

Научная статья

УДК 519.246.5

doi: 10.17223/19988605/62/11

Метод устранения мешающего параметра в статистике пуассоновского потока точек

Гурами Шалвович Цициашвили¹, Владимир Николаевич Бочарников²,
Сергей Михайлович Краснопеев³

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия

^{2,3} Тихоокеанский институт географии ДВО РАН, Владивосток, Россия

¹ guram@iam.dvo.ru

² vbocharnikov@mail.ru

³ sergeikr@tigdvo.ru

Аннотация. Сопоставление общего числа зарегистрированных следов с имеющимися в литературе оценками числа тигров показало наличие существенных различий на территории Приморского края. Для устранения вероятных ошибок исходные данные представляются неоднородным точечным пуассоновским потоком. Рассматривается задача обработки данных по расчету плотности населения амурского тигра в районах Приморского края. Первичным основанием для такого расчета послужила авторская выборка сведений регистрации следов хищника в зимний период. Рабочая методика учета следа моделируется процедурой раскраски точек потока в зависимости от вероятности обнаружения следа. Эта вероятность становится мешающим параметром, устранение которого производится заменой числа следов на долю следов в различных районах. Доказывается теорема о сходимости доли следов к предельному значению при устремлении к бесконечности параметра пуассоновского распределения, характеризующего общее число следов. Полученные результаты иллюстрируются картой, характеризующей расчетные доли следов амурского тигра в Приморском крае на учетный период 2005 г.

Ключевые слова: пуассоновский поток; раскраска точек потока; число следов; предельная теорема для доли числа следов.

Для цитирования: Цициашвили Г.Ш., Бочарников В.Н., Краснопеев С.М. Метод устранения мешающего параметра в статистике пуассоновского потока точек // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 101–106. doi: 10.17223/19988605/62/11

Original article

doi: 10.17223/19988605/62/11

The method of eliminating the interfering parameter in the statistics of the Poisson flow of points

Gurami Sh. Tsitsiashvili¹, Vladimir N. Bocharnikov², Sergei M. Krasnopeev³

¹ Institute for Applied Mathematics, FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation

^{2,3} Institute of Pacific Ocean Geography FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation

¹ guram@iam.dvo.ru

² vbocharnikov@mail.ru

³ sergeikr@tigdvo.ru

Abstract. Comparison of the total number of registered tracks with the estimates of the number of tigers available in the literature showed the presence of significant differences in the territory of Primorsky Krai. To eliminate possible errors, the source data is represented by an inhomogeneous point Poisson flow. The problem of processing data on the calculation of the population density of the Amur tiger in the regions of Primorsky Krai is considered. The primary basis

for this calculation was the author's sample of information on the registration of predator tracks in winter. The working method of trace accounting is modeled by the procedure of coloring flow points depending on the probability of trace detection. This probability becomes an interfering parameter, which is eliminated by replacing the number of traces with the proportion of traces in different areas. The theorem on the convergence of the fraction of traces to the limiting value is proved when the parameter of the Poisson distribution characterizing the total number of traces tends to infinity. The results obtained are illustrated by a map characterizing the estimated proportions of Amur tiger tracks in the Primorsky Territory for the accounting period of 2005.

Keywords: Poisson flow; coloring of flow points; number of traces; limit theorem for the fraction of the number of traces.

For citation: Tsitsiashvili, G.Sh., Bocharnikov, V.N., Krasnopeev, S.M. (2023) The method of eliminating the interfering parameter in the statistics of the Poisson flow of points. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62. pp. 101–106. doi: 10.17223/19988605/62/11

Введение

В задачах из области наук о Земле нередко используется понятие неоднородного пуассоновского потока точек. Такой поток точек применялся в геологических исследованиях [1–3]. Подобная вероятностная модель также возникает при изучении пространственного распределения подвижных животных [4]. Близкие по приложениям результаты, связанные с применением пуассоновского потока точек в экологических исследованиях, приведены в монографии [5]. В настоящей работе неоднородный пуассоновский поток точек применен к решению важной региональной задачи – исследованию плотности населения амурского тигра, рассчитываемой на основе зарегистрированных на учетных маршрутах следов хищника на территории Приморского края [6–9]. Полагаем, что отсутствие необходимой математической коррекции может приводить к большим ошибкам при сопоставлении результатов в различные годы. В этой связи естественным будет обратить специальное внимание на расчеты вероятности обнаружения следов, которые зависят от многочисленных природных и экономических характеристик.

