

ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА

TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE

---

*Научный журнал*

---

2024

№ 66

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере  
массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия  
(свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-29497 от 27 сентября 2007 г.)

Подписной индекс в объединённом каталоге «Пресса России» 44031

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций  
на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук»,  
Высшей аттестационной комиссии

**Учредитель – Национальный исследовательский Томский государственный университет (НИ ТГУ)**

## **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

**Замятин Александр Владимирович** – гл. редактор, проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529496  
**Смагин Валерий Иванович** – зам. гл. редактора, проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529485  
**Нежелская Людмила Алексеевна** – ответственный секретарь, проф., д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ. Тел. +73822529485  
E-mail: vestnik\_uvti@mail.tsu.ru

**Воробейчиков Сергей Эрикович** – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Вишневский Владимир Миронович** – проф., д-р техн. наук, Институт проблем управления РАН (г. Москва)  
**Гордов Евгений Петрович** – проф., д-р физ. мат. наук, Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН (г. Томск)  
**Кошкин Геннадий Михайлович** – проф., д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Костюк Юрий Леонидович** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Матрсова Анжела Юрьевна** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Назаров Анатолий Андреевич** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Пашинская Татьяна Юрьевна** – д-р физ.-мат. наук, НИ ТГУ  
**Перепелкин Евгений Александрович** – проф., д-р техн. наук, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (г. Санкт-Петербург)  
**Самуйлов Константин Евгеньевич** – проф., д-р техн. наук, РУДН (г. Москва)  
**Семенкин Евгений Станиславович** – проф., д-р техн. наук, СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева (г. Красноярск)  
**Сущенко Сергей Петрович** – проф., д-р техн. наук, НИ ТГУ  
**Фархадов Маис Паша оглы** – д-р техн. наук, Институт проблем управления РАН (г. Москва)  
**Харин Юрий Семенович** – академик НАНБ, проф., д-р физ.-мат. наук, БГУ, Республика Беларусь (г. Минск)  
**Цициашвили Гурами Шалвович** – проф., д-р физ.-мат. наук, ИПМ ДВО РАН (г. Владивосток)

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ**

**Александр Николаевич Дудин** – проф., д-р физ.-мат. наук, БГУ, Минск, Республика Беларусь  
**Ана Роза Ковали (Ana Rosa Cavalli)** – проф., д-р. философии (PhD), University VII Paris, Франция  
**Енцо Орзингер (Enco Orzinger)** – проф., д-р. философии (PhD), University of Rome, Италия  
**Паоло Принетто (Paolo Prinetto)** – проф. Politechnic Institute, Torino, Италия  
**Раймонд Убар (Raimund Ubar)** – проф., д-р. (PhD), University of Technology Tallinn, Эстония  
**Нина Владимировна Евтушенко** – проф., д-р. техн. наук, ИСП РАН им. Иванникова В.П., Москва, Россия  
**Ервант Зорнан (Yervant Zorian)** – д-р. философии (PhD), Synopsys, Mountain View, США

## **JOURNAL INFO**

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is an independent peer-reviewed research journal that welcomes submissions from across the world.

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science is issued four times per year, and can be subscribed to in the Russian Press Joint Catalogue (Subscription Index 44031)

The publication in the journal is free of charge and may be in Russian or in English.

The topics of the journal are the following:

- *control of dynamical systems,*
- *mathematical modeling,*
- *data processing,*
- *informatics and programming,*
- *discrete function and automation,*
- *designing and diagnostics of computer systems.*

Rules of registration articles are given in a site:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

## **О ЖУРНАЛЕ**

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика» выходит ежеквартально и распространяется по подписке. Статьи публикуются на русском и английском языках. Тематика публикаций журнала:

- *управление динамическими системами,*
- *математическое моделирование,*
- *обработка информации,*
- *информатика и программирование,*
- *дискретные функции и автоматы,*
- *проектирование и диагностика вычислительных систем.*

Журнал входит в систему Российского Индекса Научного Цитирования (РИНЦ).

Правила оформления статей приведены на сайте:

<http://journals.tsu.ru/informatics/>

ISSN 2311-2085 (Online), ISSN 1998-8605 (Print).

## СОДЕРЖАНИЕ

### УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

|                                                                                                                                 |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| <b>Parshukov A.N.</b><br>Method for testing robust control quality for linear<br>one-dimensional discrete control systems ..... | 4 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

|                                                                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Балашова О.М., Дмитренко А.Г.</b><br>Моделирование рассеяния электромагнитной волны<br>на тонком идеально проводящем цилиндре,<br>расположенном внутри диэлектрического эллипсоида ..... | 13 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

|                                                                                                                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Воробьев А.В., Воробьева Г.Р.</b><br>Подход к динамической визуализации больших<br>объемов пространственной информации на основе<br>геостатистического анализа .....                              | 23 |
| <b>Дмитриев Ю.Г., Кошкин Г.М.</b><br>Комбинированные оценки линейного функционала<br>с априорной догадкой о параметрическом классе<br>распределений .....                                            | 36 |
| <b>Лебедев И.С.</b><br>Применение неконтролируемой кластеризации выборок<br>для повышения качественных показателей многоуровневых<br>моделей обработки данных .....                                  | 44 |
| <b>Нежелская Л.А., Степаненко И.Д.</b><br>Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном<br>обобщенном полусинхронном потоке событий<br>с продлевающимся мертвым временем в особом случае ..... | 55 |
| <b>Смагин В.И., Ким К.С., Зыков В.А.</b><br>Фильтрация в дискретных системах со случайными<br>и интервальными параметрами .....                                                                      | 69 |

### ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

|                                                                                                                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф.</b><br>Оптимальный выбор начальных условий задачи Коши<br>и его применение для расчета начального состава<br>реакционной смеси ..... | 76 |
| <b>Бабанов А.М., Квач Е.С.</b><br>Использование IS-THE-графов для анализа<br>иерархических структур данных .....                                                                    | 87 |
| <b>Пазников А.А.</b><br>Алгоритм широковещательной рассылки на основе<br>биномиального дерева в модели удаленного доступа к памяти .....                                            | 97 |

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

|                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Матросова А.Ю., Тychинский В.З., Андреева В.В.</b><br>Булева разность и обнаружение неисправностей<br>задержек пути ..... | 108 |
| <b>Сперанский Д.В.</b><br>Синтез обнаруживающих тестов для нечетких<br>автоматов с конечной памятью .....                    | 120 |

## CONTENTS

### CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

|                                                                                                                                 |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| <b>Parshukov A.N.</b><br>Method for testing robust control quality for linear<br>one-dimensional discrete control systems ..... | 4 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|

### MATHEMATICAL MODELING

|                                                                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Balashova O.M., Dmitrenko A.G.</b><br>Simulation of scattering of an electromagnetic wave<br>by a thin perfectly conducting cylinder placed within<br>a dielectric ellipsoid ..... | 13 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### DATA PROCESSING

|                                                                                                                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Vorobev A.V., Vorobeve G.R.</b><br>Approach to dynamic visualization of large<br>volumes of spatial information based<br>on geostatistical analysis .....                                   | 23 |
| <b>Dmitriev Yu.G., Koshkin G.M.</b><br>Combined estimates of linear functional<br>with a priori guess on the parametric class<br>of distributions .....                                        | 36 |
| <b>Lebedev I.S.</b><br>Uncontrolled dataset clustering to improve<br>the quality indicators of multilevel data<br>processing models .....                                                      | 44 |
| <b>Nezhel'skaya L.A., Stepanenko I.D.</b><br>Estimation of dead time duration in recurrent<br>generalized semi-synchronous flow of events<br>with prolonged dead time in a singular case ..... | 55 |
| <b>Smagin V.I., Kim K.S., Zykov V.A.</b><br>Filtering in discrete systems with random<br>and interval parameters .....                                                                         | 69 |

### INFORMATICS AND PROGRAMMING

|                                                                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Antipina E.V., Mustafina S.A., Antipin A.F.</b><br>Optimal choice of initial conditions of the Cauchy problem<br>and its application to the calculation of the initial composition<br>of the reaction mixture ..... | 76 |
| <b>Babanov A.V., Kvach E.S.</b><br>IS-THE graphs usage to analyze hierarchical<br>data structures .....                                                                                                                | 87 |
| <b>Paznikov A.A.</b><br>Binomial tree broadcast in remote memory<br>access model .....                                                                                                                                 | 97 |

### DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS

|                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Matrosova A.Yu., Tychinskiy V.Z., Andreeva V.V.</b><br>Boolean difference and path delay<br>faults detection ..... | 108 |
| <b>Speranskiy D.V.</b><br>Synthesis of detection tests for fuzzy automata<br>with finite memory .....                 | 120 |

## УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

## CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Original article

UDK 517.9

doi: 10.17223/19988605/66/1

Method for testing robust control quality for linear  
one-dimensional discrete control systems

Andrej N. Parshukov

*Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation, anparshukov@mail.ru*

**Abstract.** The article deals with one-dimensional linear control objects in discrete time. It is assumed that the operators of the control object have structural and parametric inaccuracies in the description. In this paper, a criterion for the robust quality of control is obtained for a system consisting of a discrete control object with structural perturbations and a modal controller. Based on this criterion, a numerical method for checking the robust quality of control has been developed. The effectiveness of the method is illustrated by an example.

**Keywords:** structural perturbations; modal controller; robust control quality.

**For citation:** Parshukov, A.N. (2024) Method for testing robust control quality for linear one-dimensional discrete control systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 66. pp. 4–12. doi: 10.17223/19988605/66/1

Научная статья

doi: 10.17223/19988605/66/1

Метод проверки робастного качества управления для линейных  
одномерных дискретных систем управления

Андрей Николаевич Паршуков

*Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия, anparshukov@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматриваются одномерные линейные объекты управления в дискретном времени. Предполагается, что операторы объекта управления имеют структурно-параметрические неточности в описании. Получен критерий робастного качества управления для системы, состоящей из дискретного объекта управления со структурными возмущениями и модального регулятора. На основе данного критерия разработан численный метод проверки робастного качества управления. Эффективность метода проиллюстрирована примером.

**Ключевые слова:** структурные возмущения; модальный регулятор; робастное качество управления.

**Для цитирования:** Паршуков А.Н. Метод проверки робастного качества управления для линейных одномерных дискретных систем управления // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 4–12. doi: 10.17223/19988605/66/1

## Introduction

Technological processes with different tempo components are widespread [1, 2]. A characteristic feature of the models of such processes is the allocation in the model of operators of the so-called "basic dynamics", which describes that part of the control object that is subject to regulation, and operators of "structural disturbances" – they include those parts of the control object that already have the properties of stability and a given quality management [3. pp. 29–30]. When synthesizing a controller, structural perturbations, as a rule, are not taken into account [4–5], as a result, uncertainty arises in the transfer function (TF) of a closed system. Since the properties of stability and quality of control of the system are determined by the location of the poles of its PF, the question arises: under what operators of structural perturbations in the control object will the closed system still retain the properties of stability (robust stability) and quality of control (robust quality of control)?

In the modal control scheme [3. pp. 8–21, 6. pp. 5–20] the quality of control is given as an area  $S$  on the complex plane; the  $S$  area determines the desired location of the PF poles. Consequently, the issues of studying (testing) robust stability and robust quality of control can be considered from a unified standpoint: is it required to check whether the zeros of a given family of polynomials belong to the area  $S$ ?

The problem of studying robust stability and robust quality of control is widely presented in the literature. There are three main directions in which this problem is solved: 1) the principle of "zero exclusion" [7–12]; 2)  $H^\infty$  theory [13–14]; 3) LMI method [15–17]. However, the general formulation of the criterion of robust control quality (independent of the shape of the area  $S$ ) has not yet been obtained [11. p. 227].

In this article, in development of the results obtained in [12], we develop a method for testing the robust quality of control.

The following notation is adopted:

$\doteq$  is equal by definition;

$R^n$  is the  $n$ -dimensional space of real numbers;

$C^n$  is the  $n$ -dimensional space of complex numbers;

$C^1$  is the complex plane;  $^T$  is the transposition operation;

$E$  is the identity matrix of the corresponding dimension;

$\mathbf{0}$  is a column vector consisting entirely of zeros;

$j$  is the imaginary unit;  $s$  is a variable (generally complex);

$s^*$  is the number complex conjugate of  $s$ ;

$t$  is discrete time ( $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

$z$  is advance operator by one cycle:  $zx(t) = x(t+1)$ ;

$S$  is the area on  $C^1$ ;

$\partial S$  is the boundary of the area  $S$ ;

$\text{int } S$  is the interior of the area  $S$ .

Let  $f(\mathbf{x})$  be a function of the vector argument  $\mathbf{x}$  defined on the area  $X \subset R^n$ ; denote

$$|f|_+ \doteq \max_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})|, \quad |f|_- \doteq \min_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})|. \quad (1)$$

View operator

$$f(n, z) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot z^i, \quad (2)$$

is called a *polynomial operator* of degree  $n$ . Replacing  $z$  with  $s$  in (2), where  $s$  is a variable, we obtain an algebraic polynomial

$$f(n, s) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot s^i.$$

The set of zeros of the polynomial  $f(n, s)$  is denoted by  $\Lambda(f)$ :

$$\Lambda(f) \doteq \{ \lambda_i \in C^1 : f(n, \lambda_i) = 0, \quad i \in \overline{1, n} \}.$$

Family of operators of the form

$$f(n, F, z) = \left\{ f(n, \mathbf{f}, z) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot z^i : \mathbf{f} \doteq (f_0, \dots, f_n) \in F \right\}, \quad (3)$$

$$F = \left\{ \mathbf{f} \in R^{n+1} : f_i \in [f_i^0 - \Delta f_i; f_i^0 + \Delta f_i], \right.$$

$$\left. f_n^0 \neq 0, \Delta f_i \geq 0, i = \overline{0, n} \right\},$$

is called an *interval polynomial operator* of degree  $n$ .

Replacing  $z$  with  $s$  in (3), we obtain an *interval polynomial*:

$$f(n, F, s) = \left\{ f(n, \mathbf{f}, s) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot s^i : \mathbf{f} \in F \right\}. \quad (4)$$

Interval polynomial (4) can be represented as

$$f(n, F, s) = f^0(n, \mathbf{f}^0, s) + \Delta f(n, \Delta F, s), \quad (5)$$

where

$$f^0(n, \mathbf{f}^0, s) = \sum_{i=0}^n f_i^0 \cdot s^i, \mathbf{f}^0 \doteq (f_0^0, \dots, f_n^0),$$

ordinary polynomial, and

$$\Delta f(n, \Delta F, s) = \left\{ f(n, \delta \mathbf{f}, s) = \sum_{i=0}^n \delta f_i \cdot s^i : \delta \mathbf{f} \doteq (\delta f_0, \dots, \delta f_n) \in \Delta F \right\},$$

$$\Delta F = \left\{ \delta \mathbf{f} \in R^{n+1} : \delta f_i \in [-\Delta f_i; \Delta f_i], i = \overline{0, n} \right\},$$

interval polynomial with symmetric coefficient uncertainty intervals.

Let  $\mathbf{A}$  be a matrix whose coefficients are complex numbers, then we denote by  $\mathbf{A}_{\text{Re}}$  and  $\mathbf{A}_{\text{Im}}$  the matrices whose coefficients are, respectively, the real and imaginary parts of the coefficients of the matrix  $\mathbf{A}$ , in this sense we denote

$$\mathbf{A}_{\text{Re}} \doteq \text{Re}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{A}_{\text{Im}} \doteq \text{Im}(\mathbf{A}).$$

### 1. Synthesis of a modal controller for linear control objects with structural perturbations and statement of the problem of testing the robust quality of control

Let a linear one-dimensional discrete control object be given by a model of the form:

$$v(l, V, z) \cdot a(n, A, z) y(t) = w(h, W, z) \cdot b(m, B, z) u(t), \quad n > m, \quad l \geq h, \quad (6)$$

here  $u$  is the input (control) signal,  $y$  is the output (controlled) signal,  $a(n, A, z)$ ,  $b(m, B, z)$ ,  $v(l, V, z)$ ,  $w(h, W, z)$  are interval operators of the form (5) such that

$$a_n^0 = 1, \quad \Delta a_n = 0, \quad v_0^0 = 1, \quad \Delta v_0 = 0, \quad w_0^0 = 1, \quad \Delta w_0 = 0.$$

Model

$$a^0(n, \mathbf{a}^0, z) y(t) = b^0(m, \mathbf{b}^0, z) u(t), \quad (7)$$

belonging to the family of models (6), we will call "nominal"; interval operators  $a(n, A, z)$ ,  $b(m, B, z)$  call "basic dynamics"; operators  $v(l, V, z)$ ,  $w(h, W, z)$  call "structural perturbations".

The quality of control will be assigned in the form of an area  $S$ , which determines the admissible location of the PF poles on  $C^1$ . We assume that the area  $S$  satisfies the following conditions: it is located inside a circle of unit radius; simply connected; also holds  $s^* \in S$  for any point  $s \in S$ .

In addition, based on the meaning of the problem, we require that the operators of structural perturbations  $v(l, V, z)$ ,  $w(h, W, z)$  satisfy the expressions:

$$\Lambda(v) \subset \text{int } S, \quad \Lambda(w) \subset \text{int } S. \quad (8)$$

Note that the fulfillment of expressions (8) is easy to check using the methods described in [12. pp. 7–10].

Since the requirements for the quality of control are expressed in root quality indicators, the controller will be calculated according to the modal control scheme. Following the method of synthesizing a modal

controller (described, for example, in the monograph [6. pp. 5–20]), the controller for the nominal model (7) is sought in the form of a difference equation of the  $n-1$  order:

$$\beta(n-1, z)u(t) = \alpha(n-1, z)y(t) + \chi(n-1, z)g(t), \quad \beta_{n-1} = 1, \quad (9)$$

here  $g$  is a given program signal. In the modal control scheme, the coefficients of the operators  $\beta(n-1, z)$  and  $\alpha(n-1, z)$  of the controller (9) are calculated from the condition of conversion to the identity of the equation

$$a^{\text{st}}(2n-1, s) = a^0(n, \mathbf{a}^0, s)\beta(n-1, s) - b^0(m, \mathbf{b}^0, s)\alpha(n-1, s), \\ a_{2n-1}^{\text{st}} = 1, \quad (10)$$

where  $a^{\text{st}}(2n-1, s)$  is the given characteristic polynomial of the standard control system (hereinafter referred to as the "standard"); the choice of standard is limited by the condition

$$\Lambda(a^{\text{st}}) \subset \text{int } S. \quad (11)$$

It is obvious that the choice of the polynomial  $\chi(n-1, s)$  does not affect the properties of robust stability and the robust quality of control, so the issue of calculating the polynomial  $\chi(n-1, s)$  is not considered in this paper.

The method for calculating the coefficients of polynomials  $\beta(n-1, s)$  and  $\alpha(n-1, s)$  is given in [3. pp. 8–21], it is reduced to solving a system of  $2n-1$  linear algebraic equations with respect to  $2n-1$  unknown coefficients of polynomials  $\beta(n-1, s)$  and  $\alpha(n-1, s)$ . This system is uniquely solvable if the zeros of the polynomial  $a^0(n, s)$  do not coincide with the zeros of the polynomial  $b^0(m, s)$ .

After closing the original object (6) by the controller synthesized according to the scheme (9)–(11), it is easy to obtain the following expression for the characteristic polynomial of the closed-loop system

$$a^c(2n+l-1, A, B, V, W, s) = \{a^c(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s): \\ \forall \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B, \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}, \quad (12)$$

here

$$a^c(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s) \doteq v(l, \mathbf{v}, s) \cdot a(n, \mathbf{a}, s) \cdot \beta(n-1, s) - \\ - w(h, \mathbf{w}, s) \cdot b(m, \mathbf{b}, s) \cdot \alpha(n-1, s).$$

The set of polynomials  $a^c(2n+l-1, A, B, V, W, s)$  is called the "family of characteristic polynomials" of a closed-loop system. A set of

$$\Lambda(a^c) = \{\lambda_i : \exists \mathbf{a} \in A, \exists \mathbf{b} \in B, \exists \mathbf{v} \in V, \\ \exists \mathbf{w} \in W, a^c(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \lambda_i) = 0, i = \overline{1, 2n+l-1}\}$$

we will call the "set of zeros" of the family of characteristic polynomials (or the "set of poles" of the PF) of a closed-loop system.

We will assume that a closed system with characteristic polynomial (12) has a robust quality of control if the set  $\Lambda(a^c)$  lies inside the area  $S$ , that is, the condition is satisfied (hereinafter, **the condition of robust quality of control**)

$$\Lambda(a^c) \subset \text{int } S. \quad (13)$$

In the presence of structural disturbances in the control object, it is impossible to guarantee in advance that the modal controller calculated by formulas (9) – (11) will ensure the fulfillment of condition (13). Thus, the problem of synthesizing a modal controller in the presence of structural disturbances in the control object consists of the following steps:

- 1) synthesis of a modal controller for a nominal object (7) (according to formulas (9)–(11));
- 2) subsequent verification of the fulfillment of condition (13) for a given family of characteristic polynomials (12) (**the problem of testing the robust quality of control**).

The next section presents a numerical method for checking the robust quality of control for a family of characteristic polynomials of the form (12).

## 2. Numerical method for checking the robust quality of control

### 2.1. Robust control quality criterion

Here and below (where this will not cause misunderstandings), we will omit the arguments of polynomials that are not essential for reasoning.

**Theorem 1.** *Let the family of polynomials (12) satisfy conditions (8), (11). Then, in order for this family to satisfy the condition of robust control quality (13), it is necessary and sufficient that*

$$0 \notin A^c(s), \quad \forall s \in \partial S, \quad (14)$$

where set

$$A^c(s) \doteq \{a^c(2n+l-1, s) : \forall \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B, \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\} \subset C^1,$$

is the "geometric image" of the family of polynomials (12) for the point  $s \in \partial S$ .

**Proof.** Polynomial

$$\begin{aligned} a^{c0}(2n+l-1, \mathbf{a}^0, \mathbf{b}^0, \mathbf{v}^0, \mathbf{w}^0, s) &\doteq v(l, \mathbf{v}^0, s) \cdot a(n, \mathbf{a}^0, s) \times \\ &\times \beta(n-1, s) - w(h, \mathbf{w}^0, s) \cdot b(m, \mathbf{b}^0, s) \cdot \alpha(n-1, s) \end{aligned} \quad (15)$$

belongs to the family (12). By conditions (8) and (11), all zeros of polynomial (15) lie inside the given area  $S$ . All polynomials of family (12) have the same degree and the coefficient at the highest degree is equal to 1, therefore, an arbitrary polynomial of family (12) can be considered as the result variations of the coefficients ( $\mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B, \mathbf{v} \in V$  and  $\mathbf{w} \in W$ ) with respect to the coefficients of the polynomial (15).

A change in the number of zeros of the polynomial lying inside the area  $S$  can occur if, as a result of the variation of the coefficients, at least one zero of the polynomial crosses the boundary of the area  $S$  and condition (14) is violated.

Thus, the fulfillment of conditions (8), (11), and (14) is necessary and sufficient for the robust control quality condition (13) to be satisfied. *Q.E.D.*

The polynomials in the family (12) contain products of variable parameters; therefore, the set  $A^c(s)$  on  $C^1$  can be non-convex (and even non-simply connected). Thus, the direct construction of the nonconvex set  $A^c(s)$  and the subsequent verification of expression (14) are difficult problems. Below we obtain sufficient conditions for robust control performance by estimating the distance from the set  $A^c(s)$  to the point  $(0, 0j)$ .

For a point  $s \in \partial S$ , this distance is (taking into account notation (1)):

$$\left| a^c(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s) \right|_- ,$$

thus, expression (14) takes the form

$$\left| a^c(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s) \right|_- > 0, \quad \forall s \in \partial S.$$

The expression on the left side of the last inequality satisfies the estimate

$$\begin{aligned} \left| a^c(2n+l-1, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, s) \right|_- &= \left| v^0(l, \mathbf{v}^0, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) \right|_- \times \\ &\times \left( a^{st}(2n-1, s) + \delta a(n-1, \delta \mathbf{a}, s) \cdot \beta(n-1, s) - \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \times \right. \\ &\times \alpha(n-1, s) \left. \right) + \left( v^0(l, \mathbf{v}^0, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) - w^0(h, \mathbf{w}^0, s) - \delta w(h, \delta \mathbf{w}, s) \right) \times \\ &\times \left( b^0(m, \mathbf{b}^0, s) + \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \right) \cdot \alpha(n-1, s) \Big|_- \geq \left| v^0(l, \mathbf{v}^0, s) + \right. \\ &+ \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) \Big|_- \cdot \left| a^{st}(2n-1, s) + \delta a(n-1, \delta \mathbf{a}, s) \cdot \beta(n-1, s) - \right. \\ &- \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \cdot \alpha(n-1, s) \Big|_- - \left| v^0(l, \mathbf{v}^0, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) - \right. \\ &- w^0(h, \mathbf{w}^0, s) - \delta w(h, \delta \mathbf{w}, s) \Big|_+ \cdot \left| b^0(m, \mathbf{b}^0, s) + \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \right|_+ \cdot \left| \alpha(n-1, s) \right|. \end{aligned}$$

The above reasoning can be considered as a non-rigorous proof of the following theorem.



**Theorem 2.** Let the family of polynomials (12) satisfy conditions (8), (11) and

$$\rho(s) \doteq \rho_1(s) - \rho_2(s) > 0, \quad \forall s \in \partial S, \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} \rho_1(s) &\doteq \left| v^0(l, \mathbf{v}^0, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) \right|_- \cdot \left| a^{\text{st}}(2n-1, s) + \right. \\ &\quad \left. + \delta a(n-1, \delta \mathbf{a}, s) \cdot \beta(n-1, s) - \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \cdot \alpha(n-1, s) \right|_-, \\ \rho_2(s) &\doteq \left| v^0(l, \mathbf{v}^0, s) + \delta v(l, \delta \mathbf{v}, s) - w^0(h, \mathbf{w}^0, s) - \delta w(h, \delta \mathbf{w}, s) \right|_+ \times \\ &\quad \times \left| b^0(m, \mathbf{b}^0, s) + \delta b(m, \delta \mathbf{b}, s) \right|_+ \cdot \left| \alpha(n-1, s) \right|. \end{aligned} \quad (17)$$

Then the family of polynomials (12) satisfies (13).

The technology for checking condition (16) is described below.

## 2.2. Method for checking the robust quality of control

The calculation of the functions  $\rho_1(s)$  and  $\rho_2(s)$  at the point  $s$  is reduced to solving 4 quadratic programming problems (hereinafter referred to as QP problems)

$$\begin{aligned} J_k(\mathbf{x}_k) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{q}_k^T \mathbf{x}_k + e_k \rightarrow \min, \quad k \in \overline{1, 4}, \\ \Xi_k \mathbf{x}_k - \zeta_k &\leq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &\doteq \delta \mathbf{v}, \quad \Delta \mathbf{x}_1 \doteq \text{col}(\Delta v_1, \dots, \Delta v_l), \quad \xi_1 \doteq \text{col}(s, \dots, s^l), \\ \boldsymbol{\varphi}_1 &\doteq \text{Re}(\xi_1), \quad \boldsymbol{\psi}_1 \doteq \text{Im}(\xi_1), \\ \theta_1 &\doteq v^0(l, \mathbf{v}^0, s), \quad \mathbf{x}_2 \doteq \text{col}(\delta \mathbf{a}, \delta \mathbf{b}), \\ \Delta \mathbf{x}_2 &\doteq \text{col}(\Delta a_0, \dots, \Delta a_{n-1}, \Delta b_0, \dots, \Delta b_m), \\ \xi_2 &\doteq \text{col}(\beta(n-1, s), \dots, s^{n-1} \cdot \beta(n-1, s), \\ &\quad -\alpha(n-1, s), \dots, -s^m \cdot \alpha(n-1, s)), \\ \boldsymbol{\varphi}_2 &\doteq \text{Re}(\xi_2), \quad \boldsymbol{\psi}_2 \doteq \text{Im}(\xi_2), \quad \theta_2 \doteq a^{\text{st}}(2n-1, s), \\ \mathbf{x}_3 &\doteq \text{col}(\delta \mathbf{v}, \delta \mathbf{w}), \quad \Delta \mathbf{x}_3 \doteq \text{col}(\Delta v_1, \dots, \Delta v_l, \Delta w_1, \dots, \Delta w_h), \\ \xi_3 &\doteq \text{col}(1, s, \dots, s^l, -1, -s, \dots, -s^h), \\ \boldsymbol{\varphi}_3 &\doteq \text{Re}(\xi_3), \quad \boldsymbol{\psi}_3 \doteq \text{Im}(\xi_3), \\ \theta_3 &\doteq v^0(l, \mathbf{v}^0, s) - w^0(h, \mathbf{w}^0, s), \quad \mathbf{x}_4 \doteq \delta \mathbf{b}, \\ \Delta \mathbf{x}_4 &\doteq \text{col}(\Delta b_0, \dots, \Delta b_m), \quad \xi_4 \doteq \text{col}(1, s, \dots, s^m), \\ \boldsymbol{\varphi}_4 &\doteq \text{Re}(\xi_4), \quad \boldsymbol{\psi}_4 \doteq \text{Im}(\xi_4), \quad \theta_4 \doteq b^0(m, \mathbf{b}^0, s), \\ \mathbf{H}_k &= \begin{cases} +2(\boldsymbol{\varphi}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T + \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\psi}_k^T), & k \in \overline{1, 2}, \\ -2(\boldsymbol{\varphi}_k \cdot \boldsymbol{\varphi}_k^T + \boldsymbol{\psi}_k \cdot \boldsymbol{\psi}_k^T), & k \in \overline{3, 4}, \end{cases} \\ \mathbf{q}_k &= \begin{cases} +2(\text{Re}(\theta_k) \cdot \boldsymbol{\varphi}_k + \text{Im}(\theta_k) \cdot \boldsymbol{\psi}_k), & k \in \overline{1, 2}, \\ -2(\text{Re}(\theta_k) \cdot \boldsymbol{\varphi}_k + \text{Im}(\theta_k) \cdot \boldsymbol{\psi}_k), & k \in \overline{3, 4}, \end{cases} \\ e_k &= \text{Re}^2(\theta_k) + \text{Im}^2(\theta_k), \end{aligned}$$

and  $\Xi_k$  and  $\zeta_k$  are block matrices and vectors

$$\Xi_k = (\mathbf{E} \mid -\mathbf{E})^T, \quad \zeta_k = \text{col}(\Delta \mathbf{x}_k, \Delta \mathbf{x}_k), \quad k \in \overline{1, 4}.$$

For calculate  $\Xi_k$  the dimension of the matrix  $\mathbf{E}$  must be coordinated with the dimension of the vector  $\mathbf{x}_k$ .

It is easy to verify that

$$\mathbf{H}_k^T = \mathbf{H}_k, \quad e_k \geq 0, \quad k \in \overline{1, 4}.$$

In notation (18), the functions  $\rho_1(s)$  and  $\rho_2(s)$  take the form:

$$\rho_1(s) = J_1^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_1^*) \cdot J_2^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_2^*), \quad \rho_2(s) = J_3^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_3^*) \cdot J_4^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_4^*) \cdot |\alpha(n-1, s)|, \quad (19)$$

$$\mathbf{x}_k^* \doteq \arg \min_{\Xi_k \mathbf{x}_k - \zeta_k \leq 0} f_k(\mathbf{x}_k), \quad f_k(\mathbf{x}_k) \doteq \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{q}_k^T \mathbf{x}_k. \quad (20)$$

Problem QP (20) is among the solved ones. In the case of constraints in the form of linear inequalities, this problem can be solved only by numerical methods.

Further, for convenience of presentation, we assume that the boundary  $\partial S$  is replaced by a finite number of points

$$\Omega = \{s_i \in \partial S, \quad i \in \overline{1, N}\}, \quad (N < \infty),$$

here the points  $s_i$  included in the set  $\Omega$  are chosen on the boundary  $\partial S$  based on the condition:

$$\max_{s \in \partial S} \Delta \arg(\omega - s) \Big|_{\omega=s_i}^{\omega=s_{i+1}} \leq \frac{1}{2n+l-1} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ radian}.$$

Based on the above considerations, we can formulate the following algorithm for checking the robust quality of control.

### 2.3. The algorithm for checking the robust quality of control

Step 1. At each point  $s_i \in \Omega(N)$  solve four QP problems (18), and use formulas (19)–(20) to calculate the values of  $\rho_1(s)$  and  $\rho_2(s)$ .

Step 2. Check the fulfillment of condition (16). If condition (16) is satisfied, then for a given family of characteristic polynomials, the robust quality of control is satisfied; if not, the modal controller should be calculated using the complete model of the control object (6).

### 3. Example of checking the robust quality of control

Let the control object be given by a model of the form:

$$\begin{aligned} & (v^0(2, z) + \Delta v(2, z)) \cdot (a^0(2, z) + \Delta a(1, z)) y(t) = \\ & = (w^0(2, z) + \Delta w(2, z)) \cdot (b^0(1, z) + \Delta b(1, z)) u(t), \end{aligned}$$

here

$$a^0(2, z) = z^2 - 1,918z + 0,923, \quad b^0(1, z) = 0,232z - 0,179,$$

$$\Delta a(1, z) = 10^{-4} [-1; 1]z + 10^{-4} [-2; 2],$$

$$\Delta b(1, z) = 10^{-2} [-1; 1]z + 10^{-2} [-1; 1],$$

$$v^0(2, z) = 1,830z^2 - 2,707z + 1,$$

$$w^0(2, z) = 1,848z^2 - 2,717z + 1,$$

$$\Delta v(2, z) = 10^{-4} [-5; 5]z^2 + 10^{-3} [-1; 1]z,$$

$$\Delta w(2, z) = 10^{-4} [-5; 5]z^2 + 10^{-3} [-1, 5; 1, 5]z.$$

Zeros of the polynomials  $v^0(2, z)$  and  $w^0(2, z)$ :

$$\Lambda(v^0) = \{0,715, \quad 0,764\} \subset C^1,$$

$$\Lambda(w^0) = \{0,735 + 0,027j, \quad 0,735 - 0,027j\} \subset C^1.$$

Requirements for the quality of management are set by the area

$$S = \{s : \eta_2 \leq |s| \leq \eta_1, \quad |\arg(s)| \leq \varphi\},$$

where  $\eta_1 = 0,607$ ,  $\eta_2 = 0,961$ ,  $\varphi = \pi/4$  radian. Note that the sets  $\Lambda(v^0)$  and  $\Lambda(w^0)$  lie inside the area  $S$ .

We choose the characteristic polynomial of the standard

$$a^{st}(3, z) = z^3 - 2,715z^2 + 2,456z - 0,741.$$

For the nominal model of control object and the standard  $a^{st}(3, z)$ , the modal controller is calculated

$$(z - 0,833)u(t) = (-0,158z + 0,157)y(t) + \chi_0 g(t).$$

The family of characteristic polynomials of a closed-loop system is

$$\begin{aligned} a^c(5, s) = & (v^0(2, s) + \Delta v(2, s)) \times \\ & \times (a^{st}(3, s) + \Delta a(1, s) \cdot \beta(1, s) - \Delta b(1, s) \cdot \alpha(1, s)) + \\ & + (v^0(2, s) + \Delta v(2, s) - w^0(2, s) - \Delta w(2, s)) \times \\ & \times (b^0(1, s) + \Delta b(1, s)) \cdot \alpha(1, s). \end{aligned} \quad (21)$$

To check the properties of the robust quality of control on the boundary of the area  $S$ , 42 points were chosen, starting from the point  $(0,961 + 0j)$  at an equal distance from one another. The smallest value of the function  $\rho(s)$  is  $6,136 \cdot 10^{-4}$ , it is reached at the point  $(0,607 + 0j)$ . Since the value  $\rho = 6,136 \cdot 10^{-4}$  is greater than zero, therefore, according to Theorem 2, the family of polynomials (21) has a robust control quality.

## Conclusions

In this article, a criterion for the robust quality of control is obtained for a closed-loop system consisting of a linear one-dimensional control object with structural disturbances and a modal controller. Theorem 2 establishes a criterion for the set of zeros to belong to the family of characteristic polynomials of a given area  $S$  on the complex plane.

Based on this theorem, a numerical method for checking the robust quality of control has been developed, which consists in solving four quadratic programming problems for each point  $s$  on the boundary of the area  $S$ .

The function  $\rho$ , defined by formulas (16)–(17), makes it possible to compare various closed systems with each other. Thus, the function  $\rho$  is a measure of robust properties, which can be further used to formulate the problem of improving the robust quality of control, for example, using the freedom to choose the characteristic polynomial of the standard  $a^{st}(2n-1, s)$  within the limits of condition (11).

## References

1. Krushel, E.G. & Stepanchenko, O.V. (2006) *Synthesis and modeling of digital control systems with a double time scale*. Moscow: Mashinostroenie-1.
2. Yurkevich, V.D. (2000) *Synthesis of non-linear non-stationary control systems with different-tempo processes*. St. Petersburg: Nauka.
3. Parshukov, A.N. (2009) *Methods of synthesis of modal regulators*. Tyumen: TyumSOGU.
4. Parshukov, A.N. (2021) Method of synthesis of a reduced-order modal regulator. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 56. pp. 12–19. DOI: 10.17223/19988605/56/2
5. Parshukov, A.N. (2020) Numerical method for testing robust control quality for linear one-dimensional dynamic control systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 52. pp. 4–12. DOI: 10.17223/19988605/52/1
6. Kuzovkov, N.T. (1976) *Modal Control and Monitoring Devices*. Moscow: Mashinostroenie.
7. Ackermann, J.A., Bartlett, D., Kaesbauer, W.S. & Steinhauser, R. (1993) *Robust Control. Systems with Uncertain Physical Parameters*. London: Springer-Verlag.

8. Barmish, B.R. (1994) *New Tools for Robustness of Linear Systems*. New York: MacMillan.
9. Polyak, B.T. & Tsykin, Ya.Z. (1990) Frequency criteria of robust stability and aperiodicity of linear systems. *Automation and Remote Control*. 51(9). pp. 1192–1201.
10. Polyak, B.T. & Tsykin, Ya.Z. (1996) Stability and Robust Stability of Uniform Systems. *Automation and Remote Control*. 57(11). pp. 1606–1617.
11. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2002) *Robust Stability and Control*. Moscow: Nauka.
12. Parshukov, A.N. (2022) Method of synthesis of a modal regulator for a linear discrete-time system with interval uncertainty of coefficients. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 4–12. DOI: 10.17223/19988605/60/1
13. Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. & Francis, B.A. (1989) State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 34(8). pp. 831–847.
14. Kogan, M.M. (2016) Optimal Discrete-time  $H_\infty/\gamma_0$  Filtering and Control under Unknown Covariances. *International Journal of Control*. 89(4). pp. 691–700.
15. Chestnov, V.N. (2015)  $H_\infty$ -approach to controller synthesis under parametric uncertainty and polyharmonic external disturbances. *Automation and Remote Control*. 76(6). pp. 1036–1048. DOI: 10.1134/S0005117915060077
16. Selvesyuk, N.I. (2016) Analytical synthesis of robust controllers of the given accuracy under external perturbations. *Journal of Computer and Systems Sciences Int.* 55(4). pp. 558–569. DOI: 10.1134/S1064230716040109
17. Balandin, D.V., Kogan, M.M., Krivdina, L.N. & Fedyukov, A.A. (2014) Design of Generalized Discrete-time  $H_\infty$ -optimal Control over Finite and Infinite Intervals. *Automation and Remote Control*. 75(1). pp. 1–17. DOI: 10.1134/S0005117914010019

**Information about the author:**

**Parshukov Andrej N.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: anparshukov@mail.ru

**The author declares no conflicts of interests.**

**Информация об авторе:**

**Паршуков Андрей Николаевич** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электроэнергетика» Тюменского индустриального университета (Тюмень, Россия). E-mail: anparshukov@mail.ru

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Received 07.10.2023; accepted for publication 05.03.2024

Поступила в редакцию 07.10.2023; принята к публикации 05.03.2024

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## MATHEMATICAL MODELING

Научная статья

УДК 537.874.6

doi: 10.17223/19988605/66/2

**Моделирование рассеяния электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри диэлектрического эллипсоида****Ольга Михайловна Балашова<sup>1</sup>, Анатолий Григорьевич Дмитренко<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>1</sup> *balashovajkz@mail.ru*<sup>2</sup> *dmitr.tsu.202@mail.ru*

**Аннотация.** Методом вспомогательных источников решена задача рассеяния электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри диэлектрического эллипсоида. Приведены результаты моделирования и исследования зависимости сечений обратного рассеяния от размеров полуосей эллипсоида.

**Ключевые слова:** моделирование; метод вспомогательных источников; рассеяние; электромагнитная волна; идеально проводящий цилиндр; диэлектрический эллипсоид.

**Для цитирования:** Балашова О.М., Дмитренко А.Г. Моделирование рассеяния электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри диэлектрического эллипсоида // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 13–22. doi: 10.17223/19988605/66/2

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/2

**Simulation of scattering of an electromagnetic wave by a thin perfectly conducting cylinder placed within a dielectric ellipsoid****Olga M. Balashova<sup>1</sup>, Anatoly G. Dmitrenko<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia*<sup>1</sup> *balashovajkz@mail.ru*<sup>2</sup> *dmitr.tsu.202@mail.ru*

**Abstract.** By the auxiliary-sources method we solve the problem of scattering of an electromagnetic wave by a thin perfectly conducting cylinder placed within a dielectric ellipsoid. We present the results of modeling and investigation of backscattering cross-section from dimensions of the ellipsoid semi-axes.

**Keywords:** modeling; auxiliary-sources method; scattering; electromagnetic wave; perfectly conducting cylinder; dielectric ellipsoid.

**For citation:** Balashova, O.M., Dmitrenko, A.G. (2024) Simulation of scattering of an electromagnetic wave by a thin perfectly conducting cylinder placed within a dielectric ellipsoid. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 13–22. doi: 10.17223/19988605/66/2

## Введение

Значительный интерес для исследователей представляет изучение рассеяния электромагнитных волн на объектах различной формы и физической природы, размеры которых сравнимы с длиной волны (так называемая «резонансная частотная область»). Этот интерес обусловлен необходимостью решения очень широкого класса практически важных проблем, к которым, в частности, относятся проблема снижения радиолокационной заметности различных объектов, их идентификация, проблема электромагнитной совместимости и т.д.

Одним из наиболее популярных объектов обсуждаемых исследований является тонкий прямолинейный идеально проводящий цилиндр. Под тонким цилиндром обычно подразумевается цилиндр, поперечные размеры которого много меньше его длины и длины падающей волны. Такой цилиндр является хорошей моделью тонкой прямолинейной проволочной антенны. Различным аспектам рассеяния электромагнитных волн на таком цилиндре посвящено очень большое число работ, начиная с работы Г. Поклингтона [1]. Хороший обзор этих работ содержится в [2, 3]. И даже последние два десятилетия эта тема продолжает привлекать внимание исследователей (см., напр.: [4–6]).

Однако нередко встречаются ситуации, когда приемная или передающая тонкая проволочная антенна в целях маскировки или защиты от внешних воздействий размещена под защитным колпаком, который может представлять собой однородное диэлектрическое тело. В связи с этим представляет интерес исследование характеристик рассеяния тонкого идеально проводящего цилиндра, который моделирует тонкую антенну, когда он размещен внутри диэлектрического тела. В доступной авторам литературе не найдены работы, посвященные данному вопросу. Однако объединение основных идей предложенных ранее одним из авторов статьи вариантов метода вспомогательных источников для решения задач электромагнитного рассеяния на диэлектрических телах [7, 8] и тонких идеальных проводниках [9, 10] позволяет решить задачу рассеяния на тонком идеальном проводнике, когда последний расположен внутри диэлектрического тела. В данной статье представлено решение этой задачи, приведены результаты исследования зависимости сечений обратного рассеяния от размеров полуосей эллипсоида.

## 1. Формулировка задачи

Геометрия задачи показана на рис. 1. В безграничной однородной изотропной среде  $D_e$  с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_e$  и  $\mu_e$  в декартовой системе координат  $Oxuz$  расположен диэлектрический эллипсоид  $D_i$  с проницаемостями  $\epsilon_i$ ,  $\mu_i$  ограниченный гладкой поверхностью  $S$ . Полуоси эллипсоида  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ориентированы соответственно вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  системы координат. Внутри эллипсоида размещен идеально проводящий цилиндр длиной  $l$  и радиусом  $r$ , ограниченный поверхностью  $S_p$ . Предполагается, что поверхности  $S$  и  $S_p$  не пересекаются, а параметры цилиндра удовлетворяют условиям тонкого цилиндра:  $2r \ll \lambda$ ,  $2r \ll l$ , где  $\lambda$  – длина падающей на рассматриваемую структуру волны. Структура возбуждается стационарным электромагнитным полем  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ , зависимость которого от времени  $t$  выбрана в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Требуется найти рассеянное поле  $\vec{E}_e, \vec{H}_e$  в области  $D_e$ .

Кроме поля  $\vec{E}_e, \vec{H}_e$  в  $D_e$ , внутри диэлектрического тела существует поле  $\vec{E}_i, \vec{H}_i$ , которое также является неизвестным. Поля  $\vec{E}_e, \vec{H}_e$  и  $\vec{E}_i, \vec{H}_i$  должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$[\nabla, \vec{E}_e] = i\omega\mu_e \vec{H}_e, \quad [\nabla, \vec{H}_e] = -i\omega\epsilon_e \vec{E}_e \quad (1)$$

в области  $D_e$ ,

$$[\nabla, \vec{E}_i] = i\omega\mu_i \vec{H}_i, \quad [\nabla, \vec{H}_i] = -i\omega\epsilon_i \vec{E}_i \quad (2)$$

в области  $D_i$  и граничным условиям

$$[\vec{n}, \vec{E}_i - \vec{E}_e] = [\vec{n}, \vec{E}_0], [\vec{n}, \vec{H}_i - \vec{H}_e] = [\vec{n}, \vec{H}_0] \quad (3)$$

на поверхности  $S$ ,

$$[\vec{n}_p, \vec{E}_i] = 0 \quad (4)$$

на поверхности идеально проводящего цилиндра. Кроме того, поле  $\vec{E}_e, \vec{H}_e$  в области  $D_e$  должно удовлетворять условиям излучения

$$[\sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e, \vec{R}/R] + \sqrt{\mu_e} \vec{H}_e = O(R^{-1}), [\sqrt{\mu_e} \vec{H}_e, \vec{R}/R] - \sqrt{\epsilon_e} \vec{E}_e = O(R^{-1}), R \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В выражениях (1)–(5)  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности диэлектрического тела  $S$ ;  $\vec{n}_p$  – единичный вектор нормали к поверхности идеально проводящего цилиндра  $S_p$ ;  $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ;  $[\vec{a}; \vec{b}]$  – векторное произведение.

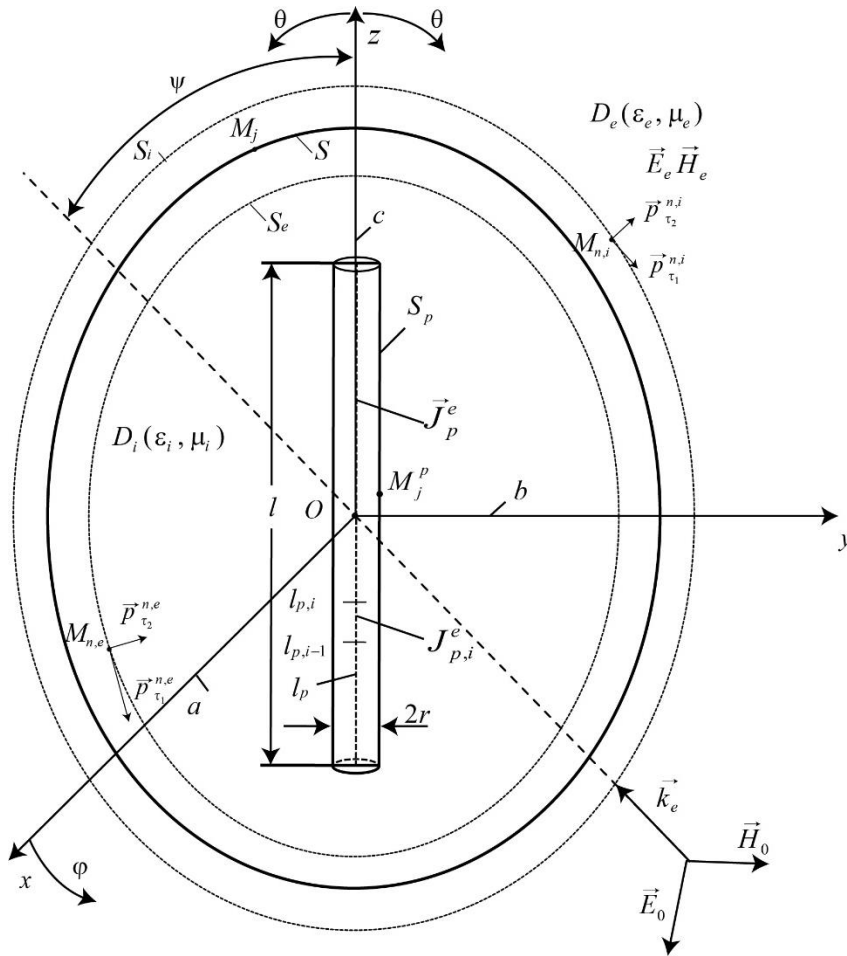


Рис. 1. Геометрия задачи  
Fig. 1. Geometry of the problem

## 2. Модель рассеянного поля и определение неизвестных параметров модели

Введем внутри диэлектрического эллипсоида вспомогательный эллипсоид  $S_e$  с полуосями  $a_e = K_e a$ ,  $b_e = K_e b$ ,  $c_e = K_e c$ , где параметр  $K_e$  (коэффициент подобия) характеризует удаление вспомогательного эллипсоида  $S_e$  от поверхности  $S$ , его значения лежат в интервале от 0 до 1 (см. рис. 1). При  $K_e = 0$  вспомогательный эллипсоид стягивается в точку, при  $K_e = 1$  он совпадает с поверхностью  $S$ .

Выберем на вспомогательном эллипсоиде  $S_e$  конечную совокупность точек  $\{M_{n,e}\}_{n=1}^{N_e}$ . В каждой точке  $M_{n,e}$  разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами  $\vec{p}_{\tau_1}^{n,e} = p_{\tau_1}^{n,e} \vec{e}_{\tau_1}^{n,e}$  и  $\vec{p}_{\tau_2}^{n,e} = p_{\tau_2}^{n,e} \vec{e}_{\tau_2}^{n,e}$ , ориентированными вдоль направлений единичных векторов  $\vec{e}_{\tau_1}^{n,e}$ ,  $\vec{e}_{\tau_2}^{n,e}$ , лежащих в плоскости, касательной к  $S_e$  в точке  $M_{n,e}$ , и излучающих в однородную среду с параметрами  $\varepsilon_e$  и  $\mu_e$ .

Внутри тонкого проводника на его оси разместим непрерывно распределенный вспомогательный электрический ток  $\vec{J}_p^e$ .

Представим неизвестное рассеянное поле  $\vec{E}_e, \vec{H}_e$  во внешней среде  $D_e$  в виде суммы полей вспомогательных диполей, расположенных на вспомогательном эллипсоиде  $S_e$ , и тока  $\vec{J}_p^e$ :

$$\begin{aligned}\vec{E}_e(M) &= \frac{i}{\omega \varepsilon_e} \sum_{n=1}^{N_e} [\nabla, [\nabla, \vec{\Pi}_{n,e}]] + \frac{i}{\omega \varepsilon_e} [\nabla, [\nabla, \vec{\Pi}_e]], \\ \vec{H}_e(M) &= \sum_{n=1}^{N_e} [\nabla, \vec{\Pi}_{n,e}] + [\nabla, \vec{\Pi}_e],\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}_{n,e} &= \Psi_e(M, M_{n,e}) \vec{p}_{\tau}^{n,e}, \Psi_e(M, M_{n,e}) = \exp(ik_e R_{MM_{n,e}}) / 4\pi R_{MM_{n,e}}, \vec{p}_{\tau}^{n,e} = p_{\tau_1}^{n,e} \vec{e}_{\tau_1}^{n,e} + p_{\tau_2}^{n,e} \vec{e}_{\tau_2}^{n,e}, \\ \vec{\Pi}_e &= \int_{l_p} \Psi_e(M, M') \vec{J}_p^e(M') dl_p, \Psi_e(M, M') = \exp(ik_e R_{MM'}) / 4\pi R_{MM'}, M \in D_e.\end{aligned}$$

В выражениях (6)  $k_e = \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$  – волновое число в среде  $D_e$ ;  $R_{MM_{n,e}}$  – расстояние от точки  $M_{n,e}$  на вспомогательном эллипсоиде  $S_e$  до точки наблюдения  $M$  в  $D_e$ ;  $R_{MM'}$  – расстояние от точки  $M'$  на оси идеально проводящего цилиндра до той же точки наблюдения  $M$  в  $D_e$ ;  $p_{\tau_1}^{n,e}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,e}$  ( $n=1,2,\dots,N_e$ ) – неизвестные дипольные моменты,  $N_e$  – число точек размещения диполей на  $S_e$ ;  $\vec{J}_p^e$  – неизвестный осевой вспомогательный ток; интегрирование в выражении для  $\vec{\Pi}_e$  проводится вдоль оси проводника  $l_p$ .

Для представления электромагнитного поля  $\vec{E}_i, \vec{H}_i$  внутри диэлектрического эллипсоида введем вспомогательную поверхность  $S_i$ , охватывающую этот эллипсоид. Вспомогательная поверхность  $S_i$  также выбирается в форме эллипсоида, но с полуосями  $a_i = K_i a$ ,  $b_i = K_i b$ ,  $c_i = K_i c$ , где коэффициент подобия  $K_i > 1$ . Выберем на вспомогательной поверхности  $S_i$  конечную совокупность точек  $\{M_{n,i}\}_{n=1}^{N_i}$ , в каждой из которых разместим пару независимых вспомогательных элементарных электрических диполей с моментами  $\vec{p}_{\tau_1}^{n,i} = p_{\tau_1}^{n,i} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i}$ ,  $\vec{p}_{\tau_2}^{n,i} = p_{\tau_2}^{n,i} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i}$ . Единичные векторы  $\vec{e}_{\tau_1}^{n,i}$  и  $\vec{e}_{\tau_2}^{n,i}$  выбраны лежащими в плоскости, касательной к поверхности  $S_i$  в точке  $M_{n,i}$ . Предполагается, что диполи, размещенные на  $S_i$ , излучают в однородную среду с параметрами  $\varepsilon_i, \mu_i$ .

Представим неизвестное поле  $\vec{E}_i, \vec{H}_i$  внутри диэлектрического эллипсоида в виде суммы полей введенных вспомогательных диполей:

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(M) &= \frac{i}{\omega \varepsilon_i} \sum_{n=1}^{N_i} [\nabla, [\nabla, \vec{\Pi}_{n,i}]], \quad \vec{H}_i(M) = \sum_{n=1}^{N_i} [\nabla, \vec{\Pi}_{n,i}], \\ \vec{\Pi}_{n,i} &= \Psi_i(M, M_{n,i}) \vec{p}_{\tau}^{n,i}, \Psi_i(M, M_{n,i}) = \exp(ik_i R_{MM_{n,i}}) / 4\pi R_{MM_{n,i}}, \vec{p}_{\tau}^{n,i} = p_{\tau_1}^{n,i} \vec{e}_{\tau_1}^{n,i} + p_{\tau_2}^{n,i} \vec{e}_{\tau_2}^{n,i}, M \in D_i.\end{aligned}\quad (7)$$

В (7)  $k_i = \omega \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$  – волновое число в среде  $D_i$ ;  $R_{MM_{n,i}}$  – расстояние от точки  $M_{n,i}$  на вспомогательной поверхности  $S_i$  до точки  $M$  в  $D_i$ ;  $p_{\tau_1}^{n,i}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i}$  ( $n=1,2,\dots,N_i$ ) – неизвестные дипольные моменты,  $N_i$  – число точек размещения диполей на  $S_i$ .



Представления для полей (6), (7) удовлетворяют уравнениям Максвелла (1), (2). Кроме того, поле (6) удовлетворяет условиям излучения (5). Чтобы удовлетворить граничным условиям (3), (4), необходимо соответствующим образом выбрать пока неизвестные значения дипольных моментов  $p_{\tau_1}^{n,e}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,e}$  ( $n=1,2,\dots,N_e$ ) и  $p_{\tau_1}^{n,i}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i}$  ( $n=1,2,\dots,N_i$ ), а также распределение осевого тока  $\vec{J}_p^e$ .

Введем кусочно-постоянную аппроксимацию вспомогательного осевого тока  $\vec{J}_p^e$ . Разобьем осевую линию идеально проводящего цилиндра на малые участки, в пределах которых ток можно считать постоянным. Постоянные токи внутри таких участков будем называть элементами токов. Пусть  $N_p$  – число участков разбиения осевой линии. Тогда выражение для вектора  $\vec{\Pi}_e$  в (6) приближенно можно записать в виде:

$$\vec{\Pi}_e = \vec{e}_p \sum_{i=1}^{N_p} J_{p,i}^e \int_{l_{p,i-1}}^{l_{p,i}} \Psi_e(M, M') dl_p, \quad (8)$$

где  $J_{p,i}^e$  – элемент тока на  $i$ -м участке осевой линии;  $\vec{e}_p$  – единичный вектор, направленный вдоль оси цилиндра;  $M'$  – точка, принадлежащая отрезку  $[l_{p,i-1}, l_{p,i}]$  осевой линии. При таком подходе нахождение неизвестного распределения осевого тока сводится к нахождению значений  $N_p$  элементов тока.

