Approach*. Vol. 3. Dordrecht: Kluwer. pp. 315–340.
14. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2008) Ob ustoychivom otsenivanii parametrov modeli pri asimmetrichnom zasorenii dannykh [On stable estimation of models parameters in presence of asymmetric data contamination]. *Nauchnyy vestnik NGTU*. 1(32). pp. 33–40.
15. Du Bois-Reymond, P. (1979) Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung. *Mathematische Annalen*. 15. pp. 283–314.
16. Gabasov, R. et al. (2011) *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Minsk: Chetyre chetverti.
17. Lisitsin, D.V. & Gavrilov, K.V. (2011) O nekotorykh svoystvakh M-otsenok [About some properties of M-estimates]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU*. 2(64). pp. 61–68.
18. Magaril-Ilyaev, G.G. & Yikhomirov, V.M. (2003) *Vypuklyy analiz i ego prilozheniya* [Convex Analysis and its Applications]. Moscow: Editorial URSS.
19. Petrosyan, L.A., Zenkevich, N.A. & Shevkoplyas, E.V. (2012) *Teoriya igr* [Game Theory]. St. Petersbrug: BHV-Peterburg.

***Информация об авторах*:**
Лисицин Даниил Валерьевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной информатики Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: lisitsin@ami.nstu.ru
Гаврилов Константин Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета (Новосибирск, Россия). E-mail: k.gavrilov@corp.nstu.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors*:**

Lisitsin Daniil V. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the department of Theoretical and Applied Computer Science, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: lisitsin@ami.nstu.ru
Gavrilov Konstantin V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the department of Automatics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: k.gavrilov@corp.nstu.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 08.06.2022; принята к публикации 01.03.2023

Received 08.06.2022; accepted for publication 01.03.2023