Полевой учет амурского тигра в зимний период 2004–2005 гг. осуществлялся Управлением Росприроднадзора по Приморскому и Хабаровскому краям, Приморкрайохотуправлением, Хабаровсккрайохотуправлением, Тихоокеанским институтом географии и Биолого-почвенным институтом ДВО РАН с финансовой поддержкой и участием Общества сохранения диких животных (WCS) и WWF России. По данным специалистов, суммарное число обнаруженных следов амурского тигра в 2005 г. составило 6 869, в то же время сообщалось, что общее число тигров на территории Приморского края в 2005 г. составляло 357–425 особей [10]. Различия между числом зарегистрированных «в поле» следов и общим числом обитающих тигров свидетельствуют о необходимости осуществления специальных математических процедур при обработке данных. Такие ошибки становятся при статистической обработке мешающими параметрами [11–13].

Содержательная важность и математическая актуальность предложенного анализа состоит в отсутствии необходимого приложения, полезного в использовании при изменяющихся процедурах расчетов следов животных. Важнейшим элементом является установление плотности населения амурского тигра, что не требует расчета общей численности животных, но позволяет избежать субъективных мнений при анализе ситуации. С тем чтобы освободить результаты обработки данных от этих мешающих параметров, в работе предлагается вместо числа следов оценивать доли следов в различных районах Приморского края. Укажем, что представляемое здесь исследование было осуществлено на основе организованного Тихоокеанским институтом географии ДВО РАН перерасчета данных, полученных большим коллективом исследователей в 2005 г. [14]. Следует также отметить, что в последнее время техника устранения мешающих параметров из статистических выборок существенно востребована в задачах квантовой информатики [15], что свидетельствует об общей перспективе данного математического подхода.

1. Основные результаты

Для решения поставленной задачи удобно воспользоваться следующей теоремой [5. С. 73] о раскраске точек пуассоновского потока.

Теорема 1. Пусть Π – пуассоновский процесс на пространстве S с мерой интенсивности λ . Раскрасим точки процесса Π случайным образом в k цветов так, что вероятности покрасить точку в i -й цвет равны p_i и цвета различных точек независимы (друг от друга и от положения точек). Тогда Π_i – независимые пуассоновские процессы с мерами интенсивности $\lambda_i = p_i \lambda$.

Используя эту теорему, можно произвести анализ числа точек пуассоновского потока в ограниченных и измеримых по Лебегу подобластях $G_k, k=1, \dots, m$, двумерного евклидова пространства. Предположим, что задан пуассоновский поток точек π с интенсивностью $\lambda = \lambda(x, y)$ и выполнены соотношения

$$\lambda_k = \int_{G_k} \lambda(x, y) dx dy < \infty, \quad k=1, \dots, m, \quad \lambda = \sum_{k=1}^m \lambda_k.$$

Обозначим $\Lambda_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$ и всюду далее полагаем $\Lambda_k = \text{const}, k=1, \dots, m$, допуская предельное соотношение $\lambda \rightarrow \infty$. Пусть каждая точка потока π независимо от других точек и от своих координат с вероятностью p входит в поток Π . Тогда поток Π является пуассоновским с интенсивностью $p\lambda(x, y)$. Следовательно, число n_k точек потока Π в подобласти G_k имеет пуассоновское распределение с параметром $p\lambda_k$, а сумма $n = \sum_{k=1}^m n_k$ имеет пуассоновское распределение с параметром $p\lambda$. Поэтому выполняются соотношения

$$Mn_k = Dn_k = p\lambda_k, \quad k=1, \dots, m, \quad Mn = Dn = p\lambda. \quad (1)$$