Для определения значений дипольных моментов и элементов тока используем граничные условия (3), (4), удовлетворяя им в соответствии с методом коллокаций. Пусть  $M_j$  – точки коллокации на поверхности  $S$  диэлектрического эллипсоида, а число этих точек равно  $L$  ( $j=1,\dots,L$ ); пусть  $M_j^p$  – точки коллокации на поверхности  $S_p$  идеально проводящего цилиндра, а число этих точек равно  $L_p$  ( $j=1,\dots,L_p$ ). Тогда для нахождения неизвестных дипольных моментов  $p_{\tau_1}^{n,e}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,e}$  ( $n=1,2,\dots,N_e$ ),  $p_{\tau_1}^{n,i}$ ,  $p_{\tau_2}^{n,i}$  ( $n=1,2,\dots,N_i$ ) и элементов токов  $J_{p,i}^e$  ( $i=1, \dots, N_p$ ), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} [\vec{n}^j, \vec{E}_i^j - \vec{E}_e^j] &= [\vec{n}^j, \vec{E}_0^j], \quad [\vec{n}^j, \vec{H}_i^j - \vec{H}_e^j] = [\vec{n}^j, \vec{H}_0^j], \quad j = 1, \dots, L, \\ [\vec{n}_p^j, \vec{E}_i^{p,j}] &= 0, \quad j = 1, \dots, L_p, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\vec{n}^j$  – единичный вектор нормали в точке коллокации  $M_j$  на поверхности  $S$  диэлектрического эллипсоида;  $\vec{n}_p^j$  – единичный вектор нормали в точке коллокации  $M_j^p$  на поверхности идеально проводящего цилиндра;  $\vec{E}_i^j$ ,  $\vec{H}_i^j$  и  $\vec{E}_e^j$ ,  $\vec{H}_e^j$  – компоненты внутреннего и внешнего полей в точке коллокации  $M_j$ ;  $\vec{E}_i^{p,j}$  – вектор напряжённости внутреннего электрического поля в точке коллокации  $M_j^p$  на поверхности цилиндра;  $\vec{E}_0^j$  и  $\vec{H}_0^j$  – компоненты возбуждающего поля в точке  $M_j$ .

После решения системы (9) необходимые характеристики рассеянного поля определяются из выражений (6). В частности, для компонент рассеянного поля в дальней зоне получаем

$$\begin{aligned} E_{e,\theta}(M) &= \sqrt{\frac{\mu_e}{\epsilon_e}} H_{e,\varphi}(M) = \frac{e^{ik_e R}}{k_e R} D_\theta(\theta, \varphi) + O(R^{-2}), \\ E_{e,\varphi}(M) &= -\sqrt{\frac{\mu_e}{\epsilon_e}} H_{e,\theta}(M) = \frac{e^{ik_e R}}{k_e R} D_\varphi(\theta, \varphi) + O(R^{-2}), \end{aligned} \quad (10)$$

где компоненты диаграммы рассеяния  $D_\theta(\theta, \varphi)$  и  $D_\varphi(\theta, \varphi)$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} D_\theta(\theta, \varphi) &= \frac{i\omega k_e \mu_e}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_e} G_{n,e}(\theta, \varphi) \left\{ (\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_1^{n,e} + \cos \theta \sin \varphi \cos \beta_1^{n,e} - \sin \theta \cos \gamma_1^{n,e}) p_{\tau_1}^{n,e} + \right. \\ &\quad \left. + (\cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_2^{n,e} + \cos \theta \sin \varphi \cos \beta_2^{n,e} - \sin \theta \cos \gamma_2^{n,e}) p_{\tau_2}^{n,e} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i\omega\mu_e}{4\pi} (\cos\theta \cos\varphi \cos\alpha_p + \cos\theta \sin\varphi \cos\beta_p - \sin\theta \cos\gamma_p) \times \\
 & \times \sum_{i=1}^{N_p} J_{p,i}^e \int_{l_{p,i-1}}^{l_{p,i}} \exp[-ik_e(x'_p \sin\theta \cos\varphi + y'_p \sin\theta \sin\varphi + z'_p \cos\theta)] dl_p, \\
 D_\varphi(\theta, \varphi) = & \frac{i\omega k_e \mu_e}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_e} G_{n,e}(\theta, \varphi) \left\{ (-\sin\varphi \cos\alpha_1^{n,e} + \cos\varphi \cos\beta_1^{n,e}) p_{\tau_1}^{n,e} + (-\sin\varphi \cos\alpha_2^{n,e} + \cos\varphi \cos\beta_2^{n,e}) p_{\tau_2}^{n,e} \right\} + \\
 & + \frac{i\omega\mu_e}{4\pi} (-\sin\varphi \cos\alpha_p + \cos\varphi \cos\beta_p) \sum_{i=1}^{N_p} J_{p,i}^e \int_{l_{p,i-1}}^{l_{p,i}} \exp[-ik_e(x'_p \sin\theta \cos\varphi + y'_p \sin\theta \sin\varphi + z'_p \cos\theta)] dl_p, \\
 G_{n,e}(\theta, \varphi) = & \exp[-ik_e(x_{n,e} \sin\theta \cos\varphi + y_{n,e} \sin\theta \sin\varphi + z_{n,e} \cos\theta)] \quad (11)
 \end{aligned}$$

В выражениях (11)  $\cos\alpha_1^{n,e}, \cos\beta_1^{n,e}, \cos\gamma_1^{n,e}$  и  $\cos\alpha_2^{n,e}, \cos\beta_2^{n,e}, \cos\gamma_2^{n,e}$  – направляющие косинусы единичных векторов  $\vec{e}_{\tau_1}^{n,e}$  и  $\vec{e}_{\tau_2}^{n,e}$ ;  $x_{n,e}, y_{n,e}, z_{n,e}$  – декартовы координаты точки  $M_{n,e}$ ;  $\cos\alpha_p, \cos\beta_p, \cos\gamma_p$  – направляющие косинусы осевой линии идеально проводящего цилиндра;  $x'_p, y'_p, z'_p$  – декартовы координаты текущей точки интегрирования внутри  $i$ -го участка идеально проводящего цилиндра;  $R, \theta, \varphi$  – сферические координаты точки наблюдения  $M$ .

Контроль точности решения осуществляем путем вычисления относительной нормы невязки граничных условий (3), (4) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации:

$$\Delta = \sqrt{\Phi'/\Phi_0}, \Phi_0 = \sum_{j=1}^{L'} \left\{ \left[ \vec{n}^j, \vec{E}_0^j \right]^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} \left[ \vec{n}^j, \vec{H}_0^j \right]^2 \right\}, \quad (12)$$

где  $\Phi'$  – значение нормы невязки граничных условий (3), (4) на указанной выше совокупности точек,  $\Phi_0$  – значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек;  $L'$  – число промежуточных точек.

### 3. Результаты моделирования

На основании изложенного выше подхода была создана программа для расчета компонент рассеянного поля и контроля точности полученного решения. Предполагалось, что идеально проводящий цилиндр ориентирован вдоль оси  $z$  и центр его осевой линии совпадает с началом системы координат. Входными величинами программы являются значения полуосей эллипсоида в длинах волн возбуждающего поля, относительные значения  $\varepsilon'_i = \varepsilon_i / \varepsilon_e$  и  $\mu'_i = \mu_i / \mu_e$  диэлектрической и магнитной проницаемости эллипсоида, длина и радиус цилиндра в длинах волн, параметры подобия  $K_e$  и  $K_i$ , числа точек размещения диполей  $N_e, N_i$  и точек коллокации  $L$  и  $L_p$  для диэлектрического эллипсоида и цилиндра, а также число участков  $N_p$  разбиения осевой линии идеально проводящего цилиндра. Предполагается также, что возбуждающее структуру поле выбрано в виде линейно поляризованной плоской волны, падающей на структуру таким образом, что векторы  $\vec{k}_e$  и  $\vec{E}_0$  расположены в плоскости  $xOz$ , при этом вектор  $\vec{k}_e$  образует с осью  $z$  угол  $\psi$ , называемый углом падения плоской волны.

Система (9) решается итерационным методом сопряженных градиентов; итерационный процесс останавливается, если относительное изменение невязки системы на каждой из десяти последних итераций не превышает  $10^{-4}$ .

Разработанная программа была использована для расчета характеристик рассеяния ряда конкретных структур. Под характеристиками рассеяния понимаются компоненты рассеянного поля (10), (11), бистатистические сечения рассеяния

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ 4\pi R^2 \left[ |E_{e,\theta}(\theta, \varphi)|^2 + |E_{e,\varphi}(\theta, \varphi)|^2 \right] / |\vec{E}_0|^2 \right\}, \quad (13)$$

а также сечения обратного рассеяния.

Рисунок 2 представляет результаты тестирования предложенного метода решения задачи и разработанной программы. Для тестирования использовалось то обстоятельство, что при падении плоской волны вдоль оси  $z$  ( $\psi = 0$ ), когда вектор  $\vec{E}_0$  падающей волны ортогонален оси цилиндра, последний не возбуждается, и если при этом диэлектрическое тело является шаром ( $k_e a = k_e b = k_e c$ ), то получаемые при таких условиях бистатистические сечения рассеяния должны быть близки сечениям рассеяния, которые дает известное строгое решение соответствующей задачи рассеяния на однородном шаре. На рис. 2 кривая 1 – это бистатистические сечения рассеяния шара с безразмерными параметрами  $k_e a = k_e b = k_e c = 3$ ,  $\varepsilon'_i = 4$ ,  $\mu'_i = 1$ , полученные с использованием строгого решения; кривая 2 – соответствующие результаты, полученные нами для структуры, в которой диэлектрическое тело является шаром с такими же параметрами, а идеально проводящий цилиндр имеет безразмерную длину  $k_e l = 4,712$  ( $l = 0,75\lambda$ ) и безразмерный радиус  $k_e r = 0,1$  ( $r = 0,016\lambda$ ). Результаты представлены в  $E$ -плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{E}_0$  и  $\vec{k}_e$  возбуждающей волны; в сферической системе координат эта плоскость состоит из двух полуплоскостей  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 180^\circ$ . По оси абсцисс отложен угол  $\theta$  в градусах (угол  $\theta$  отсчитывается от положительного направления оси  $z$ ), по оси ординат – сечение рассеяния (13), нормированное на квадрат длины волны и выраженное в децибелах. Поскольку кривые симметричны относительно оси  $z$ , они представлены только в одной из полуплоскостей.

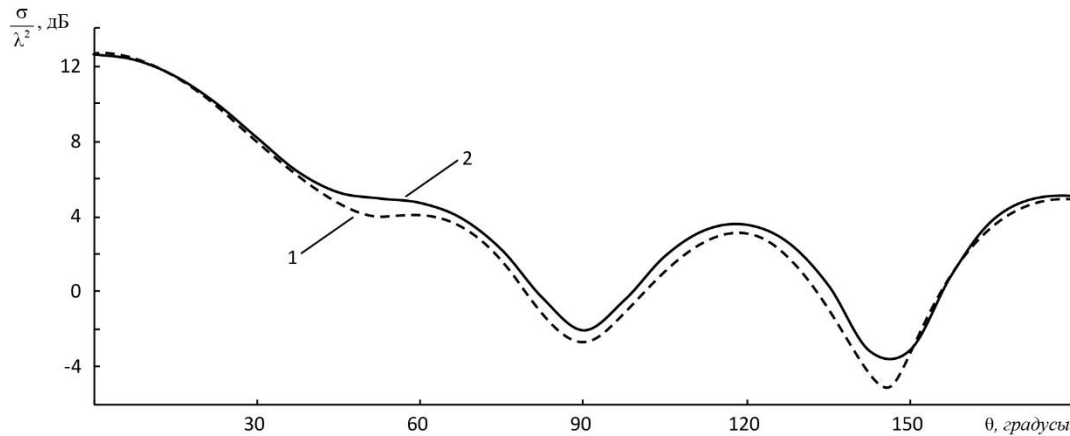


Рис. 2. Бистатистические сечения рассеяния в  $E$ -плоскости диэлектрического шара и структуры, состоящей из такого же шара и идеально проводящего цилиндра при падении плоской волны вдоль его оси. Кривая 1 – результаты для шара, полученные на основе строгого решения, кривая 2 – результаты для структуры, полученные предлагаемым методом

Fig. 2. Bistatic scattering cross sections in  $E$ -plane for dielectric sphere and structure consisting of same sphere and perfectly conducting cylinder if the plane wave propagates along its axis. Curve 1 shows the results for the sphere obtained from exact solution, curve 2 shows the results for the structure obtained from proposed method

Кривая 2 отвечает следующим параметрам. Для диэлектрического шара коэффициенты подобия  $K_e = 0,6$ ;  $K_i = 4$ , числа  $N_e = N_i = 400$ ,  $L = 800$ . На внутренней и внешней вспомогательных поверхностях алгоритм размещения вспомогательных диполей одинаков: в каждой из двадцати полуплоскостей  $\varphi = \text{const}$ , отстоящих одна от другой на угловое расстояние  $\Delta\varphi = 18^\circ$ , равномерно по углу  $\theta$  выбрано 20 точек размещения диполей. Для точек коллокации на поверхности шара алгоритм их расположения по углу  $\theta$  выбран таким же, как и для точек размещения диполей, но они выбраны как в полуплоскостях  $\varphi = \text{const}$ , в которых размещены диполи, так и посередине между полуплоскостями. Для идеально проводящего цилиндра осевая линия разбита на тридцать участков, т.е.  $N_p = 30$ . Точки коллокации на поверхности цилиндра размещены в поперечных сечениях  $z = \text{const}$ . Эти сечения проведены посередине каждого из участков разбиения осевой линии, и в каждом таком сечении расположено четыре точки коллокации равномерно по азимутальному углу. При таком выборе точек коллокации их число оказывается жестко связанным с числом участков разбиения осевой линии:  $L_p = 4N_p$ .

Как видно из рис. 2, различия между кривыми 1 и 2 очень малы. Эти различия можно объяснить наличием некоторых ошибок при получении кривых 1 и 2. Близость полученных нами сечений рассеяния к сечениям рассеяния, получаемым на основе строгого решения, говорит как о правильности самого метода решения задачи, так и о правильности выбора параметров метода и работы компьютерной программы.

На рис. 3 и 4 представлены некоторые результаты, иллюстрирующие зависимость сечения обратного рассеяния от размеров полуосей эллипсоида при различных углах падения плоской волны  $\psi$ . Исходной формой выбрана форма шара, для которого  $k_e a = k_e b = k_e c = 3$ . Далее величина полуоси  $k_e c$  предполагалась неизменной, а величины полуосей  $k_e a$  и  $k_e b$  менялись по правилу  $k_e a = k_e b = k_e c - \Delta$ , т.е. шар был превращен в сфероид, размеры полуосей которого  $k_e a$  и  $k_e b$  постепенно уменьшались. На рис. 3 и 4 по оси абсцисс отложено значение параметра  $\Delta$ , по оси ординат – значение сечения обратного рассеяния, нормированное на квадрат длины волны и выраженное в децибелах.

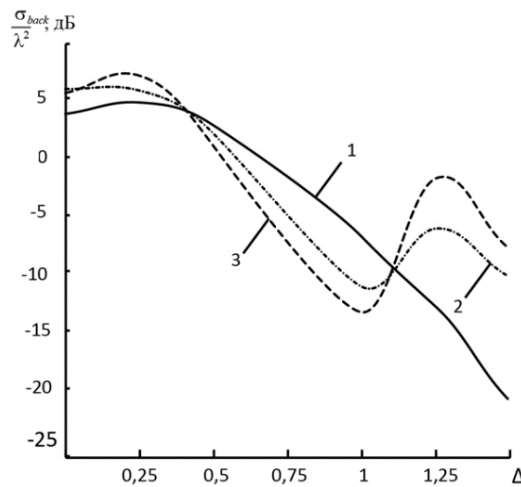


Рис. 3. Зависимость сечения обратного рассеяния от размеров полуосей эллипсоида с проницаемостью  $\varepsilon'_i = 4$  при различных углах  $\psi$  падения плоской волны. Кривая 1 соответствует  $\psi = 45^\circ$ ; кривая 2 –  $\psi = 60^\circ$ ; кривая 3 –  $\psi = 90^\circ$

Fig. 3. Dependence of the backscattering cross section on the dimensions of semi-axes of the ellipsoid with relative dielectric permittivity  $\varepsilon'_i = 4$  for various angles  $\psi$  of the incidence of the plane wave. Curve 1 corresponds to  $\psi = 45^\circ$ ; curve 2 corresponds to  $\psi = 60^\circ$ ; curve 3 corresponds to  $\psi = 90^\circ$

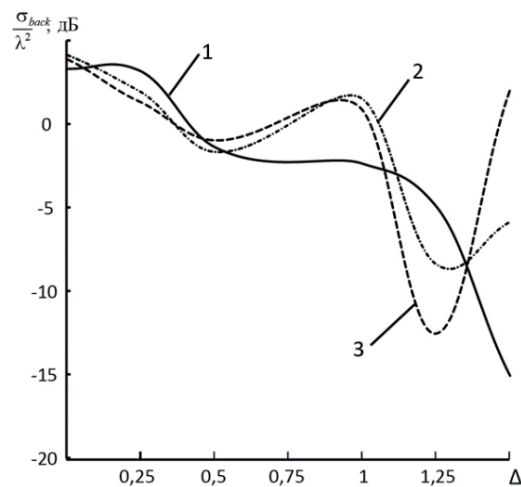


Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но когда эллипсоид характеризуется проницаемостью  $\varepsilon'_i = 10$   
Fig.4. The same as in Figure 3, but for the case where the relative dielectric permittivity of the ellipsoid  $\varepsilon'_i = 10$

Рисунок 3 относится к случаю, когда относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon'_i$  диэлектрического тела равна 4 и безразмерная длина  $k_e l$  идеально проводящего цилиндра равна 4,712 ( $l = 0,75\lambda$ ), а рис. 4 – к случаю, когда  $\epsilon'_i = 10$ , а  $k_e l$  по-прежнему равна 4,712. Кривые 1 на этих рисунках соответствуют углу падения  $\psi$ , равному  $45^\circ$ , кривые 2 – углу падения  $\psi = 60^\circ$ , кривая 3 – углу падения  $\psi = 90^\circ$ . При получении этих результатов параметры метода выбраны такими же, как при получении кривой, показанной на рис. 2.

Анализ результатов, представленных на рис. 3 и 4, позволяет сделать следующие выводы. Зависимость сечения обратного рассеяния от размеров полуосей эллипсоида зависит от угла  $\psi$  падения на рассматриваемую структуру плоской волны. Несмотря на это, при всех рассмотренных углах падения  $\psi$  плоской волны изменением полуосей эллипсоида можно существенно уменьшить сечение обратного рассеяния. Например, как показывает рис. 3, при относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon'_i$  сфероида, равной 4, и длине идеально проводящего цилиндра  $k_e l$ , равной 4,712, выбирая полуоси сфероида  $k_e a$  и  $k_e b$ , равными 2, можно уменьшить сечение обратного рассеяния более чем на 10 дБ, по сравнению со случаем, когда диэлектрическое тело является шаром с параметрами  $k_e a = k_e b = k_e c = 3$ .

### Заключение

Таким образом, в данной работе методом вспомогательных источников решена задача рассеяния электромагнитной волны на тонком идеально проводящем цилиндре, расположенном внутри однородного диэлектрического эллипсоида. Кратко описана разработанная компьютерная программа. Приведены результаты исследования зависимости сечений обратного рассеяния от размеров полуосей эллипсоида при различных углах падения плоской волны.

### Список источников

1. Pocklington H.C. Electrical oscillations in wires // *Proceedings Cambridge Philos. Soc.* 1897. V. 9. P. 324–337.
2. Brill D., Gaunard G.C., Huang H., Strifors H.C. Electromagnetic scattering from finite-length cylinders and rods // *Proc. SPIE's 1995 Symposium on OE/Aerospace Sensing and Dual Use Photonics*, 1995, Orlando, FL, United States. 1995. V. 2485. P. 187–196. doi: 10.1117/12.213083
3. Tijhuis A.G., Zhongqui P., Bretones A.R. Transient excitation of a straight thin wire segment // *IEEE Trans. Antennas Propag.* 1992. V. 40. P. 1132–1146.
4. Ross R.A. Forward scattering from a finite, circular cylinder // *Prog. Electromagn. Res. C.* 2008. V. 2. P. 207–215.
5. Hatamzadeh-Varmazyar S., Naser-Moghadasi M. New numerical method for determining the scattered electromagnetic fields from thin wires // *Prog. Electromagn. Res. B.* 2008. V. 3. P. 207–218. doi: 10.2528/PIERB07121303
6. Gu Xian-Ming, Huang Ting-Zhu, Zhao Xi-Le, Li Hou-Biao, Li Liang. Fast iterative solvers for numerical simulations of scattering and radiation on thin wires // *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*. 2015. V. 29 (10). P. 1281–1296. doi: 10.1080/09205071.2015. 1042559
7. Дмитренко А.Г., Мукомолов А.И. Численный метод решения задач электромагнитного рассеяния на трехмерном магнитодиэлектрическом теле произвольной формы // *Радиотехника и электроника*. 1995. Т. 40, № 6. С. 875–880.
8. Дмитренко А.Г., Уринов Р.И. Моделирование электромагнитного рассеяния на структуре, состоящей из импедансного и магнитодиэлектрического тел // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2015. № 1 (29). С. 11–20.
9. Дмитренко А.Г., Колчин В.А. Рассеяние электромагнитных волн на структурах, содержащих тонкие проводники // *Известия вузов. Радиофизика*. 2003. Т. 46, № 1. С. 31–40.
10. Дмитренко А.Г., Балашова О.М. Моделирование электромагнитного рассеяния на тонких параллельных идеально проводящем и диэлектрическом цилиндрах // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020. № 51. С. 35–44. doi: 10.17223/19988605/51/4

### References

1. Pocklington, H.C. (1897) Electrical oscillations in wires. *Proceedings Cambridge Philos. Soc.* 9. pp. 324–337.
2. Brill, D., Gaunard G.C., Huang, H. & Strifors, H.C. (1995) Electromagnetic scattering from finite-length cylinders and rods. *Proc. SPIE's 1995 Symposium on OE/Aerospace Sensing and Dual Use Photonics*. 2485. pp. 187–196. DOI: 10. 1117/12.213083

3. Tijhuis, A.G., Zhongqui, P. & Bretones, A.R. (1992) Transient excitation of a straight thin wire segment. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 40. pp. 1132–1146.
4. Ross, R.A. (2008) Forward scattering from a finite, circular cylinder. *Progress In Electromagnetics Research. C.* 2. pp. 207–215.
5. Hatamzadeh-Varmazyar, S. & Naser-Moghadasi, M. (2008) New numerical method for determining the scattered electromagnetic fields from thin wires. *Progress In Electromagnetics Research. B* 3. pp. 207–218. DOI: 10.2528/PIERB07121303
6. Gu Xian-Ming, Huang Ting-Zhu, Zhao Xi-Le, Li Hou-Biao & Li Liang. (2015) Fast iterative solvers for numerical simulations of scattering and radiation on thin wires. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications.* 29(10). pp. 1281–1296. DOI: 10.1080/09205071.2015.1042559
7. Dmitrenko, A.G. & Mukomolov, A.I. (1995) Chislennyy metod resheniya zadach elektromagnitnogo rasseyaniya na trekhmernom magnetodielektricheskom tele proizvol'noy formy [Numerical method for solution of electromagnetic scattering for three-dimensional arbitrarily shape magnetodielectric body]. *Radiotekhnika i elektronika.* 40(6). pp. 875–880.
8. Dmitrenko, A.G. & Urinov, R.I. (2015) Simulation of electromagnetic scattering by a structure consisting of an impedance and a magnetodielectric bodies. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 1(29). pp. 11–20.
9. Dmitrenko, A.G. & Kolchin, V.A. (2003) Rasseyanie elektromagnitnykh voln na strukturakh, soderzhashchikh tonkie provodniki [Scattering of electromagnetic waves by structures comprising thin wires]. *Izvestiya vuzov. Radiofizika.* 46(1). pp. 31–40.
10. Dmitrenko, A.G. & Balashova, O.M. (2020) Simulation of electromagnetic scattering by thin parallel perfectly conducting and dielectric cylinders. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science.* 51. pp. 35–44. DOI: 10.17223/19988605/51/4

**Информация об авторах:**

**Балашова Ольга Михайловна** – аспирант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: balashovajkz@mail.ru

**Дмитренко Анатолий Григорьевич** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dmitr.tsu.202@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Balashova Olga M.** (Post-graduate Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: balashovajkz@mail.ru

**Dmitrenko Anatoly G.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitr.tsu.202@mail.ru

**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.**

Поступила в редакцию 19.11.2023; принята к публикации 05.03.2024

Received 19.11.2023; accepted for publication 05.03.2024

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

## DATA PROCESSING

Научная статья

УДК 004.95

doi: 10.17223/19988605/66/3

**Подход к динамической визуализации больших объемов  
пространственной информации на основе  
геостатистического анализа**

**Андрей Владимирович Воробьев<sup>1</sup>, Гульнара Равилевна Воробьева<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Геофизический центр Российской академии наук, Москва, Россия*

<sup>1,2</sup> *Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия*

<sup>1</sup> *geomagnet@list.ru*

<sup>2</sup> *gulnara.vorobeveva@gmail.com*

**Аннотация.** Рассматривается задача визуализации пространственных данных в двух- и трехмерном режиме при работе с высоконагруженными веб-приложениями. Предлагается подход, основанный на предварительном анализе статистической однородности и пространственной анизотропии соответствующих опорных точек. Результаты предварительной обработки являются основой для подбора алгоритма визуализации, обеспечивающего наилучшую производительность на клиентской стороне веб-приложения с учетом времени отклика для получения большого набора данных с серверной стороны. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие эффективность предложенного метода на примере исследовательского прототипа веб-приложения по визуализации геофизической информации.

**Ключевые слова:** пространственные данные; геоинформационные системы; геопрограммная визуализация; геостатистический анализ; пространственная анизотропия.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 21-77-30010.

**Для цитирования:** Воробьев А.В., Воробьева Г.Р. Подход к динамической визуализации больших объемов пространственной информации на основе геостатистического анализа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 23–35. doi: 10.17223/19988605/66/3

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/3

**Approach to dynamic visualization of large volumes of spatial information  
based on geostatistical analysis**

**Andrei V. Vorobev<sup>1</sup>, Gulnara R. Vorobeveva<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Geophysical Center of the Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation*

<sup>1,2</sup> *Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation*

<sup>1</sup> *geomagnet@list.ru*

<sup>2</sup> *gulnara.vorobeveva@gmail.com*

**Abstract.** The problem of visualization of spatial data in two- and three-dimensional mode when working with highly loaded web applications is considered. An approach based on a preliminary analysis of the statistical homoge-

neity and spatial anisotropy of the corresponding reference points is proposed. The results of preprocessing are the basis for selecting a visualization algorithm that provides the best performance on the client side of the web application, taking into account the response time to receive a large data set from the server side. The results of computational experiments are presented, confirming the effectiveness of the proposed method on the example of a research prototype of a web application for the visualization of geophysical information.

**Keywords:** spatial data; geoinformation systems; geospatial visualization; geostatistical analysis; spatial anisotropy.

**Acknowledgments:** The research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation № 21-77-30010.

**For citation:** Vorobev, A.V., Vorobeve, G.R. (2024) Approach to dynamic visualization of large volumes of spatial information based on geostatistical analysis. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 23–35. doi: 10.17223/19988605/66/3

## Введение

В настоящее время наряду с непрерывно растущим объемом пространственно-временной информации в различных прикладных областях все более актуальным становится решение задач ее визуальной интерпретации с использованием соответствующих инструментально-программных средств. Результаты такой обработки и визуализации становятся значимым фактором поддержки принятия решения в соответствующих областях и / или при решении конкретных проблем в различных сферах экономики, народного хозяйства, обеспечения техносферной безопасности и пр.

Яркий пример тому – геомагнитная информация, которая в режиме реального времени непрерывно регистрируется неравномерно распределенными по земной поверхности магнитными обсерваториями и вариационными станциями. Геомагнитные данные представляют собой пространственную информацию, которая в общем виде задана парой географических координат (соответствующих магнитной обсерватории / вариационной станции) и атрибутивными параметрами, характеризующими значения компонент вектора магнитного поля Земли и его вариаций [1–3].

Геомагнитная информация используется в различных областях науки и техники как для изучения внутриземных процессов и явлений, так и для принятия решений в стратегически важных отраслях народного хозяйства. Так, к примеру, информация о геомагнитной обстановке активно используется в процессе принятия решения об оптимальном размещении лаборатории по проверке магниточувствительной аппаратуры. При этом требуется оперативно проанализировать огромный объем данных, характеризующий изменение параметров магнитного поля Земли в каждой точке земной поверхности. Назначение систем визуальной интерпретации при этом заключается как минимум в том, чтобы оперативно обеспечить лица, принимающие решения, информацией об актуальных (или нормативных, расчетных) характеристиках геомагнитных данных (так называемая атрибутивная информация) в любой точке земного пространства (помимо географических координат – с учетом такого параметра, как высота над уровнем моря). Если рассматривать минимально возможный шаг в  $1^\circ$  в качестве основы для формирования соответствующей координатной сетки, то это 64 800 значений, которые необходимо одновременно отобразить для достижения поставленной цели при поддержке принятия соответствующих решений.

Немаловажен в данном контексте и тот факт, что заданный шаг не всегда достаточен для того, чтобы сформировать целостную картину на основании имеющихся пространственных данных и принять адекватное решение. Так, к примеру, в случае геомагнитных данных значение шага дискретизации в  $1^\circ$  (по сути составляет не менее 110 км), а на таком расстоянии с учетом выраженной широтной анизотропии соответствующего процесса геомагнитная обстановка может существенно измениться, что негативно скажется, в свою очередь, на принятии решений на основании этой информации. Если при этом сократить шаг координатной сетки, то пропорционально возрастет и объем пространственных данных, которые необходимо обработать и визуализировать, что соразмерно скажется на реактивности программных средств и технологий, предназначенных для решения поставленной задачи.



Следует отметить, что известные на сегодняшний день решения по визуализации геомагнитных данных разработаны целым рядом научных организаций по всему миру (к примеру, среди них можно выделить Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, Национальное управление океанических и атмосферных исследований и др.). В подавляющем большинстве случаев такие решения представлены в виде двумерных изображений, в частности ломаных кривых, карт уровней, полутоновых изображений, топографических карт и т.д., характеризующих пространственно-временное распределение главного геомагнитного поля [1–5].

Картографическое представление пространственно-ориентированного распределения параметров главного геомагнитного поля по поверхности Земли не использует инструментарий современных геоинформационных технологий (геолокация, прямое и обратное геокодирование – определение географических координат объекта по его названию и определение названия объекта по его координатам соответственно, и т.д.) и представляет собой статическую подложку для двумерного изображения геомагнитных данных (например, линий уровня). Формируемые при этом изображения статичны, не имеют географической привязки и плохо масштабируются во времени и пространстве. Кроме того, отсутствует поддержка трехмерного представления данных, что существенно снижает качество и скорость восприятия данных конечным пользователем.

При рассмотрении пространственных данных в целом, без привязки к прикладным областям, проблемы их визуализации становятся очевидными, и основная из них состоит в том, что полноценное описание процесса / явления возможно только при использовании большого объема данных с небольшим шагом дискретизации. Однако решение такой задачи с технической точки зрения требует существенных вычислительных затрат, что зачастую недоступно пользователям на клиентской стороне при работе с браузерами. Приложения теряют отзывчивость или становятся полностью недоступными, что исключает их применение для принятия оперативных решений в различных областях деятельности.

Отметим также, что задачам визуализации пространственных данных в целом и геофизических измерений в частности посвящен ряд работ авторов настоящей статьи. Так, в [6] обсуждаются вопросы, связанные с обеспечением возможности манипулирования разнородными пространственными объектами в их векторном представлении в формате единого пространственного слоя. Рассматриваемая в [6] задача ориентирована на автоматизацию приведения компонент векторного слоя к единому базису для последующего применения соответствующими ГИС-инструментами, например объектом типа TimeSlider, который ориентирован на анимацию переключения исключительно однородных слоев. В этой связи в работе [6] предлагаются математическое обоснование и программная реализация взаимного преобразования основных геопространственных примитивов (точка, полилиния, полигон) для последующего формирования единого однородного пространственного слоя. Как следует из сказанного, полученные в [6] результаты не позволяют решить поставленную в данной работе задачу повышения реактивности пространственной визуализации больших объемов информации.

В настоящей работе рассматривается актуальная научно-техническая задача, заключающаяся в создании новых и модернизации известных решений по пространственной визуализации больших объемов информации, имеющих лучшие эргономические и функциональные характеристики по сравнению с известными аналогами. Одним из очевидных и наиболее перспективных вариантов решения поставленной задачи является применение геоинформационных систем и технологий, которые позволяют представить набор пространственно-временных данных как совокупность программируемых и настраиваемых пространственных объектов различного типа и уровня детализации.

## **1. Подход к локальному пространственно-временному анализу и визуализации данных**

Отдельной задачей пространственно-временного анализа является исследование распределения атрибутивных параметров в некотором пространственном регионе произвольной формы. Искомый регион может быть построен автоматически на основании заданных параметров (например, в пределах некоторой административной единицы) или определен пользователем с применением соответствующей

щих инструментальных средств. Примером может являться, в частности, исследование электроджетов (авроральных токов) в арктическом регионе, а также анализ различных геомагнитных вариаций, характерных для определенных географических широт [4–5].

В ходе локального пространственно-временного анализа форма заданного пространственного региона, в рамках которого необходимо проанализировать распределение атрибутивных значений, может быть любой: окружность некоторого радиуса, прямоугольник заданной площади, полигон произвольной геометрии и пр. В результате рассматриваемую задачу в общем виде можно свести к равномерному заполнению выделенного региона пространственными точками (с заданным шагом дискретизации) и определению в каждой из них соответствующих атрибутивных значений в заданный временной период. В общем виде соответствующий алгоритм решения задачи представлен на рис. 1.

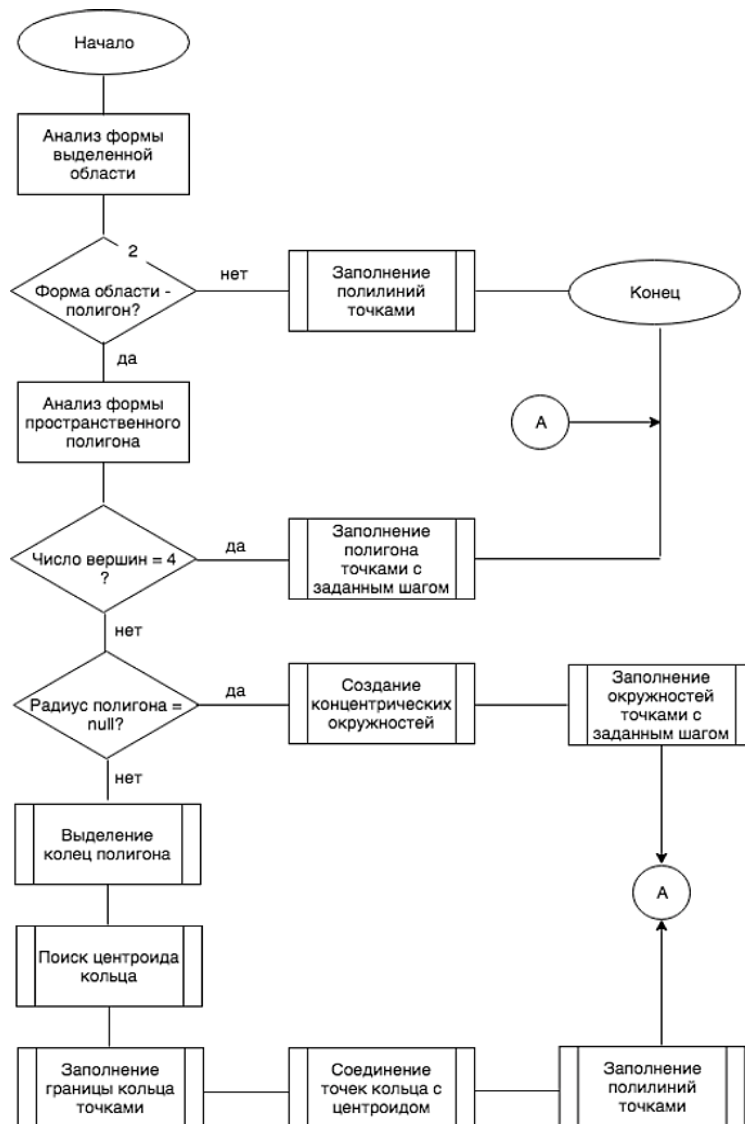


Рис. 1. Алгоритм формирования координатной сетки полигона произвольной формы

Fig. 1. Algorithm for generating a coordinate grid for a polygon of arbitrary shape

Среди существующих решений поставленной задачи наибольшее распространение приобрел подход, известный как «рыболовная сеть» (fishnet). Он предполагает заполнение заданного пространственного региона координатной сеткой, представляющей собой множество прямоугольных ячеек заданного типа. Однако такой подход, во-первых, применим только в среде настольных ГИС (например, ArcGIS for Desktop, QGIS и пр.), во-вторых, допускает наименьшую погрешность только для прямоугольных пространственных регионов. Вместе с тем решение задачи локального простран-

ственно-временного анализа некоторого процесса / явления не ограничивается пространственными регионами исключительно прямоугольной формы. Возможны ситуации, при которых результаты анализа должны быть получены для регионов, заданных окружностями, полилиниями или полигонами произвольной геометрии, что делает малоэффективным применение «рыболовной сети» для заполнения точками исследуемых областей. Соответственно, возникает задача заполнения этих областей пространственными точками с заданным шагом по геодезическим широте и долготе таким образом, чтобы полученные точки располагались строго внутри границ выделенного региона [7].

Для решения обозначенной задачи предлагается подход к построению координатной сетки, в соответствии с которым заданный пространственный регион заполняется однотипными пространственными объектами, которые, в свою очередь, разделены равными интервалами и описаны вдоль собственных границ упорядоченным множеством размещенных с одинаковым разрешением пространственных точек. Маркировка сформированных пространственных точек внутри координатной сетки выполняется путем присвоения им значения одного или нескольких атрибутивных параметров, известных или вычисленных с использованием статистических методов.

Здесь в зависимости от геометрии заданного пространственного региона возможны различные варианты формирования координатной сетки. Так, для регионов, заданных в виде круга, представляется целесообразным сформировать координатную сетку посредством создания множества концентрических окружностей с единым центром и величиной кольцевого пространства. Множество концентрических окружностей формируется до тех пор, пока радиус наибольшей из них превысит или станет равным заданной величине кольцевого пространства. В результате формируется пространственный объект, топологически эквивалентный проколотой плоскости относительно центра окружности.

Каждая из концентрических окружностей рассматривается как замкнутая кривая, которая, в свою очередь, описывается полилинией, заданной пространственными точками, которые одинаково удалены друг от друга на расстояние, не превышающее  $\varepsilon$  (величина кольцевого пространства, заданного пользователем) [8]. В результате число точек полилинии определяется длиной окружности и заданной величиной  $\varepsilon$ .

Пусть пространственная область  $A$  ограничена окружностью с центром в точке  $(a, b)$  и радиусом  $R$  (здесь  $a$  и  $b$  – географические координаты точки). При этом каждая новая окружность  $A_c$  в семействе окружностей, концентрических по отношению к родительской окружности  $A$ , имеет центр с теми же географическими координатами и радиус  $r_c$ , величина которого равна

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r_c^2, r_c \neq R. \quad (1)$$

Для  $n$  концентрических окружностей с пространственным разрешением  $\varepsilon$  справедливо соотношение вида:

$$r_{c_n} = R - n\varepsilon. \quad (2)$$

Множество концентрических окружностей формирует множество колец, каждое из которых образовано двумя соседними концентрическими окружностями радиусов  $r_{c1}$  и  $r_{c2}$  и кольцевым пространством величины  $\varepsilon$ . При этом заданная пространственная область  $A$  также представляет собой кольцо с нулевым кольцевым пространством и является в общем виде проколотым диском радиуса  $R$  вокруг точки  $C(a, b)$ .

Для координатной сетки внутри пространственной области  $A$  в результате формируется окрестность точки  $C(a, b)$  как массива  $m$  пространственных точек  $\{C'_m(a'_m, b'_m)\}_{i=1}^m$ , удаленных от  $C$  на расстояние, не превышающее  $R$ :

$$O_R(a, b, R) = \left\{ C'_i : \sqrt{(a'_i - a)^2 + (b'_i - b)^2} \leq R; i = 1, \dots, m \right\}. \quad (3)$$

Если заданный пользователем пространственный регион имеет произвольную геометрию, в общем случае предлагается использовать объект вида «пространственный полигон», который, в свою очередь, представлен множеством взаимосвязанных колец – замкнутых полилиний. При этом каждая полигональная цепочка  $P$  может быть задана упорядоченной последовательностью пространственных

точек вида  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ , заданных парами координат вида  $(a'_i, b'_i)_{i=1}^n$  и соединенных друг с другом звеньями полилинии (каждое звено представлено парой точек  $P_i P_j$ ,  $i \neq j$ )  $[P_1 P_2], [P_2 P_3], \dots, [P_{n-1} P_n], [P_n P_1]$  ( $n > 2$ ). Последние, в свою очередь, образуют между собой углы различной величины.

Для реализации предложенного представления пространственный полигон должен быть замкнут. Это единственное обязательное условие, при этом отдельные звенья составляющих полигон полилиний могут как пересекаться (т.е. иметь более одной общей точки вместе с общей вершиной), так и вовсе не пересекаться и образовывать многоугольник. Фактически если звенья полилинии не пересекаются друг с другом, то в рассматриваемом полигоне присутствует одно пространственное кольцо. Если звенья полилинии пересекаются, то число таких пространственных колец варьирует от двух и более:

$$P = \{L_i\}_{i=1}^m : \forall L_i = \{K_j\}_{j=1}^n = \{[P_1 P_2], \dots, [P_n P_1]\}, n \geq 3, \quad (4)$$

где  $L_i$  –  $i$ -е пространственное кольцо,  $K_j$  –  $j$ -е звено полилинии, заданной парой точек  $P_i$  и  $P_j$ ,  $i \neq j$ , с соответствующими парами координат.

В соответствии с предлагаемым подходом координатная сетка произвольного полигона складывается из множества сеток, построенных для каждого его кольца, которое представляет собой самонепересекающийся замкнутый многоугольник. Для этого в составе полигонального кольца с вершинами  $(a_1, b_1), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1})$  определяется его центральная точка – центроид  $C_0(a_0, b_0)$  ( $a_0$  и  $b_0$  – географические координаты точки) как среднеарифметическое всех его вершин по всем координатным направлениям:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{6S_p} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + a_{i+1})(a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i); \\ b_0 &= \frac{1}{6S_p} \sum_{i=1}^{n-1} (b_i + b_{i+1})(a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $S_p$  – площадь полигонального кольца (вершины  $(a_1, b_1)$  и  $(a_n, b_n)$  совпадают), задаваемая как

$$S_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i). \quad (6)$$

С учетом сказанного каждое звено полигонального кольца представляет собой полилинию, заданную равноудаленными точками. В результате имеет место упорядоченное множество пространственных точек  $i$ -го полигонального кольца, количество которых определяется следующим образом:

$$N = \sum_{i=1}^n \left( \frac{T_i}{\varepsilon} + 1 \right), \quad (7)$$

где  $n$  – количество звеньев в кольце,  $T_i$  – длина  $i$ -го звена.

В полигональном кольце каждая точка соединяется с его центроидом  $C_i$  и образует, соответственно, ломаные с двумя вершинами, каждая из которых, в свою очередь, становится основой для формирования полилинии посредством разбиения на пространственные отрезки, меньшие или равные  $\varepsilon$ . При этом формируемая результирующая поверхность является замкнутой, поскольку составляющее ее множество пространственных точек также является замкнутым. Множество описанных окрестностей образует, в свою очередь, искомую координатную сетку полигона произвольной геометрии.

Еще один вариант задачи построения локальной координатной сетки имеет место в том случае, когда заданный пользователем полигон представляет собой прямоугольник, т.е. замкнутая самонепересекающаяся полилиния задана четырьмя вершинами и образованные ими звенья расположены под прямым углом друг к другу. Тогда искомая координатная сетка формируется последовательностью полилиний, равноотстоящих друг от друга с заданным шагом по географическим широте и долготе. Здесь левая грань полигона принимается за начало отчета (если рассматривать массив вершин, то это полилиния  $LP$ , образованная парами точек с порядковыми номерами 1 и 4). При этом границей координатной сетки является правая грань прямоугольного полигона с вершинами в точках с индексами 2 и 3 в упорядоченном множестве вершин прямоугольника:

$$LP_n \{(a_1 + n\varepsilon, b_1 + n\varepsilon), (a_4 + n\varepsilon, b_4 + n\varepsilon)\} : \\ a_1 + n\varepsilon \leq a_2, b_1 + n\varepsilon \leq b_2; a_4 + n\varepsilon \leq a_3, b_4 + n\varepsilon \leq b_3, \quad (8)$$

где  $n$  – порядковый номер полилинии, вписанной между верхней и нижней гранями полигона,  $(a_i, b_i)$  – вершины полигона ( $i = 1, \dots, 4$ ).

По аналогии с полигоном произвольной геометрии для построения локальной координатной сетки предполагается формирование замкнутой окрестности центроида прямоугольника. Данная окрестность, в свою очередь, может быть представлена как множество пространственных точек, расположенных внутри заданного пространственного полигона.

В случае, если заданная пользователем область задана простой пространственной полилинией, каждое ее звено трансформируется в ломаную посредством размещения  $M$  точек между двумя исходными пространственными точками звена. В результате формируется окрестность центра ломаной как множества пространственных точек, расположенных вдоль пространственной полилинии. Окрестность может не являться закрытой, поскольку допускается, что итоговое множество пространственных точек не включает в себя центральную точку полилинии.

Таким образом, применение предложенного подхода к заданному конечным пользователем полигону произвольной формы позволяет сформировать локальную координатную сетку, заданную массивом пространственных точек, каждой из которых соответствует своя пара значений  $\{a, b\}$ , где  $a$  – географическая широта точки,  $b$  – географическая долгота точки. Далее уже для сформированного массива пространственных точек определяется значение одного или нескольких атрибутивных параметров. К сформированному в результате перечисленных манипуляций массиву могут быть, в свою очередь, применены соответствующие операции по обработке, анализу и визуализации данных в заданном пространственном регионе.

## 2. Визуализация геоданных в условиях веб-ориентированной среды приложения

Важной проблемой современных веб-ориентированных геоинформационных систем является решение задачи визуализации большого объема пространственной информации без потери как обрабатываемых данных, так и производительности реализующих соответствующую операцию приложений. При этом возможности современных пользовательских агентов таковы, что загрузка больших объемов данных для рендеринга блокируется на клиентской стороне во избежание дефицита имеющихся при этом вычислительных ресурсов.

К примеру, один из распространенных подходов к визуализации (как локальной, так и глобальной) геомагнитной информации – система пространственных изолиний, позволяющих оценить группирование пространственных регионов по значениям заданных параметров геомагнитного поля и его вариаций (как для невозмущенного главного магнитного поля Земли, так и для результатов измерений тех же параметров, зарегистрированных магнитными обсерваториями и вариационными станциями) [9]. В случае, если требуется визуализировать данные на большой площади (или в глобальном масштабе), клиентское приложение сталкивается с невозможностью их одновременного рендеринга.

В подавляющем большинстве известных случаев при решении прикладных задач наблюдается выраженная неоднородность пространственного распределения визуализируемых данных (на всех масштабах анализа и визуализации). Дополнительно представляется целесообразным отметить, что в некоторых прикладных и научных областях данные, описывающие некоторый процесс / явление, неравномерно изменяются со временем и при совокупном воздействии комплекса внешних факторов. В частности, в случае геомагнитной информации можно отметить, что геомагнитное поле, описываемое соответствующими атрибутивными значениями, обладает высокой анизотропией, крайней неоднородностью значений параметров, сопоставимой с изменениями геомагнитной обстановки в периоды высокой геомагнитной активности в полярных областях земной поверхности. При этом для приэкваториальных и среднеширотных областей поверхности Земли характерна сравнительно меньшая пространственная анизотропия параметров геомагнитного поля и его вариаций.

Пространственно-временная анизотропия визуализируемых данных оказывает влияние на реактивность веб-ориентированных приложений, осуществляющих рендеринг пространственного изображения на клиентской стороне. Повышение количества визуализируемых пространственных объектов, с одной стороны, а также невозможность или сложность интерполяции данных для формирования регулярной сети мониторинга пропорционально – с другой, увеличивают требования к вычислительным мощностям, необходимым для корректной работы соответствующих веб-приложений. Так, для визуализации одного пространственного объекта требуется на программном уровне создание соответствующего ему экземпляра объекта типа DOM (Document Object Model – объектная модель документа). При этом браузеры как необходимые пользовательские объекты ограничивают возможное число таких объектов 500 экземплярами, что недостаточно как на глобальном, так и на локальном уровне масштабирования.

В этой связи представляется целесообразной разработка так называемого гибридного подхода к визуализации пространственных данных, алгоритм которого (на примере геомагнитной информации) представлен на рис. 2. Его отличительная особенность заключается в том, что для клиентского веб-рендеринга больших пространственных данных учитывается их пространственная анизотропия посредством комбинирования подходов, демонстрирующих наилучшие показатели реактивности в соответствующих пространственных областях.

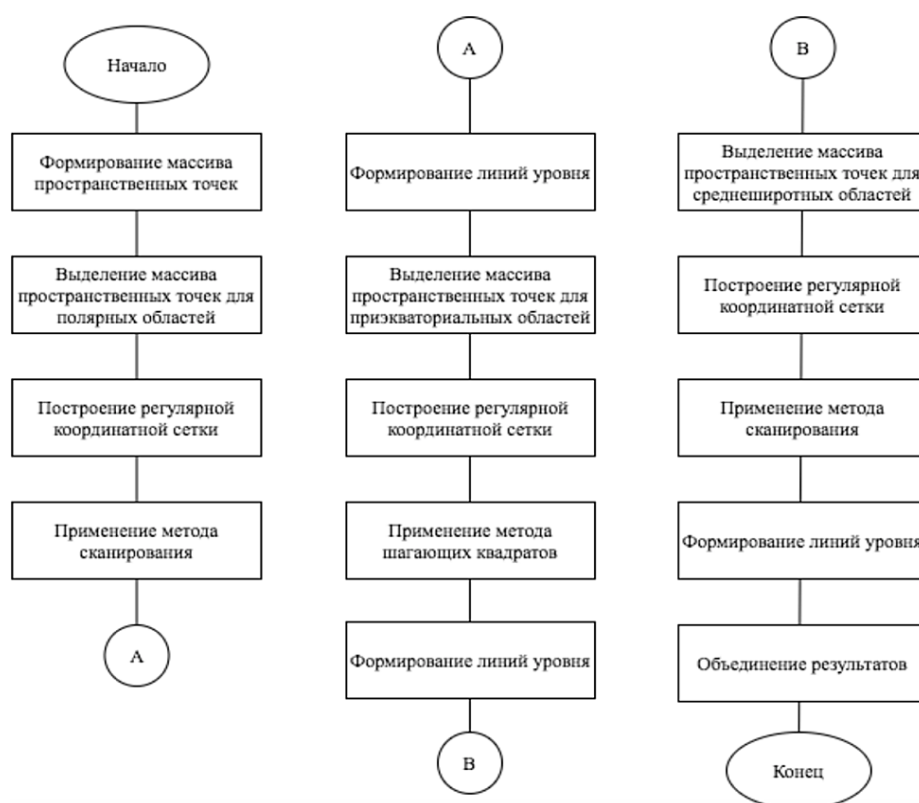


Рис. 2. Алгоритм применения гибридного метода визуализации пространственно-временного распределения параметров геомагнитного поля и его вариаций

Fig. 2. Algorithm for using a hybrid method of visualizing the spatio-temporal distribution of geomagnetic field parameters and its variations

Предлагается разбиение всей анализируемой пространственной области на отдельные фрагменты в зависимости от характера распределения соответствующих параметров на рассматриваемой территории. Так, к примеру, в случае геомагнитной информации предполагается выделение трех пространственных областей: полярной, приэкваториальной и среднеширотной. Полярные области, как правило, образованы территориями, которые расположены на Крайнем Севере и Юге земного шара и составляют в целом примерно 1/12 его поверхности: за Северным полярным кругом находится арктическая область Земли, а Южный полюс окружает материк Антарктида. Приэкваториальные области

Земли располагаются между  $35^{\circ}$  с.ш. и  $35^{\circ}$  ю.ш. и характеризуются наличием кольцевых токов, обеспечивающих менее динамичное изменение геомагнитных вариаций во времени по сравнению с магнитной активностью, наблюдаемой в полярных областях. Области средних широт находятся между  $40$  и  $65^{\circ}$  с.ш. и  $42$  и  $58^{\circ}$  ю.ш. Здесь слабо проявляются и кольцевые токи, имеющие место в приэкваториальной области, и суббуревая активность, характерная для полярных регионов. Таким образом, динамика геомагнитных вариаций здесь, как правило, минимальна.

Важным критерием декомпозиции глобальной координатной сетки являются результаты предварительного анализа производительности алгоритмов пространственной визуализации на соответствующих наборах данных. Так, к примеру, при формировании и визуализации пространственных изолиний на основе обработки геомагнитных данных было установлено, что метод сканирования (построчной развертки) [10–12] работает сравнительно медленно ввиду большого количества точек (особенно для анализа пространственно-временного распределения параметров главного поля) из-за малого шага сканирования для качественного «поточечного» воспроизведения линий уровня. При этом он требует предварительного выбора сразу всей сетки изолиний и делает практически невозможной оперативную динамическую корректировку полученной карты (например, при пользовательском масштабировании). В этой связи данный алгоритм целесообразно применять в тех областях, где геомагнитное поле обладает высокой анизотропией, крайней неоднородностью значений параметров, сопоставимой с изменениями геомагнитной обстановки в периоды высокой геомагнитной активности. К таким регионам, в частности, относятся полярные области земной поверхности. Они имеют ограниченный по сравнению с исходным масштабом размер, который возможно обойти по пространственным точкам двойным сканированием без потери производительности соответствующего приложения. Для приэкваториальных и среднеширотных областей поверхности Земли характерна сравнительно меньшая пространственная анизотропия параметров геомагнитного поля и его вариаций. Это позволяет применить менее точный, но более быстрый алгоритм прорисовки изолиний – метод шагающих квадратов, который традиционно используется для построения изолиний в двумерном скалярном поле.

На последующем шаге в соответствии с предложенным подходом для выделенных областей формируются новые регулярные координатные решетки, каждая из которых является множеством пространственных точек, очевидно, являющимся, в свою очередь, подмножеством исходного множества пространственных точек, описывающих координатную сетку для всей земной поверхности. Здесь представляется целесообразным отметить, что выделенные пространственные области могут быть представлены полигонами произвольной геометрии. Соответственно, для построения локальных координатных сеток в них возможно применение подходов локального пространственно-временного анализа, предложенных в предыдущем разделе.

На последующем шаге для каждого выделенного пространственного региона подбираются наиболее эффективные с точки зрения реактивности и производительности веб-приложения методы пространственной визуализации. Выбранный метод применяется локально к соответствующей координатной сетке [11, 13–16], сформированной по описанным выше принципам в пределах заданного пространственного региона. При этом в контексте программной реализации возможны распараллеливание процессов формирования координатных сеток для выделенных пространственных регионов произвольной формы и их обработка в виде наборов соответствующих пространственных объектов с атрибутивными значениями, а также оформление в виде отклика на клиентскую сторону для последующего рендеринга браузером.

На заключительном этапе обработки результаты выполнения по каждой из выделенных пространственных областей интегрируются для представления пространственного распределения значений по всей земной поверхности либо в пределах заданного пространственного региона. При этом распараллеливание соответствующих вычислительных процессов позволит существенно сократить временной лаг между появлениями откликов с серверной стороны для каждого выделенного пространственного региона. В совокупности такой подход обеспечит приемлемый с точки зрения реактивности веб-приложения вариант формирования пространственного изображения на основе большого количества исходных (опорных) пространственных объектов.

Очевидным подготовительным этапом для реализации гибридного алгоритма анализа пространственно-временного распределения исследуемых данных является формирование двух массивов:

- пространственных точек для всей земной поверхности (или заданного региона), задаваемых парами координат  $\{x, y\}$ , где  $x$  – географическая широта,  $y$  – географическая долгота (в градусах),
- значений атрибутивных параметров (например, параметров геомагнитного поля) в каждой точке предыдущего массива, либо формируемых расчетным путем (для параметров главного геомагнитного поля), либо получаемых от источников данных (например, по результатам наблюдений наземных магнитных обсерваторий и вариационных станций).

Отметим, что представленный алгоритм применим не только для глобального анализа пространственных данных, но может быть использован и при проведении локального анализа пространственно-временного распределения параметров геомагнитного поля и его вариаций с формированием соответствующей исходной регулярной координатной сетки и ее делением на отдельные области в зависимости от представленного диапазона географических широт.

### 3. Программная реализация и апробация предложенного подхода

Предложенный в работе подход к визуализации геопространственной информации предназначен для реализации в веб-ориентированной среде, что обеспечивает возможность распространения указанного решения широкому кругу потребителей (при этом может быть использован как интерфейс взаимодействия вида «пользователь–программа», так и прямой обмен данными по типу «программа–программа»). В соответствии с общепринятым подходом к реализации веб-приложений в основе архитектуры предложенного решения лежит клиент-серверный подход, при этом формирование данных для рендеринга осуществляется на серверной стороне (как наиболее вычислительно затратная процедура), а непосредственно генерация геопространственного изображения и его визуализация реализуются на клиентской стороне с поддержкой интерактивности для конечного пользователя.

В настоящее время известен и активно используется широкий спектр языков и технологий программирования, обеспечивающих обработку, анализ и графическую интерпретацию геопространственной информации. С учетом разделения на клиентскую и серверную стороны в рамках предложенного решения представляется целесообразным разграничить и стек используемых технологий на технологии реализации клиентской и серверной составляющих соответственно. При этом на уровне разработки серверных сценариев рассматриваются, как правило, язык программирования C# для платформы ASP.NET и язык программирования Python, к примеру, на платформе Django. Оба варианта предоставляют классы, модели и методы обработки и анализа геопространственной информации. Однако в силу ряда причин, главным образом ввиду накопленного авторами опыта геопространственной обработки на Python [9, 17], выбор был сделан в пользу последнего. Вместе с тем следует отметить, что предлагаемые решения не зависят от способа программной реализации, что позволяет при необходимости применить иные языки и технологии программирования.

Реализация серверных программных сценариев на языке программирования Python предполагает применение архитектуры MVC (Model–View–Controller), которая разделяет приложение на три основных компонента: модель, представление и контроллер. Шаблон MVC позволяет создавать приложения, различные аспекты которых (логика ввода, бизнес-логика и логика интерфейса) разделены, но достаточно тесно взаимодействуют друг с другом [18, 19]. Это разделение позволяет работать со сложными структурами при создании приложения, так как обеспечивает одновременную реализацию только одного аспекта. Например, разработчик может сконцентрироваться на создании представления отдельно от бизнес-логики.

Для анализа эффективности предложенного гибридного алгоритма визуализации геопространственной информации был разработан исследовательский прототип веб-ориентированного приложения (рис. 3), реализующего расчет параметров магнитного поля внутриземных источников как в отдельной точке с заданными пространственно-временными координатами, так и по всей земной поверхности (регулярная координатная сетка с шагом в  $1^\circ$ ). Расчет был произведен посредством серверных



Python-сценариев, реализующих модель IGRF (International Geomagnetic Reference Field – модель, разработанная Международной ассоциацией геомагнетизма и аэронавтики и обновляемая каждые пять лет на основании наблюдений параметров магнитного поля Земли и его вариаций для расчета параметров главного магнитного поля).



Рис. 3. Экранная форма результата визуализации геоданных в исследовательском прототипе  
Fig. 3. Screen form of the result of geodata visualization in the research prototype

Экспериментальные исследования проводились на клиентской стороне с применением ЭВМ (CPU Intel Core i5 10300N ГГц, оперативная память 4 ГБ, скорость интернет-соединения ~ 52,4 Мбит/с) и на серверной стороне – на базе веб-сервера с процессором 72\* Intel(R) Xeon(R) Gold 6140 CPU @ 2,30GHz. В качестве инфраструктуры разработанного исследовательского прототипа была реализована вариация MVC-паттерна, построенная на базе серверного фреймворка Django. Серверные сценарии реализованы на языке программирования Python, клиентская составляющая основана на языке программирования JavaScript с использованием фреймворка Bootstrap. Кроме того, на клиентской стороне обработка, анализ и визуализация (непосредственное формирование геопространственного изображения) пространственной информации реализованы на базе прикладного программного интерфейса ArcGIS API for JavaScript.

В качестве оцениваемого параметра рассматривалась скорость рендеринга пространственного изображения на основании сгенерированного на серверной стороне приложения данных. Была проведена сравнительная оценка подходов, основанная на применении единого алгоритма визуализации для всей анализируемой пространственной области и гибридного алгоритма, предполагающего различный способ формирования геопространственного изображения для различных пространственных областей в зависимости от анизотропии соответствующих внешних и внутренних факторов. Непосредственно были проанализированы результаты исследования на примере визуализации выборки геомагнитных данных, рассчитанных на основе предложенного выше метода для каждой точки земной поверхности с шагом в 1° методами триангуляции Делоне, шагающих квадратов, сканирования, а также предложенным гибридным алгоритмом. Результаты эксперимента показали, что применение предложенного алгоритма визуализации пространственно-временного распределения геомагнитных данных (при описанных ранее вычислительных возможностях) позволяет повысить вычислительную скорость процедуры рендеринга геопространственного изображения в веб-ориентированной среде в среднем на 18% по сравнению с существующими аналогами. В результате возможны анализ распределения параметров геомагнитного поля и определение таких областей, которые являются потенциально опасными, к примеру, в контексте наведения геоиндуцированных токов. При использовании существующих подходов допустима только локальная визуализация, что существенно усложняет процедуру принятия решений.

### Заключение

Геопространственная привязка данных, используемых в системах поддержки принятия решений в различных областях науки и техники (например, геомагнитные данные как результат наблюдений

ния / расчета параметров магнитного поля Земли и его вариаций) обуславливает применение геоинформационных технологий для визуализации данных. Вместе с тем веб-ориентированный рендеринг пространственного изображения с использованием геоинформационных технологий ограничен (на клиентской стороне) несколькими сотнями пространственных точек (с соответствующими атрибутивными данными). Так, к примеру, для браузеров с движком Google Chrome такое количество ограничено 500 экземплярами соответствующих программных DOM-объектов в подавляющем большинстве случаев. Поскольку объемы данных ежеминутно растут, то необходимо совершенствование существующих геоинформационных технологий для обеспечения эргономичного и эффективного, с точки зрения вычислительной скорости, веб-ориентированного рендеринга пространственного изображения.

В этой связи в работе предложен алгоритм визуализации пространственно-временного распределения геомагнитных данных на основе геоинформационных методов визуальной интерпретации информации, отличающийся тем, что для клиентского веб-рендеринга больших пространственных данных учитывается их пространственная анизотропия посредством комбинирования подходов, демонстрирующих наилучшие показатели реактивности в соответствующих пространственных областях.

Результаты эксперимента, полученные с помощью разработанного исследовательского прототипа веб-приложения, показали, что применение предложенного алгоритма визуализации пространственно-временного распределения (на примере геомагнитных данных) позволяет повысить вычислительную скорость процедуры рендеринга геопространственного изображения в веб-ориентированной среде в среднем на 18% по сравнению с существующими аналогами.

#### Список источников

1. Breunig M. et al. Geospatial Data Management Research: Progress and Future Directions // ISPRS International Journal of GeoInformation. 2020. V. 9. P. 95. doi: 10.3390/ijgi9020095
2. Ma X. Linked Geoscience Data in practice: where W3C standards meet domain knowledge, data visualization and OGC standards // Earth Science Informatics. 2017. V. 10. P. 1–13. doi: 10.1007/s12145-017-0304-8
3. Zhu X. et al. Development and implementation of a dynamic and 4D GIS based on semantic location model // Geospatial Information Science. 2019. V. 22. P. 193–213. doi: 10.1080/10095020.2019.1649192
4. Sergiu D., Suletea A., Botez A., Jandic T. The use of spatial modeling to teach engineering graphics // Journal of Social Sciences. 2022. V. 5. P. 104–112. doi: 10.52326/jss.utm.2022.5(2).09
5. Vorobev A.V., Vorobeva G.R. Approach to Assessment of the Relative Informational Efficiency of Intermagnet Magnetic Observatories // Geomagnetism and Aeronomy. 2018. V. 58 (5). P. 625–628.
6. Воробьев А.В. Воробьева Г.Р. Подход к динамической визуализации разнородных геопространственных векторных изображений // Компьютерная оптика. 2024. Т. 48, № 1. С. 123–138. doi: 10.18287/2412-6179-CO-1279
7. Lin J.-W. Real-time Magnetic Observatory Network: a Review // European Journal of Environment and Earth Sciences. 2021. V. 2. P. 1–2. doi: 10.24018/ejgeo.2021.2.5.177
8. Kim J.-H., Chang H.-Y. Geomagnetic field variations observed by INTERMAGNET during 4 total solar eclipses // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2018. V. 172. P. 107–116. doi: 10.1016/j.jastp.2018.03.023
9. Vorobev A.V. et al. Short-term forecast of the auroral oval position on the basis of the “virtual globe” technology // Russ. J. Earth Sci. 2020. V. 20. Art. ES6001. doi: 10.2205/2020ES000721
10. Isaaks E.H., Mohan R. An Introduction to applied geostatistics. Oxford : Oxford University Press, 1989. 592 p.
11. Zhang H., Gao P., Li Zh. Improvements to Information Entropy for Raster Spatial Data: A Thermodynamic-based Evaluation // Abstracts of the ICA. 2019. V. 1. P. 1–10. doi: 10.5194/ica-abs-1-426-2019
12. Pakdil M., Çelik R. Serverless Geospatial Data Pro-cessing Workflow System Design // ISPRS International Journal of GeoInformation. 2021. V. 11. P. 20. doi: 10.3390/ijgi11010020
13. Traxler C., Hesina G. Interacting with big geospatial data // GIM International. 2017. V. 31. P. 19–21.
14. Figueiredo L. et al. MoreData: A Geospatial Data Enrichment Framework // International Conference on Advances in Geographic Information Systems. 2021. P. 419–422. doi: 10.1145/3474717.3484210
15. Gorokhov S., Shcherbakova T., Sedov S. Elimination of Isoline Drift when Analysis of the Electrocardiosignal of the Vehicle Driver // 2021 Intelligent Technologies and Electronic Devices in Vehicle and Road Transport Complex. 2021. P. 1–5. doi: 10.1109/TIRVED53476.2021.9639163
16. Djavaherpour H., Mahdavi-Amiri A., Samavati F. Static and Dynamic Progressive Geospatial Interlinking // ACM Transactions on Spatial Algorithms and Systems. 2022. V. 8 (2). P. 16. doi: 1145/3510025
17. Vorobev A.V. et al. System for dynamic visualization of geomagnetic disturbances based on data from ground-based magnetic stations // Scientific Visualization. 2021. V. 13.1. P. 162–176. doi: 10.26583/sv.13.1.11
18. Nguyen L. et al. Design and Implementation of Web Application Based on MVC Laravel Architecture // European Journal of Electrical Engineering and Computer Science. 2022. V. 6. P. 23–29. doi: 10.24018/ejece.2022.6.4.448
19. Marculescu B., Zhang M., Arcuri A. On the Faults Found in REST APIs by Automated Test Generation // ACM Transactions on Software Engineering and Methodology. 2022. V. 31. P. 1–43. doi: 10.1145/3491038

## References

1. Breunig, M. et al. (2020) Geospatial Data Management Research: Progress and Future Directions. *ISPRS International Journal of GeoInformation*. 9. pp. 95. DOI: 10.3390/ijgi9020095
2. Ma, X. (2017) Linked Geoscience Data in practice: where W3C standards meet domain knowledge, data visualization and OGC standards. *Earth Science Informatics*. 10. pp. 1–13. DOI: 10.1007/s12145-017-0304-8
3. Zhu, X. et al. (2019) Development and implementation of a dynamic and 4D GIS based on semantic location model. *Geospatial Information Science*. 22. pp. 193–213. DOI: 10.1080/10095020.2019.1649192
4. Sergiu, D., Suletea, A., Botez, A. & Jandic, T. (2022) The use of spatial modeling to teach engineering graphics. *Journal of Social Sciences*. 5. pp. 104–112. DOI: 10.52326/jss.utm.2022.5(2).09
5. Vorobiev, A.V. & Vorobieva, G.R. (2018) Approach to Assessment of the Relative Informational Efficiency of Intermagnet Magnetic Observatories. *Geomagnetism and Aeronomy*. 58(5). pp. 625–628.
6. Vorobev, A.V. & Vorobeva, G.R. (2024) An approach to dynamic visualization of heterogeneous geospatial vector images. *Komp'yuternaya optika*. 48(1). pp. 123–138. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1279
7. Lin, J.-W. (2021) Real-time Magnetic Observatory Network: A Review. *European Journal of Environment and Earth Sciences*. 2. pp. 1–2. DOI: 10.24018/ejgeo.2021.2.5.177
8. Kim, J.-H. & Chang, H.-Y. (2018) Geomagnetic field variations observed by INTERMAGNET during 4 total solar eclipses. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. 172. pp. 107–116. DOI: 10.1016/j.jastp.2018.03.023
9. Vorobiev, A.V. et al. (2020) Short-term forecast of the auroral oval position on the basis of the “virtual globe” technology. *Russian Journal of Earth Science*. 20. P. ES6001. DOI: 10.2205/2020ES000721
10. Isaaks, E.H. & Mohan, R. (1989) *An Introduction to Applied Geostatistics*. Oxford: Oxford University Press.
11. Zhang, H., Gao, P. & Li, Zh. (2019) Improvements to Information Entropy for Raster Spatial Data: A Thermodynamic-based Evaluation. *Abstracts of the ICA*. 1. pp. 1–10. DOI: 10.5194/ica-abs-1-426-2019
12. Pakdil, M. & Çelik, R. (2021) Serverless Geospatial Data Processing Workflow System Design. *ISPRS International Journal of GeoInformation*. 11. pp. 20. DOI: 10.3390/ijgi11010020
13. Traxler, C. & Hesina, G. (2017) Interacting with big geospatial data. *GIM International*. 31. pp. 19–21.
14. Figueiredo, L. et al. (2021) MoreData: A Geospatial Data Enrichment Framework. *International Conference on Advances in Geographic Information Systems*. pp. 419–422. DOI: 10.1145/3474717.3484210
15. Gorokhov, S., Shcherbakova, T. & Sedov, S. (2021) Elimination of Isoline Drift when Analysis of the Electrocardiosignal of the Vehicle Driver. *2021 Intelligent Technologies and Electronic Devices in Vehicle and Road Transport Complex*. pp. 1–5. DOI: 10.1109/TIRVED53476.2021.9639163
16. Djavaherpour, H., Mahdavi-Amiri, A. & Samavati, F. (2022) Static and Dynamic Progressive Geospatial Interlinking. *ACM Transactions on Spatial Algorithms and Systems*. 10. DOI: 1145/3510025
17. Vorobev, A.V. et al. System for dynamic visualization of geomagnetic disturbances based on data from ground-based magnetic stations. *Scientific Visualization*. 13.1. pp. 162–176. DOI: 10.26583/sv.13.1.11
18. Nguyen, L. et al. (2022) Design and Implementation of Web Application Based on MVC Laravel Architecture. *European Journal of Electrical Engineering and Computer Science*. 6. pp. 23–29. DOI: 10.24018/ejece.2022.6.4.448.
19. Marculescu, B., Zhang, M. & Arcuri, A. (2022) On the Faults Found in REST APIs by Automated Test Generation. *ACM Transactions on Software Engineering and Methodology*. 31. pp. 1–43. DOI: 10.1145/3491038

## Информация об авторах:

**Воробьев Андрей Владимирович** – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры геоинформационных систем Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия); старший научный сотрудник Геофизического центра Российской академии наук (Москва, Россия). E-mail: geomagnet@list.ru

**Воробьева Гульнара Равиловна** – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры вычислительной математики и кибернетики Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: gulnara.vorobeva@gmail.com

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## Information about the authors:

**Vorobev Andrei V.** (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation); Senior Researcher, Geophysical Center of the Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation). E-mail: geomagnet@list.ru

**Vorobeva Gulnara R.** (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: gulnara.vorobeva@gmail.com

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 02.12.2023; принята к публикации 05.03.2024

Received 02.12.2023; accepted for publication 05.03.2024

Научная статья

УДК 369:519.2

doi: 10.17223/19988605/66/4

## Комбинированные оценки линейного функционала с априорной догадкой о параметрическом классе распределений

Юрий Глебович Дмитриев<sup>1</sup>, Геннадий Михайлович Кошкин<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> dmit@mail.tsu.ru

<sup>2</sup> kgm@mail.tsu.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача оценивания линейного функционала от неизвестного распределения, который выражает некоторую числовую характеристику наблюдаемой случайной величины. Предполагается, что исследователь на основании своего опыта и знаний может высказать предположение о допустимости конкретного параметрического класса распределений при оценивании функционала. Такое предположение принято называть априорной догадкой. Предлагаются адаптивные оценки линейного функционала, учитывающие априорную догадку о параметрическом классе распределений. Полученные асимптотические распределения таких оценок позволили изучить влияние априорной догадки на точность оценивания аналитически.

**Ключевые слова:** линейный функционал; параметрический класс распределений; априорная догадка; адаптивные оценки; асимптотическое распределение оценки; СКО.

**Для цитирования:** Дмитриев Ю.Г., Кошкин Г.М. Комбинированные оценки линейного функционала с априорной догадкой о параметрическом классе распределений // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 36–43. doi: 10.17223/19988605/66/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/4

## Combined estimates of linear functional with a priori guess on the parametric class of distributions

Yury G. Dmitriev<sup>1</sup>, Gennady M. Koshkin<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> dmit@mail.tsu.ru

<sup>2</sup> kgm@mail.tsu.ru

**Abstract.** The problem of estimating a linear functional from an unknown distribution, which expresses a certain numerical characteristic of an observed random variable, is considered. It is assumed that the researcher, based on his experience and knowledge, can make an assumption about the admissibility of a particular parametric class of distributions when estimating the functional. This assumption is usually called an a priori guess. This article proposes adaptive estimates of the linear functional that take into account an a priori guess about the parametric class of distributions. The resulting asymptotic distributions of such estimates made it possible to study the influence of an a priori guess on the accuracy of estimation analytically.

**Keywords:** linear functional; parametric class of distributions; a priori guess; adaptive estimates; asymptotic distribution; MSE.

**For citation:** Dmitriev, Yu.G., Koshkin, G.M. (2024) Combined estimates of linear functional with a priori guess on the parametric class of distributions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 36–43. doi: 10.17223/19988605/66/4

## Введение

Многие задачи статистической обработки результатов эксперимента сводятся к статистическому оцениванию линейного функционала от неизвестного распределения, который выражает некоторую числовую характеристику наблюдаемой случайной величины. Уровни априорной неопределенности о классе возможных распределений могут изменяться от непараметрического до параметрического класса. Требования сокращения объема дорогостоящих экспериментальных данных или повышение точности оценивания при фиксированном объеме наблюдений приводят к поиску и разработке методов использования дополнительной априорной информации в задаче оценивания функционала. Дополнительная информация может быть чрезвычайно разнообразной и иметь различные источники поступления.

В данной работе рассматривается ситуация, когда исследователь на основании своего опыта и знаний может высказать предположение о допустимости конкретного параметрического класса распределений при оценивании функционала. Такое предположение принято называть априорной догадкой. Данный термин был введен в [1] и использовался рядом авторов в задачах непараметрического оценивания (см., напр.: [2–11]). Естественно, возникает желание каким-то разумным способом учесть априорную догадку при оценивании функционала с целью увеличения точности оценки или надежности вывода. В работах [4–6] предложены статистические оценки с априорной догадкой о значении искомого функционала и приведены их свойства. В отличие от этих работ в данной статье предлагаются адаптивные оценки линейного функционала, учитывающие априорную догадку о параметрическом классе распределений. Полученные асимптотические распределения таких оценок позволяют изучить влияние априорной догадки на точность оценивания аналитически.

### 1. Комбинированные оценки с оптимальным весовым коэффициентом

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – независимые наблюдения объема  $n$  над случайной величиной  $X$  с неизвестной функцией распределения  $F(x)$  на прямой, т.е.  $x \in R^1$ . Многие задачи статистической обработки экспериментальных данных сводятся к оцениванию линейного функционала на некотором классе распределений  $F$ :

$$J(F) = M_F[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x), \quad F \in F. \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – заданная вещественная функция. Априорная информация о классе распределений может быть различной и изменяться от полной неопределенности (непараметрический случай) до задания параметрического класса распределений (параметрический случай). Непараметрические оценки функционала (1) получим методом подстановки:

$$\hat{J} = J(\hat{F}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i),$$

где  $\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < x)$  – эмпирическая функция распределения,  $I(A)$  – индикатор события  $A$ .

Предположим, что  $F$  может принадлежать параметрическому классу  $F = \{F_\theta(x), \theta \in \Theta\}$ . В этом случае

$$J(F_\theta(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF_\theta(x) = \Psi(\theta), \quad \theta \in \Theta \subseteq R^m.$$

Параметрическую функцию  $\Psi(\theta)$  также будем называть априорной догадкой, она выступает в качестве априорной оценки (возможного значения) функционала  $J$  на заданном параметрическом классе распределений. Задача состоит в построении оценки функционала (1), учитывающей совместно непараметрическую оценку  $\hat{J}$  и априорную догадку  $\Psi = \Psi(\theta)$ .

Следуя работам [4–6], рассмотрим комбинированную оценку вида:

$$\hat{J}_\lambda = (1-\lambda)\hat{J} + \lambda\Psi = \hat{J} - \lambda(\hat{J} - \Psi), \quad (2)$$

где весовой коэффициент  $\lambda$  выбран из условия минимума среднеквадратической ошибки (СКО)

$$S_F^2(\lambda) = M_F(\hat{J}_\lambda - J)^2$$

и определяется выражением

$$\lambda = \lambda(F) = \frac{1}{1 + \frac{n\Delta^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{1 + b_n^2}. \quad (3)$$

Здесь  $\Delta = \Delta(F) = J(F) - \Psi$  – величина отклонения априорной догадки от истинного значения  $J(F)$ ,  $\sigma^2 = \sigma^2(F) = D_F[\varphi(X)]$  – дисперсия  $\varphi(X)$ , а нормированное отклонение

$$b_n = b_n(F) = \frac{\sqrt{n}\Delta(F)}{\sigma(F)}. \quad (4)$$

Минимум СКО удовлетворяет соотношению

$$S_F^2(\lambda) = D\hat{J} - \frac{(D\hat{J})^2}{D\hat{J} + \Delta^2} = (1-\lambda)\frac{\sigma^2}{n}.$$

Весовой коэффициент  $\lambda$  изменяется в пределах  $0 < \lambda \leq 1$  и показывает, какое влияние на точность оценивания оказывает каждая из величин  $\hat{J}$  и  $\Psi$  в комбинированной оценке (2). Его значение определяется величиной нормированного отклонения (4), которое зависит от трех компонент  $n$ ,  $\Delta$  и  $\sigma$ . Так, при  $\Delta = 0$  и фиксированном  $n$  имеем  $b_n = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $S_F^2(1) = 0$ , и в качестве оценки функционала  $J(F)$  следует взять априорную догадку  $\Psi$ . При  $\Delta \neq 0$  с ростом объема наблюдений ( $n \rightarrow \infty$ )  $b_n \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $nS_F^2(\lambda) \rightarrow \sigma^2$ , и влияние априорной догадки на точность оценивания убывает. В случае, когда наряду с увеличением  $n$  уменьшается и  $\Delta$ , причем так, что  $b_n$  стремится к некоторому пределу  $b$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in [-\infty, \infty], \quad (5)$$

имеем:  $\lambda \rightarrow \frac{1}{1+b^2}$  и

$$n \frac{S_F^2(\lambda)}{\sigma^2} \rightarrow \frac{b^2}{1+b^2}. \quad (6)$$

Формулу (2) можно записать как

$$\hat{J}_\lambda = \Psi + (1-\lambda)(\hat{J} - \Psi).$$

Данное выражение можно интерпретировать следующим образом: исходной оценкой является априорная догадка  $\Psi$ , а  $\hat{J}$  выступает как дополнительная информация, содержащаяся в экспериментальных данных, тогда как в (2) исходной является оценка  $\hat{J}$ , а априорная догадка  $\Psi$  выступает в качестве дополнительной информации, которой располагает исследователь до проведения эксперимента. Исходя из этого минимум СКО записывается следующим образом:

$$S_F^2(\lambda) = M[\Psi - J]^2 - \frac{[M(\Psi - J)]^2}{D\hat{J} + (J - \Psi)^2} = \Delta^2 - \frac{\Delta^4}{D\hat{J} + \Delta^2} = \lambda\Delta^2.$$

Здесь  $\Delta^2$  характеризует точность оценивания (в смысле СКО), когда оценкой выступает  $\Psi$ , коэффициент  $\lambda$  показывает, во сколько раз уменьшается СКО комбинированной оценки за счет привлечения  $\hat{J}$ .

Если в (2) положить  $\Psi \equiv 0$ , то  $\hat{J}_\lambda = (1-\lambda)\hat{J}$ , и задача сводится к выбору весового коэффициента, на который нужно умножить выборочную оценку  $\hat{J}$ , чтобы получить оценку с наименьшим СКО.

В такой постановке задача рассматривалась в [12. Пример 17.4] при оценивании генерального среднего ( $\varphi(x) = x$ ) с помощью выборочного среднего. В этом случае

$$(1 - \lambda) = \frac{J^2}{J^2 + \frac{\sigma^2}{n}}$$

и (2) является обобщением такой задачи.

## 2. Адаптивные комбинированные оценки

Оптимальный коэффициент  $\lambda$  зависит от неизвестной функции распределения  $F$ , и, как правило, его значение неизвестно. Это обстоятельство затрудняет использование формулы (2) на практике. Выходом из такого положения является замена весового коэффициента  $\lambda$  на какую-либо статистическую оценку  $\hat{\lambda}$ . Полученные таким способом оценки функционала (1) будем называть адаптивными. Заметим, что в [12] адаптивные оценки не рассматривались.

Предположим, что параметр  $\theta$  задан, и значение  $\Psi = \Psi(\theta)$  известно. Если отношение  $\beta = \beta(F) = \frac{\Delta^2(F)}{\sigma^2(F)}$  известно, то в качестве оценки  $J(F)$  следует взять (2). Обычно  $\beta$  неизвестно, поэтому рассмотрим возможные оценки  $\lambda$  и соответствующие им адаптивные оценки функционала (1).

Подставим в формулу (3) вместо  $\Delta$  ее эмпирическую оценку  $\hat{\Delta} = \hat{J} - \Psi$ , а вместо  $\sigma^2$  выборочную дисперсию

$$\hat{\sigma}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) d\hat{F}(x) - \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\hat{F}(x) \right)^2,$$

которые построены методом подстановки по исходной выборке. Получим оценку коэффициента  $\lambda$  в виде:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{1 + \frac{n\hat{\Delta}^2}{\hat{\sigma}^2}} = \frac{1}{1 + \hat{b}^2},$$

где  $\hat{b} = \frac{\sqrt{n}\hat{\Delta}}{\hat{\sigma}}$  – оценка нормированного отклонения. Заменяя в (2)  $\lambda$  на  $\hat{\lambda}$ , получаем адаптивную комбинированную оценку

$$\hat{J}_{\hat{\lambda}} = \hat{J} - \hat{\lambda}(\hat{J} - \Psi). \quad (7)$$

Построим другую адаптивную комбинированную оценку. Заменяем в (3)  $\Delta$  на  $\hat{\Delta}$ , а  $\sigma^2$  на ее априорную догадку

$$\sigma_{\theta}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) dF_{\theta}(x) - \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF_{\theta}(x) \right)^2.$$

В результате получим оценку весового коэффициента

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{1 + \tilde{b}^2}, \text{ где } \tilde{b} = \frac{\sqrt{n}\hat{\Delta}}{\sigma_{\theta}}.$$

Эта оценка приводит к адаптивной комбинированной оценке

$$\hat{J}_{\tilde{\lambda}} = \hat{J} - \tilde{\lambda}(\hat{J} - \Psi). \quad (8)$$

Изучим асимптотическое поведение приведенных оценок.

### 3. Асимптотические свойства комбинированных оценок

Представляет интерес асимптотическое поведение комбинированных оценок (2), (7), (8) функционала  $J$ . Рассмотрим нормированные разности

$$\xi_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{J}_\lambda - J)}{\sigma}, \quad \hat{\xi}_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{J}_\lambda - J)}{\hat{\sigma}}, \quad \tilde{\xi}_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{J}_\lambda - J)}{\sigma_0}.$$

Обозначим

$$\eta_n = \frac{\sqrt{n}(\hat{J} - J)}{\sigma}, \quad \hat{\tau} = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}}, \quad \tau_0 = \frac{\sigma}{\sigma_0}$$

и запишем

$$\xi_n = \eta_n - \frac{\eta_n + b_n}{1 + b_n^2} = \frac{\eta_n b_n^2 - b_n}{1 + b_n^2}, \quad (9)$$

$$\hat{\xi}_n = \eta_n - \frac{\eta_n + b_n}{1 + (\eta_n + b_n)^2 \hat{\tau}^2} = -b_n + \frac{(\eta_n + b_n)^3}{\frac{1}{\hat{\tau}^2} + (\eta_n + b_n)^2}, \quad (10)$$

$$\tilde{\xi}_n = \eta_n - \frac{\eta_n + b_n}{1 + (\eta_n + b_n)^2 \tau_0^2} = -b_n + \frac{(\eta_n + b_n)^3}{\frac{1}{\tau_0^2} + (\eta_n + b_n)^2}, \quad (11)$$

где  $b_n$  определено в (4). Асимптотическое поведение величин (9)–(11) характеризует следующая теорема.

**Теорема.** Пусть для каждого  $F \in \mathbf{F}$  дисперсия  $0 < \sigma_F^2 < \infty$  и выполнено (5) (последовательность  $b_n$  стремится к  $b$  при  $n \rightarrow \infty$ ). Тогда

1) при  $|b| < \infty$  и  $n \rightarrow \infty$

$$\xi_n \Rightarrow \zeta_0 = -\frac{b}{1 + b^2} + \frac{\eta b^2}{1 + b^2},$$

$$\hat{\xi}_n \Rightarrow \zeta_1 = -b + \frac{(\eta + b)^3}{1 + (\eta + b)^2},$$

$$\tilde{\xi}_n \Rightarrow \zeta_2 = -b + \frac{(\eta + b)^3}{\frac{1}{\tau_0^2} + (\eta + b)^2};$$

2) при  $|b| = \infty$

$$\zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2 = \eta,$$

где знак « $\Rightarrow$ » означает сходимость по распределению,  $\eta$  – стандартная нормальная случайная величина.

**Доказательство.** Поскольку при  $n \rightarrow \infty$  отношение  $\hat{\tau} = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}}$  стремится по вероятности к 1,

а  $\eta_n \Rightarrow \eta$  на основании центральной предельной теоремы, то первое утверждение теоремы вытекает из теоремы непрерывности [13. Глава 6]. Второе утверждение следует из первых равенств в (9)–(11) и слабой сходимости к нулю вторых слагаемых в них при  $|b_n| \rightarrow \infty$ .

При увеличении  $\tau_0^2$  ( $\sigma_0 \rightarrow 0$ ) величина  $\zeta_2$  стремится к  $\eta$ , а при уменьшении  $\tau_0^2$  ( $\sigma_0 \rightarrow \infty$ ) величина  $\zeta_2$  стремится к  $-b$ .



#### 4. Интерпретация результатов

Назовем величины  $M\zeta_0^2$ ,  $M\zeta_1^2$ ,  $M\zeta_2^2$  асимптотическими нормированными среднеквадратическими ошибками (СКО) комбинированных оценок (2), (7), (8) соответственно. Приведенная теорема позволяет вычислить асимптотические нормированные СКО (проведя усреднение по стандартному нормальному закону) и через их значения сравнить точность оценивания адаптивных комбинированных оценок (7), (8) с оптимальной (2). Отметим, что согласно формуле (6)

$$M\zeta_n^2 = M \left[ \frac{\sqrt{n}(\hat{J}_n - J)}{\sigma} \right]^2 = n \frac{S_F^2(\lambda)}{\sigma^2} \rightarrow \frac{b^2}{1+b^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

при усреднении по стандартному нормальному закону получаем аналогичный результат:

$$M\zeta_0^2 = \frac{b^2}{1+b^2}.$$

Для адаптивной комбинированной оценки (8) имеем

$$M\zeta_2^2 = S^2(\tau, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -b + \frac{(x+b)^3}{\frac{1}{\tau^2} + (x+b)^2} \right)^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \quad (12)$$

Полагая в (12)  $\tau = 1$ , получаем асимптотическую нормированную СКО оценки (7) –  $M\zeta_1^2$ .

Результаты вычислений зависимости асимптотических нормированных СКО оценок от параметра  $b$  приведены на рис. 1 ( $M\zeta_0^2$  – синяя сплошная линия,  $M\zeta_1^2$  – синяя пунктирная линия, остальные линии соответствуют СКО  $M\zeta_2^2$  при значениях параметров  $\tau = 0,5; 1,5; 3$ ).

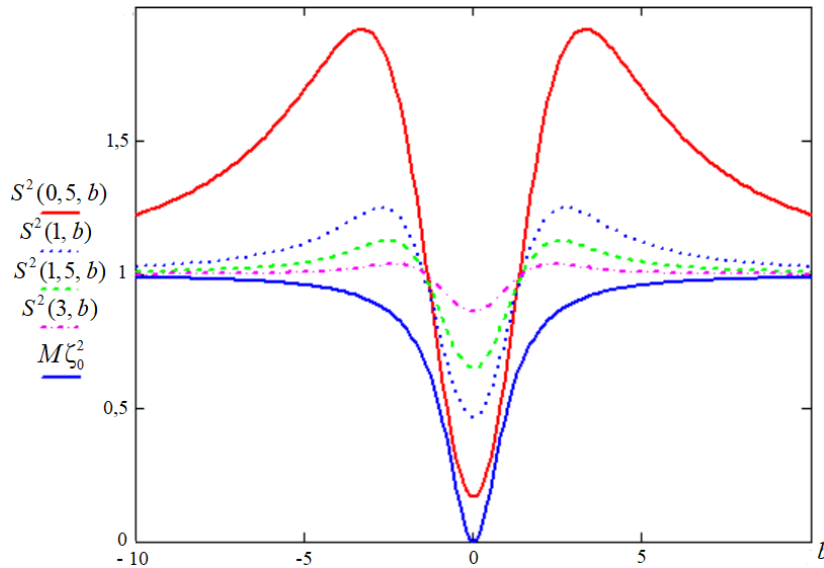


Рис.1. Зависимости асимптотических нормированных СКО оценок  $S^2(\tau, b)$  от параметра  $b$  для  $\tau = 0,5; 1; 1,5; 3$

Fig.1. Dependences of asymptotic normalized MSEs of estimates  $S^2(\tau, b)$  on parameter  $b$  for  $\tau = 0,5; 1; 1,5; 3$

Согласно рис. 1 имеются области значений нормированного отклонения  $b$ , в которых точности адаптивных комбинированных оценок (7), (8) выше по сравнению с обычной эмпирической  $\hat{J}$  с асимптотической нормированной СКО, равной 1. В такой области точность оценки (8) выше при  $\sigma_0 > \sigma$  (красная линия) и ниже при  $\sigma_0 < \sigma$  (зеленая линия), при  $\sigma_0 = \sigma$  оценка (8) имеет такую же асимптотическую нормированную СКО, что и оценка (7) (синяя пунктирная линия). Вне этой области

наблюдается обратная картина. Наименьшие значения асимптотических нормированных СКО достигаются у всех трех оценок при  $b = 0$ , у комбинированной оценки (2) с оптимальным весовым коэффициентом (синяя сплошная линия) оно равно нулю.

Отметим, что согласно формуле (12)  $S^2(\infty, b) = 1$  для любых  $b$ . Этот факт иллюстрирует линия при  $\tau = 3$  (график  $S^2(3, b)$ ), которая показывает тенденцию приближения к  $S^2(\infty, b) = 1$ .

Снижение точности оценок (7), (8) по сравнению с (2) обусловлено наличием погрешности в оценках весового коэффициента  $\lambda$ . Для некоторых значений  $b$  погрешность «съедает» повышение точности от привлечения априорной догадки и делает оценки (7), (8) менее точными по сравнению с эмпирической  $\hat{J}$ .

### Заключение

В данной работе рассмотрена задача оценивания линейного функционала от неизвестного распределения, который выражает числовую характеристику случайной величины. При этом исследователь может предположить допустимость конкретного параметрического класса распределений при оценивании функционала. Предлагаются адаптивные оценки функционала, учитывающие априорную догадку о параметрическом классе распределений. Полученные асимптотические распределения предложенных оценок позволили изучить влияние априорной догадки на точность оценивания аналитически. Найдены асимптотические нормированные СКО, усредненные по стандартному нормальному закону, что позволило сравнить точность оценивания адаптивных комбинированных оценок (7) и (8) с оптимальной (2).

### Список источников

1. Ferguson T.S. A Bayesian Analysis of Some Nonparametric Problems // *The Annals of Statistics*. 1973. V. 1 (2). P. 209–230.
2. Albers C.J., Schaafsma W. Estimating a density by adapting an initial guess // *Computational Statistics & Data Analysis*. 2003. V. 42. P. 27–36.
3. Tarima S.S., Dmitriev Yu.G. Statistical estimation with possibly incorrect model assumptions // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2009. № 3 (8). С. 87–99.
4. Дмитриев Ю.Г., Тарасенко П.Ф. Использование априорной информации в статистической обработке экспериментальных данных // *Известия вузов. Физика*. 1992. № 9. С. 136–142.
5. Dmitriev Yu.G., Tarassenko P.F., Ustinov Yu.K. On Estimation of Linear Functional by Utilizing a Prior Guess // *ITMM 2014, CCIS 487 / A. Dudin et al. (eds.)*. 2014. P. 82–90.
6. Dmitriev Yu.G., Tarassenko P.F. On Adaptive Estimation Using a Prior Guess // *Proc. of The International Workshop. Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach*. Novosibirsk, Russia. Novosibirsk, 14–15 September, 2015. Novosibirsk : NSTU publisher, 2015. P. 49–55.
7. Abu-Dayyeh W.A., Ahmed M.S., Ahmed R.A., Muttlak H.A. Some estimators of a finite population mean using auxiliary information // *Applied Mathematics and Computation*. 2003. V. 139. P. 287–298.
8. Al-Omari A.I. Ratio estimation of the population mean using auxiliary information in simple random sampling and median ranked set sampling // *Statistics and Probability Letters*. 2012. V. 82. P. 1883–1890.
9. Haq A., Shabbir J. An improved estimator of finite. population mean when using two auxiliary attributes // *Applied Mathematics and Computation*. 2014. V. 241. P. 14–24.
10. Vishwakarma G.K., Singh H.P. A general procedure for estimating the mean using double sampling for stratification and multi-auxiliary information // *Journal of Statistical Planning and Inference*. 2012. V. 142. P. 1252–1261. doi: 10.1016/j.jspi.2011.12.007
11. Arcos A., Rueda M., Martinez M.D., Gonzalez S., Roman Y. Incorporating the auxiliary information available in variance estimation // *Applied Mathematics and Computation*. 2005. V. 160. P. 387–399. doi: 10.1016/j.amc.2003.11.010
12. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М. : Наука, 1973. 900 с.
13. Боровков А.А. Математическая статистика. М. : Наука, 2007. 704 с.

### References

1. Ferguson, T.S. (1973) A Bayesian Analysis of Some Nonparametric Problems. *The Annals of Statistics*. 1(2). pp. 209–230.
2. Albers, C.J. & Schaafsma, W. (2003) Estimating a density by adapting an initial guess. *Computational Statistics & Data Analysis*. 42. pp. 27–36.

3. Tarima, S.S. & Dmitriev, Yu.G. (2009) Statistical estimation with possibly incorrect model assumptions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(8). pp. 87–99.
4. Dmitriev, Yu.G. & Tarassenko, P.F. (1992) Use of a priori information in statistical processing of experimental data. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 9. pp. 136–142.
5. Dmitriev, Yu.G., Tarassenko, P.F. & Ustinov, Yu.K. (2014) On Estimation of Linear Functional by Utilizing a Prior Guess. In: Dudin, A. et al. (eds) *ITMM 2014, CCIS 487*. pp. 82–90.
6. Dmitriev, Yu.G. & Tarassenko, P.F. (2015) On Adaptive Estimation Using a Prior Guess. *Proc. of The International Workshop. Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach*. Novosibirsk, Russia. Novosibirsk, September 14–15, 2015. NSTU. pp. 49–55.
7. Abu-Dayyeh, W.A., Ahmed, M.S., Ahmed, R.A. & Muttalak, H.A. (2003) Some estimators of a finite population mean using auxiliary information. *Applied Mathematics and Computation*. 139. pp. 287–298.
8. Al-Omari, A.I. (2012) Ratio estimation of the population mean using auxiliary information in simple random sampling and median ranked set sampling. *Statistics and Probability Letters*. 82. pp. 1883–1890.
9. Haq, A. & Shabbir, J. (2014) An improved estimator of finite population mean when using two auxiliary attributes. *Applied Mathematics and Computation*. 241. pp. 14–24.
10. Vishwakarma, G.K. & Singh, H.P. (2012) A general procedure for estimating the mean using double sampling for stratification and multi-auxiliary information. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 142. pp. 1252–1261. DOI: 10.1016/j.jspi.2011.12.007
11. Arcos, A., Rueda, M., Martinez, M.D., Gonzalez, S. & Roman, Y. (2005) Incorporating the auxiliary information available in variance estimation. *Applied Mathematics and Computation*. 160. pp. 387–399. DOI: 10.1016/j.amc.2003.11.010
12. Kendall, M. & Stuart, A. (1973) *Statisticheskie vyvody i svyazi* [Statistical Inferences and Relationships]. Translated from English. Moscow. Nauka.
13. Borovkov, A.A. (2007) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Moscow. Nauka.

#### **Информация об авторах:**

**Дмитриев Юрий Глебович** – доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dmit@mail.tsu.ru

**Кошкин Геннадий Михайлович** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kgm@mail.tsu.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### **Information about the authors:**

**Dmitriev Yuri G.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmit@mail.tsu.ru

**Koshkin Gennady M.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kgm@mail.tsu.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 19.10.2023; принята к публикации 05.03.2024

Received 19.10.2023; accepted for publication 05.03.2024

Научная статья

УДК 621.396

doi: 10.17223/19988605/66/5

## Применение неконтролируемой кластеризации выборок для повышения качественных показателей многоуровневых моделей обработки данных

Илья Сергеевич Лебедев

*Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук,  
Санкт-Петербург, Россия, isl\_box@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматривается задача повышения качественных показателей моделей обработки данных за счет сегментации выборок. Предлагается многоуровневая архитектура, позволяющая определять текущие свойства данных в сегментах и назначать лучшие по достигаемым качественным показателям модели. Приведено формальное описание архитектуры. Предложенное решение направлено на снижение затрат на переобучение моделей в случае трансформации свойств данных. Проведены экспериментальные исследования на ряде датасетов, которые показывают повышение качественных показателей обработки. Модель может быть рассмотрена как совершенствование ансамблевых методов обработки.

**Ключевые слова:** машинное обучение; модель обработки данных; сегментация выборки.

**Для цитирования:** Лебедев И.С. Применение неконтролируемой кластеризации выборок для повышения качественных показателей многоуровневых моделей обработки данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 44–54. doi: 10.17223/19988605/66/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/5

## Uncontrolled dataset clustering to improve the quality indicators of multilevel data processing models

Ilya S. Lebedev

*Saint Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation,  
isl\_box@mail.ru*

**Abstract.** The problem of improving the quality indicators of data processing models by segmenting data samples is considered. A multi-level data processing architecture is proposed, which allows determining the current properties of data in segments and assigning the best models according to the achieved quality indicators. A formal description of the architecture is given. The proposed solution is aimed at reducing the cost of retraining models in the case of transformation of data properties. Experimental studies have been carried out on a number of data sets that show an increase in the quality of processing indicators. The model can be considered as an improvement of ensemble methods of processing data samples.

**Keywords:** machine learning; data processing model; sample segmentation.

**For citation:** Lebedev, I.S. (2024) Uncontrolled dataset clustering to improve the quality indicators of multilevel data processing models. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 44–54. doi: 10.17223/19988605/66/5

## **Введение**

Постоянно возникающая потребность повышения качественных показателей при решении задач классификации, регрессии, прогнозирования, вызывает необходимость совершенствования методов обработки данных. Построение адекватной модели зависит от свойств ограниченной обучающей выборки, которая должна повторять свойства генеральной совокупности. Для достижения высоких показателей качества требуется большой объем объектов наблюдения, что не всегда возможно. Возникающие внешние и внутренние события в системе могут приводить к изменению свойств и характеристик анализируемых данных. Вследствие этого возникает задача оценки адекватности модели и необходимости переобучения. При этом обучение многих моделей является уникальным процессом, требующим значительных ресурсов, времени, определенных исследований и опыта.

На сегодняшний день одним из основных направлений повышения качества обрабатываемой информации является объединение моделей в различные ансамбли. Интерес к таким методам не угасает, несмотря на преобладание нейросетового подхода [1]. Это связано с тем, что в целях повышения показателей качества при обработке данных возникает необходимость реализации гибридных моделей, где применяется сочетание методов глубокого обучения с классическими алгоритмами классификации [2]. Такой симбиоз для отдельных задач позволяет достичь значительного улучшения показателей качества [3–5]. Постоянно осуществляются исследования агрегации моделей обработки данных. Рассматриваются «выборочные» ансамбли, применяющие различные функции взвешенного, выборочного голосования, каскады простых алгоритмов и глубоких нейронных сетей [6, 7]. Все эти методы позволяют улучшить отдельные качественные показатели, однако основными их недостатками являются ресурсоемкость и увеличение времени работы алгоритма.

Другое направление повышения показателей качества обработки данных связано с формированием выборок. Современный подход к методам машинного обучения определяется парадигмой «модель плюс данные», для него и модель, и данные обладают одинаковой важностью. В целях повышения качественных показателей обработки и оптимизации процессов обучения используются методы разделения данных.

Разделение выборок для моделей обработки рассматривается как вспомогательный элемент ансамблевых методов. Оно заключается в том, чтобы сначала сгруппировать данные, а затем независимо обучить алгоритмы на подвыборках. Однако вопросы формирования сегментов, оптимизированных для повышения производительности моделей, обученных на них, обычно не рассматриваются.

Многие наборы данных имеют сложные базовые структуры. При применении, например, различных алгоритмов классификации ко всей выборке целиком могут возникнуть ситуации, влияющие на достижение заданных качественных показателей. Линейные классификаторы будут терять полноту и точность в случае нелинейного распределения данных. Нелинейные классификаторы, нейронные сети потребуют больших наборов обучающих данных, ресурсов для достижения качественных показателей результатов. Однако если в данных обнаруживаются сегменты, то известно, что использование такой информации во многих случаях позволяет повысить качество обработки как для линейных, так и для нелинейных классификаторов [8, 9].

Применение глубокого анализа для разделения выборок часто позволяет обнаружить в сегментах относительно однородные характеристики, которые обеспечивают преимущества при построении моделей обработки [10–12]. В работах [7, 10] были исследованы различные аспекты вертикально разделенных данных, предложены технологии, базовые алгоритмы и комбинированные стратегии, направленные на выбор объектов наблюдения, позволяющих получить основные характеристики последовательностей и выборок, исключить из рассмотрения значения, приводящие к искажению свойств [11–16]. В [17] исследовалось влияние кластеризации на качество прогнозов классификатора SVM. Были сделаны выводы о связи между количеством кластеров и качеством классификации.

Однако использование описываемых методов требует значительных затрат на анализ обрабатываемых данных. В случае их неконтролируемого применения могут возникать ситуации, когда вместо повышения качественных показателей будет происходить ухудшение результатов обработки [18–21].

Таким образом, необходимо разрабатывать новые и адаптировать существующие стратегии, дающие возможность проводить точное и надежное обучение в рамках разделения функций и выборок. Данные становятся важным компонентом, влияющим на качество моделей в рамках рассматриваемой парадигмы. Данные и их свойства являются основополагающими при выборе модели, формировании ансамбля.

В статье предложен один из способов повышения качественных показателей: рассматривается использование многоуровневых моделей для решения задач классификации и регрессии.

## 1. Предлагаемая модель

### 1.1. Формулировка проблемы

На сегодняшний день большинство методов машинного обучения является сильно зависимым от свойств обрабатываемых данных. Каждая модель оптимизируется для достижения высоких качественных показателей на обучающих выборках, которые состоят из заранее определенной совокупности объектов наблюдения. В случае смещения диапазонов предикторов и целевых переменных, изменения распределений в информационных последовательностях показатели качества обработки могут снижаться. Это приводит к тому, что возникает необходимость в повторном применении методов обучения.

Процессы переобучения модели требуют большого количества времени и ресурсов. При возникновении таких явлений, как дрейф концепции, возможны ситуации, когда к моменту переобучения модель обработки может потерять свою актуальность.

В связи с этим рассматривается решение, основанное на разделении, сегментировании выборок, на которых в зависимости от свойств данных происходит выбор модели с лучшими качественными показателями. Это реализуется формированием моделей обработки данных, состоящих из нескольких уровней. На каждом из них решаются заранее определенные задачи: анализ и сегментирование поступающих информационных потоков, обучение заранее заданных моделей, назначение модели, имеющей лучшие качественные показатели на текущем сегменте. На рис. 1 представлена трехуровневая модель обработки.

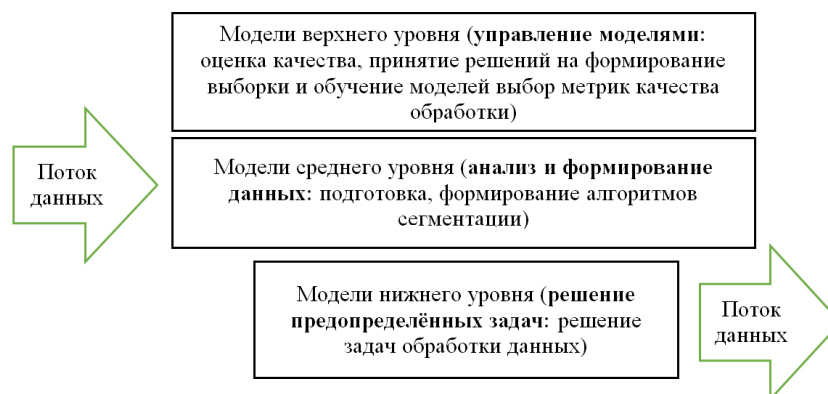


Рис. 1. Трехуровневая модель обработки данных

Fig. 1. Three-level data processing model

На нижнем уровне осуществляется решение задач, например, прогнозирования или классификации. На среднем уровне решаются задачи, возникающие вследствие изменений свойств поступающих данных, связанных с нахождением точек разладки для временных рядов, обнаружения дрейфа концепции. На верхнем уровне происходит отслеживание показателей качества, осуществляется общее управление.

Во многих системах, обрабатывающих информационные потоки, вследствие внешних и внутренних воздействий свойства данных могут изменяться окончательно либо через определенные вре-

менные интервалы возвращаться в исходное состояние. В связи с этим возникает необходимость отслеживать поступающие последовательности, разбивать их на сегменты с учетом влияющих факторов. Цель разделения выборки состоит в том, чтобы получить подгруппы данных, между классами которых возможно построение относительно несложных разделяющих поверхностей, обеспечивающих минимум количества ошибок. При этом желательно добиваться, чтобы вычислительная сложность, ресурсоемкость были минимальными. Решением обозначенных задач занимаются модели среднего уровня, которые передают информацию об изменении характеристик на верхний уровень. Далее модели верхнего уровня, исходя из текущих свойств обрабатываемых данных, принимают решение о назначении, дообучении и настройке моделей нижнего уровня.

## 1.2. Формализованное описание предлагаемой модели

Описание предлагаемой модели может быть представлено следующим образом.

Дана обучающая выборка  $X$ , отражающая свойства генеральной совокупности. Имеется заранее определенный набор моделей обработки данных  $a_1, \dots, a_n$ . Множество  $X$  подается на функцию разделения  $\mu: X \rightarrow \{1, \dots, M\}$ , которая формирует сегменты  $X_1, \dots, X_M$ . Формирование сегментов может осуществляться различными алгоритмами и методами, например поиска точек разладки для временных последовательностей, определения дрейфа концепции, кластеризации выборок.

Совокупности объектов наблюдений в полученных сегментах могут обладать различными свойствами. Поэтому каждый алгоритм обработки данных сегмента имеет свои качественные показатели, отличные от другого.

Определим значение функционала качества  $q_{ij} = Q(a_j(x), X_i)$  для модели  $a_j(x)$  на данных сегмента  $X_i$ . Тогда для сегментов  $X_i$ , полученных с помощью функции разделения  $\mu$ , возможно сформировать таблицу значений функционала качества для каждой модели обработки данных:

|         |          |         |          |
|---------|----------|---------|----------|
|         | $X_1$    | $\dots$ | $X_M$    |
| $a_1$   | $q_{11}$ | $\dots$ | $q_{1M}$ |
| $\dots$ | $\dots$  | $\dots$ | $\dots$  |
| $a_n$   | $q_{n1}$ | $\dots$ | $q_{nM}$ |

Таблица показывает значения выбранного функционала качества для модели обработки данных на каждом сегменте.

В случае приблизительного равенства мощностей множеств  $X_1, \dots, X_M$  возникает возможность выбора значений  $q = \max_i q_{ij}$ . Это позволяет назначить модель  $a_i(x)$  на каждый сегмент, где с наибольшим функционалом качества

$$a_j(x) = \arg \max_{a_j \in A} Q(a_j(x), X_i). \quad (1)$$

Такой подход (1) имеет ряд недостатков. Во-первых, обычно частота появления объектов наблюдения в сегментах может существенно изменяться. Во-вторых, разные способы разделения выборки могут формировать сегменты с разными свойствами данных. Поэтому возможна оценка качественных показателей алгоритмов обработки данных сегментов, полученных при различных функциях,  $\mu_1, \dots, \mu_m$  разделения выборки, для каждой функцией  $\mu_i: X \rightarrow \{1_{\mu_i}, \dots, M_{\mu_i}\}$ , разбивающей выборку  $X$  на  $M_{\mu_i}$  количество сегментов. Полагая  $n$  – количество обучающих примеров всей выборки,  $n_i$  – количество обучающих примеров в  $i$ -м сегменте, возможно определить усредненное значение показателя качества  $q^{\mu_i}$  при сегментации:

$$q^{\mu_i} = \sum_{i=1}^{M_{\mu_i}} \max_i \left( \frac{n_i}{n} q_{ij}^{\mu_i} \right). \quad (2)$$

Полученное значение (2) можно сравнить со значением функционала качества на всей выборке и принять решение о сегментировании, выборе функции разделения данных. Применяя различные функции  $\mu_1, \dots, \mu_m$ , получаем разные разбиения множества  $X$  и значения функционала качества. Вычислив максимальное значение  $q^{\mu_i} = \max\{q^{\mu_1}, \dots, q^{\mu_m}\}$ , мы можем выбрать функцию разделения  $\mu_i$  и назначить модели и алгоритмы обработки данных  $a_j^{\mu_i}(x)$  с лучшими качественными показателями.

Для выбранной функции разделения  $\mu_i$  на полученных с ее применением сегментах  $X_i^{\mu_i} \in X$  можно определить модели обработки  $a_j^{\mu_i}(x)$ , которые достигают лучших результатов:

$$a_j^{\mu_i}(x) = \arg \max_{a_j^{\mu_i} \in A, \mu_i \in \mu} Q(a_j^{\mu_i}(x), X_i^{\mu_i}). \quad (3)$$

Выражение (3) позволяет учитывать различные способы разделения выборки данных.

### 1.3. Реализация модели

Фреймворк реализации представлен на рис. 2. На подготовительном этапе происходит формирование обучающего множества. Затем выполняется выбор метрики, определяющей качественные показатели обработки, определяются множество алгоритмов разделения выборки на сегменты (кластеризации) и множество исследуемых моделей обработки данных.

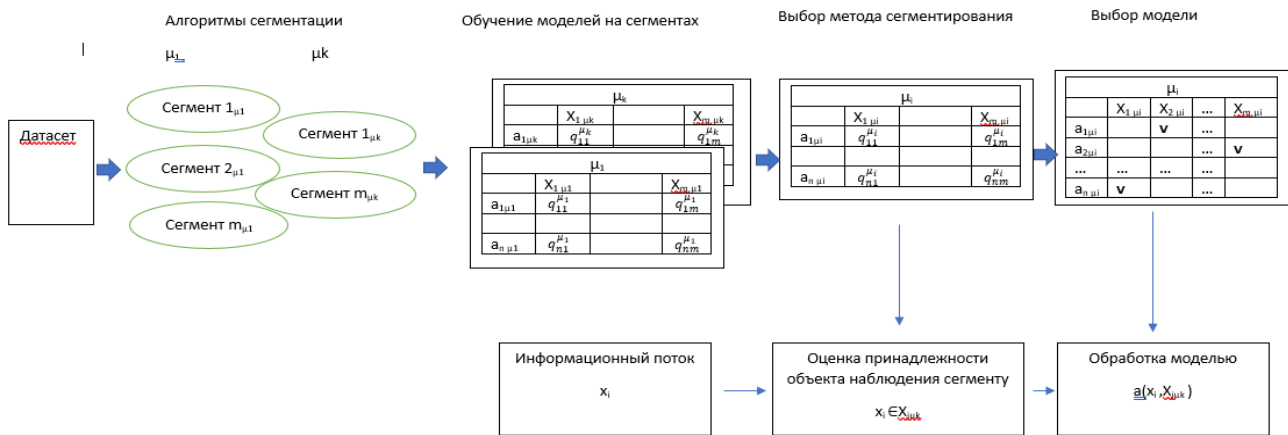


Рис. 2. Фреймворк реализации модели обработки данных  
Fig. 2. Data processing model implementation framework

Обучающая выборка подвергается обработке алгоритмами кластеризации, имеющими различные параметры, определяющими количество кластеров и типы расстояний между ними. Для каждого алгоритма кластеризации формируются наборы сегментов, которые рассматриваются по отдельности. Каждый сегмент набора подается на вход модели, и на нем происходит обучение, определяются достигаемые качественные показатели. Далее для каждого метода разделения происходит анализ достигнутых показателей качества и на основании (2) осуществляется выбор лучшего метода разбиения выборки. Выражение (3) используется для назначения модели обработки нижнего уровня на конкретный сегмент.

## 2. Эксперимент

### 2.1. Модельные данные

Данные, поступающие от источников, часто представляют трудно разделимые последовательности. Они могут содержать множество классов, неоднородность областей, различные диапазоны значений. Рассматриваемый пример модельных данных приведен на рис. 3.



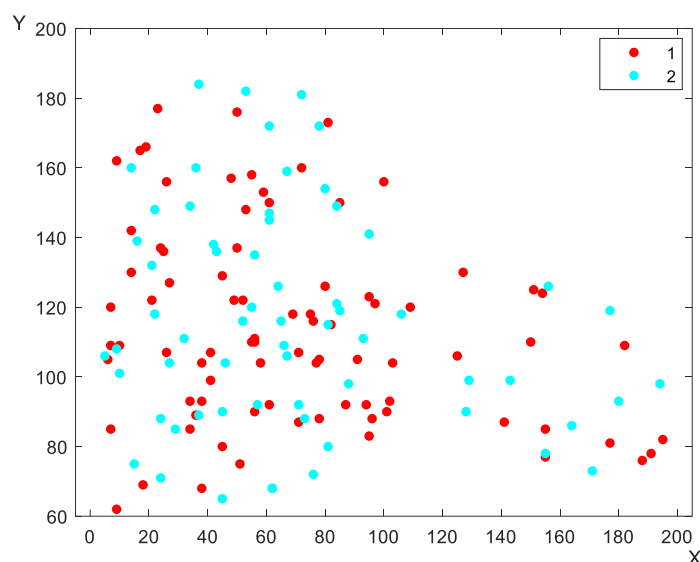


Рис. 3. Модельный ряд данных значений  $X$ ,  $Y$  для двух классов  
Fig. 3. Model range of data values  $X$ ,  $Y$  for two classes

При проведении эксперимента в качестве функций разделения  $\mu_i$  была выбрана кластеризация с различными мерами расстояния, для анализа качественного показателя осуществлялась оценка доли правильных ответов (ассигасу). В целях реализации предполагаемой модели первым шагом является разделение набора на отдельные кластеры. Полученные кластеры должны удовлетворять функционалу качества (3). В эксперименте количество сегментов определяется достигаемыми показателями качества моделей обработки данных. В рассматриваемом примере каждая модель (наивный байесовский классификатор NB, линейный дискриминант LD, метод опорных векторов SVM, деревья решений DT, К-ближайших соседей KNN, ансамблевая модель всех классификаторов Ens) обучалась на всей последовательности целиком и на полученных в результате кластеризации подмножествах данных с использованием евклидова расстояния.

На рис. 4 показаны показатели ассигасу при увеличении количества кластеров, разделяющих выборку, от 2 до 70 для каждого классификатора.