Отсюда следует, что относительная ошибка оценки параметра $p\lambda_k$ случайной величиной n_k имеет вид:

$$\sqrt{D \frac{n_k}{p\lambda_k}} = \frac{1}{\sqrt{p\lambda_k}}. \quad \text{Аналогично получаем, что относительная ошибка оценки параметра } p\lambda \text{ случайной}$$

$$\text{величиной } n \text{ имеет вид: } \sqrt{D \frac{n}{p\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{p\lambda}}.$$

Из неравенства Чебышева следует, что при любом $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, и при $\lambda \rightarrow \infty$

$$P\left(1 - \varepsilon \leq \frac{n_k}{p\lambda_k} \leq 1 + \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{p\lambda_k \varepsilon^2} \rightarrow 1, \quad k=1, \dots, m, \quad P\left(1 - \varepsilon \leq \frac{n}{p\lambda} \leq 1 + \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{p\lambda \varepsilon^2} \rightarrow 1. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) следует, что случайная величина n_k является несмещенной и состоятельной оценкой параметра $p\lambda_k$, а случайная величина n является несмещенной и состоятельной оценкой параметра $p\lambda$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Обозначим $N_k = \frac{n_k}{n}$, используя формулы (1), (2), нетрудно при любом $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1/2$, получить неравенство

$$P\left(1 - 2\varepsilon \leq \frac{N_k}{\Lambda_k} \leq 1 + 4\varepsilon\right) \geq P\left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \leq \frac{N_k}{\Lambda_k} \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) \geq 1 - \frac{1}{p\lambda_k \varepsilon^2} - \frac{1}{p\lambda \varepsilon^2}. \quad (3)$$

Используя неравенство $\Lambda_k \leq 1$, из формулы (3) получаем соотношение

$$P(-2\varepsilon \leq N_k - \Lambda_k \leq 4\varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{p\lambda_k \varepsilon^2} - \frac{1}{p\lambda \varepsilon^2} \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Справедлива сходимость по вероятности случайной величины N_k к параметру Λ_k при $\lambda \rightarrow \infty$.

Тем самым отношение N_k является состоятельной оценкой параметра Λ_k , свободного от вероятности p , являющейся в этой задаче мешающим параметром. Неравенство (4) является достаточно грубым и вдобавок включает неизвестный мешающий параметр p . Однако при увеличении λ (или при большом n) точность оценки (4) повышается.

2. Доли числа следов за 2005 г. в районах Приморского края

В настоящем разделе рассчитаны доли числа следов в 24 районах Приморского края за 2005 г. Вычислена разность между долями следов в различных районах края; полученное пространственное распределение показано на карте (рис. 1).