Графики рис. 4 показывают, что на достигаемые значения показателя ассигасу оказывает влияние количество кластеров. На примере доли правильных ответов видно, что до определенного момента чем больше кластеров создается, тем выше значения качественных показателей. После этого качественные показатели модели выходят на плато и дальнейшее увеличение количества кластеров, сегментов к существенному улучшению качества классификации не приводят. В отдельных случаях деление на кластеры приводит к ухудшению показателей моделей обработки. Это связано с тем, что при неконтролируемой кластеризации кластеры могут иметь различные распределения данных. И, например, «деревья решений» получают недостаточно информации, чтобы определить распределение данных. На достигаемые показатели моделей обработки способна оказывать влияние и форма кластеров, определяемая мерой расстояния между точками, затрудняющая построение эффективной разделяющей поверхности.

Кроме того, при неограниченном разрастании кластеров происходит ситуация, когда появляются «микркластеры», содержащие объекты наблюдения только одного класса. При применении решающего правила по соотносению нового объекта на основании близости к центру ближайшего кластера в «микркластере», где содержатся объекты только одного класса, ему будет просто присваиваться класс. А это, исходя из объема обучающей выборки, не всегда является корректным.

Предложенное решение позволяет использовать кластеры, получая дополнительную информацию для обучения модели. Однако кластеры зачастую неоднородны. На одних сегментах могут лучше показывать себя одни алгоритмы, на других – другие. Разделив модели рассматриваемого примера на две группы: «сильных» алгоритмов классификации, где значение ассигасу близко к 1, и «слабых»,

выдающих результаты в промежутке 0,5–0,7, можно увидеть улучшение качественных показателей при обработке данных по сегментам по сравнению со всей выборкой.

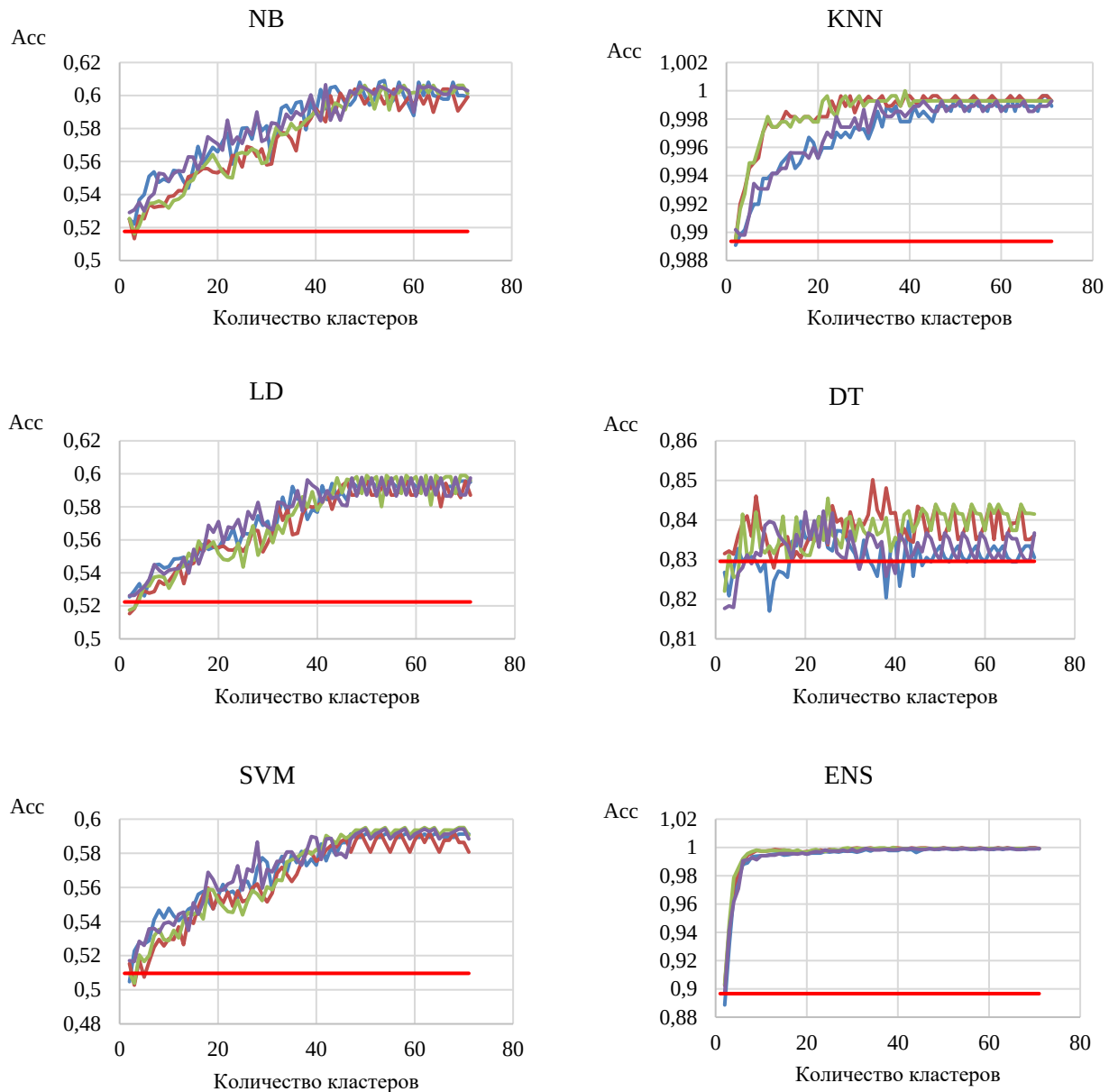


Рис. 4. Результаты работы моделей обработки данных (красная линия – при обработке всей выборки целиком, синяя – формирование кластеров с использованием евклидовой меры расстояния, желтая – с использованием меры расстояния «городских кварталов», серая – с использованием меры на основе коэффициента корреляции, оранжевая – с использованием «косинусной меры»

Fig. 4. Results of data processing models (red line is processing the entire sample, blue is cluster formation using the Euclidean distance measure, yellow is using the distance measure of “city blocks”, gray – using a measure based on the correlation coefficient, orange is using the “cosine” measure

На рис. 4 и 5 показаны значения ассурасу для различных групп («сильных» и «слабых») классификаторов в случае разбиения выборки на 14 сегментов.

Гистограмма рис. 4 показывает, что на данной выборке сегментирование обычно позволяет получить выигрыш для каждой модели при анализе классификатором сегмента по отдельности по сравнению со всей выборкой целиком.

На рис. 5 рассматриваются три «слабые» модели обработки (NB, линейный дискриминант LD, линейный SVM). В случае деления выборки на 14 кластеров на каждый сегмент можно назначить

классификатор с лучшими показателями, что позволяет улучшить результаты по сравнению с обработкой всей выборки.

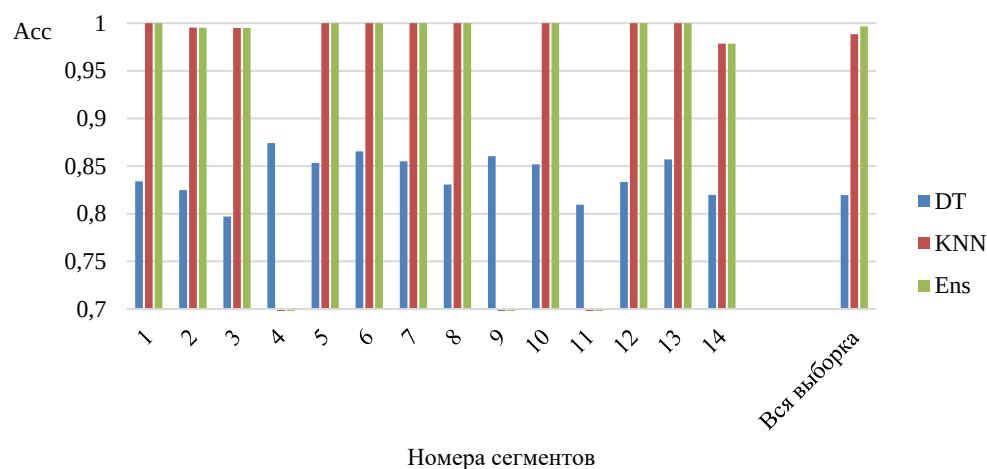


Рис. 4. Результаты работы «сильных» моделей обработки данных на различных кластерах  
Fig. 4. Results of the work of “strong” data processing models on various clusters

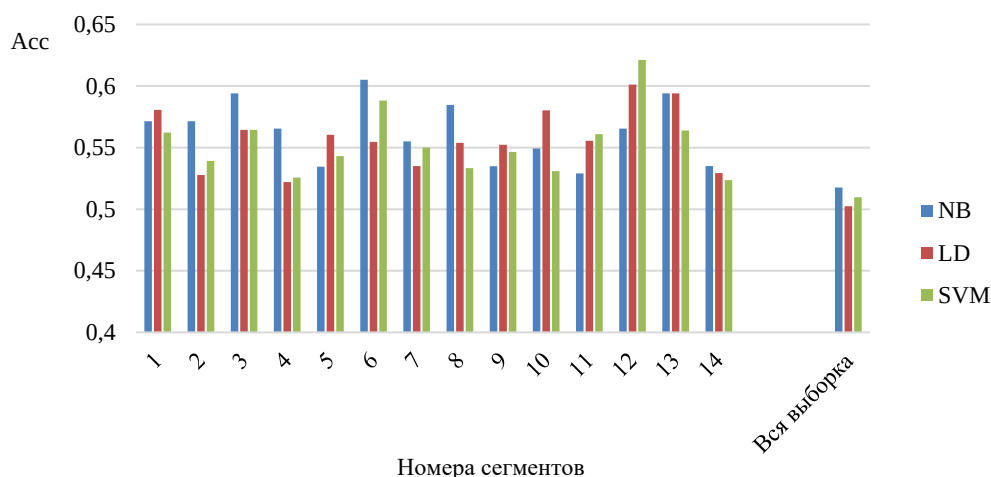


Рис.5. Результаты работы «слабых» моделей обработки данных на различных кластерах  
Fig.5. Results of “weak” data processing models on various clusters

Каждый сегмент может по-разному влиять на алгоритм: как улучшать его показатели, так и ухудшать. Форма кластеров, получаемая в результате применения различных расстояний, может влиять на качественные показатели моделей обработки данных. В случае одной меры возможен один набор алгоритмов, другой меры – другой. В рассматриваемом случае, назначая алгоритм обработки, имеющий лучшие качественные показатели, на каждый сегмент, можно получить выигрыш в показателе по сравнению с обработкой всей выборки одной моделью.

## 2.2. Результаты обработки реальных данных

Следующим этапом эксперимента был рассмотрен ряд доступных наборов. Они обрабатывались моделями обработки данных, количество классов в наборах данных от 2 до 24, количество кластеров до 70. При формировании кластеров использовалась евклидова метрика расстояния. Для обучающей выборки использовалось около 60% записей. В таблице показаны результаты доли правильных ответов моделей обработки данных на 50 выделенных сегментах и на всей выборке целиком, когда модели достигают предела значений качественного показателя ассигуры.

## Характеристики наборов данных и результаты ассигуры моделей обработки

| Dataset                                    | 150         | 26 280      | 26 280      | 30 000      | 30 000      |
|--------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Количество записей                         | 5           | 3           | 3           | 17          | 17          |
| Количество атрибутов                       | 3           | 2           | 24          | 24          | 24          |
| Количество классов                         |             |             |             |             |             |
| NB ассигуру 50 кл / ассигуру всей выборки  | 0,84 / 0,80 | 0,86 / 0,79 | 0,76 / 0,70 | 0,73 / 0,67 | 0,71 / 0,64 |
| LD ассигуру 50 кл / ассигуру всей выборки  | 0,84 / 0,79 | 0,85 / 0,78 | 0,77 / 0,69 | 0,75 / 0,68 | 0,72 / 0,64 |
| SVM ассигуру 50 кл / ассигуру всей выборки | 0,83 / 0,78 | 0,84 / 0,78 | 0,75 / 0,70 | 0,72 / 0,65 | 0,70 / 0,66 |
| KNN ассигуру 50 кл / ассигуру всей выборки | 0,87 / 0,80 | 0,92 / 0,88 | 0,82 / 0,77 | 0,77 / 0,70 | 0,79 / 0,73 |
| DT ассигуру 50 кл / ассигуру всей выборки  | 0,87 / 0,82 | 0,90 / 0,86 | 0,82 / 0,79 | 0,75 / 0,73 | 0,77 / 0,75 |
| Ens ассигуру 50 кл / ассигуру всей выборки | 0,91 / 0,88 | 0,93 / 0,92 | 0,86 / 0,83 | 0,79 / 0,76 | 0,81 / 0,79 |

Результаты, отраженные в таблице, показывают для выбранных датасетов повышение ассигуры для различных размерностей данных и разного количества классов.

## Заключение

В статье рассмотрена многоуровневая модель обработки данных, использующая сегментацию выборки. Разделение данных позволяет повысить качественные показатели обработки за счет уменьшения разброса параметров внутри отдельных сегментов. Обучение моделей на сегментах дает возможность оценить получаемые качественные показатели и выбрать для каждого сегмента модель, имеющую лучшие качественные показатели. Назначение алгоритмов с лучшими качественными показателями на сегменты позволяет повысить качественные показатели обработки выборки по сравнению с отдельным классификатором от 1 до 8%.

Предлагаемое решение является расширением ансамблевых методов обработки данных. В отличие от общепринятых подходов формирования ансамблевых моделей, в рассматриваемой модели не требуется наличия сложных функций агрегации и вычислительных ресурсов для параллельной работы классифицирующих алгоритмов. Модель может быть выбрана в качестве дальнейшего усовершенствования гибридных классификаторов.

## Список источников

1. Zhang Y., Liu J., Shen W. A Review of Ensemble Learning Algorithms Used in Remote Sensing Applications // Applied Sciences. 2022. V. 12 (12). P. 54–86.
2. Trevizan B., Chamby-Diaz J., Bazzan A.L.C., Recamonde-Mendoza M. A comparative evaluation of aggregation methods for machine learning over vertically partitioned data // Expert Systems with Applications. 2020. V. 152. P. 113–126.
3. Schuster M., Paliwal K.K. Bidirectional recurrent neural networks // IEEE transactions on Signal Processing. 1997. V. 45 (11). P. 2673–2681.
4. Wang S., Zhou W., Jiang C. A survey of word embeddings based on deep learning // Computing. 2020. V. 102 (3). P. 717–740.
5. Кульневич А.Д., Кошечкин А.А., Карев С.В., Замятин А.В. Подход к распознаванию именованных сущностей на примере технологических терминов в условиях ограниченной обучающей выборки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 71–81. doi: 10.17223/19988605/58/7
6. Sun L., Mu W.S., Qi B. A new privacy-preserving proximal support vector machine for classification of vertically partitioned data // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. 2015. V. 3 (6). P. 109–118.
7. Zhou Z.-H., Feng J. Deep forest // National Science Review. 2019. V. 6 (1). P. 74–86.
8. Lu J., Liu A., Dong F., Gu F., Gama J., Zhang G. Learning under concept drift: a review // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2019. V. 31 (12). P. 2346–2363.
9. Salehi H., Burgueño R. Emerging artificial intelligence methods in structural engineering // Engineering Structures. 2018. V. 171. P. 170–189.
10. Takacs A., Toledano-Ayala M., Dominguez-Gonzalez A., Pastrana-Palma A., Velazquez D.T., Ramos J.M., Rivas-Araiza A.E. Descriptor generation and optimization for a specific outdoor environment // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 2169–2216.
11. Liu J., Li Y., Song S., Xing J., Lan C., Zeng W. Multi-modality multi-task recurrent neural network for online action detection // IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. 2018. V. 29 (9). P. 2667–2682.
12. Di Franco G., Santurro M. Machine learning, artificial neural networks and social research // Qual Quant. 2021. V. 5. P. 1007–1025.
13. Zhang X., Wang M. Weighted Random Forest Algorithm Based on Bayesian Algorithm // Journal of Physics: Conference Series. 2021. V. 1924. P. 1–6.

14. Piernik M., Morzy T. A study on using data clustering for feature extraction to improve the quality of classification // *Knowledge and Information Systems*. 2021. V. 63 (7), P. 1771–1805.
15. Герасимова Д.С., Саяпин А.В., Палухин А.А., Кацура А.В. Bootstrap-метод для оценки статистических характеристик малых выборок авиационных агрегатов // *Сибирский журнал науки и технологий*. 2018. Т. 19, № 3. С. 482–488.
16. Доронина Ю.В., Скатков А.В. Многокритериальный анализ статистической устойчивости системных характеристик информационно-телекоммуникационных каналов // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2022. № 60. С. 59–72. doi: 10.17223/19988605/60/7
17. Lebedev I.S., Sukhoparov M.E. Adaptive Learning and Integrated Use of Information Flow Forecasting Methods // *Emerging Science Journal*. 2023. V. 7 (3). P. 704–723
18. Scanagatta M., Corani G., Zaffalon M., Yoo J., Kang U. Efficient learning of bounded-treewidth Bayesian networks from complete and incomplete data sets // *International Journal of Approximate Reasoning*. 2019. V. 95. P. 152–166.
19. Kheyreddine D., Kadda B.-B., Abdenour A. A new adaptive sampling algorithm for big data classification // *Journal of Computational Science*. 2022. V. 61. P. 101–116.
20. Sugita I., Matsuyama S., Dobashi H., Komura D., Ishikawa S. Viola: a structural variant signature extractor with user-defined classifications // *Bioinformatics*. 2022. V. 38. P. 540–542.
21. Лебедев И.С. Сегментирование множества данных с учетом информации воздействующих факторов // *Информационно-управляющие системы*. 2021. № 3. С. 29–38.

## References

1. Zhang, Y., Liu, J. & Shen, W. (2022) A Review of Ensemble Learning Algorithms Used in Remote Sensing Applications. *Applied Sciences*. 68(12). pp. 54–86.
2. Trevizan, B., Chamby-Diaz, J., Bazzan, A.L.C. & Recamonde-Mendoza, M. (2020) A comparative evaluation of aggregation methods for machine learning over vertically partitioned data. *Expert Systems with Applications*. 152(2). pp. 113–126.
3. Schuster, M. & Paliwal, K.K. (1997) Bidirectional recurrent neural networks. *IEEE transactions on Signal Processing*. 45(11). pp. 2673–2681.
4. Wang, S., Zhou, W. & Jiang, C. (2020) A survey of word embeddings based on deep learning. *Computing*. 102(3). pp. 717–740.
5. Kulnevich, A.D., Koshechkin, A.A., Karev, S.V. & Zamyatin, A.V. (2022) An approach to recognizing named entities using the example of technological terms in a limited training sample. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 71–81. DOI: 10.17223/19988605/58/7
6. Sun, L., Mu, W.S. & Qi, B. (2015) A new privacy-preserving proximal support vector machine for classification of vertically partitioned data. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*. 3(6). pp. 109–118.
7. Zhou, Z.-H. & Feng, J. (2019) Deep Forest. *National Science Review*. 6(1). pp. 74–86.
8. Lu, J., Liu, A., Dong, F., Gu, F., Gama, J. & Zhang, G. (2019) Learning under concept drift: a review. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 31(12). pp. 2346–2363.
9. Salehi, H. & Burgueño, R. (2018) Emerging artificial intelligence methods in structural engineering. *Engineering Structures*. 171. pp. 170–189.
10. Takacs, A., Toledano-Ayala, M., Dominguez-Gonzalez, A., Pastrana-Palma, A., Velazquez, D.T., Ramos, J.M. & Rivas-Araiza, A.E. (2020) Descriptor generation and optimization for a specific outdoor environment. *IEEE Access*. 8. pp. 2169–2216.
11. Liu, J., Li, Y., Song, S., Xing, J., Lan, C. & Zeng, W. (2018) Multi-modality multi-task recurrent neural network for online action detection. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 29(9). pp. 2667–2682.
12. Di Franco, G. & Santurro, M. (2021) Machine learning, artificial neural networks and social research. *Qual Quant*. 5. pp. 1007–1025.
13. Zhang, X. & Wang, M. (2021) Weighted Random Forest Algorithm Based on Bayesian Algorithm. *Journal of Physics: Conference Series*. 1924. pp. 1–6.
14. Piernik M. & Morzy, T. (2021) A study on using data clustering for feature extraction to improve the quality of classification. *Knowledge and Information Systems*. 63(7). pp. 1771–1805.
15. Gerasimova, D.S., Sayapin, A.V., Palukhin, A.A. & Katsura, A.V. (2018) Application of the bootstrap method for statistical characteristics assessment of aircraft components' small samples. *Sibirskiy zhurnal nauki i tekhnologii – The Siberian Aerospace Journal*. 19(3). pp. 482–488.
16. Doronina, Yu.V. & Skatkov, A.V. (2022) Multicriteria analysis of statistical stability of system characteristics of information and telecommunication channels. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 60. pp. 59–72. DOI: 10.17223/19988605/60/7
17. Lebedev, I.S. & Sukhoparov, M.E. (2023) Adaptive Learning and Integrated Use of Information Flow Forecasting Methods. *Emerging Science Journal*. 7(3). pp. 704–723
18. Scanagatta, M., Corani, G., Zaffalon, M., Yoo, J. & Kang, U. (2019) Efficient learning of bounded-treewidth Bayesian networks from complete and incomplete data sets. *International Journal of Approximate Reasoning*. vol. 95. pp. 152–166.
19. Kheyreddine, D., Kadda, B.-B. & Abdenour, A. (2022) A new adaptive sampling algorithm for big data classification. *Journal of Computational Science*. 61. pp. 101–116.

20. Sugita, I., Matsuyama, S., Dobashi, H., Komura, D. & Ishikawa, S. (2022) Viola: a structural variant signature extractor with user-defined classifications. *Bioinformatics*. 38. pp. 540–542.
21. Lebedev, I.S. (2021) Segmentirovanie mnozhestva dannykh s uchetom informatsii vozhdeystvuyushchikh faktorov [Dataset segmentation considering the information about impact factors]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control Systems*. 3. pp. 29–38.

**Информация об авторе:**

**Лебедев Илья Сергеевич** – профессор, доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории интеллектуальных систем Санкт-Петербургского Федерального исследовательского центра Российской академии наук, (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: isl\_box@mail.ru

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Information about the author:**

**Lebedev Ilya S.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Saint Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: isl\_box@mail.ru

*The author declares no conflicts of interests.*

*Поступила в редакцию 05.10.2023; принята к публикации 05.03.2024*

*Received 05.10.2023; accepted for publication 05.03.2024*

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/66/6

## Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий с продлевающимся мертвым временем в особом случае

Людмила Алексеевна Нежелская<sup>1</sup>, Илья Денисович Степаненко<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>1</sup> ludne@mail.ru

<sup>2</sup> 97step@mail.ru

**Аннотация.** Исследуется дважды стохастический обобщенный полусинхронный поток событий с двумя состояниями, функционирующий в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Рассматривается особый случай задания параметров потока. Разработан алгоритм оценивания длительности мертвого времени, основанный на методе моментов. Приводятся результаты статистических экспериментов, поставленных на имитационной модели потока, и анализ полученных значений оценок.

**Ключевые слова:** обобщенный полусинхронный поток событий; продлевающееся мертвое время; плотность вероятности; особый случай задания параметров потока; совместная плотность вероятности; условия рекуррентности; преобразование Лапласа; метод моментов; оценка длительности мертвого времени.

**Для цитирования:** Нежелская Л.А., Степаненко И.Д. Оценка длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий с продлевающимся мертвым временем в особом случае // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 55–68. doi: 10.17223/19988605/66/6

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/6

## Estimation of dead time duration in recurrent generalized semi-synchronous flow of events with prolonged dead time in a singular case

Lyudmila A. Nezhel'skaya<sup>1</sup>, Ilya D. Stepanenko<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

<sup>1</sup> ludne@mail.ru

<sup>2</sup> 97step@mail.ru

**Abstract.** In this paper we investigate a generalized semi-synchronous flow of events with two states and which is related to the class of double stochastic flows. Its functioning takes place in conditions of prolonged dead time of fixed duration. We consider a special case of flow parameters. An algorithm for estimating dead time of fixed duration based on the method of moments is being developed. The results of statistical experiments set up on the flow simulation model and the analysis of the obtained estimation values are presented.

**Keywords:** generalized semi-synchronous flow of event; prolonged dead time of fixed duration; probability density; special case of building flow parameters; joint probability density; flow recurrence conditions; Laplace transform, method of moments; estimation of the dead time duration.

**For citation:** Nezhel'skaya, L.A., Stepanenko, I.D. (2024) Estimation of dead time duration in recurrent generalized semi-synchronous flow of events with prolonged dead time in a singular case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 55–68. doi: 10.17223/19988605/66/6

## Введение

Математические модели сетей и систем массового обслуживания (СеМО, СМО) широко применяются для исследования и описания поведения различных физических, экономических, технических и других объектов и систем. Случайные входящие потоки запросов (событий, заявок) являются одним из основных элементов исследуемых СеМО и СМО [1].

На протяжении последнего столетия в качестве основной модели входящего потока рассматривался простейший (стационарный пуассоновский) поток запросов. Однако начиная с конца XX в. в силу интенсивного развития телекоммуникационных систем и сетей, разнородности передаваемых данных и их взаимной корреляции модель стационарного пуассоновского потока запросов перестала адекватно описывать реальные потоки запросов в таких системах и сетях. Таким образом, требования практики послужили стимулом к возникновению дважды стохастических потоков событий (коррелированных потоков), представляющих собой новую математическую модель реальных информационных потоков, наиболее адекватно учитывающую их коррелированный характер [2–4].

Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, сопровождающий процесс которых есть непрерывный случайный процесс [5, 6]; ко второму – потоки, сопровождающий процесс которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний [7–10].

Большинством авторов работ по теории массового обслуживания (ТМО) исследуются математические модели потоков событий, когда все события потока доступны наблюдению. В реальности же зарегистрированное событие может создать период мертвого времени для регистрирующего прибора (период ненаблюдаемости) [11], в течение которого другие события потока становятся недоступными для регистрирующего прибора (теряются).

При этом регистрирующие приборы могут быть как с непродлевающимся, так и с продлевающимся мертвым временем. Мертвое время можно рассматривать как искажающий фактор при решении задач оценивания состояний [12] и параметров [13–16] дважды стохастических потоков событий. Для установления средних потерь событий, возникающих из-за наличия мертвого времени, требуется оценить его длительность.

В работе [14] получены явные виды плотности вероятности длительности интервалов между событиями в обобщенном полусинхронном потоке, функционирующем в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности, в общем и в особом случаях соотношения параметров. Приведенные теоретические результаты позволили решить задачу оценивания длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке с непродлевающимся мертвым временем методом моментов и методом максимального правдоподобия [15].

Настоящая статья является непосредственным продолжением исследований обобщенного полусинхронного потока, функционирующего в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности (далее – поток), начатых в статьях [17, 18]. Методом моментов решается задача оценивания длительности мертвого времени в рекуррентном потоке для особого случая соотношения параметров потока.

### 1. Математическая модель потока. Постановка задачи

Изучается дважды стохастический обобщенный полусинхронный поток событий, сопровождающий процесс которого является кусочно-постоянным принципиально ненаблюдаемым случайным процессом  $\lambda(t)$  с двумя состояниями [12]: если  $\lambda(t) = \lambda_1$ , то имеет место первое состояние ( $S_1$ ) процесса  $\lambda(t)$  (потока), если  $\lambda(t) = \lambda_2$ , то второе состояние ( $S_2$ ) процесса  $\lambda(t)$  (потока), где  $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$ . В течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_i$ , имеет место пуассоновский поток событий с параметром  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . Переход из первого состояния процесса  $\lambda(t)$  во второе ( $S_1 \rightarrow S_2$ ) возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью  $p$  ( $0 < p \leq 1$ );



с вероятностью  $1-p$  процесс  $\lambda(t)$  остается в первом состоянии. Длительность временного интервала, на котором значение процесса  $\lambda(t) = \lambda_1$  – участка стационарности процесса  $\lambda(t)$  в первом состоянии – случайная величина с экспоненциальной функцией распределения  $F_1(t) = 1 - e^{-p\lambda_1 t}$ ,  $t \geq 0$  [19]. Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону  $F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}$ ,  $t \geq 0$ . Переход из второго состояния процесса  $\lambda(t)$  в первое состояние ( $S_2 \rightarrow S_1$ ) может осуществляться в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события потока. При переходе процесса  $\lambda(t)$  из второго состояния в первое инициируется с вероятностью  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ ) дополнительное событие в первом состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). При этом блочная матрица инфинитезимальных характеристик процесса  $\lambda(t)$  принимает вид [19]:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ (1-\delta)\alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha_2 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \|\mathbf{D}_0 | \mathbf{D}_1\|.$$

Элементами матрицы  $\mathbf{D}_1$  являются интенсивности переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние с наступлением события. Нondiagonalные элементы матрицы  $\mathbf{D}_0$  – интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления событий. Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{D}_0$  – интенсивности выхода процесса  $\lambda(t)$  из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

Обобщенный полусинхронный поток событий рассматривается при его неполной наблюдаемости, т.е. когда не все события потока доступны наблюдению. Каждое зарегистрированное в потоке событие порождает период ненаблюдаемости фиксированной длительности  $T$  (мертвое время), другие события, произошедшие в этот период, недоступны наблюдению (теряются). Хотя события и не наблюдаются в течение периода мертвого времени, каждое из них вызывает продление периода ненаблюдаемости на ту же величину  $T$ . Следующее наблюдаемое событие регистрируется после окончания последнего периода ненаблюдаемости и снова порождает период мертвого времени длительности  $T$ . Таким образом, общий период ненаблюдаемости является случайной величиной.

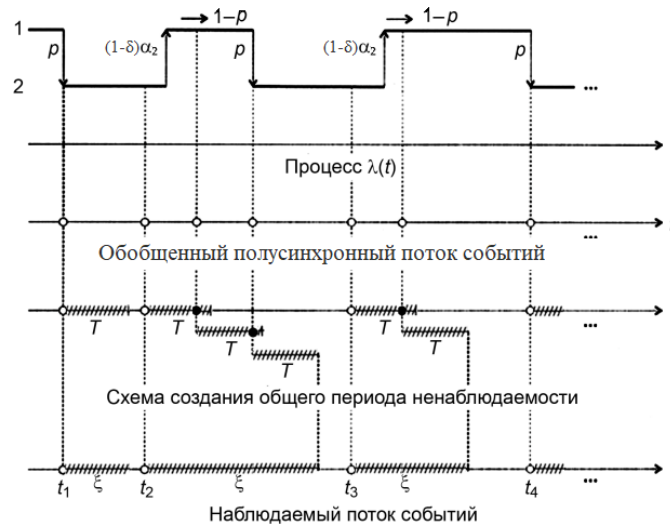


Рис. 1. Реализация обобщенного полусинхронного потока с продлевающимся мертвым временем фиксированной длительности  $T$

Fig. 1. Realization of Generalized semi-synchronous flow with an extended dead time of fixed duration  $T$

На рис. 1 показан пример одной из возможных реализаций процесса  $\lambda(t)$  и наблюдаемого потока, где 1, 2 – состояния случайного процесса  $\lambda(t) = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ ; черные точки – ненаблюдаемые

события;  $\xi$  – значения периодов ненаблюдаемости потока;  $t_1, t_2, \dots$  – моменты наступления событий в наблюдаемом потоке.

**Утверждение 1.1.** Для обобщенного полусинхронного потока событий сопровождающий случайный процесс  $\lambda(t)$  является марковским [19].

**Утверждение 1.2.** Моменты наступления событий  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  в обобщенном полусинхронном потоке порождают вложенную цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$  [19].

В [18] уравнение моментов для оценивания длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности  $T$ , выводится для общего случая соотношения параметров  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 \neq 0$  (иначе имеет место деление на ноль). Случай  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  требует отдельного исследования.

Цель данной работы заключается в получении и решении уравнения моментов для оценивания длительности мертвого времени в особом случае соотношения параметров  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ , а также проведении на имитационной модели статистических экспериментов для установления стационарного режима и выявления качества полученных оценок.

## 2. Вид плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в потоке

Рассматривается стационарный режим функционирования обобщенного полусинхронного потока событий в условиях полной наблюдаемости,  $T = 0$ .

Обозначим  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  – значение длительности  $k$ -го интервала между соседними событиями потока,  $p(\tau_k)$  – плотность вероятности длительности  $k$ -го интервала между соседними событиями в рассматриваемом потоке. В силу стационарного режима функционирования потока  $p(\tau_k) = p(\tau)$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\tau \geq 0$ . Поэтому без ограничения общности момент наступления события  $t_k$  можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть  $\tau = 0$ .

**Теорема 2.** Плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в обобщенном полусинхронном потоке событий в особом случае  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  имеет вид [14]:

$$p(\tau) = [\lambda_1 - \pi_2(0)\alpha_2(1-\delta)(1-\lambda_1\tau)]e^{-\lambda_1\tau}, \quad \tau \geq 0, \quad \pi_2(0) = \frac{p\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2 - p\alpha_2(1-\delta)}. \quad (1)$$

## 3. Вид совместной плотности вероятности длительностей двух смежных интервалов и условия рекуррентности

Рассмотрим два соседних временных интервала  $(t_1, t_2)$  и  $(t_2, t_3)$  со значениями длительностей интервалов  $\tau_1 = t_2 - t_1$  и  $\tau_2 = t_3 - t_2$  соответственно,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ , поскольку в силу стационарного режима функционирования потока расположение одного интервала  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$  либо двух смежных интервалов  $(t_k, t_{k+1})$ ,  $(t_{k+1}, t_{k+2})$  между моментами наступления событий потока  $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$  на временной оси может быть произвольным. При этом совместная плотность вероятности есть  $p(\tau_1, \tau_2)$ ,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ .

**Теорема 3.** Обобщенный полусинхронный поток событий является коррелированным, и совместная плотность вероятности длительностей смежных интервалов для особого случая  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  ( $T = 0$ ) имеет вид [14]:

$$p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \lambda_1 \left( \frac{p\alpha_2(1-\delta)}{p\lambda_1 + \alpha_2 - p\alpha_2(1-\delta)} \right)^2 \times$$

$$\times (\alpha_2 - \lambda_1(1-p) - p\alpha_2(1-\delta)) [1 - \lambda_1\tau_1] [1 - \lambda_1\tau_2] e^{-\lambda_1(\tau_1+\tau_2)}, \quad \tau_1 \geq 0, \quad \tau_2 \geq 0, \quad (2)$$

где  $p(\tau_1)$  и  $p(\tau_2)$  определены в (1) для  $\tau = \tau_k$ ,  $k=1,2$ .

Рассмотрим случаи, когда поток становится рекуррентным. Анализируя выражение (2), можно выделить случаи факторизации совместной плотности  $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$ :

1)  $\delta=1$ , и из (1) находим  $p(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ ;

2)  $\alpha_2 - \lambda_1(1-p) - p\alpha_2(1-\delta) = 0$ ,  $p \neq 1$ , тогда из (1)  $p(\tau) = [\lambda_1 - p\alpha_2(1-\delta)(1-\lambda_1\tau)] e^{-\lambda_1\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ .

Для  $p=1$  из второго условия факторизации вытекает, что  $\delta=0$ . Тогда  $p(\tau)$  определяется формулой (1) и имеет вид:  $p(\tau) = [\lambda_1 - \alpha_2(1-\lambda_1\tau)] e^{-\lambda_1\tau}$ ,  $\tau \geq 0$ . Исследуемый поток становится рекуррентным полусинхронным потоком событий [20].

#### 4. Преобразование Лапласа плотности вероятности длительности интервала между событиями в наблюдаемом потоке

Пусть  $\xi$  – значение случайной величины  $\xi$  – длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности  $T$ . Последовательность моментов наступления событий в наблюдаемом потоке  $t_1, t_2, \dots$  порождает вложенную цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , и рекуррентность наблюдаемого потока сохранится.

Для нахождения преобразования Лапласа  $g_\xi(s)$  плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 4.1.** Преобразование Лапласа  $g_\xi(s)$  плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, имеет вид [21]:

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}} \left[ 1 - \int_0^T e^{-sx} \tilde{p}(x) dx \right]^{-1}, \quad (3)$$

где  $\varphi_0(T) = \int_T^\infty \tilde{p}(x) dx = 1 - \int_0^T \tilde{p}(x) dx$  – функция Пальма – вероятность того, что на интервале  $(0, T)$  событие потока не наступило;  $\tilde{p}(x)$  – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном потоке.

**Следствие теоремы 4.1.** Математическое ожидание  $\xi$  определяется в виде:

$$M\xi = -g'_\xi(s)|_{s=0} = T + \frac{1}{\varphi_0(T)} \int_0^T x \tilde{p}(x) dx. \quad (4)$$

Далее будем использовать условие рекуррентности  $\lambda_1(1-p) = \alpha_2 - p\alpha_2(1-\delta)$ ,  $0 < p < 1$ . Для исследуемого потока справедлива теорема.

**Теорема 4.2.** Преобразование Лапласа  $g_\xi(s)$  плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, в особом случае  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  имеет вид:

$$g_\xi(s) = \frac{\varphi_0(T)}{e^{sT}} \left[ 1 - \frac{\lambda_1 - p\alpha_2(1-\delta)}{\lambda_1 + s} - \frac{p\alpha_2(1-\delta)\lambda_1}{(\lambda_1 + s)^2} + \left[ \frac{\lambda_1 - p\alpha_2(1-\delta)}{\lambda_1 + s} + \frac{p\alpha_2(1-\delta)\lambda_1}{(\lambda_1 + s)^2} ((\lambda_1 + s)T + 1) \right] e^{-(\lambda_1 + s)T} \right]^{-1}, \quad (5)$$

где  $\varphi_0(T) = e^{-\lambda_1 T} (1 + p\alpha_2(1-\delta)T)$ .

**Доказательство.** Переобозначив в (3)  $\tilde{p}(x)$  на  $p(\tau)$  и подставляя в (3) явный вид  $p(\tau)$ , описанный в разделе 3 с учетом второго условия рекуррентности, находим

$$\begin{aligned} 1 - \int_0^T e^{-s\tau} p(\tau) d\tau &= 1 - \int_0^T (\lambda_1 - p\alpha_2(1-\delta)) e^{-(\lambda_1+s)\tau} d\tau - \int_0^T p\alpha_2(1-\delta)\lambda_1 \tau e^{-(\lambda_1+s)\tau} d\tau = \\ &= 1 + \frac{\lambda_1 - p\alpha_2(1-\delta)}{\lambda_1 + s} (e^{-(\lambda_1+s)T} - 1) + \frac{p\alpha_2(1-\delta)\lambda_1}{(\lambda_1 + s)^2} ((\lambda_1 + s)T + 1) e^{-(\lambda_1+s)T} - \frac{p\alpha_2(1-\delta)\lambda_1}{(\lambda_1 + s)^2}, \\ \varphi_0(T) &= \int_T^\infty p(\tau) d\tau = \int_T^\infty (\lambda_1 - p\alpha_2(1-\delta)) e^{-\lambda_1\tau} d\tau + \int_T^\infty p\alpha_2(1-\delta)\lambda_1 \tau e^{-\lambda_1\tau} d\tau = \\ &= \frac{\lambda_1 - p\alpha_2(1-\delta)}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 T} + \frac{p\alpha_2(1-\delta)}{\lambda_1} (\lambda_1 T + 1) e^{-\lambda_1 T} = e^{-\lambda_1 T} (1 + p\alpha_2(1-\delta)T). \end{aligned} \quad (6)$$

Выполнив несложные преобразования в (6) и подставив в (3), получим (5). Теорема доказана.

**Следствие теоремы 4.2.** Математическое ожидание общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, в особом случае  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  имеет вид:

$$M\xi = \frac{\varphi_0^{-1}(T)}{\lambda_1^2} \left( \lambda_1 (1 - \varphi_0(T)) + p\alpha_2(1-\delta) (1 - e^{-\lambda_1 T}) \right), \quad (7)$$

где  $\varphi_0(T)$  определена в (5).

**Доказательство.** Используя следствие теоремы 4.1 и вычислив производную от  $g_\xi(s)$ , определенную в (5), в точке  $s = 0$ , по формуле (4) получим (7). Следствие теоремы доказано.

Рассмотрим временной интервал  $(t_k, t_{k+1})$ , значение длительности которого есть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ . Введем в рассмотрение случайную величину  $\eta_k$  – длительность интервала между моментом окончания общего периода ненаблюдаемости и моментом наступления следующего события в наблюдаемом потоке  $t_{k+1}$ . Тогда справедливо равенство  $\eta_k = \tau_k - \xi_k$  для значений случайной величины  $\eta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Так как в данной работе рассматривается рекуррентный поток, то  $\tau_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  – независимые случайные величины, поэтому равенство можно переписать в виде:  $\eta = \tau - \xi$ ; индекс  $k$  опущен в силу произвольного расположения интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке на временной оси. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  являются зависимыми. Тогда плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке примет вид:

$$p(\tau) = \int_0^\tau p(\xi) p(\eta | \xi) d\xi = \int_0^\tau p(\xi) p(\tau - \xi | \xi) d\xi. \quad (8)$$

Получим преобразование Лапласа  $g_\tau(s)$  плотности вероятности  $p(\tau)$ .

**Теорема 4.3.** Преобразование Лапласа  $g_\tau(s)$  плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке с продлевающимся мертвым временем в особом случае задания параметров  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  имеет вид:

$$g_\tau(s) = \frac{1}{(s + \lambda_1)^2 (p\lambda_1 + \alpha_2)} \left( \lambda_1^2 (s + p\lambda_1 + \alpha_2) g_\xi(s) - s (p\alpha_2(1-\delta))^2 g_\xi(s + p\lambda_1 + \alpha_2) \right), \quad (9)$$

где  $g_\xi(s)$ ,  $g_\xi(s + p\lambda_1 + \alpha_2)$  определены в (5) для аргументов  $s$  и  $s + p\lambda_1 + \alpha_2$  соответственно.

**Доказательство.** Пусть  $\tau = 0$  – момент наступления события в наблюдаемом потоке. Рассмотрим интервал  $(0, \tau) = (0, \xi + \eta)$ . Зафиксируем  $\xi$ . Введем вероятности  $p_{ij}(\tau - \xi)$  – условные вероятности того, что на интервале длительности  $\eta = \tau - \xi$  не наступит событий наблюдаемого потока и в момент времени  $\tau = \xi + \eta$  значение процесса  $\lambda(\xi + \eta) = \lambda_j$  при условии, что в момент времени  $\tau = \xi$  значение процесса  $\lambda(\xi) = \lambda_i$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Соответствующие  $p_{ij}(\tau - \xi)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{11}(\tau - \xi) &= e^{-\lambda_1(\tau - \xi)}, \quad p_{12}(\tau - \xi) = 0, \quad p_{22}(\tau - \xi) = e^{-\lambda_1(\tau - \xi)}, \\ p_{21}(\tau - \xi) &= (1 - \delta)\alpha_2(\tau - \xi)e^{-\lambda_1(\tau - \xi)}, \quad \tau \geq \xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Имеем  $P_i(\tau - \xi) = p_{i1}(\tau - \xi) + p_{i2}(\tau - \xi)$  – условная вероятность того, что на интервале  $(\xi, \tau)$  событий наблюдаемого потока не произойдет при условии, что в момент времени  $\tau = \xi$  значение процесса  $\lambda(\xi) = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда условная плотность вероятности значения длительности интервала  $(\xi, \tau)$  (без наступления событий на этом интервала) по определению есть  $p_i(\tau - \xi) = -P'_i(\tau - \xi)$ ,  $i = 1, 2$ . С учетом (10) имеем

$$p_1(\tau - \xi) = \lambda_1 e^{-\lambda_1(\tau - \xi)}, \quad p_2(\tau - \xi) = [\lambda_1 + \alpha_2(1 - \delta)(\lambda_1(\tau - \xi) - 1)]e^{-\lambda_1(\tau - \xi)}, \quad \tau \geq \xi. \quad (11)$$

Условную плотность  $p(\tau - \xi | \xi)$  в формуле (8) представим в виде:

$$p(\tau - \xi | \xi) = p_1(\tau - \xi)\pi_1(\tau = \xi | \xi) + p_2(\tau - \xi)\pi_2(\tau = \xi | \xi), \quad (12)$$

где  $\pi_i(\tau = \xi | \xi)$  – условные вероятности того, что в момент времени  $\tau = \xi$  значение процесса  $\lambda(\tau = \xi) = \lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , при условии, что в момент времени  $\tau = 0$  событие наступило и наступило мертвое время длительности  $\xi$ .

Вероятности  $\pi_i(\tau = \xi | \xi)$  по своему смыслу совпадают с вероятностями  $\pi_i(T)$ ,  $i = 1, 2$ , определенными в [14], в которых вместо периода ненаблюдаемости  $T$  следует рассматривать  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \pi_2(\xi) &= \pi_2(\tau = \xi | \xi) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0 | \xi)]e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)\xi}, \\ \pi_2(0 | \xi) &= \frac{p\lambda_1 + \pi_2(\lambda_1(1 - p) - \alpha_2 + p\alpha_2(1 - \delta)) \left[ 1 - e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)\xi} \right]}{\lambda_1 - (\lambda_1(1 - p) - \alpha_2 + p\alpha_2(1 - \delta)) \left[ 1 - e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)\xi} \right]}, \\ \pi_1(\tau = \xi | \xi) &= 1 - \pi_2(\tau = \xi | \xi), \quad \pi_2 = \frac{p\lambda_1}{p\lambda_1 + \alpha_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (11) и (13) в (12), с учетом условия рекуррентности  $\lambda_1(1 - p) = \alpha_2 - p\alpha_2(1 - \delta)$  находим

$$p(\tau - \xi | \xi) = 0, \quad 0 \leq \tau < \xi; \quad (14)$$

$$p(\tau - \xi | \xi) = \lambda_1 - \pi_2(\xi)\alpha_2(1 - \delta)(1 - \lambda_1(\tau - \xi))e^{-\lambda_1(\tau - \xi)}, \quad \tau \geq \xi,$$

где  $\pi_2(\xi) = \frac{P}{p\lambda_1 + \alpha_2} \left[ \lambda_1 + p\alpha_2(1 - \delta)e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)\xi} \right]$ .

Преобразование Лапласа плотности  $p(\tau)$  с учетом (8) примет вид:

$$g_\tau(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} p(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} \int_0^\tau p(\xi) p(\tau - \xi | \xi) d\xi d\tau = \int_0^\infty p(\xi) \int_\xi^\infty e^{-s\tau} p(\tau - \xi | \xi) d\tau d\xi. \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражение (14) и проделывая необходимые трудоемкие преобразования, приходим к (9). Теорема доказана.

**Теорема 4.4.** Математическое ожидание длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, в особом случае  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  имеет вид:

$$M\tau = M\xi + \frac{2}{\lambda_1} - \frac{1}{p\lambda_1 + \alpha_2} + \frac{(p\alpha_2(1 - \delta))^2}{\lambda_1^2(p\lambda_1 + \alpha_2)} g_\xi(p\lambda_1 + \alpha_2), \quad (16)$$

где функция  $g_\xi(p\lambda_1 + \alpha_2)$  определена в (5) при  $s = p\lambda_1 + \alpha_2$ ,  $M\xi$  определена в (7).

**Доказательство.** Используя следствие теоремы 4.1, заменив  $\xi$  на  $\tau$  и вычислив производную от  $g_\tau(s)$  по  $s$ , определенную в (9), в точке  $s = 0$  по формуле (4) получим (16). Теорема доказана.

## 5. Уравнение моментов для оценки длительности мертвого времени

В данном разделе работы выписывается уравнение моментов для оценивания длительности мертвого времени  $T$ .

Введем статистики  $C_m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^m$ , где  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  – значение длительности интервала  $(t_k, t_{k+1})$ .

Зафиксируем параметры потока  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_2, p, \delta$ . Для оценивания величины  $T$  достаточно первого момента. Тогда уравнение моментов, позволяющее оценить длительность мертвого времени  $T$ , имеет вид:  $M\tau = C_1$ , где статистика  $C_1$  (выборочный момент) при большом  $n$  стремится к теоретическому начальному моменту первого порядка  $M\tau$  [22]. С учетом (5), (7) и (16) уравнение моментов принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\lambda_1 T} (1 + p\alpha_2(1-\delta)T)^{-1}}{\lambda_1^2} \left( \lambda_1 (1 - (1 + p\alpha_2(1-\delta)T)e^{-\lambda_1 T}) + p\alpha_2(1-\delta)(1 - e^{-\lambda_1 T}) \right) + \\ & + \frac{2}{\lambda_1} - \frac{1}{p\lambda_1 + \alpha_2} + \frac{(p\alpha_2(1-\delta))^2 (1 + p\alpha_2(1-\delta)T)e^{-(\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2)T}}{\lambda_1^2 (p\lambda_1 + \alpha_2)} \times \\ & \times \left[ 1 - \frac{\lambda_1^2 + (\lambda_1 - p\alpha_2(1-\delta))(p\lambda_1 + \alpha_2)}{(\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2)^2} \left( 1 - e^{-(\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2)T} \right) + \frac{p\alpha_2(1-\delta)\lambda_1}{\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2} T e^{-(\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2)T} \right]^{-1} = C_1, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $0 \leq T \leq \tau_{\min}$ ,  $\tau_{\min} = \min \tau_k$ ,  $k = 1, n$ .

Решение уравнения возможно только численно. Пусть  $f(T)$  – левая часть уравнения (17):  $M\tau = f(T)$ . Покажем, что  $f(T)$  является возрастающей функцией переменной  $T$ ,  $T > 0$ . Имеем

$$1) f(T=0) = \frac{p\lambda_1 + \alpha_2}{\lambda_1^2} > 0;$$

$$2) \lim_{T \rightarrow \infty} f(T) \rightarrow \infty;$$

$$3) f'(T) = \frac{\lambda_1 + p\alpha_2(1-\delta)}{\lambda_1^2 \varphi_0^2(T)} p(T) + \frac{(p\alpha_2(1-\delta))^2}{\lambda_1^2 \varphi_0^2(T) e^{2\lambda_1 T}} + A(T),$$

$$A(T) = \frac{(p\alpha_2(1-\delta)(\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2))^2}{\lambda_1^2 (p\lambda_1 + \alpha_2) e^{(p\lambda_1 + \alpha_2)T} B^2(T)} \times$$

$$\times \left\{ (\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2)^2 \varphi_0(T) p(T) e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)T} - B(T)(\varphi_0(T)(p\lambda_1 + \alpha_2) + p(T)) \right\},$$

$$B(T) = (p\lambda_1 + \alpha_2)(\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2) + \lambda_1(\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2)\varphi_0(T)e^{-(p\lambda_1 + \alpha_2)T} +$$

$$+ p\alpha_2(1-\delta)(p\lambda_1 + \alpha_2)(1 - e^{-(\lambda_1 + p\lambda_1 + \alpha_2)T}),$$

$$p(T) = [\lambda_1 + p\alpha_2(1-\delta)(\lambda_1 T - 1)]e^{-\lambda_1 T},$$

где  $\varphi_0(T)$  определена в (5).

Исследуя функцию  $f'(T)$ , обнаруживаем, что  $f'(T) > 0$ ,  $\forall T > 0$ .

Таким образом, уравнение (17) либо имеет единственное решение, либо решения не имеет. Если  $f(0) \geq C_1$ , тогда в качестве значения оценки естественно выбрать  $\hat{T} = 0$ . Если  $f(0) < C_1$ , то:

а) либо корень уравнения (17) принадлежит полуинтервалу  $(0, \tau_{\min}]$ , тогда он и есть значение искомой оценки  $\hat{T}$  (оценка  $\hat{T}$  является состоятельной, поскольку выполнены условия теоремы о состоятельности оценок [23]);

б) либо корень уравнения (17) больше, чем  $\tau_{\min}$ , тогда полагаем  $\hat{T} = \tau_{\min}$ .

## 6. Численные результаты оценивания

Приведенные в настоящем разделе статистические эксперименты поставлены на имитационной модели обобщенного полусинхронного потока событий, функционирующего в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности  $T$  [17], для особого случая  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$ . Имитационная модель наблюдаемого потока построена с использованием традиционных подходов к имитации входящих потоков событий в СМО [24] и реализована на языке программирования C#.

*Алгоритм оценивания:*

1) при заданных значениях параметров  $\lambda_1, \lambda_2, p, \delta, T$  в течение  $T_m$  единиц времени осуществляется имитационное моделирование наблюдаемого потока, в каждой  $i$ -й реализации находится последовательность значений  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  и вычисляется статистика  $C_1$ ;

2) методом Ньютона находится корень уравнения (17);

3)  $N$  раз повторяя шаги 1) и 2), получаем значения оценок  $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N$ ;

4) рассчитываются выборочное среднее, выборочная вариация оценки длительности мертвого времени  $T$  и процент отношения наблюдаемых событий ко всем событиям потока по формулам

$$\hat{M}(\hat{T}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}_i, \quad \hat{V}(\hat{T}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_i - \hat{T})^2, \quad P = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{o_i}{o_i + u_i},$$

где  $o_i$  – количество наблюдаемых событий в реализации;  $u_i$  – количество ненаблюдаемых событий в реализации;  $T$  – значение длительности мертвого времени, известное из имитационной модели потока;  $N$  – количество реализаций.

Для установления стационарного режима и определения свойств найденных оценок проведены статистические эксперименты. В обоих статистических экспериментах параметры потока задаются с учетом выполнения условия  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  и условия рекуррентности  $\lambda_1(1-p) = \alpha_2 - p\alpha_2(1-\delta)$ .

*Первый статистический эксперимент* поставлен с целью нахождения такой длительности времени моделирования, при которой устанавливается стационарный режим.

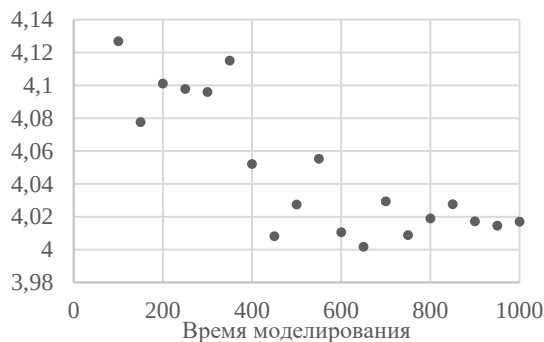


Рис. 2. Выборочное среднее  $\hat{M}(\hat{T})$

Fig. 2. Sample average  $\hat{M}(\hat{T})$

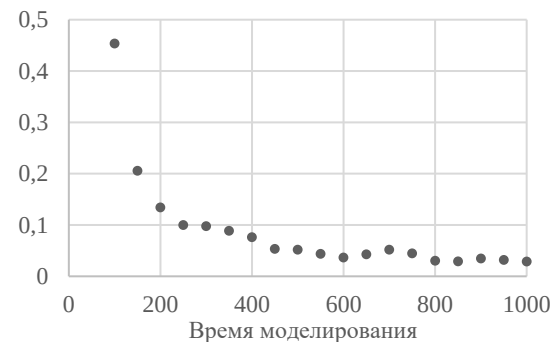


Рис. 3. Выборочная вариация  $\hat{V}(\hat{T})$

Fig. 3. Sample variation  $\hat{V}(\hat{T})$

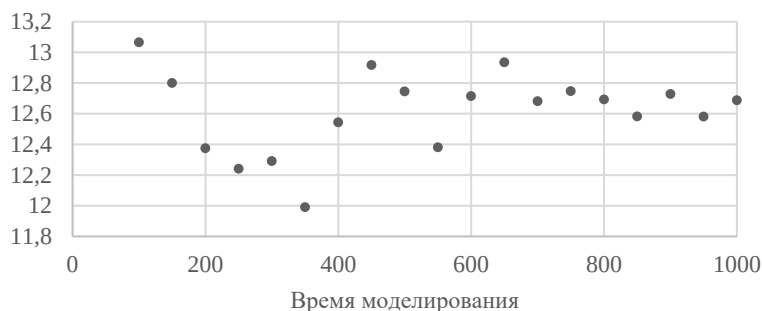


Рис. 4. Процент наблюдаемых событий ко всем событиям потока  $P$

Fig. 4. Percentage of observed events to all flow events  $P$

Зафиксируем параметры следующим образом:  $N=100$ ;  $\lambda_1=0,6$ ;  $\lambda_2=0,2$ ;  $\alpha_2=0,4$ ;  $\delta=0,5$ ;  $p=0,5$ ;  $T=4$ . Варьируя значение времени моделирования от  $T_m=100$  до  $T_m=1000$  с шагом 50 ед. времени, получим результаты оценивания, представленные на рис. 2–4.

Из анализа численных результатов первого статистического эксперимента (см. рис. 2–4) следует, что стационарный режим функционирования исследуемого потока достигается при значении времени моделирования  $T_m \geq 800$  ед. времени, так как выборочное среднее  $\hat{M}(\hat{T})$  стремится к постоянному значению.

*Второй статистический эксперимент* заключается в исследовании потока в условиях растущей длительности мертвого времени.

Зафиксируем первый набор параметров:  $N=100$ ;  $\lambda_1=0,6$ ;  $\lambda_2=0,2$ ;  $\alpha_2=0,4$ ;  $\delta=0,5$ ;  $p=0,5$ ;  $T_m=800$  ед. времени. Варьируя значение длительности мертвого времени от  $T=1$  до  $T=3,5$  с шагом 0,5 ед. времени, получим результаты оценивания, представленные на рис. 5–7.

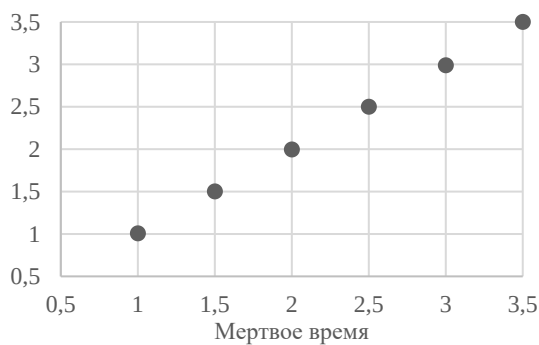


Рис. 5. Выборочное среднее  $\hat{M}(\hat{T})$   
Fig. 5. Sample average  $\hat{M}(\hat{T})$

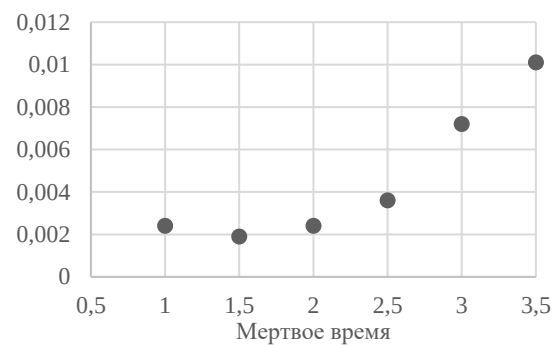


Рис. 6. Выборочная вариация  $\hat{V}(\hat{T})$   
Fig. 6. Sample variation  $\hat{V}(\hat{T})$

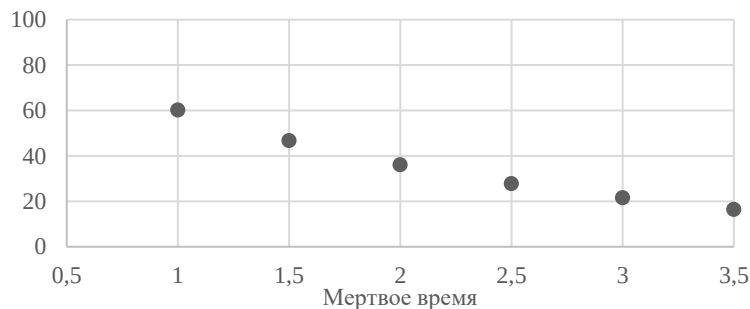


Рис. 7. Процент наблюдаемых событий ко всем событиям потока P  
Fig. 7. Percentage of observed events to all flow events P

Зафиксируем второй набор параметров:  $N=100$ ;  $\lambda_1=1,6$ ;  $\lambda_2=0,8$ ;  $\alpha_2=0,8$ ;  $\delta=0,25$ ;  $p=0,8$ ;  $T_m=800$ . Варьируя значение длительности мертвого времени от  $T=1$  до  $T=3,5$  с шагом 0,5 ед. времени, получим результаты оценивания, представленные на рис. 8–10.

Результаты статистических экспериментов, представленные на рис. 5 и 8, показывают, что выборочные средние значения оценок  $\hat{M}(\hat{T})$  достаточно близки к истинным значениям  $T$ . Во втором статистическом эксперименте как для первого, так и для второго набора параметров потока наблюдается тенденция к увеличению выборочной вариации  $\hat{V}(\hat{T})$  оценки  $\hat{T}$  (см. рис. 6 и 9) при увеличении значения длительности мертвого времени  $T$ , что является естественным: с ростом длительности мертвого времени уменьшается общий период наблюдаемости, следовательно, оценивание происходит хуже.



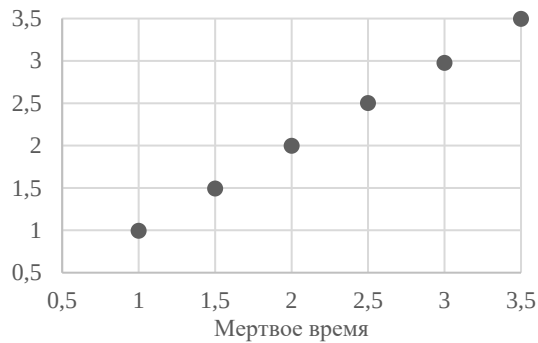


Рис. 8. Выборочное среднее  $\hat{M}(\hat{T})$

Fig. 8. Sample average  $\hat{M}(\hat{T})$

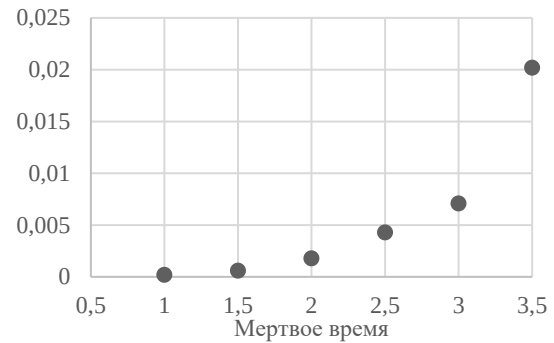


Рис. 9. Выборочная вариация  $\hat{V}(\hat{T})$

Fig. 9. Sample variation  $\hat{V}(\hat{T})$

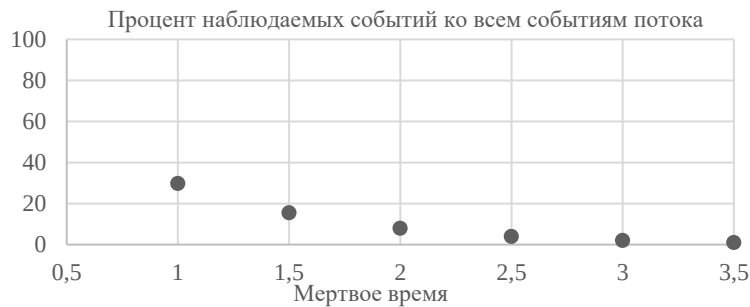


Рис. 10. Процент наблюдаемых событий ко всем событиям потока  $P$

Fig. 10. Percentage of observed events to all flow events  $P$

Процент наблюдаемых событий  $P$  для второго набора параметров при фиксированном  $T$  (см. рис. 10) меньше  $P$  для первого набора параметров при том же значении  $T$  (см. рис. 7), что также объяснимо: для второго набора параметров в каждом состоянии поток более интенсивный, чем для первого набора, что приводит к большим потерям наблюдаемых событий.

### Заключение

В настоящей работе рассмотрен особый случай соотношения параметров  $\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha_2 = 0$  в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности  $T$ . Для рекуррентного обобщенного полусинхронного потока событий получены преобразование Лапласа плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости и преобразование Лапласа плотности вероятности длительности интервалов между соседними событиями в наблюдаемом потоке. С использованием преобразования Лапласа получено уравнение моментов для определения значения оценки  $\hat{T}$  длительности мертвого времени  $T$ . Аналитически доказана единственность решения уравнения моментов. Проведены статистические эксперименты на имитационной модели потока, показывающие приемлемое качество оценивания.

### Список источников

1. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1978. 208 с.
2. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
3. Нежельская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 57–67.

4. Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A. Analytical investigation of a single-channel QS with incoming asynchronous event flow // Automation and Remote Control. 2022. V. 83 (8). P. 1200–1212.
5. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51 (3). P. 433–441.
6. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60 (4). P. 923–930.
7. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
8. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
9. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779. doi: 10.2307/3213143
10. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
11. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
12. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 2 (11). С. 66–81.
13. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо не проявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № S9-2. С. 129–138.
14. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–27.
15. Калягин А.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3 (32). С. 23–32.
16. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
17. Нежелская Л.А., Степаненко И.Д. Статистические эксперименты на имитационной модели обобщенного полусинхронного потока событий с продлеваемым мертвым временем фиксированной длительности // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. 2021. Т. 306. С. 82–84.
18. Нежелская Л.А., Степаненко И.Д. Применение метода моментов для оценки длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном полусинхронном потоке событий с продлеваемым мертвым временем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 62. С. 65–75. doi: 10.17223/19988605/62/7
19. Нежелская Л.А. Оценка состояний дважды стохастических потоков событий. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. 210 с.
20. Горцев А.М., Веткина А.В. Оценивание методом моментов параметра равномерного распределения длительности непродлеваемого случайного мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий в общем и особом случаях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 61. С. 47–60. doi: 10.17223/19988605/61/5
21. Нежелская Л.А. Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. 341 с.
22. Пуленин В.П. Математическая статистика. Томск : Изд-во НТЛ, 2012. Ч. 1. 540 с.
23. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.
24. Лифшиц А.Л., Мальц Э.А. Статистическое моделирование систем массового обслуживания. М. : Сов. радио, 1978. 248 с.

#### References

1. Gortsev, A.M., Nazarov, A.A. & Terpugov, A.F. (1978) *Upravlenie i adaptatsiya v sistemakh massovogo obsluzhivaniya* [Control and Adaptation in Queuing Systems]. Tomsk: Tomsk University Press.
2. Vishnevsky, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic Systems with Correlated Flows. Theory and Application in Telecommunication Networks]. Moscow: Technosphere.
3. Nezhelskaya, L.A. (2015) Joint probability density of the intervals' duration in modulated MAP event flows and its recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 57–67.
4. Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2022) Analytical investigation of a single-channel QS with incoming asynchronous event flow. *Automation and Remote Control*. 83(8). pp. 1200–1212.

5. Cox, D.P. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic process by the inclusion of supplementary variables. *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441.
6. Kingman, Y.F.C. (1964) On double stochastic Poisson process. *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
7. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
8. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
9. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
10. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46.
11. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavsky, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical Analysis of Random Flows in Physical Experiment]. Minsk: Universitetskoe.
12. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2010) Optimal estimation of states of generalized semi-synchronous event stream. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(11). pp. 66–81.
13. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhelskaya, L.A. (2004) Estimation of dead time duration and parameters of synchronous alternating flow with manifestation or non-manifestation of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. S9–2. pp. 129–138.
14. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2014) Joint probability density of the duration of intervals of generalized semisynchronous flow of events with non-lasting dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(27). pp. 19–27.
15. Kalyagin, A.A. & Nezhelskaya, L.A. (2015) Comparison of MP and MM estimations of dead time duration in generalized semi-synchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(32). pp. 23–32.
16. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Estimation of the dead time duration and parameters of the asynchronous alternating stream of events with initialization of an extra event. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 284. pp. 137–145.
17. Nezhelskaya, L.A. & Stepanenko, I.D. (2021) Statistical experiments on the simulation model of the generalized semi-synchronous flow of events with prolonging dead time of fixed duration. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiziko-matematicheskaya*. 306. pp. 82–84.
18. Nezhelskaya, L.A. & Stepanenko, I.D. (2023) Application of the method of moments for estimation of dead time duration in recurrent generalized semi-synchronous flow of events with prolonging dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62. pp. 65–75. DOI: 10.17223/19988605/62/7
19. Nezhelskaya, L.A. (2020) *Estimation of States of Doubly Stochastic Flows of Events*. Tomsk: Tomsk State University Press.
20. Gortsev, A.M. & Vetkina, A.V. (2022) Estimation by the method of moments of the parameter of the uniform distribution of the duration of non-transient random dead time in the recurrent semi-synchronous flow of events in general and special cases. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 47–60. DOI: 10.17223/19988605/61/5
21. Nezhelskaya, L.A. (2016) *Otsenka sostoyaniy i parametrov dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytij* [Evaluation of states and parameters of doubly stochastic flows of events]. Physics and Mathematics Dr. Diss. Tomsk.
22. Shulenin, V.P. (2012) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Vol. 1. Tomsk: NTL.
23. Malinkovsky, Y.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Theory of Probabilities and Mathematical Statistics]. Vol. 2. Gomel: GSU.
24. Lifshits, A.L. & Maltz, E.A. (1978) *Statisticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniya* [Statistical Modeling of Mass Service Systems]. Moscow: Sov. Radio.

#### Информация об авторах:

**Нежелская Людмила Алексеевна** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующая кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ludne@mail.ru

**Степаненко Илья Денисович** – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 97step@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors:***

**Nezhel'skaya Lyudmila A.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia Federation). E-mail: ludne@mail.ru

**Ilya Denisovich Stepanenko** (Master's Student, Department of Applied Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia Federation). E-mail: 97step@mail.ru

***Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.***

*Поступила в редакцию 29.11.2023; принята к публикации 05.03.2024*

*Received 29.11.2023; accepted for publication 05.03.2024*

Научная статья

УДК 681.5

doi: 10.17223/19988605/66/7

## Фильтрация в дискретных системах со случайными и интервальными параметрами

Валерий Иванович Смагин<sup>1</sup>, Константин Станиславович Ким<sup>2</sup>, Владимир Алексеевич Зыков<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*

<sup>1</sup> *vsm@mail.tsu.ru*

<sup>2</sup> *kks93@rambler.ru*

<sup>3</sup> *flesch.vz@mail.ru*

**Аннотация.** Рассматривается задача фильтрации для дискретного объекта со случайными и интервальными параметрами. Случайные параметры в модели задаются как гауссовские случайные последовательности. Для представления интервальных параметров используется вероятностный подход, в основе которого лежит замена неопределенных параметров интервального типа независимыми случайными величинами с равномерным распределением. Используются рекуррентные схемы калмановской фильтрации. Представлены результаты моделирования.

**Ключевые слова:** фильтрация; случайные параметры; интервальные параметры.

**Для цитирования:** Смагин В.И., Ким К.С., Зыков В.А. Фильтрация в дискретных системах со случайными и интервальными параметрами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 69–75. doi: 10.17223/19988605/66/7

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/7

## Filtering in discrete systems with random and interval parameters

Valery I. Smagin<sup>1</sup>, Konstantin S. Kim<sup>2</sup>, Vladimir A. Zykov<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

<sup>1</sup> *vsm@mail.tsu.ru*

<sup>2</sup> *kks93@rambler.ru*

<sup>3</sup> *flesch.vz@mail.ru*

**Abstract.** The problem of filtering for a discrete object with random and interval parameters is considered. Random parameters in the model are set as Gaussian random sequences. To represent interval parameters, a probabilistic approach is used, which is based on replacing interval-type parameters with independent random variables with a uniform distribution. Recurrent Kalman filtering algorithms are used. The simulation results are presented.

**Keywords:** filtering; random parameters; interval parameters.

**For citation:** Smagin, V.I., Kim, K.S., Zykov, V.A. (2024) Filtering in discrete systems with random and interval parameters. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika* – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 66. pp. 69–75. doi: 10.17223/19988605/66/7

## Введение

Задача синтеза фильтров, экстраполяторов и наблюдателей для динамических систем со случайными и неопределенными параметрами рассматривалась в работах [1–9] и др. В этих работах ис-

пользуются различные методы робастной обработки данных. Задачи фильтрации для дискретных систем со случайными параметрами, которые часто интерпретируются как системы с мультипликативными возмущениями, рассматривались в работах [10–15].

Предмет настоящей работы – задача фильтрации в дискретных системах с аддитивными возмущениями со случайными и интервальными параметрами, причем в математическом описании случайных параметров постоянная составляющая может быть задана с интервальной неопределенностью. Для интерпретации интервальной неопределенности в работе используется метод, в основе которого лежит вероятностный подход, заключающийся в том, что интервальный параметр заменяется равномерно распределенной случайной величиной [16]. Отметим, что применение такого подхода к задаче робастной фильтрации и экстраполяции для систем с неизвестным входом и интервальной неопределенностью исследовано в работах [8, 9].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную систему с интервальными параметрами, описываемую разностным уравнением

$$x(k+1) = (\tilde{A} + \sum_{i=1}^m B_i \xi_i(k))x(k) + f(k) + q(k), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния в момент времени  $k$ ,  $f(k)$  – известный входной вектор;  $x_0$  – случайный вектор с известным математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $N_0 = M\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\}$ ;  $\tilde{A}$  – матрица переходов состояний с интервальной неопределенностью (с заданными нижними и верхними границами  $\underline{A}$  и  $\bar{A}$  соответственно),  $\xi(k) \in \mathbb{R}^m$  – случайные возмущения со следующими характеристиками:  $M\{\xi(k)\} = 0$ ,  $M\{\xi(k)\xi^T(j)\} = I_m \delta_{kj}$ ,  $q(k)$  – вектор случайных возмущений со следующими характеристиками:  $M\{q(k)\} = 0$ ,  $M\{q(k)q^T(j)\} = Q\delta_{kj}$ ,  $Q$  – неотрицательно определенная матрица,  $I_m$  – единичная матрица размерности  $m \times m$ ,  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера,  $^T$  – операция транспонирования.

Модель наблюдений определяется по формуле

$$y(k) = Sx(k) + v(k), \quad (2)$$

где  $y(k) \in \mathbb{R}^l$  – вектор наблюдений,  $S$  – матрица наблюдений,  $v(k)$  – вектор случайных ошибок наблюдений ( $M\{v(k)\} = 0$ ,  $M\{v(k)v^T(j)\} = V\delta_{kj}$ ).

Предполагается, что случайные последовательности  $\xi(k)$ ,  $q(k)$ ,  $v(k)$  и вектор  $x_0$  взаимно независимы, система (1) наблюдаема при параметрических возмущениях матрицы динамики  $\tilde{A}$ . Используя информацию, доступную на интервале времени  $k \in [1; T]$ , необходимо построить оценку  $\hat{x}(k)$  минимизирующую критерий

$$J = M\left\{\sum_{k=1}^T (x(k) - \hat{x}(k))^T (x(k) - \hat{x}(k))\right\}. \quad (3)$$

## 2. Алгоритм фильтрации

Для решения задачи будем использовать рекуррентный фильтр Калмана (ФК), при этом воспользуемся вероятностным подходом учета интервальной неопределенности параметров модели. Суть метода заключается в том, что интервальные параметры заменяются независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале неопределенности.

Используя вероятностный подход, заменим неопределенные интервальные матрицы  $\tilde{A}$  матрицами, элементы которых зависят от случайных величин:

$$A(\theta) = (A + \sum_{j=1}^{m_1} A_j \theta_j), \quad (4)$$

где  $\theta_j$  – независимые равномерно распределенные случайные величины на интервале  $[-1, +1]$  ( $-1 \leq \theta_j \leq 1$  ( $j = \overline{1, m_1}$ )). Будем считать, что случайные величины  $\theta_j$  независимы от  $x_0$ ,  $\xi(k)$ ,  $q(k)$  и  $v(k)$ . В (4) матрица  $A = \frac{1}{2}(A + \bar{A})$ , является медианой интервальной матрицы  $\tilde{A}$ . Матрицы  $A_j, B_i$  ( $j = \overline{1, m_1}; i = \overline{1, m}$ ) можно задать так, чтобы один элемент, соответствующий неопределенному элементу матрицы  $\tilde{A}$ , оставался ненулевым (если один и тот же неопределенный элемент стоит на нескольких позициях матрицы  $\tilde{A}$ , то матрицы  $A_j, B_i$  будут иметь несколько соответствующих ненулевых элементов). Значение матриц  $A_j, B_i$  можно определить по ширине интервала неопределенности элементов матрицы  $\tilde{A}$ .

Тогда модель системы (1) примет вид:

$$x(k+1) = (A(\theta) + \sum_{i=1}^m B_i \xi_i) x(k) + f(k) + q(k), \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

Оценку вектора состояния  $\hat{x}(k)$  построим, используя следующий рекуррентный алгоритм (ФК):

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + f(k) + K(k)(y(k+1) - S(A\hat{x}(k) + f(k))), \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0, \quad (6)$$

где матрица коэффициентов перехода фильтра  $K(k)$  определяется на основе оптимизации критерия (3) с учетом вида распределения параметра  $\theta$  и в предположении, что вектор  $f(k)$  известен.

Введем вектор  $e(k)$ :

$$\begin{aligned} e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) &= (A(\theta) + \sum_{i=1}^m B_i \xi_i) x(k) + f(k) + q(k) - (A\hat{x}(k) + f(k) + K(k) \times \\ &\times [y(k+1) - S(A\hat{x}(k) + f(k))]) = (A - K(k)SA)e(k) + \\ &+ (I_n - K(k)S)q(k) - K(k)v(k+1) + (I_n - K(k)S)(\sum_{j=1}^{m_1} A_j \theta_j x(k) + \sum_{i=1}^m B_i \xi_i x(k)). \end{aligned}$$

Тогда дисперсионная матрица ошибок определится:

$$\begin{aligned} N(k+1) &= M\{e(k+1)e(k+1)^T\} = M\{[(A - K(k)SA)e(k) + (I_n - K(k)S)q(k) - \\ &- K(k)v(k+1) + (I_n - K(k)S)(\sum_{j=1}^{m_1} A_j \theta_j x(k) + \sum_{i=1}^m B_i \xi_i x(k))][ (A - K(k)SA)e(k) + \\ &+ (I_n - K(k)S)q(k) - K(k)v(k+1) + (I_n - K(k)S)(\sum_{j=1}^{m_1} A_j \theta_j x(k) + \sum_{i=1}^m B_i \xi_i x(k))]^T\} = \\ &= (A - K(k)SA)N(k)(A - K(k)SA)^T + K(k)VK(k)^T + \\ &+ (I_n - K(k)S)(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m (A_i N(k)A_i^T + A_i \hat{x}(k)\hat{x}^T A_i^T) + \\ &+ \sum_{j=1}^{m_1} (B_j N(k)B_j^T + B_j \hat{x}(k)\hat{x}^T B_j^T) + Q(k))(I_n - K(k)S)^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда, учитывая (7), матрица  $N(k)$  будет удовлетворять разностному уравнению

$$\begin{aligned} N(k+1) &= (A - K(k)SA)N(k)(A - K(k)SA)^T + (I_n - K(k)S)\bar{Q}(k)(I - K(k)S)^T + \\ &+ K(k)VK(k)^T, \quad N(0) = N_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\bar{Q}(k) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{m_1} (A_i N(k) A_i^T + A_i \hat{x}(k) \hat{x}(k)^T A_i^T) + \sum_{i=1}^m (B_i N(k) B_i^T + B_i \hat{x}(k) \hat{x}(k)^T B_i^T) + Q. \quad (9)$$

Используя свойство операции  $\text{tr}(\cdot)$  ( $y^T A y = \text{tr} A y y^T$ ) и правила дифференцирования функции  $\text{tr}(\cdot)$  от произведения матриц [17, 18] по матричному аргументу

$$\frac{\partial \text{tr} A X B}{\partial X} = A^T B^T, \quad \frac{\partial \text{tr} A X^T B}{\partial X} = B A, \quad (10)$$

вычислим градиенты критерия (3), учитывая уравнение для  $N(k)$  (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial K(k)} &= \sum_{k=0}^{T-1} \frac{\partial}{\partial K(k)} \text{tr}[(A - K(k) S A) N(k) (A - K(k) S A)^T + K(k) V K(k)^T + \\ &\quad + (I_n - K(k) S) \bar{Q}(k) (I_n - K(k) S)^T] = \\ &= \sum_{k=0}^{T-1} [2 A N(k) A^T S^T + 2 K(k) S A N(k) A^T S^T + 2 K(k) V - 2 \bar{Q}(k) S^T + 2 K(k) S \bar{Q}(k) S^T]. \end{aligned} \quad (11)$$

Приравнявая (11) к нулю, получим уравнение, решением которого будет следующее аналитическое выражение для матрицы  $K(k)$ :

$$K(k) = (A N(k) A^T S^T + \bar{Q}(k) S^T) (S A N(k) A^T S^T + S \bar{Q}(k) S^T + V)^{-1}. \quad (12)$$

Тогда оценка, полученная с помощью алгоритма фильтрации в дискретных системах с интервальными и случайными параметрами, определится по рекуррентной схеме (6). Матричные коэффициенты перехода  $K(k)$  рассчитываются по формуле (12), в которой используется матрица  $\bar{Q}(k)$  (9), зависящая от матрицы  $N(k)$  и оценок вектора состояния  $\hat{x}(k)$ .

### 3. Результаты моделирования

Моделирование проводилось для следующих данных ( $m=1$ ,  $m_1=2$ ):

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0,65 & 0 \\ 0,35 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -0,04 & 0 \\ 0,04 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0,06 & 0 \\ 0,06 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad f(k) = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Начальные условия:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 80 \\ 240 \end{pmatrix}, \quad N(0) = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Качество фильтрации оценивалось посредством сравнения стандартных ошибок отклонений оценок вектора состояния

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^T (x_i(k) - \hat{x}_i(k))^2}{T-1}}, \quad (i=1,2) \quad (15)$$

для следующих алгоритмов алгоритмов:

- (ФК) используется фильтр Калмана для системы, учитывающей номинальные значения параметров матрицы  $A$  (интервальная неопределенность и случайные параметры не учитываются);
- (ФК1) интервальная неопределенность в фильтре не учитывается (фильтр строится по номинальным значениям матрицы  $A$ , случайные параметры модели учитываются);
- (ФК2) реализуется фильтр (6) с коэффициенты перехода  $K(k)$ , которые рассчитываются по формуле (12).



Стандартные ошибки отклонений оценок фильтрации состояний системы для первой и второй компоненты вектора состояний  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  приведены в табл. 1. Результаты моделирования, приведенные в таблицах, соответствуют реализациям распределенных с равномерной плотностью значений компонент случайного вектора  $\theta$  (сравнение выполнено для методов ФК, ФК1 и ФК2) и получены для алгоритмов фильтрации при  $T = 100$  с усреднением по 1 000 реализациям.

Таблица 1

Результаты сравнения стандартных ошибок отклонений оценок  $\sigma_i$  вектора состояния для различных методов

| Номер компоненты $i$ | $\gamma$ | ФК         | ФК1        | ФК2        |
|----------------------|----------|------------|------------|------------|
|                      |          | $\sigma_i$ | $\sigma_i$ | $\sigma_i$ |
| 1                    | 0,005    | 9,50       | 4,82       | 4,37       |
| 2                    |          | 7,85       | 6,33       | 5,10       |
| 1                    | 0,01     | 9,46       | 5,49       | 4,16       |
| 2                    |          | 11,58      | 9,05       | 4,83       |
| 1                    | 0,02     | 9,22       | 8,25       | 4,20       |
| 2                    |          | 21,30      | 16,91      | 4,99       |

Из табл. 1 видно, что алгоритм ФК2, учитывающий случайные параметры и интервальную неопределенность параметров в матрице  $A$ , имеет преимущество в точности по сравнению фильтром Калмана, построенным по номинальным значениям параметров (ФК), и алгоритмом, который учитывает только гауссовские случайные параметры в матрице  $A$ , но параметры с интервальной неопределенностью не учитываются (они заменяются номинальными значениями; ФК1).

На рис. 1 приведены реализации относительной ошибки для фильтра Калмана и фильтров ФК1 и ФК2 при  $\gamma = 0,01$ :

$$\delta_i(k) = \frac{|e_i(k)|}{|\hat{x}_i(k)|} 100 \% \quad (i = \overline{1, 2}).$$

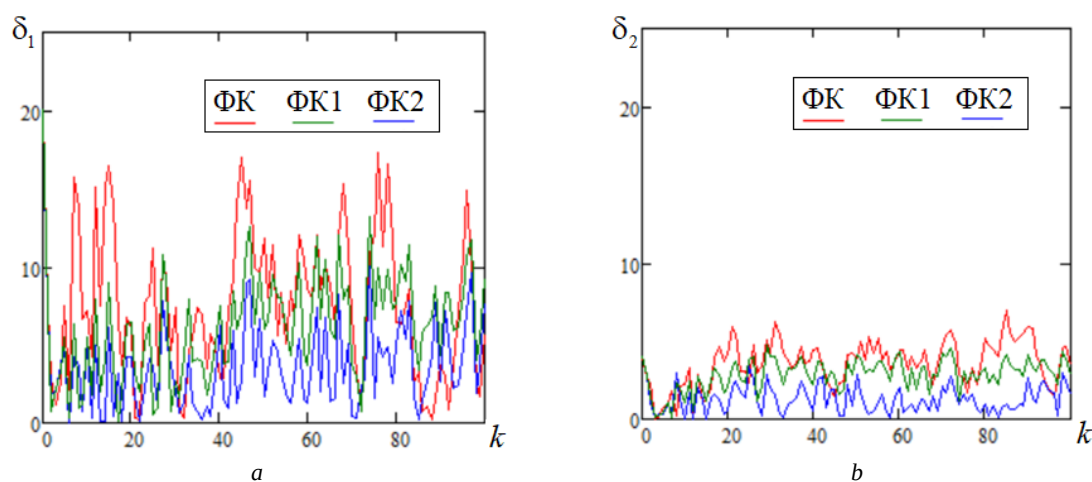


Рис. 1. Относительная погрешность для фильтра Калмана ФК и алгоритмов ФК1, ФК2:

$a$  – первая компонента;  $b$  – вторая компонента

Fig. 1. Relative error for the Kalman filter and algorithms FK1 and FK2; (a) is the first component; (b) is the second component

Таблица 2

Средние значения относительной ошибки  $\delta_i$  для алгоритмов ФК, ФК1 и ФК2 при  $\gamma = 0,01$

| Номер компоненты $i$ | ФК             | ФК1            | ФК2            |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|
|                      | $\delta_i, \%$ | $\delta_i, \%$ | $\delta_i, \%$ |
| 1                    | 7,51           | 6,03           | 3,48           |
| 2                    | 3,65           | 2,82           | 1,31           |

Из графиков видно, что относительная погрешность первой и второй компонент вектора состояния для алгоритма ФК2 меньше и держится на среднем уровне, приведенном в табл. 2.

### Заключение

В статье предложен алгоритм фильтрации для дискретного объекта со случайными и интервальными параметрами. Случайные параметры в модели задаются как гауссовские случайные последовательности. Для представления интервальных параметров используется вероятностный подход, в основе которого лежит замена параметров интервального типа независимыми случайными величинами с равномерным распределением. Оценки строятся на основе рекуррентных схем калмановской фильтрации.

Результаты моделирования показали, что совместный учет в модели случайных и интервальных параметров позволяет повысить точность фильтрации по сравнению с классическим фильтром Калмана, рассчитанным по номинальным значениям параметров модели и фильтром, учитывающим только случайные параметры модели (алгоритм ФК1).

### Список источников

1. Duan Z., Zhang J., Zhang C. Robust and filtering for uncertain linear systems // *Automatica*. 2006. V. 42. P. 1919–1926.
2. Bulut Y., Bayat O. Kalman filtering with model uncertainties // *Proc. of the IMAC – XXX*, January 30 to February 2. 2012. Jacksonville, Florida, USA. P. 1–10.
3. Abolhasani M., Rahmani M. Robust Kalman filtering for discrete-time systems with stochastic uncertain time-varying parameters // *Electronics Letters*. 2017. V. 53 (3). P. 146–148.
4. Ichalal D., Marx B., Maquin D., Ragot J. State estimation of system with bounded uncertain parameters: interval multi-model approach // *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*. 2018. V. 32 (3). P. 480–493.
5. Abolhasani M., Rahmani M. Robust Kalman filtering for discrete-time time-varying systems with stochastic and norm-bounded uncertainties // *J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*. 2018. V. 140 (3). Art. 030901.
6. Rocha K.D., Terra M.H. (2021) Robust Kalman filter for systems subject to parametric uncertainties // *Systems and Control Letters*. 2021. V. 157. Art. 105034.
7. Kim S., Deshpande V.M., Bhattacharya R. Robust Kalman filtering with probabilistic uncertainty in system parameters // *IEEE Control Systems Letters*. 2021. V. 5 (1). P. 295–300.
8. Smagin V.I., Kim K.S. Robust extrapolation for systems with unknown input and interval uncertainty in system and observations // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2023. № 62. С. 85–91. doi: 10.17223/19988605/62/9
9. Смагин В.И., Ким К.С. Робастная фильтрация для систем с неизвестным входом и интервальной неопределенностью // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2023. № 64. С. 113–119.
10. Yang F., Wang Z., Hung Y.S. Robust Kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2002. V. 47 (7). P. 1179–1183.
11. Stoica A.  $H_\infty$  filtering of signals subjected to multiplicative white noise // *Proc. 15th Triennial World Congress IFAC*. Barcelona, Spain, 2002. P. 1–5.
12. Wu Y., Zhang Q., Shen Z. Kalman filtering with multiplicative and additive noises // *Proc. of the 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA 2016)*. Guilin, China, 12–15 June, 2016. P. 483–487.
13. Tsyganov A.V., Tsyganova J.V., Kureneva T.N. UD-based linear filtering for discrete-time systems with multiplicative and additive noises // *Proc. of the 19th European Control Conference*, Saint Petersburg, Russia, 12–15 May, 2020. P. 1389–1394.
14. Kim K.S., Smagin V.I. Filtering in discrete systems with multiplicative perturbations and unknown input // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2020. V. 862 (4). Art. 042053.
15. Ким К.С., Смагин В.И. Фильтрация и диагностика в дискретных стохастических системах со скачкообразными параметрами и мультипликативными возмущениями // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020. № 51. С. 79–86. doi: 10.17223/19988605/51/9
16. Barmish B.R., Polyak B.T. A new approach to open robustness problems based on probabilistic predication formulae // *Proc. 13th World IFAC Congr.* 30 June – 5 July, San Francisco, USA, 1996. Vol. H. P. 1–6.
17. Athans M. The matrix minimum principle // *Informat. and Contr.* 1968. V. 11. P. 592–606.
18. Амосов А.А., Колпаков В.В. Скалярно-матричное дифференцирование и его приложения к конструктивным задачам теории связи // *Проблемы передачи информации*. 1972. Т. 8, вып. 1. С. 3–15.

### References

1. Duan, Z., Zhang, J. & Zhang, C. (2006) Robust and filtering for uncertain linear systems. *Automatica*. 42. pp. 1919–1926.
2. Bulut, Y. & Bayat, O. (2012) Kalman filtering with model uncertainties. *Proceedings of the IMAC-XXX*. January 30 to February 2. Jacksonville, Florida, USA. pp. 1–10.

3. Abolhasani, M. & Rahmani, M. (2017) Robust Kalman filtering for discrete-time systems with stochastic uncertain time-varying parameters. *Electronics Letters*. 53(3). pp. 146–148.
4. Ichalal, D., Marx, B., Maquin, D. & Ragot, J. (2018) State estimation of system with bounded uncertain parameters: interval multi-model approach. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 32(3). pp. 480–493.
5. Abolhasani, M. & Rahmani, M. (2018) Robust Kalman filtering for discrete-time time-varying systems with stochastic and norm-bounded uncertainties. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. 140(3). Art. 030901.
6. Rocha, K.D.T. & Terra, M.H. (2021) Robust Kalman filter for systems subject to parametric uncertainties. *Systems and Control Letters*. 157. Art. 105034.
7. Kim S., Deshpande V.M. & Bhattacharya R. (2021) Robust Kalman filtering with probabilistic uncertainty in system parameters. *IEEE Control Systems Letters*. 5(1). pp. 295–300.
8. Smagin, V.I. & Kim, K.S. (2023) Robust extrapolation for systems with unknown input and interval uncertainty in system and observations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62. pp. 85–91. DOI: 10.17223/19988605/62/9
9. Smagin, V.I. & Kim, K.S. (2023) Robust filtering in discrete systems with unknown input and interval uncertainty. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 64. pp. 113–119. DOI: 10.17223/19988605/64/11
10. Yang, F., Wang, Z. & Hung, Y.S. (2002) Robust Kalman filtering for discrete time-varying uncertain systems with multiplicative noises. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 47(7). pp. 1179–1183.
11. Stoica, A. (2002)  $H_\infty$  filtering of signals subjected to multiplicative white noise. *Proceedings of the 15th Triennial World Congress IFAC*. Barcelona, Spain. pp. 1–5.
12. Wu, Y., Zhang, Q. & Shen, Z. (2016) Kalman filtering with multiplicative and additive noises. *Proceedings of the 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA 2016)*. Guilin, China. 12–15 June. pp. 483–487.
13. Tsyganov, A.V., Tsyganova, J.V. & Kureneva, T.N. (2020) UD-based linear filtering for discrete-time systems with multiplicative and additive noises. *Proceedings of the 19th European Control Conference*. St. Petersburg, Russia. May 12–15. pp. 1389–1394.
14. Kim, K.S. & Smagin, V.I. (2020) Filtering in discrete systems with multiplicative perturbations and unknown input. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 862(4). Art. 042053.
15. Kim, K.S. & Smagin, V.I. (2020) Filtration and diagnostics in discrete stochastic systems with jump parameters and multiplicative perturbations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 51. pp. 79–86. DOI: 10.17223/19988605/51/9
16. Barmish, B.R. & Polyak, B.T. (1996) A new approach to open robustness problems based on probabilistic predication formulae. *Proceedings 13th World IFAC Congr.* 30 June – 5 July. Vol. H. San Francisco. USA. pp. 1–6.
17. Athans, M. (1968) The matrix minimum principle. *Information and Control*. 11. pp. 592–606.
18. Amosov, A.A. & Kolpakov, V.V. (1972) Skalyarno-matrichnoe differentsirovanie i ego prilozheniya k konstruktivnym zadacham teorii svyazi [Scalar-matrix differentiation and its applications to constructive problems of communication theory]. *Problemy peredachi informatsii*. 8(1). pp. 3–15.

#### Информация об авторах:

**Смагин Валерий Иванович** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: vsm@mail.tsu.ru

**Ким Константин Станиславович** – кандидат физико-математических наук, доцент Высшей IT школы Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kks93@rambler.ru

**Зыков Владимир Алексеевич** – студент Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: flesch.vz@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### Information about the authors:

**Smagin Valery I.** (Doctor of Technical Science, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vsm@mail.tsu.ru

**Kim Konstantin S.** (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kks93@rambler.ru

**Zykov Vladimir A.** (Student, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: flesch.vz@mail.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 01.12.2023; принята к публикации 05.03.2024

Received 01.12.2023; accepted for publication 05.03.2024

## ИНФОРМАТИКА И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## INFORMATICS AND PROGRAMMING

Научная статья

УДК 519.6, 004.942

doi: 10.17223/19988605/66/8

**Оптимальный выбор начальных условий задачи Коши и его применение  
для расчета начального состава реакционной смеси****Евгения Викторовна Антипина<sup>1</sup>, Светлана Анатольевна Мустафина<sup>2</sup>,  
Андрей Федорович Антипин<sup>3</sup>**<sup>1,2</sup> Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия<sup>3</sup> Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия<sup>1</sup> stepashinaev@ya.ru<sup>2</sup> mustafina\_sa@mail.ru<sup>3</sup> andrejantipin@ya.ru

**Аннотация.** Статья посвящена разработке численного алгоритма оптимального выбора начальных условий задачи Коши и его применению к задаче оптимального выбора начальных концентраций веществ химической реакции. В общем виде сформулирована задача определения оптимального состава реакционной смеси на основе кинетической модели реакции. Разработан пошаговый алгоритм для решения задачи с использованием метода штрафов и метода Хука–Дживса. Преимуществом алгоритма является учет физико-химических особенностей задачи. На основе сформулированного алгоритма разработан программный комплекс для каталитической реакции синтеза N-(адамантил)ацетамида. С его помощью вычислены оптимальные концентрации реагентов реакции, при которых достигается наибольшее значение концентрации целевого продукта.

**Ключевые слова:** метод штрафов; метод Хука–Дживса; программный комплекс; химическая реакция; оптимальные концентрации реагентов.

**Благодарности:** Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2023-0002).

**Для цитирования:** Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Оптимальный выбор начальных условий задачи Коши и его применение для расчета начального состава реакционной смеси // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 76–86. doi: 10.17223/19988605/66/8

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/8

**Optimal choice of initial conditions of the Cauchy problem and its application  
to the calculation of the initial composition of the reaction mixture****Evgenia V. Antipina<sup>1</sup>, Svetlana A. Mustafina<sup>2</sup>, Andrey F. Antipin<sup>3</sup>**<sup>1,2</sup> Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation<sup>3</sup> Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russian Federation<sup>1</sup> stepashinaev@ya.ru

<sup>2</sup> mustafina\_sa@mail.ru

<sup>3</sup> andrejantipin@ya.ru

**Abstract.** The article is devoted to the development of a numerical algorithm for optimal selection of initial conditions of the Cauchy problem and its application to the problem of optimal selection of initial concentrations of substances in a chemical reaction. In general form, the problem of determining the optimal composition of the reaction mixture is formulated based on the kinetic model of the reaction. A step-by-step algorithm has been developed to solve the problem using the penalty method and the Hooke-Jeeves method. The advantage of the algorithm is that it takes into account the physical and chemical features of the problem. Based on the formulated algorithm, a software package has been developed for the catalytic reaction of the synthesis of N-(adamantyl)acetamide. With its help, the optimal concentrations of the reaction reagents were calculated, at which the highest concentration of the target product is achieved.

**Keywords:** penalty method; Hook-Jeeves method; software package; chemical reaction; optimal concentrations of reagents.

**Acknowledgments:** This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (scientific code FZWU-2023-0002).

**For citation:** Antipina, E.V., Mustafina, S.A., Antipin, A.F. (2024) Optimal choice of initial conditions of the Cauchy problem and its application to the calculation of the initial composition of the reaction mixture. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 76–86. doi: 10.17223/19988605/66/8

## Введение

Для исследования закономерностей протекания динамических процессов широко применяются математические методы. Например, динамический процесс можно описать с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Начальные условия задачи Коши задают начальное состояние процесса, и варьируя ими можно влиять на его поведение. Практически значимой задачей исследования каталитических процессов является задача определения оптимального состава реакционной смеси. Иными словами, требуется определить, в каком количестве взять тот или иной реагент, чтобы в конце реакции получить продукт требуемого качества или обеспечить выполнение количественного показателя процесса. Данную задачу можно решить путем применения кинетического подхода и методов оптимизации. Созданное на основе математического описания процесса программное обеспечение позволит без проведения многократных химических экспериментов определить оптимальные условия его ведения и тем самым значительно удешевить себестоимость синтеза веществ. Поэтому разработка алгоритма и программного обеспечения для расчета оптимальных концентраций реагентов является актуальной задачей и представляет научный интерес.

Основой описания каталитического процесса является кинетическая модель реакции, которая включает в себя перечень реагентов, отдельных стадий их превращения, уравнение скоростей стадий, зависящих от концентраций реагентов и температуры. Математическое описание изменения концентраций реагирующих веществ во времени можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, начальные условия которой определяют начальный состав реагирующей смеси.

Задача определения набора начальных концентраций реагентов, обеспечивающих выполнение заданного количественного или качественного критерия, представляет собой оптимизационную задачу и обладает несколькими особенностями. Во-первых, нелинейностью модели динамики процесса, обусловленной экспоненциальной зависимостью констант скоростей от температуры. Данная особенность ограничивает применимость некоторых методов оптимизации, например линейного программирования [1, 2]. Во-вторых, ввиду сложных химических превращений в реакционной системе содержится большое количество промежуточных веществ. Это приводит к большой размерности системы дифференциальных уравнений, описывающей протекание процесса. Поэтому возникают трудности в применении метода динамического программирования ввиду ресурсоемких вычислений [3–5].

В-третьих, при решении задачи следует учитывать ограничения, накладываемые на значения начальных концентраций веществ. Данная особенность подразумевает применение численных методов поиска условного экстремума. В-четвертых, в ходе поиска оптимальных начальных концентраций необходимо контролировать выход суммы их значений за пределы значения заданной начальной суммарной концентрации.

В работе [6] приведен алгоритм расчета оптимальных начальных концентраций веществ химических реакций на основе эвристического метода искусственных иммунных систем. Недостатком данного алгоритма является отсутствие этапа проверки выполнения условия равенства суммы рассчитанных начальных концентраций заданному значению. Алгоритм применим только для реакций, в которых содержится два исходных вещества, тогда как в большинстве случаев сложные химические превращения включают в себя три и более исходных веществ.

В работе [7] показано решение задачи поиска оптимального значения начальной концентрации диизобутилалюминийгидрида для полимеризации изопрена на неодимсодержащей каталитической системе. В качестве критерия оптимальности рассмотрено достижение среднemasсовой молекулярной массы заданного значения. Вычисления проведены с помощью генетического алгоритма на основе кинетической модели реакции. В данной работе исследование ограничено поиском оптимальной начальной концентрации только одного компонента реакционной системы.

Поэтому возникает необходимость разработки численного алгоритма и соответствующего программного обеспечения для поиска оптимального начального состава реакционной смеси, состоящей из трех и более исходных веществ. Алгоритм должен учитывать перечисленные физико-химические особенности задачи. Для учета ограничений, накладываемых на значения начальных концентраций веществ и на их суммарную концентрацию, можно применить метод штрафов [8–11]. С помощью метода штрафов предлагается перейти к задаче поиска безусловного экстремума, а затем решить задачу без ограничений с помощью метода Хука–Дживса [12, 13].

## 1. Постановка задачи

Задачу выбора оптимального начального условия задачи Коши сформулируем на примере модели химической реакции, механизм протекания которой можно представить в виде схемы



где  $X_i$  – образующиеся и расходуемые вещества в ходе химических превращений,  $a_{si}$ ,  $b_{si}$  – стехиометрические коэффициенты веществ.

Изменение концентраций веществ  $X_i$  во времени описывается системой дифференциальных уравнений [14]

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{s=1}^m \nu_{si} w_s, i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_i^0, \quad (3)$$

где  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  – вектор концентраций веществ,  $t \in [0, \tau]$  – время,  $\nu_{si} = b_{si} - a_{si}$  – разность стехиометрических коэффициентов до и после взаимодействия веществ,  $w_s = w_s(x, T)$  – скорость  $s$ -й стадии реакции.

Кинетическое уравнение реакции согласно закону действующих масс имеет вид [15]:

$$w_s(x, T) = k_s(T) \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_{si}}, \quad (4)$$

где  $T$  – температура реакции,  $k_s(T)$  – константа скорости  $s$ -й стадии реакции (1), рассчитываемая по уравнению Аррениуса:

$$k_s(T) = k_s^0 \exp\left(-\frac{E_s}{RT}\right), s = \overline{1, m}, \quad (5)$$

где  $k_s^0$  – кинетическая константа,  $E_s$  – энергия активации  $s$ -й стадии,  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Вектор  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  представляет собой вектор начальных концентраций веществ. Обозначим за  $C_0$  суммарную концентрацию веществ в начальный момент времени, т.е.

$$C_0 = \sum_{i=1}^n x_i^0. \quad (6)$$

При этом на значения концентраций веществ в начальный момент времени наложены ограничения

$$x_i^a \leq x_i^0 \leq x_i^b, i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Задача определения оптимального начального состава реакционной смеси состоит в поиске вектора  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , который с учетом условий (6), (7) доставляет минимальное значение целевой функции

$$F(x^0) = \varphi(x(\tau)). \quad (8)$$

## 2. Численный алгоритм определения оптимального начального состава реакционной смеси

Задача оптимизации начальных концентраций (1)–(8) представляет собой задачу поиска условного экстремума функции (8), поскольку имеются условия (6), (7), ограничивающие область поиска решения.

Для решения задачи условного экстремума применяется две группы численных методов: методы возможных направлений и методы последовательной безусловной оптимизации [13].

К методам возможных направлений относятся методы непосредственного решения задачи условной оптимизации, основанные на переходе от одной допустимой точки к другой допустимой точке с лучшим значением целевой функции (метод проекции градиента, метод Зойтендейка, метод Франка–Вульфа).

Метод проекции градиента сходится только для выпуклых дифференцируемых функций. Для невыпуклых задач его применение неэффективно. Методы Зойтендейка и Франка–Вульфа применимы для задач, у которых система ограничений состоит только из линейных неравенств. Кроме того, применение данных методов подразумевает необходимость решения подзадач линейного программирования.

Основная идея методов второй группы заключается в том, чтобы преобразовать задачу условной оптимизации в последовательность задач безусловной оптимизации путем введения в рассмотрение вспомогательных функций. Одним из таких методов является метод штрафов, преимущество которого – возможность применения эффективных и надежных методов безусловной оптимизации, а также невысокая сложность программной реализации.

Для решения задачи (1)–(8) применим метод штрафов, позволяющий свести сформулированную задачу к задаче без ограничений.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$G(x^0) = F(x^0) + J(x^0, q^k) \rightarrow \min, \quad (9)$$

где  $J(x^0, q^k)$  – функция штрафов, такая что  $J(x^0, q^k) = 0$ , если ограничения (6), (7) выполняются, и  $J(x^0, q^k) > 0$  в противном случае. Если ограничения (6), (7) нарушены и  $q^k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $J(x^0, q^k) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$f(x^0) = C_0 - \sum_{i=1}^n x_i^0, \quad p_i(x^0) = x_i^a - x_i^0, \quad g_i(x^0) = x_i^0 - x_i^b.$$

Для ограничения типа равенств  $f(x^0) = 0$  применим квадратичный штраф, для ограничений типа неравенств  $p_i(x^0) \leq 0$ ,  $g_i(x^0) \leq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , – квадрат срезки. Поэтому представим функцию штрафов в виде функции

$$J(x^0, q^k) = \frac{q^k}{2} \left( [f(x^0)]^2 + \sum_{i=1}^n [\max\{0, p_i(x^0)\}]^2 + \sum_{i=1}^n [\max\{0, g_i(x^0)\}]^2 \right). \quad (10)$$

Для решения задачи оптимизации (1)–(5), (10) без ограничений применим метод Хука–Дживса. Процедура поиска решения оптимизационной задачи с помощью данного метода включает в себя два этапа: исследующий поиск и ускоряющий поиск по образцу [13]. Найденный вектор начальных концентраций  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , при котором функция (9) принимает наименьшее значение, является начальным для следующей итерации метода штрафов. Таким образом, алгоритм определения оптимальных начальных концентраций химической реакции состоит из следующих шагов.

*Шаг 1.* Задать параметры для метода штрафов: номер текущей итерации  $k = 0$ , начальное значение штрафа  $q^0$ , параметр для увеличения штрафа  $r$  (рекомендуется выбрать число от 4 до 10 [13]), константу  $\varepsilon_1 > 0$  для окончания работы алгоритма.

*Шаг 2.* Задать параметры метода Хука–Дживса: начальный вектор концентраций  $x_0^0 = (x_{01}^0, x_{02}^0, \dots, x_{0n}^0)$ , величины шагов по координатным направлениям  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , константу  $\varepsilon_2 > 0$  для окончания работы метода Хука–Дживса ( $h_i \geq \varepsilon_2$ ,  $i = \overline{1, n}$ ), ускоряющий множитель  $\lambda > 0$ , параметр уменьшения шага  $\mu$

*Шаг 3.* Положить  $y = x_k^0$ . Установить номер текущей координаты вектора начальных концентраций равным 1:  $i = 1$ .

*Шаг 4.* Решить прямую кинетическую задачу с начальными условиями  $x_k^0 = (x_{k1}^0, x_{k2}^0, \dots, x_{kn}^0)$ . Вычислить значение целевой функции  $G(x_k^0)$ .

*Шаг 5.* Решить прямую кинетическую задачу с начальными условиями  $x_{k+}^0 = (x_{k1}^0, \dots, x_{ki}^0 + h_i, \dots, x_{kn}^0)$ . Вычислить значение целевой функции  $G(x_{k+}^0)$ .

*Шаг 6.* Проверить, является ли шаг  $h_i$  удачным. Если  $G(x_{k+}^0) < G(x_k^0)$ , то положить  $x_k^0 = x_{k+}^0$  и перейти к шагу 10. Иначе перейти к шагу 7.

*Шаг 7.* Решить прямую кинетическую задачу с начальными условиями  $x_{k-}^0 = (x_{k1}^0, \dots, x_{ki}^0 - h_i, \dots, x_{kn}^0)$ . Вычислить значение функции  $G(x_{k-}^0)$ .

*Шаг 8.* Проверить условие, является ли шаг  $h_i$  удачным в противоположном направлении. Если  $G(x_{k-}^0) < G(x_k^0)$ , то положить  $x_k^0 = x_{k-}^0$  и перейти к шагу 10. Иначе перейти к шагу 9.

*Шаг 9.* Если шаг  $h_i$  неудачный в обоих направлениях, то оставить вектор начальных концентраций  $x_k^0$  без изменений.

*Шаг 10.* Если рассмотрены все координаты ( $i = n$ ), то проверить, является ли исследующий поиск удачным. Если  $G(x_k^0) < G(y)$ , т.е. произошло уменьшение значения целевой функции, то исследующий поиск прошел успешно и следует перейти к шагу 11. В противном случае перейти к шагу 12.

*Шаг 11.* Провести поиск по образцу. Положить  $z = x_k^0$ ,  $x_k^0 = z + \lambda(z - y)$  и перейти к шагу 3.

*Шаг 12.* Проверить условие окончания работы алгоритма метода Хука–Дживса. Если для всех  $i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) выполнено неравенство

$$h_i \leq \varepsilon_2, \quad (11)$$

то перейти к шагу 13. В противном случае уменьшить значение шага  $h_i = h_i / \mu$  для тех  $i$ , для которых не выполнено неравенство (11), и перейти к шагу 3.

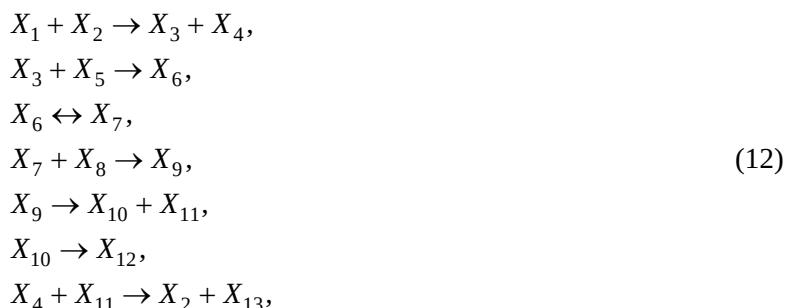


Шаг 13. Проверить условие окончания поиска решения. Если  $J(x_k^0, q^k) > \varepsilon_1$ , то положить  $q^{k+1} = r \cdot q^k$ ,  $k = k + 1$  и перейти к шагу 3. Иначе остановить поиск решения. В качестве решения задачи определения оптимальных начальных концентраций реакции принять последний вектор  $x_k^0$ .

### 3. Вычислительный эксперимент

Алгоритм выбора оптимальных начальных условий Коши применительно к задачам химической кинетики реализован в виде программного комплекса в системе программирования Delphi. Рассмотрим применение этого комплекса для задачи определения оптимальных начальных концентраций для каталитической реакции синтеза N-(адамантил)ацетамида. Продукты данной реакции применяются для получения противовирусных лекарственных препаратов, используемых для лечения и профилактики тяжелых заболеваний.

Схема реакции синтеза N-(адамантил)ацетамида взаимодействием 1-бромадамантана с ацетонитрилом под действием комплексов марганца представляется совокупностью стадий [16]:



где  $X_1 - C_{10}H_{15}Br$ ,  $X_2 - Mn$ ,  $X_3 - C_{10}H_{15}$ ,  $X_4 - MnBr$ ,  $X_5 - CH_3CN$ ,  $X_6 - C_{10}H_{15}^+NCCH_3$ ,  $X_7 - C_{10}H_{15}NC^+CH_3$ ,  $X_8 - H_2O$ ,  $X_9 - C_{10}H_{15}NH_2COCH_3$ ,  $X_{10} - C_{10}H_{15}NHCOCH_3$ ,  $X_{11} - H^+$ ,  $X_{12} - C_{10}H_{15}NHCOCH_3$ ,  $X_{13} - HBr$ .

Кинетические уравнения стадий реакции (12) имеют вид:

$$\begin{aligned} w_1(x, T) &= k_1(T)x_1x_2, \\ w_2(x, T) &= k_2(T)x_3x_5, \\ w_3(x, T) &= k_3(T)x_6, \\ w_4(x, T) &= k_4(T)x_7, \\ w_5(x, T) &= k_5(T)x_7x_8, \\ w_6(x, T) &= k_6(T)x_9, \\ w_7(x, T) &= k_7(T)x_{10}, \\ w_8(x, T) &= k_8(T)x_4x_{11}, \end{aligned}$$

где  $x_i$  – концентрация  $i$ -го вещества (моль/л),  $k_s(T)$  – константа скорости  $s$ -й стадии ( $1/ч$  для  $s = 3, 4, 6, 7$ ;  $л/(моль \cdot ч)$  для  $s = 1, 2, 5, 8$ ), рассчитываемая по уравнению Аррениуса.

Кинетическая модель данной реакции представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{s=1}^8 \nu_{si} w_s, \quad i = \overline{1, 13}, \quad (13)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_5(0) = x_5^0, \quad x_8(0) = x_8^0, \\ x_j(0) &= 0, \quad j = 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13. \end{aligned} \quad (14)$$

В таблице 1 приведены значения стехиометрических коэффициентов  $\nu_{si}$ .

Численные значения кинетических параметров реакции синтеза N-(адамантил)ацетамида приведены в работе [16].

Таблица 1

Значения стехиометрических коэффициентов ( $v_{si}$ )

| $s \backslash i$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1                | -1 | -1 | 1  | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 2                | 0  | 0  | -1 | 0  | -1 | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 3                | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 4                | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 1  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 5                | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | -1 | 1  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 6                | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 1  | 1  | 0  | 0  |
| 7                | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 1  | 0  |
| 8                | 0  | 1  | 0  | -1 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | -1 | 0  | 1  |

Исходными веществами реакции (12) являются  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_5$ ,  $X_8$ . Концентрации данных веществ в начальный момент времени связаны соотношением

$$x_1^0 + x_2^0 + x_5^0 + x_8^0 = C_0. \quad (15)$$

Зададим начальную суммарную концентрацию реагентов  $C_0 = 10$  моль/л.

Пусть на допустимые значения начальных концентраций исходных веществ наложены ограничения

$$0 < x_j^0 < C_0, j=1, 2, 5, 8. \quad (16)$$

Начальные концентрации остальных веществ равны нулю.

Поскольку целевым продуктом реакции (12) является вещество  $X_{12}$ , рассмотрим в качестве критерия оптимальности максимальное значение концентрации вещества  $X_{12}$  в конце реакции:

$$F(x^0) = -x_{12}(\tau) \rightarrow \min. \quad (17)$$

Необходимо для реакции (12) определить вектор начальных концентраций реагентов  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_5^0, x_8^0)$ , удовлетворяющий условиям (15), (16) и доставляющий минимум критерию оптимальности (17).

Для решения сформулированной задачи разработан программный комплекс в среде визуального программирования Delphi (рис. 1).

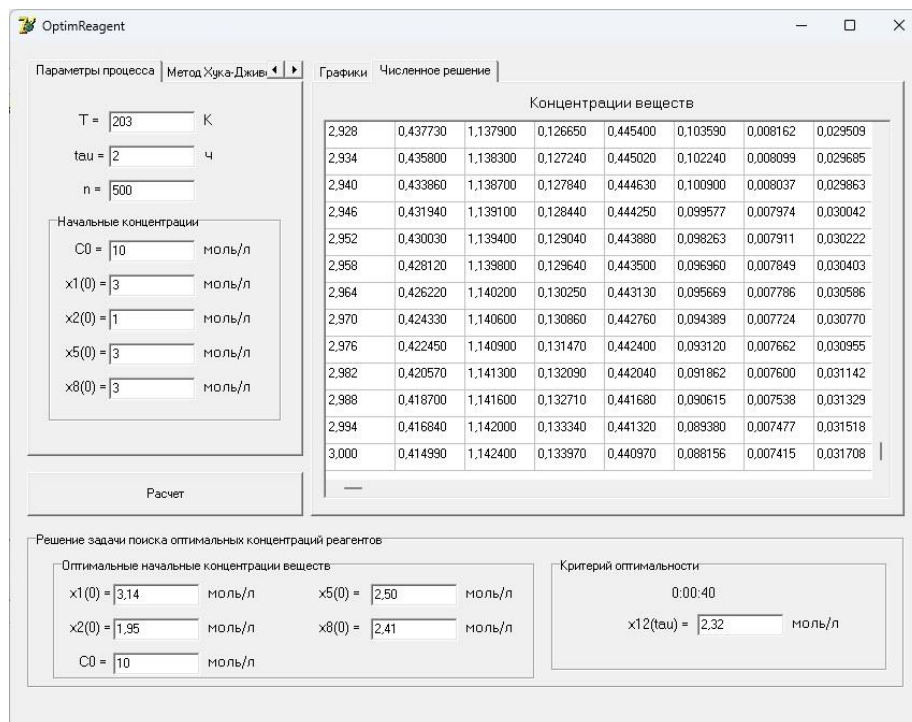


Рис. 1. Главное окно программного комплекса  
Fig. 1. Main window of the software package

Для пользователя имеется возможность ввода параметров химической реакции и параметров алгоритма. Результаты вычислений представляются в численном и графическом виде.