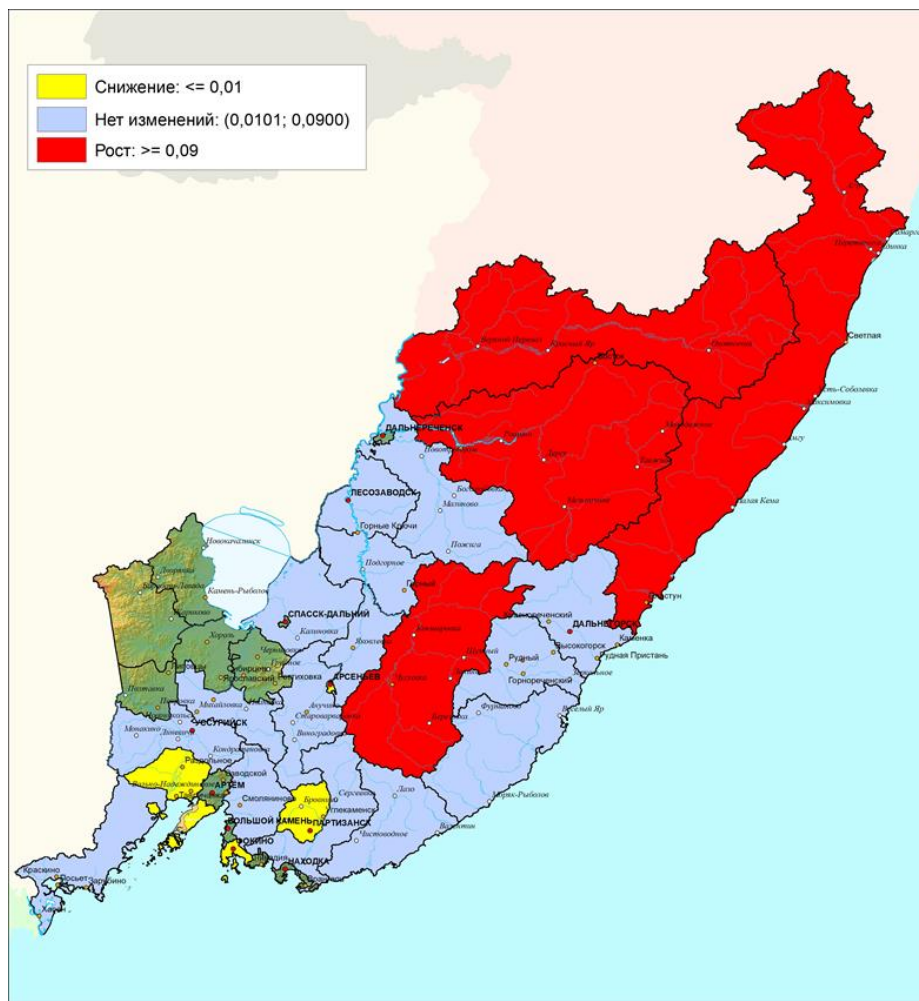


Рис. 1. Карта районов Приморского края с окраской, определяемой долями следов тигра в 2005 г.
Fig. 1. Map of Primorsky Krai districts with color determined by proportions of tiger tracks in 2005

Из рис. 1 видно, что в северных районах Приморского края доля числа следов максимальна. На юге края в основном располагаются районы со средней долей численности следов. При этом на юге края находится совсем небольшое число районов с малой долей числа следов. Районы (общим числом 4), в которых доли числа следов больше 0,09, окрашены красным цветом. Районы (общим числом 15), в которых доли числа следов меньше 0,09, но больше 0,01, окрашены голубым цветом. Районы (общим числом 5), у которых доли числа следов меньше 0,01, окрашены желтым цветом.

Полагаем, что наглядность представления географического распределения и тенденций ее изменения для амурского тигра чрезвычайно важна в практическом отношении, следовательно, существует необходимость системного привлечения методов математической обработки данных.

Заключение

Считаем, что рассмотренный в сообщении опыт может быть принят для рассмотрения при совершенствовании государственной методики учета следов животных. Исследование динамики пространственного распределения амурского тигра по территории Приморского края ныне существенно затруднено без специальной математической обработки первичных подсчетов следов. Авторы рекомендуют полевым специалистам более широко использовать для оценочных работ специализированные математические методы. В этой связи можно отметить, что хорошо зарекомендовала себя процедура устранения мешающих параметров путем перехода от абсолютного числа следов к доле следов в различных районах.