Реакция рассмотрена при температуре  $T = 130^\circ\text{C}$  продолжительностью  $\tau = 2$  ч. Начальная суммарная концентрация исходных веществ  $C_0$  принята равной 10 моль/л.

Функция штрафов для задачи (12)–(17) имеет вид:

$$J(x^0, q^k) = \frac{q^k}{2} \left( \left[ C_0 - (x_1^0 + x_2^0 + x_5^0 + x_8^0) \right]^2 + \sum_{i=1,2,5,8} \left[ \max\{0, -x_i^0\} \right]^2 + \sum_{i=1,2,5,8} \left[ \max\{0, x_i^0 - C_0\} \right]^2 \right).$$

При решении задачи (12)–(17) применены следующие параметры алгоритма метода штрафов и метода Хука–Дживса: начальное значение штрафа  $q^0 = 1$ , параметр для увеличения штрафа  $r = 8$ , константы  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ , начальный вектор концентраций реагентов  $x^0 = (3, 1, 3, 3)$ , величины шагов по координатным направлениям  $h_i = 0,1$  ( $i = 1, 2, 5, 8$ ), ускоряющий множитель  $\lambda = 0,3$ , параметр уменьшения шага  $\mu = 2$ .

В результате проведенных вычислений получен следующий набор начальных концентраций реагентов (моль/л):

$$x_1^0 = 3,14, \quad x_2^0 = 1,95, \quad x_5^0 = 2,50, \quad x_8^0 = 2,41, \quad (18)$$

при котором достигается наибольшее значение концентрации целевого продукта реакции  $X_{12}$ , равное 2,32 моль/л.

На рис. 2, 3 приведены изменения концентраций исходных веществ и целевого продукта реакции с течением времени.

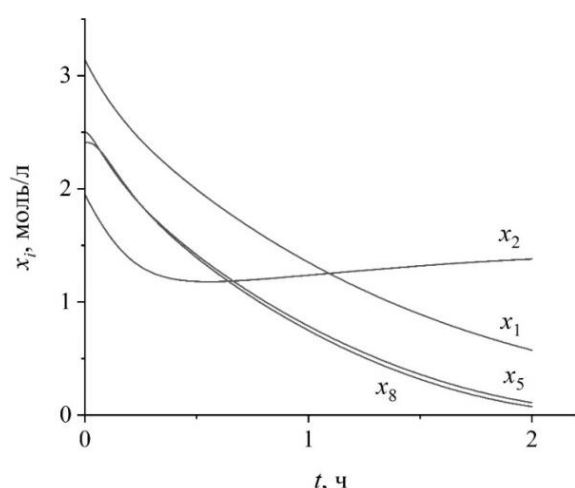


Рис. 2. Динамика концентраций исходных веществ  
Fig. 2. Dynamics of concentrations of initial substances

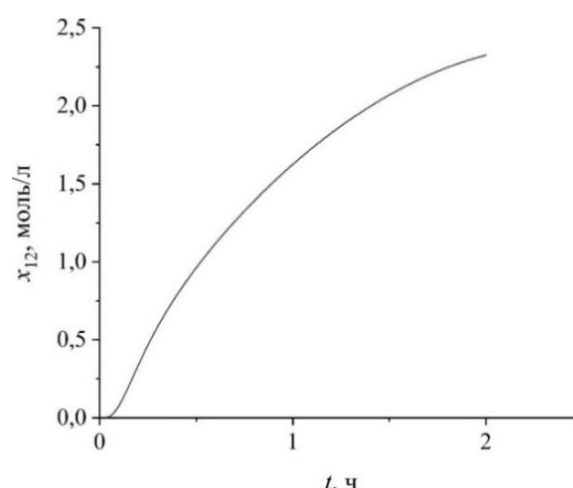


Рис. 3. Динамика концентрации целевого вещества  
Fig. 3. Dynamics of target substance concentration

В табл. 2 приведены результаты решения системы дифференциальных уравнений (13) при некоторых начальных условиях (14), удовлетворяющих ограничениям (15), (16).

Таблица 2

Зависимость концентрации вещества  $X_5$  от начальных концентраций реагентов

| № | $x_1^0$ , моль/л | $x_2^0$ , моль/л | $x_5^0$ , моль/л | $x_8^0$ , моль/л | $x_{12}(\tau)$ , моль/л |
|---|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------------|
| 1 | 3                | 1                | 3                | 3                | 1,49                    |
| 2 | 3                | 3                | 1                | 3                | 1                       |
| 3 | 3                | 3                | 3                | 1                | 1                       |
| 4 | 4                | 2                | 2                | 2                | 1,99                    |
| 5 | 2                | 2                | 4                | 2                | 1,68                    |
| 6 | 2                | 2                | 2                | 4                | 1,64                    |
| 7 | 5                | 1                | 2                | 2                | 1,86                    |

Окончание табл. 2

| №  | $x_1^0$ , моль/л | $x_2^0$ , моль/л | $x_5^0$ , моль/л | $x_8^0$ , моль/л | $x_{12}(\tau)$ , моль/л |
|----|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------------|
| 8  | 5                | 2                | 1                | 2                | 1                       |
| 9  | 5                | 2                | 2                | 1                | 1                       |
| 10 | 2                | 1                | 5                | 2                | 1,09                    |
| 11 | 2                | 2                | 5                | 1                | 1                       |
| 12 | 2                | 1                | 2                | 5                | 1,08                    |
| 13 | 6                | 1                | 1                | 2                | 1                       |
| 14 | 6                | 1                | 2                | 1                | 1                       |
| 15 | 6                | 2                | 1                | 1                | 0,99                    |
| 16 | 2                | 1                | 6                | 1                | 0,99                    |
| 17 | 1                | 1                | 6                | 2                | 0,61                    |
| 18 | 1                | 2                | 6                | 1                | 0,87                    |
| 19 | 2                | 1                | 1                | 6                | 0,93                    |
| 20 | 1                | 1                | 2                | 6                | 0,61                    |
| 21 | 7                | 1                | 1                | 1                | 0,99                    |
| 22 | 3,14             | 1,95             | 2,50             | 2,41             | 2,32                    |

Из табл. 2 видно, что наибольшее значение концентрации целевого продукта реакции обеспечивает набор начальных концентраций реагентов (18). Поэтому можно сделать вывод о корректной работе алгоритма определения оптимального начального состава реакционной смеси.

### Заключение

Разработанный алгоритм можно применять для решения задачи оптимального выбора начальных условий задачи Коши. В основу алгоритма положены метод штрафов и метод Хука–Дживса. Алгоритм учитывает такие особенности задачи, как наличие ограничений на значения начальных концентраций веществ и ограничения на начальную суммарную концентрацию веществ. Алгоритм применим для исследования каталитических реакций с нелинейной динамикой, в том числе и для реакций, содержащих три и более исходных веществ. На основе алгоритма разработан программный комплекс для расчета начальных концентраций реагентов.

Работа программного комплекса апробирована на реакции синтеза N-(адамантил)ацетамида, описываемой нелинейной системой дифференциальных уравнений. Определены начальные концентрации реагентов, при которых достигается наибольшее значение концентрации целевого продукта реакции. При этом выполнены физико-химические ограничения задачи. Сравнение полученного значения концентрации целевого продукта реакции с его значением, вычисленным при других начальных концентрациях, показало, что рассчитанный с помощью алгоритма набор начальных концентраций реагентов обеспечивает достижение наибольшего значения концентрации целевого продукта реакции.

### Список источников

1. Royce N.J. Linear Programming Applied to Production Planning and Operation of a Chemical Process // Journal of the Operational Research Society. 1970. V. 21. P. 61–80.
2. Santos L., Villas-Boas F., Oliveira A.R.L., Perin C. Optimized choice of parameters in interior-point methods for linear programming // Computational Optimization and Applications. 2019. V. 73 (1). P. 535–574.
3. Biegler L.T. Integrated Optimization Strategies for Dynamic Process Operations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2017. V. 51 (6). P. 910–927.
4. Dadebo S.A., Mcauley K.B. Dynamic optimization of constrained chemical engineering problems using dynamic programming // Computers & Chemical Engineering. 1995. V. 19 (5). P. 513–525.
5. Pan Y., Fei Z.-S., Zhao L., Liang J. Dynamic optimization for chemical process based on improved iterative dynamic programming algorithm // Journal of East China University of Science and Technology. 2013. V. 39 (1). P. 61–65.
6. Антипина Е.В., Антипин А.Ф. Алгоритм расчета оптимальных начальных концентраций веществ химических реакций // Вестник Технологического университета. 2017. Т. 20, № 13. С. 84–87.
7. Антипина Е.В., Мифтахов Э.Н., Мустафина С.А. Поиск оптимального значения начальной концентрации диизобутилалюминийгидрида для регулирования молекулярной массы полиизопрена на неодимсодержащей каталитической системе // Вестник Тверского государственного университета. Сер. Химия. 2020. № 3 (41). С. 52–64.

8. Jiang C., Lin Q., Yu C., Teo K.L., Duan G.R. An Exact Penalty Method for Free Terminal Time Optimal Control Problem with Continuous Inequality Constraints // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2012. V. 154. P. 30–53. doi: 10.1007/s10957-012-0006-9
9. Smith S., Mayne D.Q. Exact penalty algorithm for optimal control problems with control and terminal constraints // *International Journal of Control*. 2007. V. 48 (1). P. 257–271.
10. Gugat M., Zuazua E. Exact penalization of terminal constraints for optimal control problems // *Optimal Control Applications and Methods*. 2016. V. 37 (6). P. 1329–1354.
11. Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф., Морозкин Н.Д. Алгоритм решения задачи оптимального управления химико-технологическим процессом с терминальными ограничениями // *Инженерные технологии и системы*. 2022. Т. 32, № 3. С. 410–422. doi: 10.15507/2658-4123.032.202203.410-422
12. Бушуев А.Ю., Рязузов С.С. Оптимизация конструкции твердотопливного модельного газогенератора // *Математическое моделирование и численные методы*. 2019. № 4 (24). С. 3–14.
13. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М. : Высшая школа, 2005. 544 с.
14. Быков В.И. Моделирование и оптимизация химико-технологических процессов. Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2002. 298 с.
15. Яблонский Г.С., Быков В.И., Горбань А.Н. Кинетические модели каталитических реакций. Новосибирск : Наука, 1983. 254 с.
16. Новичкова А.В. Численный анализ реакционной способности олефинов и алюминийорганических соединений на основе кинетических моделей частных и общих реакций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2015. 110 с.

### References

1. Royce, N.J. (1970) Linear Programming Applied to Production Planning and Operation of a Chemical Process. *Journal of the Operational Research Society*. 21. pp. 61–80.
2. Santos, L., Villas-Boas, F., Oliveira, A.R.L. & Perin, C. (2019) Optimized choice of parameters in interior-point methods for linear programming. *Computational Optimization and Applications*. 73(1). pp. 535–574.
3. Biegler, L.T. (2017) Integrated Optimization Strategies for Dynamic Process Operations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 51(6). pp. 910–927.
4. Dadebo, S.A. & Mcauley, K.B. (1995) Dynamic optimization of constrained chemical engineering problems using dynamic programming. *Computers & Chemical Engineering*. 19(5). pp. 513–525.
5. Pan, Y., Fei, Z.-S., Zhao, L. & Liang, J. (2013) Dynamic optimization for chemical process based on improved iterative dynamic programming algorithm. *Journal of East China University of Science and Technology*. 39(1). pp. 61–65.
6. Antipina, E.V. & Antipin, A.F. (2017) Algoritm rascheta optimal'nykh nachal'nykh kontsentratsiy veshchestv khimicheskikh reaktsiy [Algorithm for calculation of optimal initial concentrations of substances of chemical reactions]. *Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta*. 20(13). pp. 84–87.
7. Antipina, E.V., Miftakhov, E.N. & Mustafina, S.A. (2020) Poisk optimal'nogo znacheniya nachal'noy kontsentratsii diizobutil-aluminiygidrida dlya regulirovaniya molekulyarnoy massy poliizoprena na neodimsoderzhashchey kataliticheskoy sisteme [Search for the optimal value of the initial concentration of diisobutylaluminum hydride for the regulation of the polyisoprene molecular mass on a neodymium-containing catalytic system]. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Khimiya*. 41. pp. 52–64.
8. Jiang, C., Lin, Q., Yu, C., Teo, K.L. & Duan, G.R. (2012) An Exact Penalty Method for Free Terminal Time Optimal Control Problem with Continuous Inequality Constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 154. pp. 30–53. DOI: 10.1007/s10957-012-0006-9
9. Smith, S. & Mayne, D.Q. (2007) Exact penalty algorithm for optimal control problems with control and terminal constraints. *International Journal of Control*. 48(1). pp. 257–271.
10. Gugat, M. & Zuazua, E. (2016) Exact penalization of terminal constraints for optimal control problems. *Optimal Control Applications and Methods*. 37(6). pp. 1329–1354.
11. Antipina, E.V., Mustafina, S.A., Antipin, A.F. & Morozkin, N.D. (2022) Algoritm resheniya zadachi optimal'nogo upravleniya khimiko-tekhnologicheskim protsessom s terminal'nymi ogranicheniyami [Algorithm for solving the problem of optimal control of a chemical-technological process with terminal constraints]. *Inzhenernye tekhnologii i sistemy – Engineering Technologies and Systems*. 32(3). pp. 410–422. DOI: 10.15507/2658-4123.032.202203.410-422
12. Bushuev, A.Yu. & Ryzuzov, S.S. (2019) Optimizatsiya konstruktii tverdotoplivnogo model'nogo gazogeneratora [Optimization of the design of a solid fuel model gas generator]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*. 24. pp. 3–14.
13. Panteleev, A.V. & Letova, T.A. (2005) *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh* [Optimization Methods in Examples and Tasks]. Moscow: Vysshaya shkola.
14. Bykov, V.I. (2002) *Modelirovanie i optimizatsiya khimiko-tekhnologicheskikh protsessov* [Modeling and Optimization of Chemical-Technological Processes]. Krasnoyarsk: KSTU.
15. Yablonskiy, G.S., Bykov, V.I. & Gorban, A.N. (1983) *Kineticheskie modeli kataliticheskikh reaktsiy* [Kinetic models of catalytic reactions]. Novosibirsk: Nauka.
16. Novichkova, A.V. (2015) *Chislennyy analiz reaktsionnoy sposobnosti olefinov i alyuminiyorganicheskikh soedineniy na osnove kineticheskikh modeley chastnykh i obshchikh reaktsiy* [Numerical analysis of the reactivity of olefins and organoaluminum compounds based on kinetic models of particular and general reactions]: Physics and Mathematics Cand. Diss. Ufa, BSU.

**Информация об авторах:**

**Антипина Евгения Викторовна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник управления научных исследований и разработок Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: stepashinaev@ya.ru

**Мустафина Светлана Анатольевна** – профессор, доктор физико-математических наук, проректор по развитию филиальной сети Уфимского университета науки и технологий (Уфа, Россия). E-mail: mustafina\_sa@mail.ru

**Антипин Андрей Федорович** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной информатики и программирования Стерлитамакского филиала Уфимского университета науки и технологий (Стерлитамак, Россия). E-mail: andrejantipin@ya.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Antipina Evgenia V.** (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: stepashinaev@ya.ru

**Mustafina Svetlana A.** (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vice-Rector for Branch Network Development, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation). E-mail: mustafina\_sa@mail.ru

**Antipin Andrey F.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russian Federation). E-mail: andrejantipin@ya.ru

**The author declares no conflicts of interests.**

*Поступила в редакцию 16.10.2023; принята к публикации 05.03.2024*

*Received 16.10.2023; accepted for publication 05.03.2024*

Научная статья

УДК 004.652.8

doi: 10.17223/19988605/66/9

**Использование IS-THE-графов для анализа иерархических структур данных****Алексей Михайлович Бабанов<sup>1</sup>, Елена Сергеевна Квач<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>1</sup> *babanov@mail.tsu.ru*<sup>2</sup> *kvachelena93@gmail.com*

**Аннотация.** Определяются общие принципы представления иерархических структур, таких как специализации и категоризации в моделях данных, иерархии классов в ООП. Такое представление позволяет глубже анализировать семантику предметной области и решать задачу оптимальной универсальной реализации подобных структур в системах баз данных и объектно-ориентированных приложениях. Возможность для такого обобщения обеспечивают IS-THE-отношения и IS-THE-отображения, на основе которых строятся IS-THE-графы. Выделение по определенным правилам подграфов этих графов порождает известные в информатике виды иерархических структур: иерархию единичного наследования (иерархию специализации), граф выборочного наследования (двухуровневый граф категоризации), двухуровневый граф множественного наследования.

**Ключевые слова:** специализация; иерархия наследования; IS-A-отношение; IS-THE-отношение; IS-THE-граф.

**Для цитирования:** Бабанов А.М., Квач Е.С. Использование IS-THE-графов для анализа иерархических структур данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 87–96. doi: 10.17223/19988605/66/9

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/9

**IS-THE graphs usage to analyze hierarchical data structures****Alexey M. Babanov<sup>1</sup>, Elena S. Kvach<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup> *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*<sup>1</sup> *babanov@mail.tsu.ru*<sup>2</sup> *kvachelena93@gmail.com*

**Abstract.** The article defines the general principles for representing hierarchical structures, such as specializations and categorizations in data models, and class hierarchies in OOP. This representation allows a deeper analysis of the semantics of the subject area and solving the problem of optimal universal implementation of these structures in database systems and object-oriented applications. The possibility for such a generalization is provided by IS-THE relations and IS-THE mappings, on the basis of which IS-THE graphs are constructed. The selection of subgraphs of these graphs according to certain rules generates types of hierarchical structures known in computer science: a single inheritance hierarchy (a specialization hierarchy), a selective inheritance graph (a two-level categorization graph), a two-level multiple inheritance graph.

**Keywords:** specialization; inheritance hierarchy; IS-A relation; IS-THE relation; IS-THE graph.

**For citation:** Babanov, A.V., Kvach, E.S. (2024) IS-THE graphs usage to analyze hierarchical data structures. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 87–96. doi: 10.17223/19988605/66/9

## Введение

Важным элементом семантики данных являются так называемые IS-A-отношения (отношения ЕСТЬ-НЕКОТОРЫЙ). Они впервые были определены и применялись в системах управления знаниями [1, 2]. С появлением в конце прошлого века семантической модели Extended Entity-Relationship Model (EERM) [3–6] эти отношения стало возможным представлять и при моделировании данных. Не обошла своим вниманием эти отношения и объектно-ориентированная парадигма программирования, использующая иерархии наследования [7]. Во время синтеза Entity-Relationship-Mapping Model (ERMM) была предпринята попытка переосмыслить этот феномен [8]. Основным принципом являлось следование безупречным логическим канонам при сохранении той функциональности, которая востребована в моделировании данных.

В информатике известные иерархические структуры, порожденные IS-A-отношениями, воспринимаются разрозненно, и нет общего понимания в представлении этих структур. В статье предлагается понятие IS-THE-отношения и рассматриваются разновидности таких отношений с использованием общеизвестных ассоциативно близких терминов кровного родства. На базе этих отношений с применением аппарата семантически значимых отображений строятся различные виды IS-THE-иерархий (или в общем случае – IS-THE-графов). Поскольку отображения очень тонко выражают семантику предметных областей (ПрО), представленные IS-THE-иерархии обеспечат возможность более точного, полного и детального описания закономерностей ПрО на этапе проектирования семантической схемы. Они позволят определить в схеме ограничения на допустимые данные и подобрать оптимальное представление этих данных в БД.

### 1. Понятие IS-THE-отношения

Практически каждый объект ПрО может подпадать под разные понятия о предметах. Этот факт влечет за собой представление объекта данными разных структур (сущностей, строк и т.д.) в базе данных (БД). Несмотря на это, требуется восстанавливать единство объекта, соединяя эти данные. Реализации универсального механизма такого соединения и посвящены усилия авторов. Но прежде всего требуется выработать строгий понятийный базис данного процесса. В этом помогут определяемые далее термины.

Два элемента объемов разных понятий связаны универсальным **IS-THE-отношением** (отношением ЕСТЬ-ЭТОТ) тогда и только тогда, когда они представляют один и тот же объект предметной области [9]. Например, фраза «Пациент Иванов ЕСТЬ ЭТОТ врач Иванов» описывает ситуацию с заболевшим врачом. IS-THE-отношение – это бинарное 1:1-отношение, определяющее пару взаимобратных функциональных **IS-THE-отображений** (рис. 1).

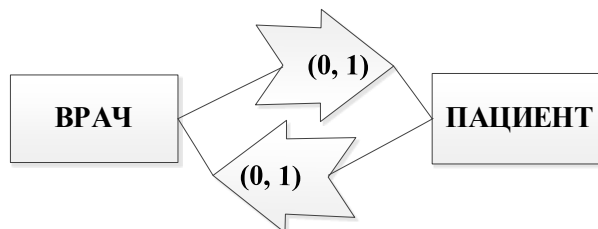


Рис. 1. Пример IS-THE-отображений между понятиями Врач и Пациент  
Fig. 1. An example of IS-THE mappings between the concepts Doctor and Patient

Такие отображения могут быть полными или частичными. В примере они частичные (врач может не быть пациентом, и наоборот, пациент может не быть врачом). Кстати, приведенная фраза соответствует экземпляру одного из таких отображений. Экземпляру обратного отображения соответствует фраза «Врач Иванов ЕСТЬ ЭТОТ пациент Иванов». Таким образом, слова ЕСТЬ ЭТОТ отражают смысл именно экземпляра отображения, а не кортежа отношения. В этом есть определенная



преемственность, так как слова ЕСТЬ НЕКОТОРЫЙ (IS A) также отражают направленную связь. Например, «Пушкин есть некоторый поэт», но не наоборот – «поэт есть некоторый Пушкин». Заметим, что подходящих терминов для направленных отображений в языке гораздо больше, чем для нейтральных к направлению отношений.

В IS-THE-отношении и отображениях участвуют непосредственно объекты ПрО (когда речь идет о законе соответствия объектов) или их абстракции – данные (когда речь идет об аналогичном законе соответствия данных, представляющих объекты). Можно сказать, что IS-THE-отношение позволяет определить в каком-то смысле «близость» понятий: понятия близки (и между ними можно установить IS-THE-отношение) тогда и только тогда, когда найдется хотя бы один объект, подпадающий под оба эти понятия. Такая «близость» натолкнула авторов на проведение параллелей с близостью родственников в поисках простых подходящих терминов.

Структуры данных (множества сущностей, таблицы) предназначены для представления данных об объектах ПрО, и каждая из них соответствует определенному понятию (о предметах, *n*-ках предметов), экстенционал которого и представлен данными, принадлежащими этой структуре. Каждый объект ПрО определен в ней своей абстракцией (сущностью, строкой) в контексте этого понятия. Таким образом, один и тот же объект, подпадающий под разные понятия, может быть представлен в нескольких различных структурах данных. Именно между этими элементами-абстракциями одного и того же объекта и устанавливается IS-THE-отношение в данных.

Если известные трактовки IS-A-отношения связывают объект с классом (например, «Пушкин А.С. есть некоторый поэт») или класс с классом (например, «поэт есть некоторый человек»), то в IS-THE-отношения вступают только объекты (например, «поэт Пушкин А.С. есть этот человек Пушкин А.С.»). IS-THE-отношений между классом и его элементом быть не может. В этом одно из принципиальных отличий между этими отношениями.



Рис. 2. Пример IS-THE-графа  
Fig. 2. An example of IS-THE graph

IS-THE-отношения, определенные на объемах понятий, представляются в схеме данных специальными универсальными бинарными взаимосвязями между соответствующими структурными компонентами – классами, с которыми ассоциируются понятия (рис. 2). Если представить понятия в виде вершин, а IS-THE-отношения – в виде ребер, то получится в общем случае граф – **IS-THE-граф**, или граф понятий и их IS-THE-отношений.

## 2. IS-THE-отношения в терминах родства

Упомянутая близость понятий, необходимая для построения IS-THE-отношения, наводит на мысль об уместности использования в качестве аналогий родственных отношений. Рассмотрим общепринятые определения, которые опубликованы в [10]:

«**Родство** есть отношение одного из членов рода к другому члену того же рода, причем род определяется как совокупность лиц, связанных кровной связью и происходящих от одного общего родоначальника. Близость родства определяется линиями и степенями. Каждое рождение образует одну **степень** (между человеком и его сыном одна степень, внуком – две и т.д.). Связь непрерывно продолжающихся рождений или степеней составляет **линию**. Лица считаются в родстве между собой

**по прямой линии**, если одно лицо происходит от другого лица (например, дед и внук). Лица, не происходящие одно от другого, но объединяемые общим родоначальником, состоят в родстве **по боковой линии** (братья, дядя и племянник). Каждая степень относительно примыкающей к ней линии называется коленом, а все лица одного колена образуют **поколение**».

Для полноты картины следует рассмотреть и **тождественное отношение родства**, в котором понятие находится само с собой (или с тождественным ему понятием). Ведь они тоже родственны, так как имеют совпадающих предков (самих себя).

Следует отметить, что в дальнейшем мы будем просто использовать введенные термины для отношений между понятиями. Не надо переносить первоначальный смысл этих терминов на IS-THE-графы. Граф родственных понятий (таких как отец, сестра) не является IS-THE-графом, поскольку это понятия не о предметах, а о парах предметов. Также не следует представлять себе генеалогическое дерево, как IS-THE-граф. Вершинами его являются предметы (люди), а не понятия.

Теперь рассмотрим различные виды IS-THE-отношений как родственные и проанализируем, какие IS-THE-отображения для них характерны.

Первым для рассмотрения выделим **родственное отношение тождества понятий**. Понятия  $A$  и  $B$  являются тождественными, если им всегда соответствуют одни и те же элементы. В этом случае максимальные и минимальные кардинальные числа обоих определяемых этим отношением отображений равны 1 (т.е. эти отображения полные функциональные).

Определим для тождественных понятий экстенционал и интенционал. Пусть  $A$  – множество или класс, который является экстенционалом (или объемом) понятия  $A$ ,  $A(x)$  – логическая формула или предикат, который определяет интенционал (или содержание) понятия  $A$ . Тогда  $A = \{x \mid A(x)\}$ . Для отношения тождества понятий  $A = B$  (множества равны) и  $A(x) = B(x)$  (формулы эквивалентны). Таким образом, для родственного отношения тождества понятий их интенционалы эквивалентны и экстенционалы равны.

По сути, тождественные понятия – это понятия-синонимы. Например, такое отношение связывает понятия «пациент» и «больной». Понятно, что пациент и больной являются понятиями-синонимами, и в жизни примеров тождественных понятий много: гражданин и физическое лицо, имидж и образ, подлинник и оригинал и т.д.

Отношение типа «предок–потомок», или его частный случай – отношение типа «род–вид», является **родственным отношением понятий по прямой линии**. При этом отношение «предок–потомок» может быть многоуровневым и соответствовать многократному произведению отношений «род–вид», а отношение «род–вид» всегда двухуровневое. Экстенционал понятия-предка (множество  $A$ ) включает элементы экстенционала понятия-потомка (множество  $B$ ). Например, рассмотрим понятия «человек» и «студент». Каждый студент является человеком, но не каждый человек является студентом. Это значит, что каждый объект, подпадающий под понятие «студент», одновременно удовлетворяет и содержанию понятия «человек».

В этом случае для IS-THE-отображения  $B \rightarrow A$  минимальное и максимальное кардинальные числа равны 1, для обратного отображения  $A \rightarrow B$  они равны 0 и 1 соответственно.

Для родственного отношения понятий по прямой линии можно утверждать, что  $B(x) \Rightarrow A(x)$  ( $A(x)$  является следствием  $B(x)$ ), и  $A \supseteq B$  ( $B$  – подмножество  $A$ ). Таким образом, интенционал потомка – это интенционал предка, конъюнктивно дополненный видовым условием  $B^*(x): B(x) = A(x) \wedge B^*(x)$ . Экстенционал потомка – подмножество экстенционала предка.

Родственные отношения понятий по прямой линии возникают, например, между понятиями «студент» и «человек» (студент ЕСТЬ ЭТОТ человек (1,1), человек ЕСТЬ ЭТОТ студент (0,1)) или между понятиями «мужчина» и «человек» (мужчина ЕСТЬ ЭТОТ человек (1,1), человек ЕСТЬ ЭТОТ мужчина (0,1)).

**Родственное отношение понятий по боковой линии** возникает между понятиями  $A$  и  $B$ , расположенными на разных ветвях иерархии и имеющими общего предка. При этом  $A$  и  $B$  не связаны между собой отношением «предок–потомок». В этом случае минимальное и максимальное карди-

нальные числа обоих определяемых этим отношением IS-THE-отображений равны 0 и 1 соответственно.

Для родственного отношения понятий по боковой линии можно утверждать следующее. Оба интенционала таких понятий имеют совпадающую часть – интенционал общего предка. Экстенционалы понятий пересекаются, но, очевидно, не равны и не связаны отношением включения (в отличие от родственных отношений понятий по прямой линии).

Между шахтером и музыкантом может быть образовано родственное отношение понятий по боковой линии (шахтер ЕСТЬ ЭТОТ музыкант (0,1), музыкант ЕСТЬ ЭТОТ шахтер (0,1)). В тех случаях, когда врач заболел и обратился в больницу, между врачом и пациентом возникает такое же отношение (врач ЕСТЬ ЭТОТ пациент (0,1), пациент ЕСТЬ ЭТОТ врач (0,1)). Действительно, совпадающей частью содержаний указанных в примерах понятий является интенционал их общего предка – понятия «человек».

### 3. IS-THE-графы

Используя IS-THE-отношения между понятиями, можно формировать IS-THE-графы. Причем у каждой вершины, как правило, имеется не более одной родительской вершины, но есть исключения в редких случаях множественного наследования и категоризации. Поэтому, строго говоря, получающиеся IS-THE-графы не всегда являются деревьями, и в них можно встретить самые разнообразные IS-THE-отношения. Тем не менее в каждом IS-THE-графе можно выделить подграфы, образованные родственными отношениями понятий одного из трех представленных ранее типов.

Поскольку весь IS-THE-граф разбивается на множество IS-THE-подграфов в соответствии с бинарными IS-THE-отношениями, большую роль играет умение анализировать эти подграфы. Прежде всего, важно определить суперкласс (родительское понятие верхнего уровня) для этого подграфа. Дело осложняется тем, что в случаях множественного наследования и категоризации их будет несколько, но все они будут являться суперклассами. Если содержание (интенционал) понятия не включает содержание других понятий подграфа, это понятие является суперклассом. И наоборот, если содержание понятия включает целиком содержание понятия-суперкласса, такое понятие является подклассом этого понятия-суперкласса.

В зависимости от типа родственных IS-THE-отношений могут быть образованы различные варианты IS-THE-подграфов: родственное отношение тождества понятий образует полный граф тождественных понятий, родственные отношения понятия-суперкласса с подклассами по прямой линии – иерархию единичного наследования (иерархию специализации), родственные отношения понятий-суперклассов с одним и тем же подклассом по прямой линии при наличии IS-THE-отношений по боковой линии между суперклассами – двухуровневый граф множественного наследования, родственные отношения понятий-суперклассов с одним и тем же подклассом по боковой линии при отсутствии IS-THE-отношений между суперклассами – граф выборочного наследования (двухуровневый граф категоризации).

## 4. Представление двухуровневых IS-A-отношений как комбинации IS-THE-отношений

### 4.1. Полный граф тождественных понятий

В случае, когда между всеми классами IS-THE-подграфа наблюдаются родственные отношения тождества, содержания (интенционалы) всех понятий эквивалентны:  $A_1(x) = A_2(x) = \dots = A_n(x)$ . Все понятия равноправны, выделить суперклассы и подклассы не представляется возможным (точнее, они все являются одновременно и суперклассами, и подклассами). Все классы включают одни и те же элементы, поэтому максимальные и минимальные кардинальные числа всех IS-THE-отображений между классами равны 1 (рис. 3).

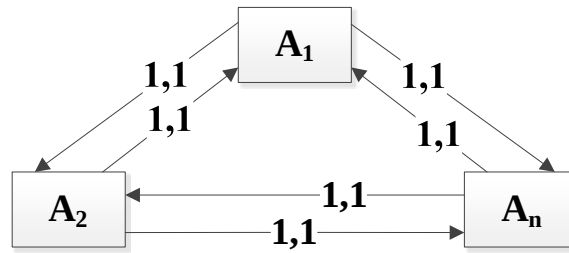


Рис. 3. Граф тождественных понятий  
Fig. 3. Identity concept graph

Примером графа тождественных понятий является, например, граф, образованный IS-THE-отношениями понятий *множество*, *класс* и *совокупность*. Считаем эти термины синонимичными, хотя это не всегда так. При этом имеем следующие IS-THE-отображения: *множество ЕСТЬ ЭТОТ класс* (1,1) и обратное отображение *класс ЕСТЬ ЭТО множество* (1,1); *множество ЕСТЬ ЭТА совокупность* (1,1) и обратное отображение *совокупность ЕСТЬ ЭТО множество* (1,1); наконец, *совокупность ЕСТЬ ЭТОТ класс* (1,1) и обратное отображение *класс ЕСТЬ ЭТА совокупность* (1,1).

#### 4.2. Иерархия единичного наследования (иерархия специализации)

Полное единичное наследование возникает, когда подклассы (один или несколько) состоят в отношении родства по прямой линии только с одним суперклассом (соответствующие видовые понятия связаны только с одним родовым понятием). Таким образом, в этом случае между суперклассом и всеми подклассами наблюдаются отношения родства по прямой линии – для прямого отображения максимальное и минимальное кардинальные числа равны (0,1), для обратного отображения – (1,1). Между подклассами в таком случае характерно отношение родства по боковой линии – для обоих отображений максимальное и минимальное кардинальные числа равны 0,1 (рис. 4).

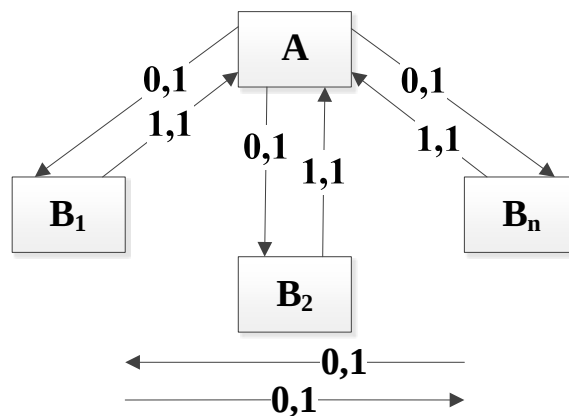


Рис. 4. Иерархия единичного наследования  
Fig. 4. Single inheritance hierarchy

Связующим элементом иерархии является суперкласс. В данном случае критерии для суперкласса и подкласса выполняются и, соответственно, содержание суперкласса  $A$  не включает содержание подкласса  $B_1$ . Содержание подкласса  $B_1 = \{x \mid A(x) \wedge B_1'(x)\}$ , где  $A(x)$  – содержание суперкласса  $A$ ,  $B_1'(x)$  – дополнительное видовое условие подкласса  $B_1$ . Аналогично для подклассов  $B_2$  и  $B_n$ . Таким образом, подкласс включает элементы суперкласса, для которых выполняется дополнительное условие подкласса.

В качестве примера иерархии единичного наследования можно рассмотреть классификацию транспортных средств. В этом случае возникают IS-THE-отношения родства по прямой линии между суперклассом и подклассами, представленные отображениями: *транспортное средство (ТС) ЕСТЬ*

ЭТО сухопутное ТС (0,1) и обратное отображение сухопутное ТС ЕСТЬ ЭТО транспортное средство (1,1); или сухопутное ТС ЕСТЬ ЭТО дорожное ТС (1,1) и обратное – дорожное ТС ЕСТЬ ЭТО сухопутное ТС (0,1) и т.д.

IS-THE-отношения родства по боковой линии между подклассами представлены отображениями: *воздушное ТС ЕСТЬ ЭТО водное ТС (0,1)* и обратное отображение *водное ТС ЕСТЬ ЭТО воздушное ТС (0,1)*, например гидросамолет. Еще одна пара отображений: *дорожное ТС ЕСТЬ ЭТО железнодорожное ТС (0,1)*, обратное – *железнодорожное ТС ЕСТЬ ЭТО дорожное ТС (0,1)*, например автомобильно-железнодорожное транспортное средство и т.д. Действительно, суперкласс *транспортное средство* является связующим элементом иерархии. Содержания подклассов включают содержание понятия *ТС* и дополнительные условия, которыми в данном случае являются среда передвижения (суша, воздух и вода) и характер дороги (автомобильная и железная).

#### 4.3. Граф выборочного наследования (двухуровневый граф категоризации)

Выборочное наследование возникает в случае, если между подклассом и всеми его суперклассами существует отношение родства по боковой линии, а между суперклассами вовсе отсутствуют отношения родства. То есть суперклассы не содержат одних и тех же элементов ПрО и настолько различны, что не имеют общего предка. Другими словами, содержания суперклассов попарно несовместимы. Суперклассы не включают содержание подкласса *D*. Связующим элементом иерархии является подкласс-категория. Каждый элемент подкласса-категории наследует признаки только одного суперкласса – того, где содержится связанный с ним родительский элемент. Между суперклассами нет IS-THE-отображений, между суперклассами и подклассом имеются отображения, определяемые отношением родства по боковой линии, максимальные и минимальные кардинальные числа равны 0,1 (рис. 5).

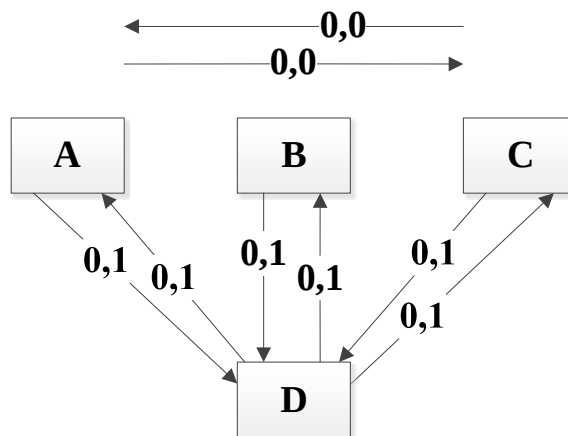


Рис. 5. Граф выборочного наследования  
Fig. 5. Selective inheritance graph

Содержание понятия-категории (подкласса)  $D = \{x \mid (A(x) \vee B(x) \vee C(x)) \wedge D'(x)\}$ , где  $A(x)$  – содержание суперкласса  $A$ ,  $B(x)$  – содержание суперкласса  $B$ ,  $C(x)$  – содержание суперкласса  $C$ , а  $D'(x)$  – дополнительное условие подкласса. Другими словами, первая часть логического выражения – дизъюнкция содержаний понятий-суперклассов, а вторая часть – условие, которому должны удовлетворять элементы понятий-суперклассов, чтобы быть представленными в категории.

В качестве примера иерархии категоризации можно рассмотреть категорию «субъект гражданского права». Как уже отмечалось ранее, между суперклассами (физическое лицо и юридическое лицо) отсутствуют IS-THE-отношения. IS-THE-отношения родства по боковой линии между подклассом и суперклассами представлены отображениями: *физическое лицо ЕСТЬ ЭТОТ субъект гражданского права (0,1)* и обратное отображение *субъект гражданского права ЕСТЬ ЭТО физическое лицо (0,1)*;

юридическое лицо *ЕСТЬ ЭТОТ* субъект гражданского права  $(0,1)$ , обратное – субъект гражданского права *ЕСТЬ ЭТО* юридическое лицо  $(0,1)$ .

#### 4.4. Граф множественного наследования

Отличительной характеристикой множественного наследования является участие класса в качестве подкласса в нескольких отношениях родства по прямой линии (соответствующее видовое понятие  $C_m$  связано с несколькими родовыми понятиями –  $B_2$  и  $B_n$ ). Аналогично иерархии единичного наследования между суперклассами и подклассом возникает отношение родства по прямой линии – для прямого отображения максимальное и минимальное кардинальные числа равны  $0,1$ , для обратного отображения  $1,1$ . Между суперклассами определено отношение родства по боковой линии – для обоих отображений максимальное и минимальное кардинальные числа равны  $0,1$  (рис. 6).

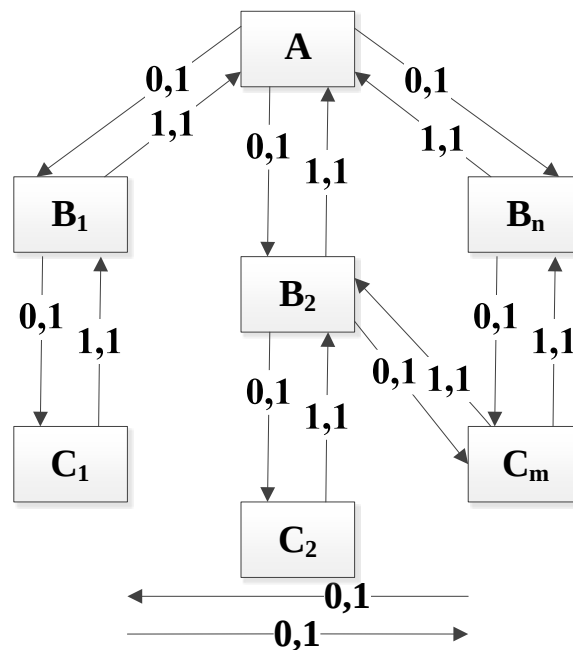


Рис. 6. Граф множественного наследования

Fig. 6. Multiple inheritance graph

Содержание понятия-подкласса  $C_m = \{x \mid (B_2(x) \wedge B_n(x)) \wedge C_m(x)\}$ , где  $B_2(x)$  – содержание понятия-суперкласса  $B_2$ ,  $B_n(x)$  – содержание понятия-суперкласса  $B_n$ ,  $C_m(x)$  – дополнительное условие подкласса  $C_m$ . Другими словами, первая часть логического выражения – конъюнкция условий содержания понятий-суперклассов, а вторая часть – условие, которому должны удовлетворять элементы этих понятий, чтобы быть представленными в подклассе.

Так, класс *обучающийся сотрудник* участвует в качестве подкласса в двух отношениях родства по прямой линии: *обучающийся ЕСТЬ ЭТОТ обучающийся сотрудник*  $(0,1)$  и обратное отображение *обучающийся сотрудник ЕСТЬ ЭТОТ обучающийся*  $(1,1)$ , *сотрудник ЕСТЬ ЭТОТ обучающийся сотрудник*  $(0,1)$ , обратное – *обучающийся сотрудник ЕСТЬ ЭТОТ сотрудник*  $(1,1)$ . Между обучающимся и сотрудником – IS-THE-отношения родства по боковой линии.

#### Заключение

Статья представляет собой попытку строгого определения иерархических структур данных, основанных на IS-A-отношениях. Этой цели удалось достичь благодаря введению понятий IS-THE-отношений и IS-THE-отображений, а также использованию для анализа последних аппарата теории

семантически значимых отображений. Для упрощения понимания материала в качестве терминов использована лексика родственных отношений.

Все IS-THE-отношения в зависимости от характеристик их отображений разбиты на подклассы: родственные отношения тождества понятий, родственные отношения понятий по прямой линии, родственные отношения понятий по боковой линии. На основании IS-THE-отношений между понятиями строятся IS-THE-графы, вершинами которых являются понятия.

Выделение по определенным правилам подграфов этих IS-THE-графов порождает известные в информатике виды иерархических структур: иерархию единичного наследования (иерархию специализации), граф выборочного наследования (двухуровневый граф категоризации), двухуровневый граф множественного наследования.

Поскольку отображения очень тонко выражают семантику предметных областей, представленные IS-THE-иерархии обеспечат возможность более точного, полного и детального описания закономерностей ПрО на этапе проектирования семантической схемы. Они позволяют также определить в схеме ограничения на допустимые данные и подобрать оптимальное представление этих данных в БД.

#### Список источников

1. Brachman R.J. What IS-A Is and Isn't. An Analysis of Taxonomic Links in Semantic Networks // *IEEE Computer*. 1983. V. 16 (10). P. 30–36.
2. Russell S., Norvig P. *Artificial Intelligence: a Modern Approach* (Pearson Series in Artificial Intelligence). 4th ed. Pearson, 2020. 1136 p.
3. Teorey T., Yang D., Fry J. A Logical Design Methodology for Relational Databases Using the Extended Entity-Relationship Model // *Computing Surveys*. 1986. V. 18 (2). P. 197–222.
4. Thalheim B. Extended Entity-Relationship Model // *Encyclopedia of Database Systems*. Springer, Boston, MA, 2009. P. 1083–1091.
5. Elmasri R., Navathe S. *Fundamentals of Database System*. 7th ed. Pearson / Addison Wesley, 2017. 1272p.
6. Connolly T., Begg C. *Database Systems: a Practical Approach to Design, Implementation, and Management*. Global ed. (Paperback, 6th ed.). Pearson, 2015. 1440 p.
7. Ryan M.K. Mastering OOP: a Practical Guide to Inheritance, Interfaces, and Abstract Classes. // *Smashing Magazine*. 2019. V. 27. P. 95–132.
8. Бабанов А.М. Семантическая модель «Сущность – Связь – Отображение» // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2007. № 1. С. 77–91.
9. Бабанов А.М., Квач Е.С. «IS-THE»-отношения в семантических моделях данных: основные понятия и разновидности // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2016. № 1 (34). С. 69–78.
10. Лыкошин А.С., Тривус М.И. Родство // *Энциклопедический словарь*. СПб. : Ф.А. Брокгауз, И.А. Ефрон, 1889. Т. XXVIA (52): Резонанс и резонаторы – Роза ди-Тиволи. С. 922–926.

#### References

1. Brachman, R.J. (1983) What IS-A Is and Isn't. An Analysis of Taxonomic Links in Semantic Networks. *IEEE Computer*. 16(10). pp. 30–36.
2. Russell, S. & Norvig, P. (2020) *Artificial Intelligence: A Modern Approach* (Pearson Series in Artificial Intelligence). 4th ed. Pearson.
3. Teorey, T., Yang, D. & Fry J. (1986) A Logical Design Methodology for Relational Databases Using the Extended Entity-Relationship Model. *Computing Surveys*. 18(2). pp. 197–222.
4. Thalheim, B. (2009) Extended Entity-Relationship Model. In: *Encyclopedia of Database Systems*. Springer, Boston, MA. pp. 1083–1091
5. Elmasri, R. & Navathe, S. (2015) *Fundamentals of Database System*. 7th ed. Pearson/Addison Wesley.
6. Connolly, T. & Begg, C. (2015) *Database Systems: A Practical Approach to Design, Implementation, and Management*. 6th ed. Pearson.
7. Ryan, M.K. (2019) Mastering OOP: A Practical Guide to Inheritance, Interfaces, and Abstract Classes. *Smashing Magazine*. 27. pp. 95–132.
8. Babanov, A.M. (2007) Semantic model "Entity – Relationship – Mapping." *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(1). pp. 77–91.

9. Babanov, A.M. & Kvach, E.S. (2016) "IS-THE"-relations in semantic data models: basic notions and variants. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(34). pp. 69–78.
10. Lykoshin, A.S. & Trivus, M.L. (1889) Rodstvo [Kinship]. In: Brokgauz, F.A. & Efron, I.A. (eds) *Entsiklopedicheskiy slovar'* [Encyclopedic Dictionary]. Vol. 52. St. Petersburg. pp. 922–926.

**Информация об авторах:**

**Бабанов Алексей Михайлович** – доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: babanov2000@mail.ru

**Квач Елена Сергеевна** – аспирант кафедры программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kvachelena93@gmail.com

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Babanov Alexey M.** (Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Software Engineering at the Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: babanov2000@mail.ru.

**Kvach Elena S.** (Post-graduate Student of the Department of Software Engineering, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kvachelena93@gmail.com.

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 23.11.2023; принята к публикации 05.03.2024*

*Received 23.11.2023; accepted for publication 05.03.2024*



Научная статья

УДК 004.272

doi: 10.17223/19988605/66/10

## Алгоритм широковещательной рассылки на основе биномиального дерева в модели удаленного доступа к памяти

Алексей Александрович Пазников

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»  
им. В.И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия, apaznikov@gmail.com

**Аннотация.** Предлагается алгоритм широковещательной рассылки (трансляционный обмен, схема «один – всем», broadcast), позволяющий повысить эффективность использования модели удаленного доступа к памяти (Remote Memory Access, RMA, one-sided communications) для параллельного программирования на распределенных вычислительных системах. Алгоритм основан на использовании структуры биномиального дерева для организации взаимодействия процессов (схема, широко используемая для классических коллективных операций стандарта MPI). Обладая логарифмической сложностью, алгоритм более эффективен по сравнению с линейным алгоритмом. В статье также построены аналитические оценки сложности в моделях LogP и LogGP. Проведенные эксперименты подтвердили преимущество алгоритма, при этом конечная эффективность зависит от нескольких факторов, включая количество процессов в коммутаторе, размер передаваемых данных и производительность коммуникационной среды.

**Ключевые слова:** MPI; коллективные операции; broadcast; RMA; one-sided communications.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00686, <https://rscf.ru/project/22-21-00686/>

**Для цитирования:** Пазников А.А. Алгоритм широковещательной рассылки на основе биномиального дерева в модели удаленного доступа к памяти // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 97–107. doi: 10.17223/19988605/66/10

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/10

## Binomial tree broadcast in remote memory access model

Alexey A. Paznikov

Saint Petersburg Electrotechnical University “LETI”, Saint Petersburg, Russian Federation, apaznikov@gmail.com

**Abstract.** This article introduces a broadcast (one-to-all scheme) algorithm, designed to enhance the efficiency of utilizing Remote Memory Access (RMA), a one-sided communication model within the MPI standard, for parallel programming in distributed computing systems. The algorithm leverages a binomial tree structure to organize inter-process interactions, a scheme widely employed for classic collective operations within the MPI standard. With logarithmic complexity, this algorithm proves to be more efficient than linear counterparts. The article also provides analytical complexity estimates within the LogP and LogGP models. Experimental results confirm the algorithm's advantages, although the ultimate efficiency depends on several factors, including the number of processes in the communicator, data transmission size, and the performance of the interconnect.

**Keywords:** MPI; collectives; broadcast; RMA; one-sided communications.

**Acknowledgments:** This research was supported by Russian Science Foundation (RSF) (project № 22-21-00686, <https://rscf.ru/project/22-21-00686/>).

**For citation:** Paznikov, A.A. (2024) Binomial tree broadcast in remote memory access model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 97–107. doi: 10.17223/19988605/66/10

## Введение

Традиционно высокопроизводительные вычислительные системы (ВС) используются для обработки больших объемов данных. Сложность задач и объемы обрабатываемых данных характеризует постоянный рост. Например, размеры социальных графов популярных социальных сетей измеряются в петабайтах [1], а количество вершин графов, обрабатываемых в тестах HPC Graph500, превышает несколько триллионов [2]. Объемы данных, производимые Большим адронным коллайдером (LHC), достигают сотен петабайт, даже после многоуровневой фильтрации данных [3]. Ожидается, что объемы данных, обрабатываемых приложениями, пересекут петабайтный барьер, что повысит текущие вычислительные возможности [4, 5]. Анализ таких наборов данных требует иерархических больше-масштабных распределенных ВС. Данные в таких системах размещаются в памяти вычислительных узлов и могут быть представлены в виде разделяемых распределенных структур данных.

Увеличение производительности распределенных ВС достигается использованием многопроцессорных и многоядерных архитектур и высокоэффективных коммуникационных сетей, поддерживающих технологию RDMA (Remote Direct Memory Access). Несмотря на то, что большинство существующих приложений полагается на модель передачи сообщений, этот подход может оказаться недостаточным для будущих задач из-за больших накладных расходов на синхронизацию и физических ограничений, таких как уменьшение объема памяти на каждый элемент обработки данных, общие кэши и буферы TLB.

В результате сегодня активно исследуются альтернативные программные модели, такие как удаленный доступ к памяти (Remote Memory Access, RMA, MPI one-sided), MPI + X (MPI + threads) и MPI + MPI (MPI с общей памятью). Последние исследования показали, что во многих приложениях эти модели обеспечивают более высокую производительность, чем модель передачи сообщений. Одной из наиболее перспективных моделей параллельного программирования является модель удаленного доступа к памяти (Remote Memory Access, RMA), реализованного в виде подсистемы односторонних коммуникаций стандарта MPI.

Односторонние коммуникационные процедуры позволяют процессу выполнять операции записи или чтения данных в / из памяти другого процесса без участия этого процесса. Многие приложения демонстрируют ускорение после замены отправки и приема сообщений непосредственным удаленным доступом к памяти [6–10]. Программирование с использованием RMA использует различные техники. С точки зрения аппаратного обеспечения большинство распределенных ВС поддерживает технологию RDMA, которая освобождает межузловую коммуникацию от участия центрального процессора и операционной системы [8–13]. RDMA поддерживается многими сетями, такими как Infiniband, IBM PERCS, Cray Gemini, Aries и RoCE over Ethernet и др.

Модель RMA тесно связана с моделью глобального разделенного адресного пространства (PGAS) – моделью программирования, которая активно разрабатывается в настоящее время. PGAS реализует прозрачный интерфейс для операций с распределенными структурами данных. Методы RMA и PGAS используются во многих параллельных языках, моделях и инструментах: MPI, SHMEM, Unified Parallel C, Co-array Fortran, Cray Chapel, IBM X10. В отличие от PGAS, RMA предоставляет более низкоуровневый интерфейс и гибкие возможности управления синхронизацией.

Опишем модель RMA в MPI. В программах, использующих RMA, процессы обмениваются данными, обращаясь напрямую к памяти друг друга с помощью неблокируемых операций одностороннего доступа. Операции MPI\_Put записи в удаленную память и MPI\_Get чтения из удаленной памяти обладают меньшей задержкой по сравнению с моделью передачи сообщений (рис. 1). Кроме того, имеется набор атомарных операций, реализующих линеаризуемый удаленный доступ (MPI\_Accumulate, MPI\_Get\_accumulate, MPI\_Fetch\_and\_op, MPI\_Compare\_and\_swap и др., соответствующие аналогичным операциям в модели общей памяти). RMA также включает операции, обеспечивающие согласованность данных и упорядочивание операций, например MPI\_Win\_flush / MPI\_Win\_flush\_all.

В рамках RMA каждый процесс предоставляет часть своей локальной памяти для удаленного доступа (это называется окном, window) (см. рис. 1, а). Окна разделяются между процессами и могут

быть доступны через RMA-вызовы. Все RMA-операции выполняются в рамках участков кода, называемых эпохами (epoch). В пределах эпох выполняется синхронизация. Существует два вида эпох: эпоха выполнения доступа (access epoch) и эпоха предоставления доступа (exposure epoch). Эпоха выполнения доступа может включать только RMA-вызовы, предназначенные для доступа к памяти удаленных (целевых) процессов. Когда процесс находится в эпохе предоставления доступа, другие удаленные процессы могут выполнять операции RMA с локальной памятью данного процесса.

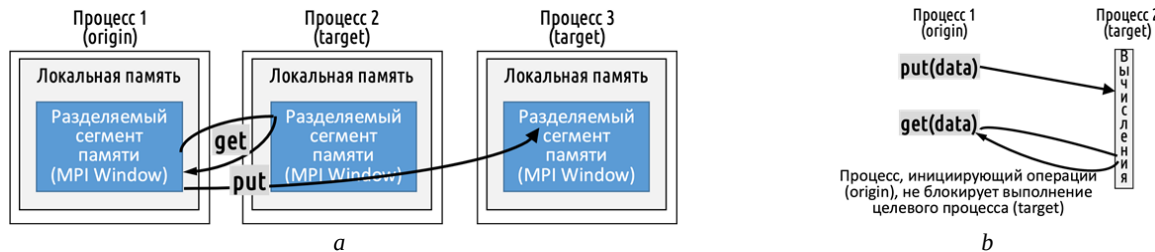


Рис. 1. Модель удаленного доступа к памяти RMA MPI: *a* – RMA-окна, *b* – неблокирующий принцип выполнения операций  
Fig. 1. MPI Remote Memory Access (RMA) model: *a* is RMA-windows, *b* is non-blocking RMA-call principle

Модель поддерживает два вида синхронизации: активную (active target) и пассивную (passive target). В случае активной синхронизации вызовы RMA разрешены только между двумя процессами, один из которых находится в эпохе доступа (access epoch), а другой – в эпохе предоставления доступа (exposure epoch). Для реализации разделяемых структур данных подходящей является схема пассивной синхронизации, в которой участвует только процесс, осуществляющий доступ. Идея заключается в том, чтобы разрешить доступ к целевым процессам полностью односторонним образом. Пассивная синхронизация выполняется только процессом, осуществляющим доступ, без каких-либо действий со стороны целевых процессов.

Во многих случаях программы могут включать в себя множество однородных операций RMA к нескольким сегментам удаленной памяти [7–13], подобно коллективным операциям в модели передачи сообщений. Часто такие паттерны встречаются в реализации распределенных структур данных, как, например, BCL [14], Active Message Queue [15], Hcl [16], или более масштабируемые структуры на основе неблокируемой синхронизации [17, 18] или ослабленной семантики [19].

Традиционные коллективные операции являются одной из важнейших компонент MPI. Анализ параллельных алгоритмов и схем коммуникации показывает, что на них тратится более 80% общего времени на коммуникацию [20]. Для широкого класса параллельных программ время, затрачиваемое на коллективные операции, является критическим фактором для общей производительности. На сегодняшний день существует большое количество алгоритмов реализации коллективных операций в модели передачи сообщений [21–23], однако даже реализации, учитывающие разные иерархические уровни ВС [24], тем не менее являются коллективными операциями в классическом понимании и не имеют одностороннего интерфейса. Для модели PGAS предложены эффективные реализации некоторых коллективных операций [25], но они не могут использоваться напрямую в модели RMA.

Чтобы реализовать в RMA семантический аналог коллективных операций, пользователи текущего стандарта MPI могут использовать только простые линейные (последовательные) алгоритмы, что является далеко не самым эффективным в случаях, когда семантика программы позволяет выполнять множественные операции доступа к данным параллельно.