Список источников

1. Амбарцумян Р.В., Мекке Й., Штойян Д. Введение в стохастическую геометрию. М. : Наука, 1989. 400 с.
2. Stoyan D. On some qualitative properties of the Boolean model of stochastic geometry // *Z. angew. Math. Mech.* 1979. V. 59. P. 447–454.
3. Stoyan D. Stereological formulae for size distribution through marked point processes // *Prob. and Mat. Statist.* 1982. V. 2. P. 161–166.
4. Суханов В.В. Модель пространственного распределения подвижных животных в разреженной популяции // Математическое моделирование природных систем : сб. ст. / ред. Е. В. Золотов, Б. И. Семкин. Владивосток : Дальнаука, 1981. С. 10–22.
5. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М. : МЦНМО, 2007. 136 с.
6. Пикунов Д.Г. Организация учета численности диких животных в Приморье // Вопросы производственного охотоведения Сибири и Дальнего Востока. Иркутск : ИСХИ, 1970. С. 165–173.
7. Пикунов Д.Г., Микелл Д.Г., Серёдкин И.В., Николаев И.Г., Дунищенко Ю.М. Зимние следовые учеты амурского тигра на Дальнем Востоке России (методика и история проведения учетов). Владивосток : Дальнаука, 2014. 132 с.
8. Bocharnikov V.N., Fomenko P.V., Krasnopeev S.M. Assessment of dynamics of Amur Tiger habitat quality influenced by natural and anthropogenic factors // *Integrated Tools For Natural Resources Inventories In The 21st Century*. 1998. P. 51–55.
9. Абрамов К.Г. К методике учета тигра // Вопросы организации и методы учета ресурсов фауны наземных позвоночных животных. М. : Изд-во АН СССР, 1961. С. 53–54.
10. Мурзин А.А. Построение модели динамики популяции Амурского тигра и прогнозные расчеты его численности на период с 2015 по 2022 г. // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2018. № 11. С. 333–340.
11. Кокс Д., Хинкли Д. Теоретическая статистика. М. : Мир, 1978. 560 с.
12. Young G.A., Smith R.L. *Essentials of Statistical Inference*. Cambridge University Press, 2005. 236 p. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics).
13. Холево А.С. Статистические структуры квантовой механики и скрытые параметры. М. : Знание, 1985. 32 с.
14. Пикунов Д.Г., Серёдкин И.В., Солкин В.А. Амурский тигр (история изучения, динамика ареала, численности, экология и стратегия охраны). Владивосток : Дальнаука, 2010. 104 с.
15. Холево А.С. Квантовая информатика: прошлое, настоящее, будущее // *В мире науки*. 2008. № 7. С. 69–75.

References

1. Ambartsumyan, R.V., Mekke, Y. & Stoyan, D. (1989) *Vvedenie v stokhasticheskuyu geometriyu* [Introduction to stochastic geometry]. Moscow: Nauka.
2. Stoyan, D. (1979) On some qualitative properties of the Boolean model of stochastic geometry. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 59. pp. 447–454.
3. Stoyan, D. (1982) Stereological formulae for size distribution through marked point processes. *Probability and Mathematical Statistics*. 2. pp. 161–166.
4. Sukhanov, V.V. (1981) Model' prostranstvennogo raspredeleniya podvizhnykh zhivotnykh v razrezhennoy populyatsii [Model of spatial distribution of mobile animals in a sparse population]. In: Zolotov, E.V. & Semkin, B.I. (eds) *Matematicheskoe modelirovanie prirodnnykh sistem* [Mathematical Modeling of Natural Systems]. Vladivostok: Dalnauka. pp. 10–22.
5. Kingman, J. (2007) *Puassonovskie protsessy* [Poisson Processes]. Translated from English. Moscow: ICNMO. 136 p.
6. Pikunov, D.G. (1970) Organizatsiya ucheta chislenosti dikikh zhivotnykh v Primor'e [Organization of accounting for the number of wild animals in Primorye]. In: *Voprosy proizvodstvennogo okhotovedeniya Sibiri i Dal'nego Vostoka* [Questions of Industrial Hunting in Siberia and the Far East]. Irkutsk: ISKhI. pp. 165–173.
7. Pikunov, D.G., Mikell, D.G., Seredkin, I.V., Nikolaev, I.G. & Dunishenko, Yu.M. (2014) *Zimnie sledovye uchety amurskogo tigra na Dal'nem Vostoke Rossii (metodika i istoriya provedeniya uchetov)* [Winter trace records of the Amur tiger in the Russian Far East (methodology and history of accounting)]. Vladivostok: Dalnauka.

8. Bocharnikov, V.N., Fomenko, P.V. & Krasnopeev, S.M. (1998) Assessment of dynamics of Amur Tiger habitat quality influenced by natural and anthropogenic factors. In: Hansen, M.H. & Burk, T.E. (eds) *Integrated Tools For Natural Resources Inventories In The 21st Century*. General Technical Report (GTR). pp. 51–55.
9. Abramov, K.G. (1961) K metodike ucheta tigra [To the tiger accounting methodology]. In: *Voprosy organizatsii i metody ucheta resursov fauny nazemnykh pozvonochnykh zhivotnykh* [Problems of organization and methods of accounting for the fauna of terrestrial vertebrates]. Moscow: USSR Academy of Sciences. pp. 53–54.
10. Murzin, A.A. (2018) Postroenie modeli dinamiki populyatsii Amurskogo tigra i prognozyne raschety ego chislennosti na period s 2015 po 2022 g. [Constructing a model of the dynamics of the Amur tiger population and predictive calculations of its number for the period from 2015 to 2022]. *Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy – International Journal of Applied and Fundamental Research*. 11. pp. 333–340.
11. Cox, D. & Hinckley, D. (1978) *Teoreticheskaya statistika* [Theoretical Statistics]. Moscow: Mir.
12. Young, G.A. & Smith, R.L. (2005) *Essentials of Statistical Inference*. Cambridge University Press.
13. Holevo, A.S. (1985) *Statisticheskie struktury kvantovoy mekhaniki i skrytye parametry* [Statistical structures of quantum mechanics and hidden parameters]. Translated from English. Moscow: Znanie.
14. Pikunov, D.G., Seredkin I.V. & Solkin V.A. (2010) *Amurskiy tigr (istoriya izucheniya, dinamika areala, chislennosti, ekologiya i strategiya okhrany)* [Amur tiger (history of study, range dynamics, abundance, ecology and conservation strategy)]. Vladivostok: Dalnauka.
15. Holevo, A.S. (2008) *Kvantovaya informatika: proshloe, nastoyashchee, budushchee* [Quantum informatics: past, present, future]. *V mire nauki*. 7. pp. 69–75.

Информация об авторах:

Цициашвили Гурами Шалвович – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН (Владивосток, Россия). E-mail: guram@iam.dvo.ru

Бочарников Владимир Николаевич – доктор биологических наук, ведущий научный сотрудник Тихоокеанского института географии ДВО РАН (Владивосток, Россия). E-mail: vbocharnikov@mail.ru

Краснопеев Сергей Михайлович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Тихоокеанского института географии ДВО РАН (Владивосток, Россия). E-mail: sergeikr@tigdvo.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Цициашвили Г.Ш. разработал математическую часть статьи. Бочарников В.Н. сформулировал содержательную постановку задачи и предоставил фактический материал. Краснопеев С.М. представил результаты вычислений в виде карты. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Tsitsiashvili Gurami Sh. (Doctor of physical and mathematical sciences, main researcher of Institute for Applied Mathematics, FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation) E-mail: guram@iam.dvo.ru

Bocharnikov Vladimir N. (Doctor of biological sciences, leading researcher of Institute of Pacific Ocean Geography FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation). E-mail: vbocharnikov@mail.ru

Krasnopeev Sergei M. (Candidate of physical and mathematical sciences, researcher of Institute of Pacific Ocean Geography FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation). E-mail: sergeikr@tigdvo.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. Tsitsiashvili G.Sh. developed the mathematical part of the article. Bocharnikov V.N. formulated a meaningful statement of the problem and provided factual material. Krasnopeev S.M. presented the results of calculations in the form of a map. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 28.10.2022; принята к публикации 01.03.2023

Received 28.10.2022; accepted for publication 01.03.2023