С учетом вышеизложенного интерес представляет создание более эффективных алгоритмов для коллективных операций в модели RMA. В данной работе предложен алгоритм широковещательной рассылки (one-to-all, broadcast), основанный на использовании биномиального дерева. Эта структура является одной из наиболее распространенных и эффективных схем, применяемых для реализации трансляционных обменов. В работе рассматривается реализация алгоритма, включая многопоточную runtime-систему и протоколы взаимодействия процессов. Приводятся результаты экспериментов, подтверждающих преимущество алгоритма перед линейной схемой выполнения рассылки. Для более глубокого анализа эффективности алгоритма построены аналитические оценки в рамках моделей LogP и LogGP.

## 1. Алгоритмы широковещательной рассылки

Операция широковещательной рассылки выбрана, поскольку она является достаточно простой, с одной стороны, и одной из наиболее часто используемых – с другой. Рассылка реализует схему «один ко всем» (one-to-all): перед операцией буфер находится только в памяти одного процесса, после операции данные копируются на все процессы MPI-коммуникатора. В терминах модели RMA все обменивающиеся процессы должны использовать один объект RMA-окна *win* с достаточным выделенным объемом памяти. Также вводятся уникальные идентификаторы для всех окон RMA (window id, *wid*) с соответствующей поддержкой runtime-системы. Входные данные для операции рассылки включают буфер *buf[0...m]*, RMA-окно *win* для рассылки и его идентификатор *wid*, смещение в окне *disp* (определяет местонахождение буфера в корневом процессе).

### 1.1. Линейный алгоритм широковещательной рассылки

Прежде всего опишем линейный алгоритм (рис. 2). Здесь в рамках эпохи пассивной синхронизации для всех процессов (строки 2, 6) данные *buf* помещаются в память всех процессов *r*, соответствующих окну *win*. Алгоритм включает в себя основной цикл, в котором для каждого ранга *r* коммуникатора выполняется операция *MPI\_Put* для удаленной записи буфера в память процесса *r* по смещению *disp*. Дополнительная синхронизация не требуется, потому что все операции гарантированно должны быть завершены после завершения эпохи синхронизации.

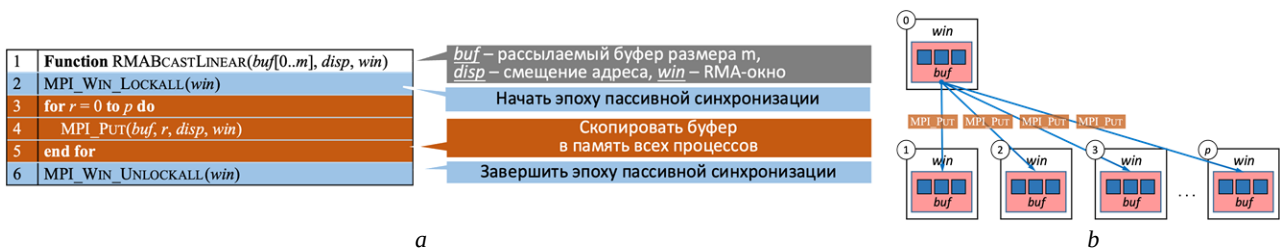


Рис. 2. Линейный алгоритм широковещательной рассылки в модели RMA:

*a* – псевдокод алгоритма, *b* – коммуникационная схема

Fig. 2. Linear broadcast algorithm in RMA model: *a* is algorithm pseudocode, *b* is communication scheme

### 1.2. Алгоритм широковещательной рассылки на основе биномиального дерева

В данной работе предлагается алгоритм рассылки, основанный на организации процессов в биномиальное дерево (binomial tree). Опишем runtime-систему для организации выполнения алгоритма (рис. 3).

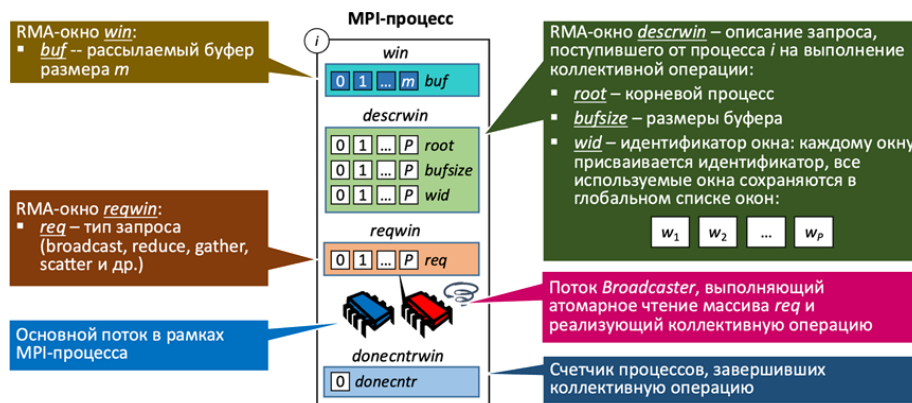


Рис. 3. Runtime-система для реализации алгоритма рассылки в модели RMA

Fig. 3. Runtime-system for broadcast implementation in RMA model

Кроме окна *win*, содержащего рассылаемые данные, организуется дополнительное окно *descrwin*, содержащее информацию о выполняемой коллективной операции, окно *reqwin*, соответствующее запросу на выполнение операции, и окно *donecntrwin*, содержащее счетчик процессов, завершивших операцию. Кроме того, на каждом MPI-процессе создается вспомогательный поток *Broadcaster*, который принимает запросы и осуществляет дальнейшую ретрансляцию сообщений.

Перед использованием подсистемы коллективных операций выполняется инициализация runtime-системы, в течение которой поток *Broadcaster* запускается на всех процессах. Основной поток выполняет функцию *RMAVcastBinomial*, опишем его основные шаги (рис. 4, а):

1. Ожидание завершения предыдущей операции (строка 1). Этот шаг введен для предотвращения перемешивания данных в буфере в случае одновременных рассылок.
2. Инициализация запроса выполнения операции рассылки (строка 2).
3. Ожидание старта потока *Broadcaster* и начала эпохи синхронизации для дополнительных окон (строка 3).
4. Вызов функции *PutLoop* для размещения данных в следующие процессы в соответствии со структурой биномиального дерева (строка 4).

Функция *PutLoop* (рис. 4 б) включает в себя следующие шаги:

1. Вычисляется смещенный ранг *srank*: ранг, связанный с корневым процессом (строка 2).
2. Выполняется цикл, включающий  $\lceil \log_2 p \rceil$  коммуникационных раундов (строки 5–16). На каждом раунде проверяется каждый бит смещенного ранга *srank*.
3. На каждом раунде, если текущий бит в *srank* не установлен (строка 5), то вычисляется ранг целевого процесса *prank* (строка 9) и, если получен корректный ранг (строка 7), выполняется обратный перевод из относительно ранга к исходному (строка 8), после чего отправляется запрос к соответствующему процессу в функции *PutRequest* (строка 9). Иначе, цикл прерывается (строка 12).

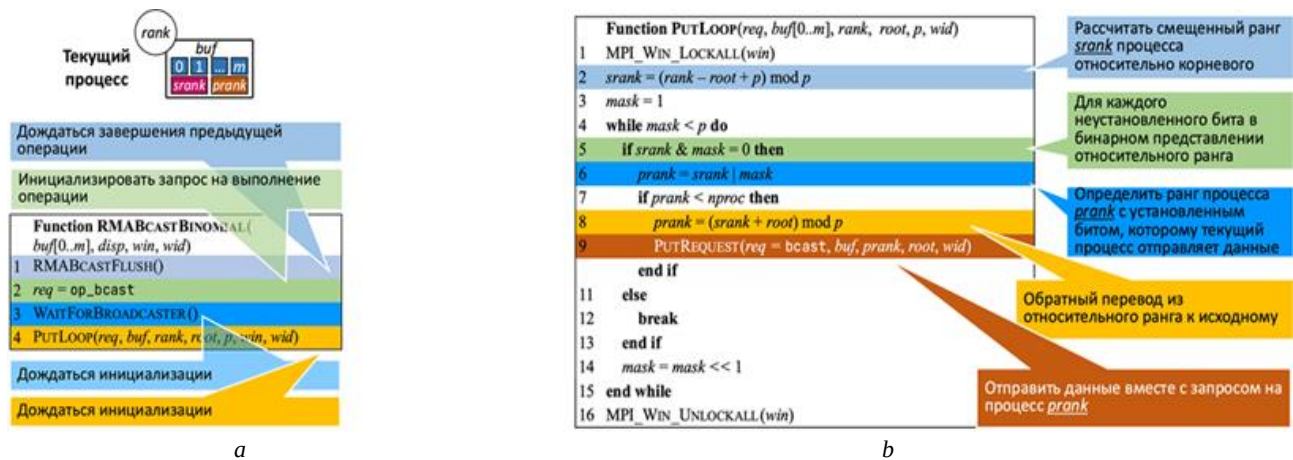


Рис. 4. Биномиальный алгоритм широковещательной рассылки в модели RMA

Fig. 4. Binomial tree RMA broadcast algorithm

Функция *PutRequest* реализует копирование запроса, описания операции и самих данных в память указанного процесса *rank* (рис. 5). Здесь предыдущий процесс *i* – любой процесс, не являющийся листом биномиального дерева, *j* – любой из его дочерних элементов. Основные шаги алгоритма:

1. На первом этапе буфер данных *buf* копируется в удаленный процесс (строка 1).
2. Далее формируется описание операции, состоящее из корневого процесса *root* и идентификатора окна *wid* (строка 2), которое копируется в окно *descrwin* по вычисленному смещению (строка 3).
3. Атомарно установить флаг в окне *reqwin* (запрос), означающий готовность данных и описания (строка 4).
4. Ожидаем завершения RMA-вызовов, при этом порядок следования функций *MPI\_Win\_flush* таков, чтобы гарантировать выполнение операции установки флага после копирования данных и описания операции (строки 5–7).



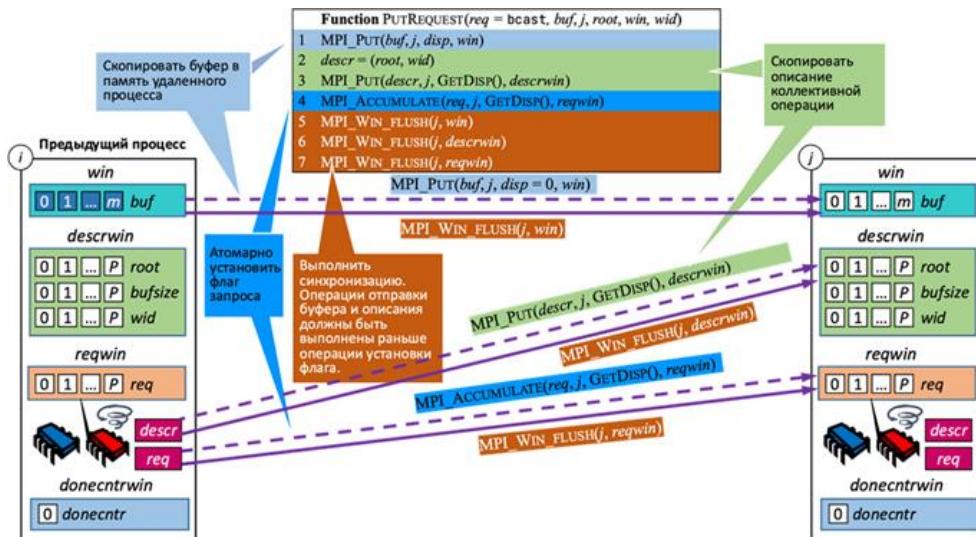


Рис. 5. Схема выполнения процедуры PutRequest

Fig. 5. PutRequest execution scheme

Теперь опишем алгоритм функционирования потока *Broadcaster*, выполняющего коммуникации на всех процессах, кроме корневого (рис. 6). Данный поток реализует активное ожидание поступающих запросов и данных и дальнейшую их ретрансляцию. В начале его выполнения открываются эпохи для окон *reqwin*, *descrwin* и отправляется сигнал о начале эпох. Далее начинается основной алгоритм, его основные шаги:

1. В бесконечном цикле (строки 1–15) атомарно прочитать из локальной памяти массив запросов (строки 2–3) и найти активные запросы (строки 4–13). После каждой итерации ожидать таймаут (строка 14).

2. Если в массиве запросов найден запрос на выполнение рассылки от процесса *i* (строка 5), то в этот момент в процесс *j* уже скопирован буфер данных *buf* и описание операции *descr*. По идентификатору *wid* отыскивается окно, которое ему соответствует (строка 6), и выполняется вызов *PutLoop* для дальнейшей рассылки данных.

3. После завершения передачи данных атомарно увеличить счетчик в корневом процессе (строки 8–10).

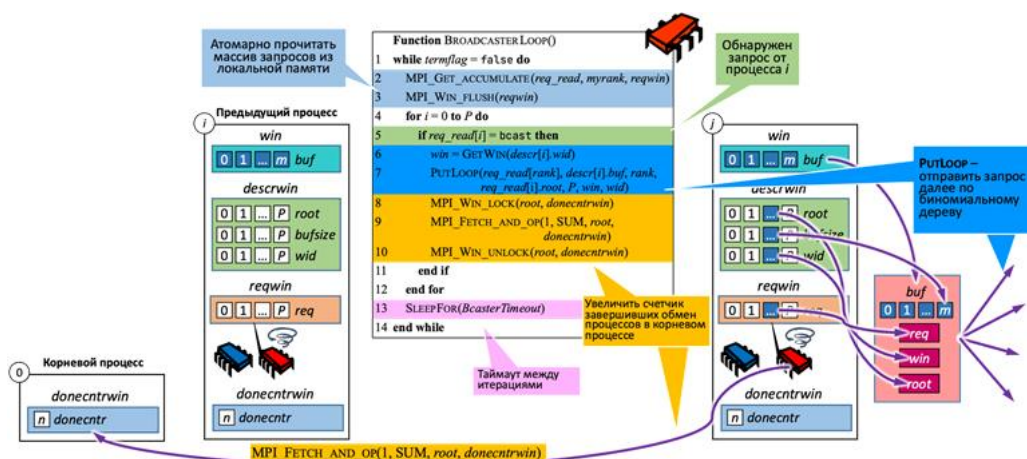


Рис. 6. Схема функционирования потока Broadcaster

Fig. 6. Broadcaster thread operation scheme

Помимо самих операций рассылки, необходимо реализовать функции синхронизации. Для решения этой задачи каждый процесс обладает счетчиком *donecwin* (с соответствующим окном *donecwinwin*), предназначенным для подсчета количества процессов, завершивших операцию.

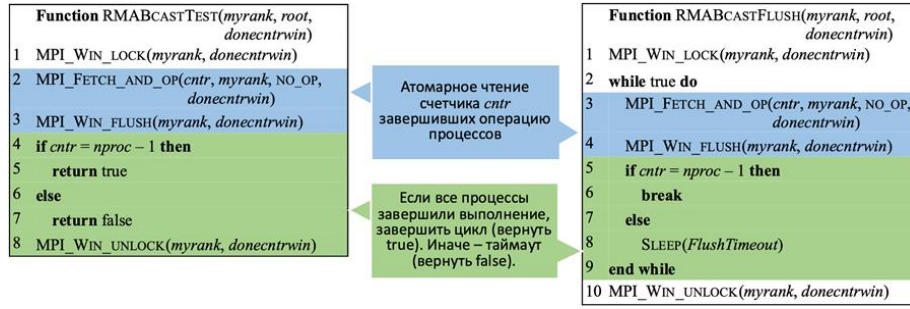


Рис. 7. Функции синхронизации выполнения операции рассылки  
Fig. 7. Synchronization functions for RMA broadcast

Определим функции синхронизации RMABcastFlush и RMABcastTest (рис. 7). RMABcastFlush реализует ожидание завершения трансляционного обмена, в то время как RMABcastTest проверяет, завершена операция или нет. Обе функции вызывают операцию MPI\_Fetch\_and\_op для операции NO\_OP (соответствует атомарному чтению переменной) для атомарного получения состояния счетчика в локальной памяти. Далее, если количество завершивших процессов соответствует общему числу процессов, то операция считается завершенной.

## 2. Аналитические оценки в моделях LogP и LogGP

Для оценки сложности алгоритма построим аналитические выражения для времени выполнения алгоритма в моделях LogP и LogGP. LogP – коммуникационная модель для распределенных вычислительных систем, в рамках которой процессы взаимодействуют короткими сообщениями фиксированного размера. Параметры модели:

$L$  – латентность (latency, структурные задержки) передачи сообщения между двумя процессами;

$o$  – накладные расходы (overhead) на организацию передачи или получения сообщения;

$g$  – минимальный временной интервал (gap) между последовательными операциями передачи или приема сообщений;

$P$  – количество процессов в системе.

Обозначим  $q = \max\{o, g\}$ ,  $o_r$  – накладные расходы, связанные с активным ожиданием при получении запроса. Выполнение рассылки по биномиальному дереву можно разбить на стадии, количество которых  $\log_2 P$  (высота биномиального дерева для  $P$ , равного степени 2). Тогда время выполнения каждой стадии  $t_i = o + 2q + L + o_r$  (рис. 8, а). Таким образом, общее время выполнения

$$t = (o + 2q + L + o_r) \log_2 P + o_s + L.$$

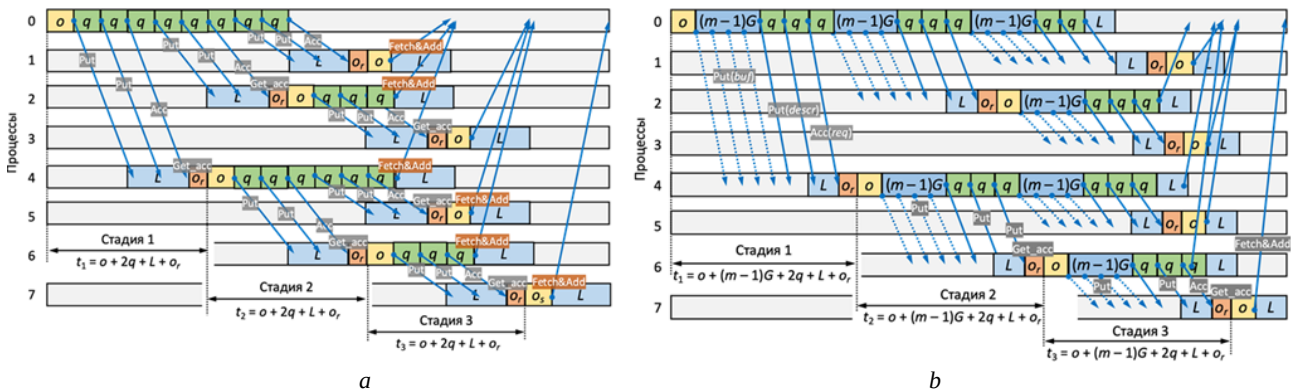


Рис. 8. Схема выполнения рассылки в моделях LogP / LogGP: а – LogP, б – LogGP  
Fig. 8. Broadcast execution scheme in LogP / LogGP model: а is LogP, б is LogGP

Оценим время выполнения алгоритма в модели LogGP – расширении линейной модели LogP для сообщений большого размера. В LogGP пятый параметр  $G$  – минимальный интервал времени

между последовательными передачами или приемами одного байта длинного сообщения. Обозначим длину сообщения как  $m$ . Время выполнения каждой стадии в этом случае  $t_i = o + (m - 1)G + 2q + L$  (рис. 8, б). Общее время выполнения операции в этом случае

$$t = (o + (m - 1)G + 2q + L + o_r) \log_2 P + o + L.$$

### 3. Результаты экспериментов

Моделирование алгоритмов рассылки проведено на кластерах Центра параллельных вычислительных технологий Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики. Кластер 1 включает в себя 6 узлов, оснащенных 2 процессорами Intel Xeon E5620 с четырьмя ядрами каждый (общее число ядер – 48), подключенных через Infiniband QDR. Библиотека MVAPICH2 2.3.1. Кластер 2 укомплектован 18 узлами 2 x Intel Xeon E5420 (4 процессорных ядра, общее число ядер – 144). Коммуникационная сеть: Gigabit Ethernet. Библиотека MPICH 3.2.1.

В экспериментах использовался тест, в котором рассылка выполняется  $n = 10$  раз. В качестве буфера для рассылки использовался целочисленный массив длиной  $m = 2, 4, \dots, 40$  Мб (для кластера 1) и  $m = 2, 4, \dots, 40$  Кб (для кластера 2). Количество процессов  $p = 8, 16, \dots, 48$  (для кластера 1) и  $p = 8, 16, \dots, 96$  (для кластера 2). Показатель эффективности – среднее время  $t$  выполнения операции.

Перед основными измерениями выполнялась фаза прогрева с  $n_w = 5$  итерациями рассылки. Оба параметра WaiterTimeout и FlushTimeout были установлены на 1 мс. Эксперименты проводились для линейного и биномиального алгоритмов. Корневой процесс во всех экспериментах равен 0.

Результаты экспериментов представлены на рис. 9, 10 (кластер 1), 11, 12 (кластер 2). В первую очередь следует отметить, что эффективность биномиального алгоритма начинает превосходить линейный алгоритм после определенного значения размера буфера или количества процессов.

Для кластера 1 (Infiniband), если варьировать размер буфера при фиксированном количестве ядер, то при  $p = 24$  разработанный алгоритм начинает опережать линейный алгоритм начиная с  $m = 25$  Мб (см. рис. 9, б), при  $p = 32$  – с  $m = 10$  Мб (см. рис. 9, в), а для  $p = 48$  – с  $m = 7$  Мб (см. рис. 9, г). Для размера буфера  $m = 10$  Мб эта граница начинается уже с  $p = 32$  процессов (см. рис. 10, б), при  $m = 16$  Мб – начиная с  $p = 24$  (см. рис. 10, в), а при  $m = 32$  Мб – с  $p = 20$  (см. рис. 10, д).

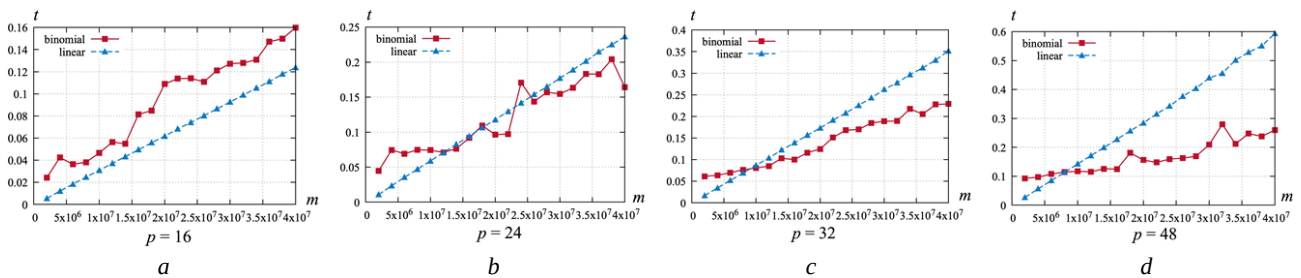


Рис. 9. Время выполнения операции линейным и биномиальным алгоритмом в зависимости от размера буфера (кластер 1, Infiniband QDR)

Fig. 9. Comparison of latency for linear and binomial tree broadcast on buffer size (cluster 1, Infiniband QDR)

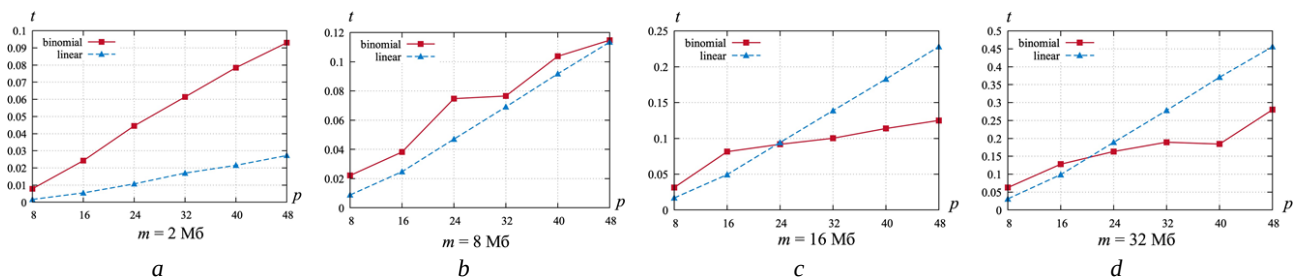


Рис. 10. Время выполнения операции линейным и биномиальным алгоритмом в зависимости от количества процессов (кластер 1, Infiniband QDR)

Fig. 10. Comparison of latency for linear and binomial tree broadcast on process number (cluster 1, Infiniband QDR)



В случае кластера 2 (Gigabit Ethernet), если варьировать размер буфера при фиксированном количестве ядер, то при  $p = 40$  разработанный алгоритм опережает линейный алгоритм начиная с  $m = 32$  Кб (см. рис. 11, b), при  $p = 64$  – с  $m = 26$  Кб (см. рис. 11, c), а для  $p = 96$  – с  $m = 16$  Кб (см. рис. 9, d). Если фиксировать размер буфера, то при  $m = 16$  Кб эффект проявляется начиная с  $p = 80$  (см. рис. 12, b), для  $m = 32$  Кб – с  $p = 43$  (см. рис. 12, c), а для  $m = 40$  Кб – с  $p = 32$  (см. рис. 12, d).

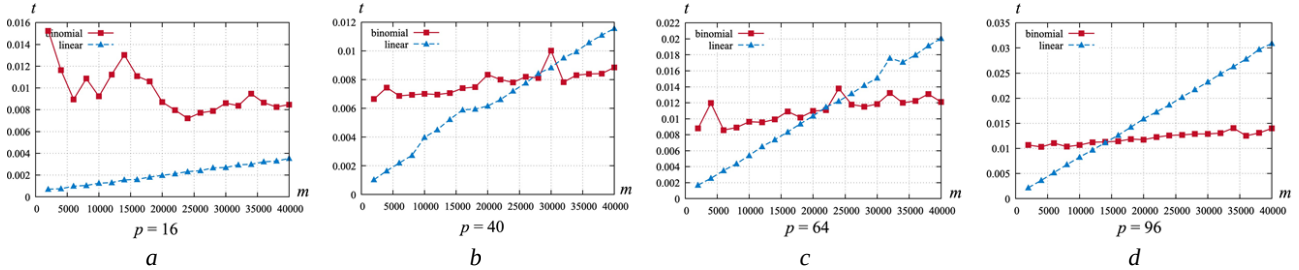


Рис. 11. Время выполнения операции линейным и биномиальным алгоритмом в зависимости от размера буфера (кластер 2, Gigabit Ethernet)

Fig. 11. Comparison of latency for linear and binomial tree broadcast on buffer size (cluster 2, Gigabit Ethernet)

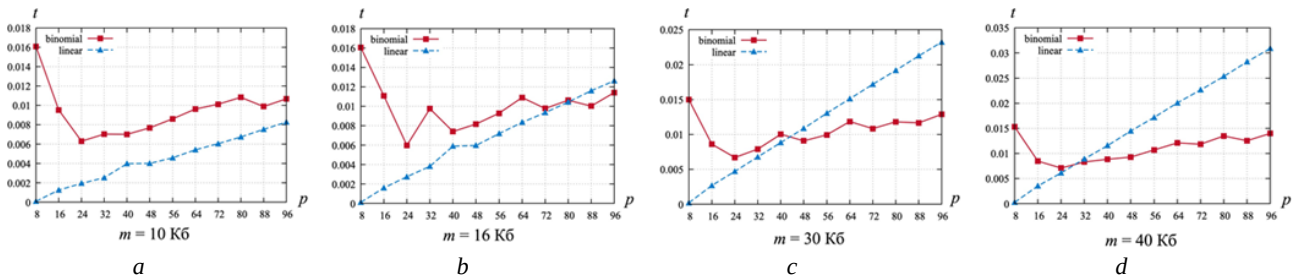


Рис. 12. Время выполнения операции линейным и биномиальным алгоритмом в зависимости от количества процессов (кластер 2, Gigabit Ethernet)

Fig. 12. Comparison of latency for linear and binomial tree broadcast on process number (cluster 2, Gigabit Ethernet)

В целом следует отметить, что эффективность биномиального алгоритма растет с увеличением размера буфера и количества процессов. Эффект проявляется раньше в коммуникационных сетях меньшей производительности. Тем не менее для небольших буферов линейный алгоритм более эффективен из-за накладных расходов биномиального алгоритма на синхронизацию процессов во время выполнения алгоритма. Полагаем, что накладные расходы можно сократить путем варьирования параметров алгоритма. Кроме того, существенный вклад в общее время вносит то, как в конкретной MPI-библиотеке реализован режим `MPI_THREADS_MULTIPLE`, который необходим для выполнения коммуникаций двумя потоками: основным и *Broadcaster*.

## Заключение

Текущее развитие и распространение модели удаленного доступа памяти в MPI стало очередным этапом в проявившейся в последнее десятилетие тенденции на постепенный синтез моделей программирования для распределенной и общей памяти. RMA стала своеобразным компромиссом между классической моделью передачи сообщений и PGAS: она сохраняет гибкость управления операциями и синхронизацией, оставляя тем самым широкую свободу для оптимизаций, и дает достаточную прозрачность для наследования классических приемов многопоточного программирования.

Тем не менее есть ряд ограничений RMA в текущем стандарте, которые мешают еще более широкому ее использованию; одним из таких, на наш взгляд, очевидных ограничений является отсутствие коллективных операций. Для обхода данного ограничения пользователи вынуждены использовать линейные алгоритмы или переходить в модель передачи сообщений, чтобы воспользоваться классическими коллективными обменами (последнее нарушает целостность программы и чревато дополнительными накладными расходами).

В настоящей статье ставилась задача исследовать потенциал преодоления данного ограничения. На примере широковещательной рассылки была продемонстрирована возможность достичь большей эффективности операций, по сравнению с линейным подходом. Так, применение специальных схем реализации рассылки (в частности, биномиального дерева) позволила существенно сократить время выполнения операции. Эффект растет с увеличением общего числа процессов и размера пересылаемого буфера, что делает новый подход особенно важным в больших масштабах системах и при обработке больших объемов данных. Дальнейшая интеграция коллективных RMA-операций в MPI, безусловно, потребует внесения изменений в стандарт и существенной доработки runtime-систем библиотек MPI.

#### Список источников

1. Bronson N. et al. TAO: Facebook's distributed data store for the social graph // *USENIX ATC* 13. 2013. P. 49–60.
2. Murphy R.C. et al. Introducing the graph 500 // *Cray Users Group (CUG)*. 2010. V. 19. P. 45–74.
3. Åkesson T. et al. ATLAS Computing: technical design report // *LHCC Reports*. 2005. 246 p.
4. Chen C.L.P., Zhang C.Y. Data-intensive applications, challenges, techniques and technologies: a survey on Big Data // *Information Sciences*. 2014. V. 275. P. 314–347.
5. Gantz J., Reinsel D. The digital universe in 2020: Big data, bigger digital shadows, and biggest growth in the far east // *IDC iView: IDC Analyze the future*. 2012. V. 2007 (2012). P. 1–16.
6. Balaji P. et al. MPI on a Million Processors // *Recent Advances in Parallel Virtual Machine and Message Passing Interface*. 2009. P. 20–30.
7. Nieplocha J., Harrison R.J., Littlefield R.J. Global arrays: A nonuniform memory access programming model for high-performance computers // *The Journal of Supercomputing*. 1996. V. 10. P. 169–189.
8. Hoefler T. et al. Remote memory access programming in MPI-3 // *TOPC*. 2015. V. 2 (2). P. 1–26.
9. Gerstenberger R., Besta M., Hoefler T. Enabling highly-scalable remote memory access programming with MPI-3 one sided // *SC'13*. 2013. P. 1–12.
10. Liu J. et al. High performance RDMA-based MPI implementation over InfiniBand // *ICS*. 2003. P. 295–304.
11. Petrović D. et al. High-performance RMA-based Broadcast on the Intel SCC // *SPAA*. 2012. P. 121–130.
12. Tipparaju V., Nieplocha J., Panda D. Fast collective operations using shared and remote memory access protocols on clusters // *IPDPS*. IEEE, 2003. P. 10.
13. Sur S. et al. High performance rdma based all-to-all broadcast for infiniband clusters // *HiPC*. 2005. P. 148–157.
14. Brock B., Buluç A., Yelick K. BCL: A cross-platform distributed data structures library // *ICPPs*. 2019. P. 1–10.
15. Schuchart J., Bouteiller A., Bosilca G. Using MPI-3 RMA for active messages // *ExaMPI*. 2019. P. 47–56.
16. Devarajan H. et al. Hcl: Distributing parallel data structures in extreme scales // *IEEE Cluster*. 2020. P. 248–258.
17. Бураченко А.В., Пазников А.А., Державин Д.П. Распределенная очередь без использования блокировок в модели удаленного доступа к памяти // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2023. № 62. С. 13–24. doi: 10.17223/19988605/62/2
18. Diep T.D., Ha P.H., Furlinger K. A general approach for supporting nonblocking data structures on distributed-memory systems // *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 2023. V. 173. P. 48–60.
19. Pазников А.А., Аненьков А.Д. Implementation and analysis of distributed relaxed concurrent queues in remote memory access model // *Procedia Computer Science*. 2019. V. 150. P. 654–662. doi: 10.1016/j.procs.2019.02.101
20. Rabenseifner R. Automatic MPI counter profiling // *Proc. 42nd CUG Conference*. 2000. P. 396–405.
21. Thakur R., Rabenseifner R., Gropp W. Optimization of collective communication operations in MPICH // *The International Journal of High Performance Computing Applications*. 2005. V. 19 (1). P. 49–66.
22. Pješivac-Grbović J. et al. Performance analysis of MPI collective // *Cluster Computing*. 2007. V. 10. P. 127–143.
23. Pазников А.А., Kupriyanov M.S. Adaptive MPI collective operations based on evaluations in LogP model // *Procedia Computer Science*. 2021. V. 186. P. 323–330. doi: 10.1016/j.procs.2021.04.208
24. Tipparaju V. et al. Fast collective operations using shared and remote memory access protocols on clusters // *IPDPS*. 2003. P. 10.
25. Kulagin I., Pазников А., Kurnosov M. Heuristic Algorithms for Optimizing Array Operations in Parallel PGAS-programs // *International Conference on Parallel Computing Technologies*. 2015. P. 405–409.

#### References

1. Bronson, N. et al. (2013) TAO: Facebook's distributed data store for the social graph. *USENIX ATC* 13. pp. 49–60.
2. Murphy, R.C. et al. (2010) Introducing the graph 500. *Cray Users Group (CUG)*. 19. pp. 45–74.
3. Åkesson, T. et al. (2005) ATLAS Computing: technical design report. *LHCC Reports*.
4. Chen, C.L.P. & Zhang, C.Y. (2014) Data-intensive applications, challenges, techniques and technologies: A survey on Big Data. *Information Sciences*. 275. pp. 314–347.
5. Gantz, J. & Reinsel, D. (2012) The digital universe in 2020: Big data, bigger digital shadows, and biggest growth in the far east. *IDC iView: IDC Analyze the future*. 2012. pp. 1–16.

6. Balaji P. et al. (2009) MPI on a Million Processors. In: Kranzlmüller, D., Kacsuk, P. & Dongarra, J. (eds) *Recent Advances in Parallel Virtual Machine and Message Passing Interface*. Springer. pp. 20–30.
7. Nieplocha, J., Harrison R.J. & Littlefield R.J. (1996) Global arrays: A nonuniform memory access programming model for high-performance computers. *The Journal of Supercomputing*. 10. pp. 169–189.
8. Hoeftler, T. et al. (2015) Remote memory access programming in MPI-3. *TOPC*. 2(2). pp. 1–26.
9. Gerstenberger, R., Besta, M. & Hoeftler, T. (2013) Enabling highly-scalable remote memory access programming with MPI-3 one sided. *SC'13*. arXiv:2001.07747 DOI: <https://doi.org/10.1145/2503210.2503286>
10. Liu, J. et al. (2003) High performance RDMA-based MPI implementation over InfiniBand. *ICS '03: Proceedings of the 17th annual international conference on Supercomputing*. June. pp. 295–304. DOI: 10.1145/782814.782855
11. Petrović, D. et al. (2012) High-performance RMA-based Broadcast on the Intel SCC. *SPAA*. June. pp. 121–130. DOI: 10.1145/2312005.2312029
12. Tippiaraju, V., Nieplocha, J. & Panda, D. (2003) Fast collective operations using shared and remote memory access protocols on clusters. *International Parallel and Distributed Processing Symposium*, Nice, France, 2003, pp. 10. DOI: 10.1109/IPDPS.2003.1213188
13. Sur, S., Bondhugula, U.K.R., Mamidala, A., Jin, H.W., & Panda, D.K. (2005). High Performance RDMA Based All-to-All Broadcast for InfiniBand Clusters. In: Bader, D.A., Parashar, M., Sridhar, V., & Prasanna, V.K. (eds) *High Performance Computing – HiPC 2005*. Vol 3769. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/11602569\_19
14. Brock, B., Buluç, A. & Yelick, K. (2019) BCL: A cross-platform distributed data structures library. *ICPP '19: Proceedings of the 48th International Conference on Parallel Processing*. August. Article No. 102. pp. 1–10. DOI: 10.1145/3337821.3337912
15. Schuchart, J., Bouteiller, A. & Bosilca, G. (2019) Using MPI-3 RMA for active messages. *IEEE/ACM Workshop on Exascale MPI (ExaMPI)*. Denver, CO, USA. pp. 47–56. DOI: 10.1109/ExaMPI49596.2019.00011
16. Devarajan, H. et al. (2020) Hcl: Distributing parallel data structures in extreme scales. *IEEE International Conference on Cluster Computing (CLUSTER)*. Kobe, Japan. pp. 248–258. DOI: 10.1109/CLUSTER49012.2020.00035
17. Burachenko, A.V., Paznikov, A.A. & Derzhavin, D.P. (2023) Lock-free distributed queue in remote memory access model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 62. pp. 13–24. DOI: 10.17223/19988605/62/2
18. Diep, T.D., Ha, P.H. & Furlinger, K. (2023) A general approach for supporting nonblocking data structures on distributed-memory systems. *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 173. pp. 48–60.
19. Paznikov, A.A. & Anenkov, A.D. (2019) Implementation and analysis of distributed relaxed concurrent queues in remote memory access model. *Procedia Computer Science*. 150. pp. 654–662. DOI: 10.1016/j.procs.2019.02.101
20. Rabenseifner, R. (2000) Automatic MPI counter profiling. *Proceedings 42nd CUG Conference*. May 22–26. pp. 396–405.
21. Thakur, R., Rabenseifner, R. & Gropp, W. (2005) Optimization of collective communication operations in MPICH. *The International Journal of High Performance Computing Applications*. 19(1). pp. 49–66.
22. Pješivac-Grbović, J. et al. (2007) Performance analysis of MPI collective. *Cluster Computing*. 10. pp. 127–143.
23. Paznikov, A.A. & Kupriyanov, M.S. (2021) Adaptive MPI collective operations based on evaluations in LogP model. *Procedia Computer Science*. 186. pp. 323–330. DOI: 10.1016/j.procs.2021.04.208
24. Tippiaraju, V. et al. (2003) Fast collective operations using shared and remote memory access protocols on clusters. *Proceedings International Parallel and Distributed Processing Symposium*. Nice, France. pp. 10. DOI: 10.1109/IPDPS.2003.1213188
25. Kulagin, I., Paznikov, A. & Kurnosov, M. (2015) Heuristic Algorithms for Optimizing Array Operations in Parallel PGAS-programs. In: Malyshkin, V. (ed.) *Parallel Computing Technologies. PaCT 2015. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 9251. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-21909-7\_39.

#### Информация об авторе:

**Пазников Алексей Александрович** – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной техники факультета компьютерных технологий и информатики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: [apaznikov@gmail.com](mailto:apaznikov@gmail.com)

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

#### Information about the author:

**Paznikov Alexey A.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Computer Engineering Department, Faculty of Computer Technologies and Informatics, Saint Petersburg Electrotechnical University “LETI”, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: [apaznikov@gmail.com](mailto:apaznikov@gmail.com)

*The author declares no conflicts of interests.*

Поступила в редакцию 22.09.2023; принята к публикации 05.03.2024

Received 22.09.2023; accepted for publication 05.03.2024

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ****DESIGNING AND DIAGNOSTICS OF COMPUTER SYSTEMS**

Научная статья

УДК 519.7

doi: 10.17223/19988605/66/11

**Булева разность и обнаружение неисправностей задержек пути****Анжела Юрьевна Матросова<sup>1</sup>, Вячеслав Зиновьевич Тычинский<sup>2</sup>,  
Валентина Валерьевна Андреева<sup>3</sup>**<sup>1, 2, 3</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*<sup>1</sup> *mau11@yandex.ru*<sup>2</sup> *tvz.041@yandex.ru*<sup>3</sup> *avv.21@mail.ru*

**Аннотация.** Исследуется метод получения тестовых пар соседних булевых векторов, порождаемых булевой разностью исследуемого пути. Использование таких пар позволяет снизить потребляемую мощность при тестировании и дает большие возможности однозначно определить неисправный путь в схеме по сравнению с традиционными подходами.

**Ключевые слова:** комбинационные схемы; эквивалентная нормальная форма (ЭНФ); робастно тестируемые неисправности задержек пути; булева разность пути.

**Для цитирования:** Матросова А.Ю., Тычинский В.З., Андреева В.В. Булева разность и обнаружение неисправностей задержек пути // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 108–119. doi: 10.17223/19988605/66/11

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/11

**Boolean difference and path delay faults detection****Anzhela Yu. Matrosova<sup>1</sup>, Vyacheslav Z. Tychinskiy<sup>2</sup>, Valentina V. Andreeva<sup>3</sup>**<sup>1, 2, 3</sup> *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*<sup>1</sup> *mau11@yandex.ru*<sup>2</sup> *tvz.041@yandex.ru*<sup>3</sup> *avv.21@mail.ru*

**Abstract.** In this paper, a method of deriving the test pairs of neighbor Boolean vectors is considered. These test pairs are obtained using the Boolean difference of the path. The obtained test pairs are used to detect PDFs which makes it possible to determine the exact location of the fault. Obtained test pairs will be neighboring by the variable marking the beginning of the path. This further reduces power consumption during testing compared to the traditional PDFs testing methods.

**Keywords:** combinational circuits; Equivalent Normal Forms (ENFs); robust testable Path Delay Faults (PDFs); path Boolean difference.

**For citation:** Matrosova, A.Yu., Tychinskiy, V.Z., Andreeva, V.V. (2023) Boolean difference and path delay faults detection. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 108–119. doi: 10.17223/19988605/66/11

## Введение

В схемах высокого уровня производительности, характеризующихся высокими скоростями функционирования и наноразмерами транзисторов, не удастся ограничиться тестированием константных неисправностей на полюсах или линиях связей между элементами. В таких схемах возникают непредусмотренные сопротивления, емкости, индуктивности, которые невозможно рассчитать заранее. Они приводят к замедлению работы схемы по сравнению с расчетными значениями, что весьма нежелательно.

Одной из наиболее распространенных математических моделей, используемых для выявления задержек функционирования логических схем, является модель неисправности задержки пути Path Delay Fault (PDF) [1–6]. В рамках этой модели предполагается, что задержки отдельных вентилях пути и отдельных линий связей между вентилями пути достаточно малы и не влияют на расчетную скорость функционирования схемы. В то же время задержка пути в целом может превышать время между синхросигналами и искажать поведение схемы. Такие задержки необходимо обнаруживать и, если возможно, устранять или маскировать.

Обычно тестовые последовательности для выбранного подмножества путей строятся с использованием одной тестовой пары для каждого из путей. Обсуждаемый в данной работе подход позволяет компактно представлять множества тестовых пар для исследуемого пути. Это дает возможность выбирать для множеств путей подходящие тестовые пары с целью снижения потребляемой мощности при тестировании.

Путем схемы называют последовательность элементов в комбинационной схеме (комбинационной составляющей последовательностной схемы), в которой выход предыдущего элемента является входом последующего, причем один из входов первого элемента пути является входом схемы, а выход последнего элемента пути является выходом схемы.

Задержки пути обнаруживаются тестовыми парами  $(v_1, v_2)$  из двух булевых векторов следующим образом. Пусть в момент времени  $t_1$  на вход комбинационной схемы подается входной вектор  $v_1$ . Со следующим синхроимпульсом в момент времени  $t_2$  на вход схемы поступает вектор  $v_2$  тестовой пары. В момент  $t_3$  с приходом очередного синхроимпульса наблюдается значение переменной на выходе, сопоставляемом этому пути. Если наблюдаемое значение не совпадает с ожидаемым значением, делается вывод, что в схеме имеют место непредусмотренные задержки сигналов. Задержки могут проявляться не обязательно на исследуемом пути.

Будем иметь в виду, что задержки противоположных перепадов сигналов вдоль рассматриваемого пути могут различаться, поэтому для каждого типа перепадов в общем случае необходимо отыскивать собственную пару  $(v_1, v_2)$  входных векторов, на которой задержка проявляется.

Перепадам значений сигнала вдоль пути присвоены разные названия. Перепад сигналов, при котором на выходе схемы, сопоставляемом пути, значение сигнала меняется с 1 на 0, в англоязычной литературе принято называть falling transition, а с 0 на 1 – rising transition. В дальнейшем будем использовать эти названия для различения перепадов сигналов пути.

Неисправность задержки пути является робастно тестируемой, если существует тестовая пара, на которой задержка рассматриваемого пути проявляется независимо от задержек других путей схемы.

Неисправность задержки пути называют не робастно тестируемой, если она может обнаружиться тестовой парой, т.е. ее проявление на тестовой паре позволяет идентифицировать путь только при отсутствии задержек других путей. Это значит, что проявление неисправности на тестовой паре для не робастно тестируемой неисправности может не означать, что неисправность имеет место именно на пути, для которого тестовая пара построена.

Как известно, тестирование неисправностей задержек путей на практике выполняется методом сканирования, при котором либо вектор  $v_2$  тестовой пары получается из вектора  $v_1$  сдвигом  $v_1$ , либо  $v_2$  порождается реакцией комбинационной схемы на вектор  $v_1$ . Отметим, что векторы  $v_1$ , как правило, являются тестовыми наборами для константных неисправностей комбинационной схемы. При

таким подходе тестовые пары для робастно тестируемых неисправностей далеко не всегда удается сформировать. Поэтому наряду с традиционным методом сканирования развиваются альтернативные методы тестирования неисправностей задержек пути, в рамках которых тестовые пары вычисляются точно. Это метод Random Access Scan (RAS), который позволяет существенно сократить время тестирования, потребление мощности и множество тестовых наборов [5, 6]. При реализации этого метода может использоваться подход к получению тестовых пар как на основе анализа эквивалентной нормальной формы (ЭНФ) схемы [7], так и на основе вычисления булевой разности пути [8].

ЭНФ схемы оказывается слишком сложной даже для простых схем. Однако ее анализ позволяет выяснять, является ли тестовая пара робастно тестируемой или нет при любом расстоянии по Хеммингу между векторами тестовой пары.

Построение булевой разности для пути схемы дает возможность найти множество всех наборов значений входных переменных схемы (булевых векторов), для каждого из которых изменение входной переменной, отмечающей начало пути, вызывает изменение значения выходной переменной, отмечающей выход схемы, с которым рассматриваемый путь связан. Речь идет о булевых векторах, обращающих булеву разность в единицу. (Использование операций над ROBDD-графами или применение SAT-решателей позволяет компактно представлять булеву разность пути, избегая перемножений ДНФ.)

Отметим, что булева разность порождает пары соседних векторов, отличающихся значением только одной (входной) переменной, которые могут использоваться в качестве тестовых пар для обнаружения неисправностей задержек пути. Это значит, что расстояние по Хеммингу между векторами пары всегда равно единице. Такие пары предпочтительнее использовать при тестировании неисправностей задержек для подмножества путей.

Цель данной работы – выявление возможности тестовых пар соседних булевых векторов, порождаемых единичными наборами булевой разности, обнаруживать либо робастно тестируемые, либо не робастно тестируемые неисправности задержек пути схемы, для которого булева разность построена.

Ранее нами был выделен важный класс единичных наборов булевых разностей, для которых существуют тестовые пары, обнаруживающие робастно тестируемые неисправности задержек пути как для rising transition, так и для falling transition.

В данной работе выявлены возможности тестирования неисправностей задержек пути для остальных единичных наборов булевой разности.

Отметим, что если множество единичных наборов булевой разности пусто, то рассматриваемый путь является ложным.

Исследование тестовых пар, порожденных единичными наборами булевой разности пути, проводится на основе сравнения с результатами, полученными ранее для ЭНФ-схемы в условиях не обязательно соседних булевых векторов, составляющих тестовые пары [7].

## 1. Свойства тестовых наборов для обнаружения неисправностей литер ЭНФ

В этом разделе покажем, что каждый булев вектор, обращающий булеву разность в единицу, является либо  $a$ -тестовым, либо  $b$ -тестовым набором для рассматриваемого пути. Такие наборы можно вычислить, используя эквивалентную нормальную форму схемы. Поясним, как строятся  $a$ ,  $b$ -тестовые наборы на основе анализа ЭНФ.

В работе [7] неисправности задержек пути сведены к одиночным константным  $0(1)$  неисправностям литеры эквивалентной нормальной формы (ЭНФ), сопоставляемой рассматриваемому пути, сохраняющимся в течение времени  $\lambda$ , где  $\lambda > \tau$ . Здесь  $\tau$  – время между соседними синхроимпульсами. Отметим, что второй набор  $v_2$  тестовой пары, обнаруживающей неисправность задержки пути, является тестовым набором для константной  $0(1)$  неисправности литеры ЭНФ, соответствующей рассматриваемому пути схемы. Литера сопоставляется исследуемому пути и типу перепадов сигналов вдоль пути: falling transition или rising transition. Замена анализа схемы анализом исправной и неисправной формул (ЭНФ), извлеченных из схемы, была предложена Д. Армстронгом [9].

Будем рассматривать эквивалентную нормальную форму Армстронга, полученную из комбинационной схемы описанным в работе [9] способом. Комбинационные схемы состоят из вентилях AND, OR, NAND, NOR NOT. В ЭНФ переменные отмечены последовательностями индексов, представляющими путь в схеме. Переменная вместе со знаком инверсии и последовательностью индексов называется литерой ЭНФ.

Одна и та же литера может присутствовать в различных конъюнкциях ЭНФ. В одной и той же конъюнкции одинаковые переменные могут встречаться лишь с различными последовательностями индексов, т.е. в конъюнкции все литеры различны.

Литеры, отличающиеся только знаками инверсий над переменными, будем называть инверсными литерами.

Переменные, отличающиеся только знаками инверсии без учета приписываемых им последовательностей индексов, будем называть инверсными переменными.

В ЭНФ могут встречаться инверсные переменные, но не инверсные литеры. Построим ЭНФ, для комбинационной схемы, изображенной на рис. 1.

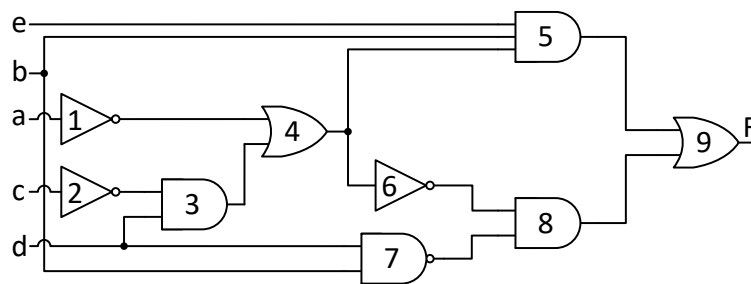


Рис. 1. Комбинационная схема C  
Fig. 1. Combination scheme C

Для нее эквивалентная нормальная форма  $E$  имеет вид:

$$E = \bar{a}_{1459}b_{59}e_{59} \vee b_{59}\bar{c}_{23459}d_{3459}e_{59} \vee a_{14689}\bar{b}_{789}c_{234689} \vee a_{14689}c_{234689}\bar{d}_{789} \vee a_{14689}\bar{b}_{789}\bar{d}_{34689} \vee a_{14689}\bar{d}_{34689}\bar{d}_{789}.$$

Конъюнкцию будем называть пустой, если в ней встречается хотя бы одна пара взаимно инверсных переменных. Таким переменным в одной и той же конъюнкции ЭНФ сопоставляются различные последовательности индексов.

Тестовый набор, как известно, обеспечивает распространение смены значения сигнала в присутствии неисправности от места ее возникновения до выхода схемы. В нашем случае – от входа схемы вдоль рассматриваемого пути. Армстронг предложил заменить построение тестового набора для пути схемы построением тестового набора для константной неисправности литеры ЭНФ, сопоставляемой рассматриваемому пути. В работе [7] используется такой же подход.

Напомним свойства тестовых наборов для одиночных неисправностей литер ЭНФ [7]. Рассмотрим сначала неисправность константы 1 литеры ЭНФ. При такой неисправности во всех конъюнкциях, содержащих литеру, сопоставляемую рассматриваемому пути, эта литера заменяется константой 1. В дальнейшем будем называть ее  $b_p$ -неисправностью, а соответствующий тестовый набор, ее обнаруживающий, –  $b$ -тестовым набором. Выберем путь  $\alpha$  и соответствующую ему литеру  $x_{i\alpha}$ .

Будем иметь в виду, что  $b$ -тестовый набор обращает исправную ЭНФ в ноль, а неисправную ЭНФ в единицу [7]. При этом  $b$ -тестовый набор обнаруживает любую из соответствующих пути константных неисправностей выходов элементов вдоль пути  $\alpha$  схемы  $C$ , в том числе константную неисправность входной переменной пути, вызывающую смену значений на инверсные от входной переменной пути до его выходной переменной.

Теперь перейдем к рассмотрению  $a_p$ -неисправности. Она приводит к исчезновению из ЭНФ непустых и пустых конъюнкций, содержащих литеру  $x_{i\alpha}$ .

На  $a$ -тестовом наборе для  $a_p$ -неисправности исправная ЭНФ обращается в единицу, а неисправная – в ноль. Будем иметь в виду, что изменение значения переменной  $x_i$  в  $a$ -тестовом наборе

приводит к обращению ЭНФ в ноль только за счет обращения в 0 литеры  $x_{i\alpha}$ . При этом  $a$ -тестовый набор обнаруживает любую из соответствующих пути константных неисправностей выходов элементов вдоль пути  $\alpha$  схемы  $C$ , в том числе константную неисправность входной переменной пути, вызывающую смену значений на инверсные от входной переменной пути до его выходной переменной.

## 2. Построение пар тестовых наборов для робастно тестируемых неисправностей задержек пути на основе анализа ЭНФ

На основе рассмотрения  $a$ ,  $b$ -тестовых наборов в работе [7] сформулированы условия существования пар тестовых наборов для робастно и не робастно тестируемых неисправностей задержек пути. Векторы пары отличаются инверсными значениями по переменной, отмечающей начало рассматриваемого пути, и, возможно, инверсными значениями других переменных схемы.

Нас в первую очередь интересуют пары, обнаруживающие робастно тестируемые неисправности задержек пути.

### 2.1. Свойства тестовой пары для *falling transition*

В случае *falling transition*  $b$ -тестовый набор (набор  $v_2$  тестовой пары) для  $b_p$ -неисправности обращает выходную переменную схемы, сопоставляемую рассматриваемому пути (ЭНФ исправной схемы), в 0.

Набор  $v_1$  тестовой пары, отличающийся инверсным значением переменной  $x_i$ , а, возможно, и значениями других переменных, обращает выходную переменную схемы (ЭНФ исправной схемы) в 1.

Для робастно тестируемой неисправности задержки пути минимально покрывающий интервал векторов тестовой пары должен быть ортогонален конъюнкциям множества  $K$  из ЭНФ исправной схемы, не содержащим литеру рассматриваемого пути.

Поскольку  $v_2$  обращает выходную переменную схемы в 0, то этот набор ортогонален конъюнкциям множества  $K$ .

Что касается минимально покрывающего интервала пары  $(v_1, v_2)$  то он может быть ортогонален конъюнкциям множества  $K$ , и тогда исследуемый путь является робастно тестируемым. Иначе он не робастно тестируемый.

### 2.2. Свойства тестовой пары для *rising transition*

Набор  $v_2$  является  $a$ -тестовым набором для  $a_p$ -неисправности и обращает выходную переменную схемы, сопоставляемую рассматриваемому пути, в 1.

Набор  $v_1$ , отличающийся инверсным значением переменной  $x_i$ , а, возможно, и значениями других переменных, обращает выходную переменную схемы (ЭНФ исправной схемы) в 0. Для робастно тестируемой неисправности задержки пути минимально покрывающий интервал тестовой пары должен быть ортогонален конъюнкциям множества  $K$  [7].

Поскольку  $v_2$  является тестовым набором для  $a_p$ -неисправности, то он обращает в единицу хотя бы одну конъюнкцию ЭНФ с литерой  $x_{i\alpha}$ , являясь ортогональным всем конъюнкциям множества  $K$  по построению [7].

В ситуации, когда набор  $v_1$  обращает выходную переменную схемы (ЭНФ исправной схемы) в 0, минимально покрывающий интервал пары  $(v_1, v_2)$  может быть ортогонален конъюнкциям множества  $K$ , и тогда исследуемый путь является робастно тестируемым. Иначе он не робастно тестируемый.

Следует иметь в виду, что ЭНФ является чрезвычайно громоздкой формулой. Представление ее в виде размеченного дерева [10, 11] хотя и позволяет строить тестовые пары для более сложных комбинационных схем, тем не менее сложность размеченных деревьев экспоненциально возрастает в схе-



мах с большим числом ветвлений. Из сказанного следует, что избавление от ЭНФ в любом из ее представлений при формировании тестовых пар очень важно.

В данной работе предлагается свести получение тестовых пар для обнаружения неисправностей задержек пути к вычислению булевой разности пути. Такое сведение позволяет избавиться от использования ЭНФ. Получаемые при этом тестовые пары характеризуются минимальным потреблением мощности. Здесь потребление мощности оценивается расстоянием по Хеммингу между булевыми векторами пары.

### 3. Булева разность пути

Булева разность пути, представляемая в виде либо ДНФ, либо ROBDD-графа [12, 13], либо в виде единичных наборов соответствующей схемы [13], обладает следующим свойством. Смена в наборе, обращающем булеву разность в единицу, значения его входной переменной, отмечающей начало рассматриваемого пути, приводит к смене значения на выходе схемы, которым заканчивается этот путь. При этом набор, обращающий булеву разность в единицу, может обращать выход схемы либо в 0, либо в 1, а второй набор пары обращает выход схемы либо в 1, либо в 0. Будем формировать тестовую пару для обнаружения неисправностей задержки пути следующим образом. Набор, обращающий булеву разность пути в единицу, есть набор  $v_2$  тестовой пары, а второй набор, соседний по переменной, отмечающий начало исследуемого пути, есть набор  $v_1$  тестовой пары.

Предварительно опишем алгоритм вычисления булевой разности пути:

Представим путь  $\alpha$  для одновыходной комбинационной схемы  $C$ , последовательностью следующих символов:  $x_i, u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_r$ . Здесь  $x_1, \dots, x_n$  – символы входных переменных схемы,  $r$  – длина пути  $\alpha$ ,  $x_i$  – переменная, отмечающая начало пути (вход схемы  $C$ ). Переменные  $u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_r$  отмечают выходы элементов пути. Переменная  $u_r$  отмечает выход схемы  $C$ . Схема  $C$  может быть комбинационной частью последовательностной схемы.

Пусть переменные  $u_i, u_{i-1}$  отмечают выходы соседних элементов пути  $\alpha$ . Рассмотрим подсхему  $C_{u_i}$  схемы  $C$ . Выход этой подсхемы отмечается переменной  $u_i$ , а входы – переменными  $x_1, \dots, x_n, u_{i-1}$ . Здесь переменная  $u_{i-1}$  является входной переменной подсхемы  $C_{u_i}$  наряду с переменными  $x_1, \dots, x_n$  и одновременно входной переменной элемента с выходом, отмеченным переменной  $u_i$ .

Обозначим символом  $D_{u_i} / D_{u_{i-1}}$  булеву разность, вычисляемую для функции, реализуемой подсхемой  $C_{u_i}$  по переменной  $u_{i-1}$ . Выражение для булевой разности  $D_{u_i} / D_{u_{i-1}}$  имеет следующий вид:  $D_{u_i} / D_{u_{i-1}} = f_{u_i}^{u_{i-1}=0} \oplus f_{u_i}^{u_{i-1}=1}$ , где  $f_{u_i}$  представляет функцию подсхемы  $C_{u_i}$ , зависящую от переменных  $x_1, \dots, x_n, u_{i-1}$ .

Булева разность для пути  $\alpha$  принимает следующий вид:

$$D_\alpha = (D_{u_r} / D_{u_{r-1}}) \wedge (D_{u_{r-1}} / D_{u_{r-2}}) \wedge \dots \wedge (D_{u_2} / D_{u_1}) \wedge (D_{u_1} / D_{x_i}).$$

**Теорема 1.** Булев вектор  $\gamma$ , обращающий булеву разность  $D_\alpha$  в единицу, а схему  $C$  в ноль, является  $b$ -тестовым набором для  $b_p$ -неисправности ЭНФ.

**Доказательство.** Из утверждения теоремы следует, что ЭНФ схемы на векторе  $\gamma$  принимает значение 0, как и  $b$ -тестовый набор. Кроме того, при замене переменной  $x_i$  в наборе  $\gamma$  на инверсную переменную происходит смена значений переменных, сопоставляемых выходам элементов вдоль пути  $\alpha$  вплоть до выходной переменной пути, как это происходит при наличии неисправности константы 1 литеры  $x_{i\alpha}$  в ЭНФ схемы  $C$ , то есть набор  $\gamma$  является  $b$ -тестовым набором. Утверждение доказано.

При образовании тестовой пары булев вектор  $\gamma$  является вектором  $v_2$ , а соседний по входной переменной  $x_i$  булев вектор является вектором  $v_1$  для falling transition.

**Теорема 2.** Булев вектор  $\gamma$ , обращающий булеву разность  $D_\alpha$  в единицу и схему  $C$  также в единицу, является  $\alpha$ -тестовым набором для  $a_p$ -неисправности ЭНФ.

**Доказательство.** Из утверждения теоремы следует, что ЭНФ схемы на векторе  $\gamma$  принимает значение 1, как и  $\alpha$ -тестовый набор. Кроме того, при замене переменной  $x_i$  в наборе  $\gamma$  на инверсную переменную происходит смена значений переменных, сопоставляемых выходам элементов вдоль пути  $\alpha$  вплоть до выходной переменной пути, как это происходит при наличии неисправности константы 0 литеры  $x_{i_\alpha}$  в ЭНФ схемы  $C$ , то есть набор  $\gamma$  является  $\alpha$ -тестовым набором. Утверждение доказано.

При образовании тестовой пары булев вектор  $\gamma$  является вектором  $v_2$ , а соседний по входной переменной  $x_i$  булев вектор является вектором  $v_1$  для rising transition.

Итак,  $D_\alpha$  представляет все тестовые наборы  $v_2$  для rising и falling transitions, которые не отделены друг от друга. Полезно их разделить.

Если путь  $\alpha$  содержит четное число безынверсных вентилях, то для rising transition получаем выражение  $D_{rise} = D_\alpha \wedge x_i$ , для falling transition –  $D_{fall} = D_\alpha \wedge \bar{x}_i$ . В противном случае,  $D_{rise} = D_\alpha \wedge \bar{x}_i$  и  $D_{fall} = D_\alpha \wedge x_i$ .

Обозначим символами  $D'_{rise}$  и  $D'_{fall}$  выражения, полученные из  $D_{rise}$  и  $D_{fall}$  удалением литеры  $x_i$  (независимо от знака инверсии).

Обозначим символом  $D_{rob}$  выражение, представляющее пары соседних по переменной  $x_i$  наборов:  $D_{rob} = D'_{rise} \wedge D'_{fall}$ . Множество  $D_{rob}$  может быть пустым.

Заметим, что выражение  $D_{rob}$  не содержит переменной  $x_i$ , т.е. булев вектор в пространстве переменных  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  задает пару в пространстве  $n$  переменных. Один из векторов пары получается приписыванием переменной  $x_i$  значения 0, а другой – значения 1. На векторах этой пары достигаются инверсные значения выхода схемы. Оба вектора пары обращают булеву разность в единицу. Один из них является  $\alpha$ -тестовым набором, а другой –  $b$ -тестовым набором ЭНФ схемы  $C$ .

Проиллюстрируем получение ДНФ  $D_{rob}$  на примере. Рассмотрим комбинационную схему  $C$  (рис. 2), в которой выделен путь  $\alpha$ , включающий элементы с номерами 3, 4, 6, 8, 9.

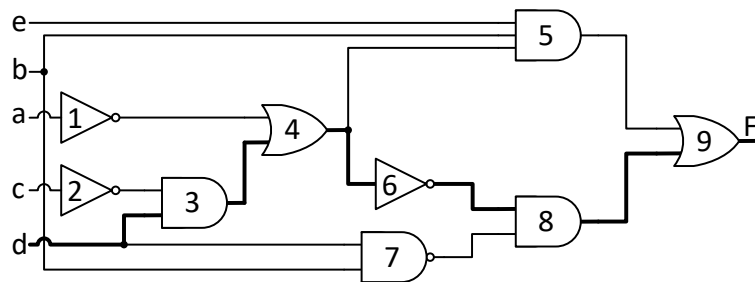


Рис. 2. Комбинационная схема с выделенным путём  $\alpha$   
Fig. 2. Combination scheme with a dedicated path  $\alpha$

Начало пути отмечается переменной  $d$ . Таким образом,  $\alpha = d, u_3, u_4, u_6, u_8, u_9$ .

$$D_{u_9} / D_{u_8} = (u_5 \vee (u_8 = 0)) \oplus (u_5 \vee (u_8 = 1)) = \bar{u}_5 = \bar{b} \vee \bar{e} \vee ac \vee ad,$$

$$D_{u_8} / D_{u_6} = ((u_6 = 0) \wedge u_7) \oplus ((u_6 = 1) \wedge u_7) = u_7 = \bar{b} \vee \bar{d},$$

$$D_{u_6} / D_{u_4} = (u_4 = 0) \oplus (u_4 = 1) = 1,$$

$$D_{u_4} / D_{u_3} = (u_1 \vee (u_3 = 0)) \oplus (u_1 \vee (u_3 = 1)) = \bar{u}_1 = a,$$

$$D_{u_3} / d = (u_2 \wedge (d = 0)) \oplus (u_2 \wedge (d = 1)) = u_2 = \bar{c},$$

$$D_\alpha = (\bar{b} \vee \bar{e} \vee ac \vee ad) \wedge (\bar{b} \vee \bar{d}) \wedge 1 \wedge a \wedge \bar{c} = a\bar{c}\bar{b} \vee a\bar{c}\bar{d}.$$

Так как путь  $\alpha$  содержит нечётное число инверсных элементов,  $D_{rise}$  и  $D_{fall}$  определяются как

$$\begin{aligned} D_{rise} &= (a\bar{c}\bar{b} \vee a\bar{c}\bar{d}) \wedge \bar{d} = a\bar{c}\bar{d}; D'_{rise} = a\bar{c}, \\ D_{fall} &= (a\bar{c}\bar{b} \vee a\bar{c}\bar{d}) \wedge d = a\bar{c}b\bar{d}; D'_{fall} = a\bar{c}\bar{b}, \\ D_{rob} &= a\bar{c} \wedge a\bar{c}\bar{b} = a\bar{c}\bar{b}. \end{aligned}$$

#### 4. Свойства пар соседних наборов, порождаемых $D_{rob}$

**Теорема 3.** Тестовая пара соседних наборов  $(v_1, v_2)$ , порождаемая булевым вектором, обращающим  $D_{rob}$  в единицу, является тестовой парой для робастно тестируемой неисправности задержки пути, причем в зависимости от порядка поступления наборов пары имеется возможность обнаруживать как rising transition, так и falling transition.

**Доказательство.** Заметим, что оба набора тестовой пары обращают  $D_a$  в единицу. Для определенности положим, что в векторе  $v_1$  переменная  $x_i$  присутствует без инверсии, а в векторе  $v_2$  – с инверсией.

Если вектор  $v_2$  обращает схему, содержащую рассматриваемый путь, в единицу, то он является  $a$ -тестовым набором для  $a_p$ -неисправности. Замена в  $a$ -тестовом наборе значения переменной  $x_i$  инверсным значением формирует набор  $v_1$  тестовой пары. Поскольку набор  $v_1$  обращает булеву разность в 0, то он является  $b$ -тестовым набором. Набор  $v_1$  ортогонален конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$ , так как он ортогонален исправной ЭНФ схемы  $S$ . Набор  $v_2$ , являясь  $a$ -тестовым набором, ортогонален конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$  по построению. Следовательно, минимально покрывающий интервал тестовой пары также ортогонален конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$ . Как отмечалось выше, такая пара обнаруживает робастно тестируемую неисправность задержки пути для rising transition.

Если вектор  $v_2$  обращает схему, содержащую рассматриваемый путь, в ноль, то он является  $b$ -тестовым набором для  $b_p$ -неисправности. При этом на набор  $v_1$ , тестовой пары является  $a$ -тестовым набором для  $a_p$ -неисправности. Итак, имеем: вектор  $v_2$ , являясь  $b$ -тестовым набором, ортогонален конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$ . Вектор  $v_1$ , являясь  $a$ -тестовым набором, также ортогонален конъюнкциям множества  $\mathbf{K}$ . Следовательно, такая тестовая пара обнаруживает робастно тестируемую неисправность задержки пути для falling transition. Теорема доказана.

**Следствие:** Тройки векторов  $(v_1, v_2, v_1)$  и  $(v_2, v_1, v_2)$  обнаруживают робастно тестируемые неисправности задержек противоположных перепадов значений сигналов пути  $\alpha$ .

#### 5. Свойства пар соседних наборов, порождаемых $D_a$ при условии пустого множества $D_{rob}$

Выражение  $D_{rob}$  при любом из перечисленных способов его представления позволяет найти множество всех соседних тестовых пар, обнаруживающих робастно тестируемые задержки противоположных перепадов сигналов для рассматриваемого пути. Однако это множество тестовых пар может оказаться пустым.

В такой ситуации булева разность также представляет в общем случае множество  $a$ -тестовых наборов и множество  $b$ -тестовых наборов, однако их соседние по входной переменной наборы не являются, соответственно,  $b$ -тестовыми и  $a$ -тестовыми наборами. Отметим, что на соседнем наборе по отношению к набору, обращающему булеву разность в единицу, схема  $S$  принимает противоположное значение.

Рассмотрим сначала множество  $b$ -тестовых наборов в этой ситуации

**Теорема 4.** Тестовая пара соседних по входной переменной наборов, содержащая  $b$ -тестовый набор в качестве вектора  $v_2$ , обнаруживает не робастно тестируемую неисправность задержки рассматриваемого пути.

**Доказательство.** Для  $b$ -тестового набора соседний набор  $\beta$  по входной переменной, отмечающей начало пути, не является  $a$ -тестовым. Будем иметь в виду, что  $b$ -тестовый набор обращает схему в 0. Набор  $\beta$  обращает схему в единицу и не является  $a$ -тестовым. Это значит, что он обращает в единицу некоторые конъюнкции множества  $\mathbf{K}$  ЭНФ-схемы. Следовательно, для рассматриваемой пары соседних векторов не выполняется условие робастности: минимально покрывающий интервал соседних векторов пересекается с множеством  $\mathbf{K}$ . Теорема доказана.

В порождаемой булевой разностью паре для набора  $\beta$  возможно рассмотрение отличных от  $\alpha$  путей, вдоль которых также происходит смена значений сигналов, вызванная сменой значения входной переменной  $x_i$  (возможно, множество таких путей невелико). Рассматриваются пути схемы, вход и выход которых совпадают с входом и выходом пути  $\alpha$ . Среди них выделяются те пути, которые содержатся в исходном множестве путей, исследуемых на возможность задержки в них. Некоторые из этих путей могли оказаться робастно тестируемыми как для rising, так и для falling transitions и уже проверены на отсутствие задержек в них. Оставшееся множество путей может выдаваться вместе с рассматриваемым путем на обнаружение задержки с использованием полученной тестовой пары. Перейдем к рассмотрению множества  $a$ -тестовых наборов.

**Теорема 5.** Тестовая пара соседних по входной переменной наборов, содержащая  $a$ -тестовый набор в качестве вектора  $v_2$ , обнаруживает робастно тестируемую неисправность задержки рассматриваемого пути.

**Доказательство.** Для  $a$ -тестового набора соседний набор  $\beta$  по входной переменной, отмечающей начало пути, не является  $b$ -тестовым. Будем иметь в виду, что  $a$ -тестовый набор обращает схему в 1. Набор  $\beta$  обращает схему в 0 и не является  $b$ -тестовым. Это значит, что он не пересекается с конъюнкциями множества  $\mathbf{K}$ , так же как и  $a$ -тестовый набор. Следовательно, для рассматриваемой пары соседних векторов выполняется условие робастности: минимально покрывающий интервал соседних векторов не пересекается с множеством  $\mathbf{K}$ . Теорема доказана.

Итак, тестовые пары для не робастно тестируемых неисправностей задержек путей порождаются только  $b$ -тестовыми наборами булевой разности в условиях, когда соседний набор не является  $a$ -тестовым. Остальные тестовые пары соседних наборов, извлекаемые из  $D_a$ , обнаруживают робастно тестируемые неисправности задержек пути.

## 6. Обсуждение экспериментальных результатов

С использованием булевой разности пути комбинационной схемы были построены тестовые пары для путей схем из набора бенчмарков ISCAS'89. Для каждого выхода каждой схемы было выбрано не менее 10 самых длинных путей. Общая информация о бенчмарках, использованных при тестировании, представлена в табл. 1.

Таблица 1

Информация об использованных бенчмарках

| № п/п | Бенчмарк | Число входов | Число выходов | Число вентиляей | Выбрано путей | Робастно тестируемые пути | Доля робастно тестируемых путей |
|-------|----------|--------------|---------------|-----------------|---------------|---------------------------|---------------------------------|
| 1     | s298     | 17           | 20            | 119             | 146           | 101                       | 69,18%                          |
| 2     | s344     | 24           | 26            | 160             | 159           | 119                       | 74,84%                          |
| 3     | s400     | 24           | 27            | 162             | 258           | 228                       | 88,37%                          |
| 4     | s444     | 24           | 27            | 181             | 237           | 148                       | 62,45%                          |
| 5     | s641     | 54           | 42            | 379             | 309           | 143                       | 46,28%                          |
| 6     | s820     | 23           | 24            | 289             | 232           | 230                       | 99,14%                          |
| 7     | s953     | 45           | 52            | 395             | 338           | 336                       | 99,41%                          |
| 8     | s1196    | 32           | 32            | 529             | 334           | 164                       | 49,10%                          |
| 9     | s1488    | 14           | 25            | 653             | 312           | 291                       | 93,27%                          |
| 10    | s1494    | 14           | 25            | 647             | 336           | 313                       | 93,15%                          |

В табл. 2 приведена более детальная информация по путям, для которых не существуют тестовые пары, такие что один из векторов является  $a$ -тестовым набором, а другой –  $b$ -тестовым набором:

- пути без  $a$ -тестовых наборов, для которых существуют  $b$ -тестовые наборы;
- пути без  $b$ -тестовых наборов, для которых существуют  $a$ -тестовые наборы;
- пути с  $a$ - и  $b$ -тестовыми наборами, для которых при этом множество единичных наборов  $D_{rob}$  пусто;
- ложные пути, для которых множество единичных наборов  $D_a$  пусто и, следовательно, пусты множества  $a$ - и  $b$ -тестовых наборов.

Таблица 2

Различные ситуации, порождающие тестовые пары

| № п/п | Выбрано путей | Пути без $a$ -тестов | Пути без $b$ -тестов | Пути без $D_{rob}$ | Ложные пути | Доля ложных путей |
|-------|---------------|----------------------|----------------------|--------------------|-------------|-------------------|
| 1     | 146           | 13                   | 7                    | 1                  | 24          | 16,44%            |
| 2     | 159           | 22                   | 16                   | 0                  | 2           | 1,26%             |
| 3     | 258           | 7                    | 9                    | 10                 | 4           | 1,55%             |
| 4     | 237           | 44                   | 23                   | 1                  | 21          | 8,86%             |
| 5     | 309           | 42                   | 68                   | 0                  | 56          | 18,12%            |
| 6     | 232           | 0                    | 0                    | 2                  | 0           | 0%                |
| 7     | 338           | 0                    | 0                    | 2                  | 0           | 0%                |
| 8     | 334           | 24                   | 22                   | 5                  | 119         | 35,63%            |
| 9     | 312           | 6                    | 3                    | 11                 | 1           | 0,32%             |
| 10    | 336           | 3                    | 4                    | 16                 | 0           | 0%                |

При построении тестовых последовательностей для подмножества путей комбинационной схемы сначала следует ориентироваться на тестирование путей, для которых множество  $D_{rob}$  непусто. Затем желательно переходить к рассмотрению путей, для которых один из векторов пары является  $a$ -тестовым набором, а второй не является  $b$ -тестовым набором. В последнюю очередь рассматриваются пути, для которых один из векторов пары является  $b$ -тестовым набором, а второй не является  $a$ -тестовым набором.

### Заключение

Выявлены возможности использования булевой разности пути для построения тестовых пар соседних (по входной переменной) наборов с целью обнаружения робастно тестируемых неисправностей задержек пути и условия, когда тестовая пара обнаруживает не робастно тестируемую неисправность задержки пути. Рассмотрение пар, состоящих только из соседних наборов по переменной, отмечающей начало исследуемого пути, позволяет расширить класс робастно тестируемых неисправностей задержек пути. Установлено, что тестовая пара, состоящая из  $a$ -тестового набора  $v_2$  и набора  $v_1$ , не являющегося  $b$ -тестовым набором, обнаруживает робастно тестируемую неисправность задержки пути. Тестовые пары, порождаемые булевой разностью пути, характеризуются минимальным потреблением мощности, и использование таких пар предпочтительно при ориентации на ее снижение в тестовых последовательностях, обнаруживающих неисправности задержек подмножеств путей.

### Список источников

1. Lindgren P., Kerttu M., Thornton M., Drechsler R. Low power optimization technique for BDD mapped circuits // ASP-DAC. 2001. P. 615–621. doi: 10.1109/ASPDAC.2001.913377
2. Shelar R.S., Sapatnekar S.S. An efficient algorithm for low power pass transistor logic synthesis // ASP-DAC. 2002. P. 87–92.
3. Gekas G., Nikolos D., Kalligeros E., Kavousianos X. Power aware test-data compression for scan-based testing // 2005 12th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Gammarth, Tunisia. 2005. P. 1–4.
4. Tudu J.T., Larsson E., Singh V., Agrawal V.D. On Minimization of Peak Power for Scan Circuit during Test // Test Symposium 2009 14th IEEE European. 2009. P. 25–30. doi: 10.1109/ETS.2009.36
5. Kotasek Z., Skarvada J., Strnadel J. Reduction of Power Dissipation Through Parallel Optimization of Test Vector and Scan Register Sequences // IEEE International Symposium on Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systems. 2010. P. 364–369. doi: 10.1109/DDECS.2010.5491750

6. Sinduja V., Raghav S., Anita J.P. Efficient don't-care filling method to achieve reduction in test power // ICACCI. 2015. P. 478–482.
7. Матросова А.Ю., Липский В.Б. Свойства пар тестовых наборов, обнаруживающих неисправности задержек путей в логических схемах VLSI высокой производительности // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 135–148.
8. Matrosova A.Yu., Andreeva V.V., Nikolaeva E.A. Finding test pairs for PDFs in logic circuits based on using operations on ROBDDs // Russian Physics Journal. 2018. V. 61 (5). P. 994–999.
9. Armstrong D.B. On finding a nearly minimal set of fault detection tests for combinational logic nets // IEEE Transactions on Electronic Computers. 1966. V. EC-15 (1). P. 66–73.
10. Матросова А.Ю., Кудин Д.В., Николаева Е.А. Обнаружение ложных путей в комбинационной схеме // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2 (15). С. 99–107.
11. Матросова А.Ю., Андреева В.В., Чернышов С.В., Рожкова С.В., Кудин Д.В. Обнаружение ложных путей в последовательностных схемах // Известия вузов. Физика. 2017. Т. 60, № 10. С. 170–178.
12. Matrosova A.Yu., Andreeva V.V., Tychinskiy V.Z., Goshin G.G. Applying ROBDDs for delay testing of logical circuits // Russian Physics Journal. 2019. V. 62 (5). P. 86–94.
13. Matrosova A.Yu., Andreeva V.V., Tychinskiy V.Z. SAT Solvers application of deriving all test pairs detecting robust testable PDFs // 2021 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS), Batumi, Georgia, 10–13 September, 2021 : proc. P. 252–255.

### References

1. Lindgren, P., Kerttu, M., Thornton, M. & Drechsler, R. (2001) Low power optimization technique for BDD mapped circuits. *Proceedings of the ASP-DAC 2001. Asia and South Pacific Design Automation Conference 2001 (Cat. No.01EX455)*. Yokohama, Japan. pp. 615–621. DOI: 10.1109/ASPDAC.2001.913377. DOI: 10.1109/ASPDAC.2001.913377
2. Shelar, R.S. & Sapatnekar, S.S. (2002) An efficient algorithm for low power pass transistor logic synthesis. *Proceedings of ASP-DAC/VLSI Design 2002. 7th Asia and South Pacific Design Automation Conference and 15th International Conference on VLSI Design*. Bangalore, India. pp. 87–92. DOI: 10.1109/ASPDAC.2002.994890
3. Gekas, G., Nikolos, D., Kalligeros, E. & Kavousianos, X. (2005) Power aware test-data compression for scan-based testing. *12th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems*. Gammarth, Tunisia. pp. 1–4. DOI: 10.1109/ICECS.2005.4633432
4. Tudu, J.T., Larsson, E., Singh, V. & Agrawal, V.D. (2009) On Minimization of Peak Power for Scan Circuit during Test. *Test Symposium 2009 14th IEEE European*. pp. 25–30. DOI: 10.1109/ETS.2009.36
5. Kotasek, Z., Skarvada, J. & Strnadel, J. (2010) Reduction of Power Dissipation Through Parallel Optimization of Test Vector and Scan Register Sequences. *IEEE International Symposium on Design and Diagnostics of Electronic Circuits and Systems*. pp. 364–369. DOI: 10.1109/DDECS.2010.5491750
6. Sinduja, V., Raghav, S. & Anita, J. P. (2015) Efficient don't-care filling method to achieve reduction in test power. *International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*. Kochi, India. pp. 478–482. DOI: 10.1109/ICACCI.2015.7275654
7. Matrosova, A.Yu. & Lipsky, V.B. (2015) Properties of pairs of test vectors detecting path delay faults in high performance VLSI logical circuits. *Automation and Remote Control*. 4. pp. 135–148.
8. Matrosova, A.Yu., Andreeva, V.V. & Nikolaeva, E.A. (2018) Finding test pairs for PDFs in logic circuits based on using operations on ROBDDs. *Russian Physics Journal*. 61(5). pp. 994–999.
9. Armstrong, D.B. (1966) On finding a nearly minimal set of fault detection tests for combinational logic nets. *IEEE Transactions on Electronic Computers*. EC-15(1). pp. 66–73.
10. Matrosova, A.Yu., Kudin, D.V. & Nikolaeva, E.A. (2011) Finding false paths in combinational circuits. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(15). pp. 99–107.
11. Matrosova, A.Yu., Andreeva, V.V., Chernyshov, S.V., Rozhkova, S.V. & Kudin, D.V. (2017) Finding false paths in sequential circuits. *Russian Physics Journal*. 60(10). pp. 170–178.
12. Matrosova, A.Yu., Andreeva, V.V., Tychinskiy, V.Z. & Goshin, G.G. (2019) Applying ROBDDs for delay testing of logical circuits. *Russian Physics Journal*. 62(5). pp. 86–94.
13. Matrosova, A.Yu., Andreeva, V.V. & Tychinskiy, V.Z. (2021) SAT Solvers application of deriving all test pairs detecting robust testable PDFs. *2021 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS)*. Proceedings. Batumi. Georgia. September 10–13, 2021. pp. 252–255.

### Информация об авторах:

**Матросова Анжела Юрьевна** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: mau11@yandex.ru

**Тычинский Вячеслав Зиновьевич** – аспирант, ассистент кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tvz.041@yandex.ru

**Андреева Валентина Валерьевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры компьютерной безопасности Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: avv.21@mail.ru

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Information about the authors:**

**Matrosova Anzhela Yu.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mau11@yandex.ru

**Tychinskiy Vyacheslav Z.** (Post-graduate Student, Assistant, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tvz.041@yandex.ru

**Andreeva Valentina V.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: avv.21@mail.ru

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

*Поступила в редакцию 25.11.2023; принята к публикации 05.03.2024*

*Received 25.11.2023; accepted for publication 05.03.2024*

Научная статья

УДК 53.083

doi: 10.17223/19988605/66/12

**Синтез обнаруживающих тестов для нечетких автоматов с конечной памятью****Дмитрий Васильевич Сперанский***Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия, speranskiy.dv@gmail.com*

**Аннотация.** Предложен и проиллюстрирован метод синтеза тестов, обнаруживающих неисправности в нечетких автоматах с конечной памятью (АКП). В качестве АКП рассмотрены  $\mu$ -определенные и синхронизируемые автоматы. Поскольку любой линейный автомат (ЛА) имеет конечную память, то рассматриваемая задача может быть сведена к аналогичной задаче для ЛА. Для четких ЛА ранее автором представляемой статьи был разработан метод ее решения. Здесь этот метод обобщен и распространен на нечеткие  $\mu$ -определенные и синхронизируемые автоматы. Метод ориентирован на обнаружение неисправностей, изменяющих значения четких элементов его характеристических матриц в линеаризованном представлении АКП. Предполагается, что неисправности не выводят заданный АКП и все четкие автоматы, полученные из заданного после выполнения замещений нечетких элементов всеми возможными четкими комбинациями и внесения в четкие автоматы неисправностей, из класса  $\mu$ -определенных (синхронизируемых).

**Ключевые слова:** нечеткие автоматы с конечной памятью; метод синтеза тестов, обнаруживающих неисправности; сведение задачи к аналогу с четкими ЛА.

**Для цитирования:** Сперанский Д.В. Синтез обнаруживающих тестов для нечетких автоматов с конечной памятью // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 66. С. 120–127. doi: 10.17223/19988605/66/12

Original article

doi: 10.17223/19988605/66/12

**Synthesis of detection tests for fuzzy automata with finite memory****Dmitriy V. Speranskiy***Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation, speranskiy.dv@gmail.com*

**Abstract.** The problem of test synthesis for fuzzy automata with finite memory is considered. The paper is based on the results obtained by the author earlier. They study linear automata (LA), a subclass of which are automata with finite memory (AFM). Both types of automata are used as models in diagnostics of discrete devices and in other applications.

The advantages of LA are simplicity of realization and availability of developed mathematical apparatus for their study. AFMs allow describing the dependencies between inputs and outputs in the past and present moments of time without using states of the automata. This property is used in the development of finite-automation cryptosystems, in the generation of exhaustive tests for discrete devices, in the formulation of fuzzy rules of logical inference and others.

The paper proposes a method for synthesis of detecting tests for fuzzy AFMs, based on reducing it to the case of its analog for crisp AFMs. Fuzzy AFM (as a subclass of LA) can be described using transition and output functions represented as equations with characteristic matrices. Fuzzy AFM is realized using matrices containing some fuzzy elements. These elements obtain values randomly from alternative sets given for them. The other (crisp) elements of the matrices are fixed values from the field  $GF(p)$ , over which the AFM is defined. After all possible substitutions in the matrices of fuzzy AFM of all fuzzy elements (from alternative sets) we obtain a set of crisp automata describing the "behavior" of the considered fuzzy automaton under all possible "scenarios" of substitutions.

Each faulty AFM is obtained by changing the values of the elements of its characteristic matrices. As a set of admissible faults, all possible changes in these matrices obtained by substitutions and insertion of fault introduction are considered.



Now we can use the method of test synthesis proposed earlier by the author of the submitted paper, organizing the procedure of sequential analysis and comparison of "behavior" of crisp pairs (faultless AFM, faulty AFM). The AFMs obtained after substitutions should be used sequentially as faultless AFMs and as faulty AFMs after faults have been introduced. Conclusions about the faultless AFM or the presence of a fault in it are made on the basis of analyzing the totality of the results obtained. A generalization of the synthesis method proposed earlier by the author of the submitted paper the is described for  $\mu$ -defined (and synchronizable) AFMs. The method is based on obtaining tests as solutions of systems of linear equations, for which there is a well-developed mathematical apparatus in algebra.

**Keywords:** fuzzy automata with finite memory; method of synthesis of fault-detecting tests; reduction of the problem to an analog with crisp LAs.

**For citation:** Speranskiy, D.V. (2024) Synthesis of detection tests for fuzzy automata with finite memory. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 66. pp. 120–127. doi: 10.17223/19988605/66/12

## Введение

Общепризнано, что часть полученных ранее знаний и их связей с реальным миром не всегда соответствует сложившимся представлениям о них. В ряде ситуаций, например при описании объекта исследования, процесса его функционирования, при формулировке алгоритмов и методов решения ряда проблем оказывается, что отразить некоторые аспекты в них без обращения к использованию некоторых неопределенностей (нечеткостей) принципиально невозможно. В этом случае нужны новые средства и подходы. В статье Л. Заде [1] было введено понятие нечеткого множества, послужившего истоком создания теории нечетких множеств (ТНМ). Л. Заде считает (см. предисловие к книге [2]), что логика человеческих рассуждений основывается не только на классической двужначной или даже многозначной логике, но востребована также логика с нечеткими значениями истинности.

Ныне ТНМ получила всеобщее признание, и исследования в различных направлениях, связанных с разработками, учитывающими феномен нечеткости, ведутся очень активно. Назовем среди них исследования по нечеткой логике, нечеткому логическому выводу, нечетким нейронным сетям, математическим аспектам ТНМ, теории нечетких автоматов и т.д.

Предлагаемая статья связана с автоматной тематикой, и поэтому далее упоминаются только публикации, непосредственно посвященные вопросам, рассматриваемым нами ниже. В [3] описана эволюция понятия нечеткого конечного автомата и приведена библиография работ по различным разновидностям автоматов и их приложениям. В [4] представлена некоторая модель такого автомата и приведены результаты исследований по теории экспериментов с ними, используемые при диагностике цифровых систем. В [5] исследована проблема тестирования четких линейных автоматов (ЛА).

Материал предлагаемой статьи базируется на результатах, полученных в [4–6]. В них объектом исследования являются ЛА [7, 8]. Важным частным их подклассом являются интересующие нас автоматы с конечной памятью (АКП). Оба типа упомянутых автоматов широко используются при диагностике дискретных устройств в качестве их моделей, а также и в других приложениях. Достоинствами ЛА являются простота реализации и развитость соответствующего математического аппарата для их исследования.

Класс АКП позволяет описывать зависимости только между их входными воздействиями и выходными реакциями в прошедшие и настоящие моменты времени без использования состояний. Это свойство использовано, например, при создании конечно-автоматных криптосистем с открытым ключом [9], при генерации исчерпывающих тестов для дискретных устройств, описываемых моделью АКП [10–12] и т.п. В последнее десятилетие эта модель нашла применение при формулировке нечетких правил логического вывода, что дает возможность использования алгоритмов нечеткого управления Мамдани [13], Такаги-Сугено [14] и других авторов [15].

В статье предложен и проиллюстрирован метод синтеза обнаруживающих тестов для нечетких АКП, базирующийся на сведении его к случаю аналога для четких ЛА. Эта редукция позволяет использовать хорошо разработанный математический аппарат алгебры, а также строить короткие по длине тесты (не более чем размерность АКП).

## 1. Модель нечеткого АКП

Вначале напомним понятие классического четкого АКП  $\hat{A}$ , используя факт его принадлежности классу четких ЛА [7, 8]. АКП  $\hat{A}$  имеет  $l$  входов и  $m$  выходов, сигналы на которых есть значения из поля  $GF(p)$ , где  $p$  – простое число. Состояниями АКП являются упорядоченные совокупности содержимого всех элементов его задержек. Число задержек АКП обозначим через  $n$ , которое называют размерностью АКП. Функции переходов и выходов АКП  $\hat{A}$  (как ЛА) над полем  $GF(p)$  задаются уравнениями

$$\bar{s}(t+1) = A\bar{s}(t) + B\bar{u}(t), \quad (1)$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{s}(t) + D\bar{u}(t). \quad (2)$$

Здесь  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{n \times l}$ ,  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ,  $D = [d_{ij}]_{m \times l}$  – характеристические матрицы с элементами из поля  $GF(p)$ . Входной вектор  $\bar{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_l(t)]'$ , выходной вектор  $\bar{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]'$ , вектор состояний  $\bar{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]'$  представляют собой упорядоченные элементы того же поля. Состояние ЛА и его выход при подаче на него последовательности длины  $t+1$  из начального состояния  $\bar{s}(0)$  вычисляются по формулам из [7, 8]:

$$\bar{s}(t+1) = A^{t+1}\bar{s}(0) + A^t B\bar{u}(t) + \dots + AB\bar{u}(t-1) + B\bar{u}(t), \quad (3)$$

$$\bar{y}(t) = CA^t\bar{s}(0) + CA^{t-1}B\bar{u}(t) + \dots + CB\bar{u}(t-1) + D\bar{u}(t). \quad (4)$$

Определим теперь нечеткий АКП. Нечеткость функционирования такого АКП реализуется с использованием матриц (или их комбинаций) в уравнениях (1)–(4). Так, если функционирование нечеткого АКП моделируется с использованием только матрицы  $B$ , то ее элементы запишем в форме  $b_{ij} = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_f$ , где  $b_i$  ( $i = 1, \dots, f$ ) – элементы из поля  $GF(p)$ , над которым задан нечеткий АКП. Такая запись означает, что при функционировании АКП элемент  $b_{ij}$  может оказаться замещенным, например, с равной вероятностью  $1/f$ , любым из элементов  $b_1, b_2, \dots, b_f$ . Очевидно, что при этом форма записи равенств (1)–(4) для нечеткого АКП не изменится.

Описанный механизм возникновения нечеткости функционирования автомата согласуется с ситуацией в реальных устройствах. Так, известно, что комбинация сигналов  $R=1, S=1$  в RS-триггерах является для них запрещенной из-за неопределенности состояния триггера, в котором он может оказаться после ее подачи. Если такая комбинация на входы триггера не поступает, то устройство функционирует как четкое. После подачи запрещенной комбинации это же устройство превращается в нечеткое.

Операции умножения и сложения матриц в формулах (1)–(4) – это общепринятые матричные операции. Для вычисления элементов матриц используются операции, заданные в поле  $GF(p)$ . На основе таких матриц за счет выбора различных альтернатив для замещения нечетких элементов можно получить множество всех вариантов четких матриц, используемых для описания функционирования исходного АКП по всем возможным сценариям.

## 2. Множество допустимых неисправностей и постановка задачи

Замещение всех нечетких элементов матриц четкими превращает нечеткий АКП  $\hat{A}$  в четкий. Далее предполагается, что в матрицах для каждого нечеткого элемента АКП  $\hat{A}$  задано множество альтернатив замещения. Понятно, что «поведение» (функционирование) нечеткого АКП может пойти по любому из сценариев, возникающих при различных комбинациях замещений нечетких, т.е. имеющих альтернативы, элементов. Естественно, что функционирование нечеткого АКП может совпасть с «поведением» любого из четких АКП из множества, возникающего при реализации всевозможных сценариев (комбинаций) замещений.

Исходя из этого, определим множество допустимых неисправностей нечетких АКП. Предполагается, что для всех нечетких элементов характеристических матриц АКП  $\hat{A}$  соответствующие им множества альтернатив не изменяются в процессе тестирования автомата. После выполнения всех возможных замещений во всех нечетких элементах матриц АКП  $\hat{A}$  ему будет соответствовать множество четких АКП, которое обозначим как  $G(\hat{A}) = \{A_1, A_2, \dots, A_q\}$ . Изменение значений одного или нескольких элементов в характеристических матрицах автомата  $\hat{A}$  порождает некоторый автомат  $\hat{A}^f$ , «поведение» которого в общем случае отлично от «поведения» автомата  $\hat{A}$ . Автомат  $\hat{A}^f$  будем интерпретировать как неисправный нечеткий АКП  $\hat{A}$ . Таким образом, множество допустимых неисправностей нечеткого АКП составляют неисправности, изменяющие значения четких элементов матриц заданного нечеткого АКП  $\hat{A}$ .

Теперь сформулируем рассматриваемую нами задачу. Пусть заданы нечеткий АКП  $\hat{A}$  и некоторая его неисправная модификация из множества допустимых. Требуется построить такую входную последовательность (тест), которая эту неисправность обнаруживает.

Обозначим через  $G^*(\hat{A}) = \{A_1^*, A_2^*, \dots, A_q^*\}$  множество четких АКП, полученное из  $G(\hat{A})$  внесением в каждый четкий автомат  $A_i \in G(\hat{A})$  заданной неисправности. При совпадении реакции на тест проверяемого АКП с реакцией на него одного из четких АКП из множества  $G^*(\hat{A})$  естественно считать, что проверяемый АКП содержит искомую неисправность. Если же реакция на тест проверяемого нечеткого АКП не совпадает с реакцией ни одного из четких АКП из множества  $G^*(\hat{A})$ , то проверяемый АКП искомой неисправности не содержит.

### 3. Синтез обнаруживающих тестов

Напомним некоторые понятия и результаты теории ЛА [8], используемые далее для четких АКП в силу их принадлежности классу ЛА.

АКП  $A$  имеет конечную память глубины  $\mu$ , если выход  $\bar{y}(t)$  однозначно определяется входом в этот же момент и предыдущими  $\mu$  входами и  $\mu$  выходами, т.е. для всех  $t$  справедливо соотношение

$$\bar{y}(t) = f(\bar{u}(t), \bar{u}(t-1), \dots, \bar{u}(t-\mu), \bar{y}(t-1), \dots, \bar{y}(t-\mu)).$$

Известно [8], что каждый АКП имеет конечную память глубины  $\mu$ , причем  $\mu \leq n$ , где  $n$  – размерность АКП.

АКП  $A$  называется  $\mu$ -определенным, если его выход  $\bar{y}(t)$  зависит лишь от предыдущих  $\mu$  входов, т.е. справедливо соотношение

$$\bar{y}(t) = f(\bar{u}(t), \bar{u}(t-1), \dots, \bar{u}(t-\mu)).$$

Необходимым и достаточным условием того, что АКП  $\hat{A}$  является  $\mu$ -определенным (синхронизируемым) [8], является выполнение равенства  $CA^\mu = [0]$ , где  $[0]$  – нулевая матрица ( $A^0 = [0]$ , где  $0 \geq \mu$ ).

Метод синтеза обнаруживающих тестов описан для  $\mu$ -определенных нечетких АКП (ЛА) и является обобщением метода для четких ЛА, предложенного в [5]. Он справедлив и для нечетких синхронизируемых АКП, поскольку известно, что они являются одновременно и  $\mu$ -определенными.

Напомним, что АКП называется синхронизируемым, если для него существует входная последовательность, переводящая его в одно и то же конечное состояние независимо от его начального состояния.

Предлагаемый метод предполагает, что неисправный нечеткий АКП и все АКП множества  $G^*(\hat{A}) = \{A_1^*, A_2^*, \dots, A_q^*\}$  являются  $\mu$ -определенными (синхронизируемыми). Это требование не очень ограничительное. Оно, очевидно, всегда выполняется, если неисправности в АКП возникают только за счет изменений четких элементов в матрицах  $B$ ,  $C$ ,  $D$  в формулах (3) и (4). Однако изменения их в матрице  $A$  в (3) АКП не всегда сохраняют его  $\mu$ -определенность (синхронизируемость).

Перейдем теперь к описанию метода синтеза. По условию заданный нечеткий АКП  $\hat{A}$  и неисправный АКП  $\hat{A}^*$  являются  $\mu$ -определенными, но значения  $\mu$  для них не обязательно равны. Положим  $\mu = \max(\mu_1, \mu_2)$ , где  $\mu_1, \mu_2$  – глубины памяти двух названных автоматов, тогда  $C\hat{A}^k = [0]$  для исправного АКП и  $C^*(A^*)^k = [0]$  для неисправного АКП выполняются для всех  $k \geq \mu$ . Подадим на тестируемый автомат входную последовательность  $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(\mu)$ . Независимо от начального состояния тестируемого автомата, учитывая только что приведенные выше равенства, реакции автомата зависят от того, исправен он или содержит заданную неисправность, и будут различными, если последовательность  $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(\mu)$  является тестом. По формуле (4) выпишем реакцию исправного АКП и некоторого неисправного четкого автомата  $A_i^*$  АКП из множества  $G^*(\hat{A}) = \{A_1^*, A_2^*, \dots, A_q^*\}$ :

$$\begin{aligned} \bar{y}(\mu) &= CA^{\mu-1}B\bar{u}(0) + CA^{\mu-2}B\bar{u}(1) + \dots + CB\bar{u}(\mu-1) + D\bar{u}(\mu), \\ \bar{y}^*(\mu) &= C^*(A_i^*)^{\mu-1}B^*\bar{u}(0) + C^*(A_i^*)^{\mu-2}B^*\bar{u}(1) + \dots + C^*B^*\bar{u}(\mu-1) + D^*\bar{u}(\mu) \end{aligned} \quad (5)$$

Неисправность АКП будет обнаружена, если разность двух реакций в (5) будет отлична от нулевого вектора:

$$\bar{y}(\mu) - \bar{y}^*(\mu) = [CA^{\mu-1}B - C^*(A_i^*)^{\mu-1}B^*]\bar{u}(0) + \dots + [D - D^*]\bar{u}(\mu) \neq [0]. \quad (6)$$

В верхней формуле (5) фигурирует матрица  $A$  как матрица исправного АКП, и ее элементы должны иметь конкретные значения из поля  $GF(p)$ , над которым задан исходный АКП. Условимся считать, что все эти значения для исправного АКП после выполнения всех замещений должны быть теми же, что у элемента  $A_1$  из множества  $G(\hat{A})$ . Таким образом, автомат  $A_1$  будет играть роль исправного на первом этапе применения предлагаемого метода синтеза теста. Понятно, что исходный исправный нечеткий АКП обязательно совпадает с одним из АКП из множества  $G(\hat{A})$ , но нам он неизвестен. Поэтому после первого этапа синтеза теста  $T$  ( $A_1$  из множества  $G(\hat{A})$  здесь в роли исправного) предлагаемый ниже метод синтеза необходимо применить для остальных возможных случаев, когда в роли исправного АКП выступают автоматы  $A_2, \dots, A_q$ . Именно по совокупности этих результатов будет делаться вывод об исправности исходного нечеткого АКП или наличии в нем заданной неисправности.

Продолжим теперь изложение метода синтеза теста. Разность (6) будем рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных, которые являются координатами вектора

$$\hat{u} = [u_1(0), \dots, u_l(0), \dots, u_1(\mu), \dots, u_l(\mu)]. \quad (7)$$

На этой основе и будем синтезировать обнаруживающий тест.

Через  $Q$  обозначим матрицу системы (6) с  $m \times (\mu + 1)\ell$  неизвестными, и тогда система (6) примет вид:

$$Q\hat{u} = \hat{y}_i, \quad (8)$$

где правая часть есть некоторый ненулевой вектор. Пусть нам удалось найти такой ненулевой вектор  $\hat{y}_i$  вида (7), что решение неоднородной линейной системы (8) существует. Методы решения таких, а также и однородных систем, известны из алгебры [16]. Понятно, что это решение дает входную последовательность  $T_i$  для четкого автомата АКП  $A_i^*$ , которая обнаруживает заданную неисправность. Если это имеет место хотя бы для одного четкого автомата из множества  $G^*(\hat{A}) = \{A_1^*, A_2^*, \dots, A_q^*\}$ , то по принятому в разделе 2 статьи соглашению проверяемый нечеткий автомат считается содержащим заданную неисправность. Кажется очевидным, что это вполне соответствует здравому смыслу.

Чтобы сделать вывод об отсутствии заданной неисправности в проверяемом нечетком АКП, для всех возможных ненулевых правых частей в (8) (их число конечно) необходимо убедиться в отсутствии у них решений систем вида (8) для всех автоматов (кроме  $A_i^*$ ) из множества  $G^*(\hat{A})$ . Таким образом, для обнаружения заданной неисправности проверяемого нечеткого АКП или ее отсутствия в общем случае потребуется тест  $T = T_1, T_2, \dots, T_q$ , где  $T_i$  строится указанным выше методом.

Найти подходящие ненулевые правые части систем (8) можно перебором из общего числа  $p^{(\mu+1)l}$  возможных вариантов значений в поле  $GF(p)$  либо способом, состоящим в следующем. Пусть  $Y$  – множество всех векторов вида (7) с числом координат  $(\mu+1)l$ . Вместо различных неоднородных систем (8) теперь рассмотрим одну однородную систему  $Q\hat{u}=[0]$ . Пусть  $Y_0$  есть множество решений этой системы, найденное алгебраическим методом [16]. Очевидно, что  $Y \setminus Y_0$  есть множество ненулевых векторов, которые могут использоваться в качестве правых частей систем (8). Поэтому «подходящие» правые части можно выбирать из двух представленных вариантов множеств, описанных выше. Они могут иметь разную мощность и потому естествен выбор из них за множеством с меньшим числом элементов. Кроме них возможен какой-либо эвристический метод поиска, предложенный с учетом особенностей полученной системы (8).

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий описанный метод синтеза обнаруживающего теста. Пусть нечеткий АКП над полем  $GF(2)$  задан следующими характеристическими матрицами ( $n=4, l=2, m=2$ ):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{32} & 0 & 0 \\ 1 & a_{42} & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Элементы  $a_{32}, a_{42}$  в матрице  $A$  являются нечеткими, и каждый из них замещается значением из альтернативного множества  $\{0, 1\}$ . Всего имеется 4 варианта замещения пары  $a_{32}, a_{42}$ , и эти переменные получают соответственно значения  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ . Обозначим получаемые после таких замещений главные матрицы, а также содержащие их четкие АКП, как  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Из контекста будет понятно, о чем идет речь.

Пусть заданный нечеткий АКП имеет неисправность, полученную в результате замены четкого элемента  $a_{11}=0$  в главной матрице  $A$  на  $a_{11}^*=1$ . Обозначим матрицу неисправного автомата как  $A^*$ . Внесем эту неисправность в матрицы четких АКП  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и будем обозначать их как  $A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*$ .

Вычисления показывают, что  $C(A^*)^2=[0]$  и  $C(A_i^*)^2=[0]$ , где  $i=1, 2, 3, 4$ . Это означает, что неисправный исходный АКП и все неисправные четкие АКП, полученные после замещений и внесения в них неисправности, являются  $\mu$ -определенными ( $\mu=2$ ). Таким образом, требования к исправному нечеткому АКП  $\hat{A}$  и всем автоматам из множества  $G^*(\hat{A})$  выполнены.

По формуле (4) с учетом  $\mu$ -определенности получаем

$$\bar{y}(2) = CAB\bar{u}(0) + CB\bar{u}(1) + D\bar{u}(2),$$

$$\bar{y}^*(2) = CA_1^*B\bar{u}(0) + CB\bar{u}(1) + D\bar{u}(2). \quad (9)$$

В поле  $GF(2)$  используется две операции, знак «+» означает сложение / вычитание – операция XOR (исключающее ИЛИ), вторая – умножение / деление (операция AND (И)) – знак « $\cdot$ » либо его отсутствие.

Выполнив сложение (вычитание) правых частей в (9), получим выражение

$$\bar{y}(2) + \bar{y}^*(2) = (CAB + CA_1^*B)\bar{u}(0).$$

Путем вычислений можно убедиться, что исправный нечеткий АКП (его роль выполняет автомат  $A_i \in G(\hat{A})$ ) на входную последовательность  $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \bar{u}(2)$  дает реакцию

$$\bar{y}(2) = \begin{bmatrix} u_1(0) + u_2(0) + u_1(2) + u_2(2) \\ u_1(2) + u_2(2) \end{bmatrix}.$$

Вычисления также показывают, что неисправные четкие автоматы  $A_2^*, A_3^*, A_4^*$  на ту же последовательность дают одинаковые реакции

$$\bar{y}^*(2) = \begin{bmatrix} u_1(2) + u_2(2) \\ u_1(2) + u_2(2) \end{bmatrix}.$$

Выполнив операцию сложения / вычитание этих векторов получим выражение

$$\bar{y}(2) + \bar{y}^*(2) = \begin{bmatrix} u_1(0) + u_2(0) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для обнаружения заданной неисправности правая часть в последнем равенстве должна равняться ненулевому вектору  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . В координатах это означает, что должно выполняться равенство  $u_1(0) + u_2(0) = 1$ , что требует выполнения неравенства  $u_1(0) \neq u_2(0)$ .

Заметим, что в последнем равенстве отсутствуют координаты векторов  $\bar{u}(1), \bar{u}(2)$ , т.е. они являются фиктивными переменными (могут принимать любые значения из  $GF(2)$ ). Таким образом, тестами являются векторы  $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \bar{u}(2)$ , у которых  $u_1(0) \neq u_2(0)$ , а значения координат других векторов теста могут быть произвольными.

В рассмотренном простом примере поиск теста не потребовал большого объема вычислений из-за специфики полученной неоднородной системы (8) и равенства реакций на тест всех неисправных четких АКП из множества  $G^*(\hat{A})$ .

### Заключение

При обобщении метода синтеза тестов из [5], обнаруживающих заданные неисправности на случай нечетких АКП, возникает ряд трудностей. В [5] в формулах (1)–(6) для четкого ЛА фигурирует начальное состояние автоматов, которое при рассмотрении нечеткого АКП неизвестно. При формировании в методе синтеза тестов разности между реакциями на искомый тест и его неисправных модификаций необходимо использовать понятия исправного нечеткого АКП и соответствующих неисправных модификаций. Для четкого ЛА они задаются однозначно, тогда как для нечетких АКП однозначно определить их невозможно из-за наличия нечетких элементов в их характеристических матрицах. По этой причине приходится оперировать с различными вариантами использования их в качестве исправного и неисправных АКП. Число таких вариантов возрастает с ростом числа нечетких элементов в матрицах, задающих АКП. Тем не менее идею метода синтеза из [5] реализовать оказывается возможно, хотя вычислительная сложность метода при этом существенно возрастает.

### Список источников

1. Zadeh L. Fuzzy sets // Inf. Control .1965. V. 8. P. 338–353.
2. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М. : Радио и связь, 1982. 432 с.
3. Dubots D., Prade H. Fuzzy sets and systems. New York : Academy Press, 1980. 393 p.
4. Сперанский Д.В. Эксперименты с нечеткими автоматами // Автоматика и телемеханика. 2015. № 2. С. 107–124.
5. Сперанский Д.В. О тестировании линейных автоматов // Автоматика и телемеханика. 2000. № 5. С. 157–165.
6. Сперанский Д.В. Синхронизация линейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. 1996. № 5. С. 141–149.
7. Gill A. Introduction to the theory of finite-state machine. Mc Graw-Hill company, 1962. 207 p.
8. Gill A. Linear sequential circuits. Analysis, synthesis and applications. Mc Graw-Hill company, 1967. 196 p.
9. Dai Z., Ye D.F., Lam K.Y. Weak invertability of finite automata and criptoanalysis on FAPKC // LNCS. 1998. V. 1514. P. 227–241.
10. Аксенова Г.П., Халчев В.Ф. Генерация исчерпывающего теста для автоматов с конечной памятью, I // Автоматика и телемеханика. 1997. № 4. С. 213–226.
11. Аксенова Г.П., Халчев В.Ф. Генерация исчерпывающего теста для автоматов с конечной памятью, II // Автоматика и телемеханика. 1997. № 5. С. 142–152.
12. Аксенова Г.П., Халчев В.Ф. Генератор исчерпывающего теста на основе двоичного счетчика для одного вида синхронного автомата с памятью // Автоматика и телемеханика. 2000. № 10. С. 164–170.
13. Mamdani E.H. Application of fазze algorithms for control of a simple dinamic plant // Proc. IEEE. 1974. P. 121–159.

14. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and application to modelling and control // IEEE on SMC. 1985. V. 15. P. 116–132.
15. Марценюк М.А. Матричное представление нечеткой логики // Нечеткие системы и мягкие вычисления. Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягкой вычислений. 2007. Т. 2, № 3. С. 7–35.
16. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. : Лань, 2022. 432 с.

### References

1. Zadeh, L. (1965) Fuzzy sets. *Information Control*. 8. pp. 338–353.
2. Kofman, A. (1982) *Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv* [Introduction to Fuzzy Sets Theory]. Moscow: Radio i svyaz'.
3. Dubots, D. & Prade, H. (1980) *Fuzzy sets and systems*. New York: Academy Press.
4. Speranskiy, D.V. (2015) Eksperimenty s nechetkimi avtomatami [Experiments with fuzzy finite state machines]. *Automation and Remote Control*. 76. pp. 278–291. DOI: 10.1134/S0005117915020071
5. Speranskiy, D.V. (2000) O testirovanii lineynykh avtomatov [On testing linear automata]. *Automation and Remote Control*. 5. pp. 157–165.
6. Speranskiy, D.V. (1996) Synchronization of linear sequence machines. *Automation and Remote Control*. 5. pp. 141–149.
7. Gill, A. (1962) *Introduction to the Theory of Finite-State Machine*. Mc Graw-Hill Company.
8. Gill, A. (1967) *Linear Sequential Circuits. Analysis, Synthesis and Applications*. Mc Graw-Hill Company.
9. Dai, Z., Ye, D.F. & Lam, K.Y. (1998) Weak invertibility of finite automata and cryptoanalysis on FAPKC. *LNCS*. 1514. pp. 227–241.
10. Aksenova, G.P. & Khalchev, V.F. (1997) Generatsiya ischerpyvayushchego testa dlya avtomatov s konechnoy pamyat'yu, I [Generation of exhaustive test for automata with finite memory. I]. *Automation and Remote Control*. 4. pp. 213–226.
11. Aksenova, G.P. & Khalchev, V.F. (1997) Generatsiya ischerpyvayushchego testa dlya avtomatov s konechnoy pamyat'yu, II [Generation of exhaustive test for automata with finite memory. II]. *Automation and Remote Control*. 5. pp. 142–152.
12. Aksenova, G.P. & Khalchev, V.F. (2000) Generator ischerpyvayushchego testa na osnove dvoichnogo schetchika dlya odnogo vida sinkhronnogo avtomata s pamyat'yu [Generator of exhaustive test based on binary counter for one kind of synchronous automaton with memory]. *Automation and Remote Control*. 10. pp. 164–170.
13. Mamdani, E.H. (1974) *Application of fuzzy algorithms for control of a simple dynamic plant*. Vol. 121(12). pp. 1585–1588. DOI: 10.1049/piee.1974.0328
14. Takagi, T. & Sugeno, M. (1985) Fuzzy identification of systems and application to modelling and control. *IEEE on SMC*. 15. pp. 116–132.
15. Marsteniuk, M.A. (2007) Matrichnoe predstavlenie nechetkoy logiki [Matrix representation of fuzzy logic]. *Nechetkie sistemy i myagkie vychisleniya*. 2(3). pp. 7–35.
16. Kurosh, A.G. (2022) *Kurs vysshey algebry* [Higher Algebra]. Moscow: Lan.

### Информация об авторе:

Сперанский Дмитрий Васильевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры систем управления транспортной инфраструктурой Российского университета транспорта (МИИТ) (Москва, Россия). E-mail: speranskiy.dv@gmail.com

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

### Information about the author:

Speranskiy Dmitriy V. (Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Transportation Infrastructure Management Systems of Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russian Federation). E-mail: speranskiy.dv@gmail.com

The author declares no conflicts of interests.

Received 25.10.2023; accepted for publication 05.03.2024

Поступила в редакцию 25.10.2023; принята к публикации 05.03.2024

**Научный журнал**

**ВЕСТНИК  
ТОМСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**УПРАВЛЕНИЕ,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА  
И ИНФОРМАТИКА**

**TOMSK STATE UNIVERSITY  
JOURNAL OF CONTROL AND COMPUTER SCIENCE**

**2024. № 66**

Редактор Е.Г. Шумская  
Оригинал-макет Е.Г. Шумской  
Редакторы-переводчики: Г.М. Кошкин; В.Н. Горенинцева  
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 25.03.2024 г. Формат 60х84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 14,9.  
Тираж 250 экз. Заказ № 5832. Цена свободная.

Дата выхода в свет 01.04.2024 г.

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании  
Издательства Томского государственного университета  
634050, г. Томск, Ленина, 36  
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75  
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: [rio.tsu@mail.ru](mailto:rio.tsu@mail.ru)