

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2024

№ 87

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

**РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА
«ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»**

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>
Контактный тел./факс: (3822) 529-740
E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бадмаев О.О. О свойствах пространств $C_p(X)$, близких к свойству Фреше–Урысона	5
Vuong B. Reidemeister torsion of link complements in a 3-torus	11
Дуллеев А.М. Минимизация гладкой функции на границе внешнего обобщенного сегмента сферы	22
Kozlovskaya T.A. Multi-groups	34

МЕХАНИКА

Астапов Н.С., Кургузов В.Д. Моделирование упругопластического разрушения компактного образца	44
Бородин В.И., Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В., Тимченко С.В. Состояние фуллерена C_{60} в двухкомпонентной смеси газов	59
Бутов В.Г., Афонин А.Г., Солоненко В.А., Кулешов А.А., Ящук А.А. Исследование характеристик импульсного МГД-генератора на комбинированном пиротехническом топливе	73
Демин В.А., Костыря А.В. Численное моделирование осаждения твердых частиц в установке погружного горения	88
Енков М.О., Горбенко Т.И., Горбенко М.В. Термодинамическое моделирование высокоэнергетических термитных систем на основе йодата кальция	106
Радченко П.А., Радченко А.В., Батуев С.П. Численное исследование высокоскоростного взаимодействия вращающихся ударников с различной формой головной части с преградой конечной толщины	120
Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции	135
Соломаха А.Е., Шваб А.В. Моделирование аэродинамики закрученного турбулентного потока в воздушно-центробежном классификаторе	150
Томилини А.К., Коноваленко Ив.С., Коноваленко Иг.С. Нелинейные колебания токонесущей струны в магнитном поле	163

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ

Арсланов М.М., Зайцев М.В., Фомин А.А., Качалов В.И., Сафонов В.Ф., Крылов П.А., Тимошенко Е.А., Чехлов А.Р. Аскар Аканович Туганбаев (к 70-летию со дня рождения)	175
---	-----

CONTENTS

MATHEMATICS

Badmaev O.O. About the properties of spaces $C_p(X)$ close to Frechet–Urysohn property	5
Vuong B. Reidemeister torsion of link complements in a 3-torus	11
Dulliev A.M. Minimization of a Smooth Function on the Boundary of an Outer Generalized Spherical Segment	22
Kozlovskaya T.A. Multi-groups	34

MECHANICS

Astapov N.S., Kurguzov V.D. Modeling of elasto-plastic fracture of a compact specimen	44
Borodin V.A., Bubenchikov M.A., Bubenchikov A.M., Mamontov D.V., Timchenko S.V. State of fullerene C_{60} in a two-component gas mixture	59
Butov V.G., Afonin A.G., Solonenko V.A., Kuleshov A.A., Yashchuk A.A. A study of characteristics of a pulsed MHD generator running on a combined pyrotechnic fuel	73
Demin V.A., Kostyrya A.V. Numerical modeling of sedimentation of solid particles in a submerged combustion apparatus	88
Enkov M.O., Gorbenko T.I., Gorbenko M.V. Thermodynamic modeling of high-energy thermite systems based on calcium iodate	106
Radchenko P.A., Radchenko A.V., Batuev S.P. A numerical study of the high-velocity interaction of rotating strikers having different head shapes with a barrier of finite thickness	120
Savel'kaev S.V. Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium with allowance for inertial forces	135
Solomakha A.E., Shvab A.V. Simulation of aerodynamics of a swirling turbulent flow in a centrifugal air classifier	150
Tomilin A.K., Konovalenko I.S., Konovalenko Ig.S. Nonlinear oscillations of a current-carrying string in a magnetic field	163

MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALIES

Arslanov M.M., Zaitsev M.V., Fomin A.A., Kachalov V.I., Safonov V.F., Krylov P.A., Timoshenko E.A., Chekhlov A.R. Askar Akanovich Tuganbaev (to the 70th anniversary of his birth)	175
---	-----

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 515.1

doi: 10.17223/19988621/87/1

MSC: 54D20

**О свойствах пространств $C_p(X)$, близких к свойству
Фреше–Урысона****Олег Олегович Бадмаев***Томский государственный университет, Томск, Россия, badmaev1995@bk.ru*

Аннотация. По аналогии со свойством Фреше–Урысона введены в рассмотрение свойства n -Фреше–Урысона и ω -Фреше–Урысона пространств $C_p(X)$. Изучена связь этих свойств со свойствами γ'_n и γ'_ω пространства X . В частности, установлено, что свойство γ'_ω пространства X равносильно свойству ω -Фреше–Урысона пространства $C_p(X)$, а также что из свойства n -Фреше–Урысона следует γ'_n .

Ключевые слова: ω -покрытие, γ -свойство, свойство Герлича–Надя, свойство Фреше–Урысона, γ'_k -свойство, свойство Линделефа, свойство ω -Фреше–Урысона, свойство n -Фреше–Урысона

Благодарности: Автор благодарен А.В. Осипову за интерес к этой работе и полезные обсуждения.

Для цитирования: Бадмаев О.О. О свойствах пространств $C_p(X)$, близких к свойству Фреше–Урысона // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 5–10. doi: 10.17223/19988621/87/1

Original article

**About the properties of spaces $C_p(X)$ close
to Frechet–Urysohn property****Oleg O. Badmaev***Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, badmaev1995@bk.ru*

Abstract. This paper deals with relationships between topological properties of Tykhonoff spaces X and properties of their functional spaces $C_p(X)$. Tykhonoff spaces X are supposed to have the property γ'_k or γ'_ω , which are defined in the terms of k -saturated

(respectively, saturated) ω -covers. We define for an arbitrary integer n the n -Fréchet–Urysohn property and ω -Fréchet–Urysohn property of the space $C_p(X)$ in such a manner that 1-Fréchet–Urysohn is the known Fréchet–Urysohn property, n -Fréchet–Urysohn implies both $(n+1)$ -Fréchet–Urysohn, and ω -Fréchet–Urysohn property. We prove that the γ'_ω -property of X is equivalent to ω -Fréchet–Urysohn property of $C_p(X)$ and, consequently, X is Lindelöf if and only if $C_p(X)$ is ω -Fréchet–Urysohn. We also prove that for each integer n the property γ'_n of X follows from the n -Fréchet–Urysohn property of $C_p(X)$, as well as the inverse slightly weaker theorem.

Keywords: ω -cover, γ -property, Gerlits–Nagy property, Fréchet Urysohn property, γ'_k -property, Lindelöf property, ω -Fréchet–Urysohn, n -Fréchet–Urysohn

Acknowledgments: The author is grateful to Alexander V. Osipov for his interest in this work and useful discussions.

For citation: Badmaev, O.O. (2024) About the properties of spaces $C_p(X)$ close to Fréchet–Urysohn property. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 5–10. doi: 10.17223/19988621/87/1

Введение

В работе [1] для тихоновских пространств введены в рассмотрение топологические свойства γ'_n ($n = 1, 2, \dots$) и γ'_ω , последовательно (с ростом номера n) ослабляющие классическое γ -свойство. В данной статье устанавливается связь свойств γ'_n , γ'_ω пространства X с некоторыми свойствами пространства непрерывных функций $C_p(X)$, аналогичными свойству Фреше–Урысона.

Все топологические пространства предполагаются тихоновскими. Все рассматриваемые покрытия нетривиальны, т.е. не содержат всё топологическое пространство как элемент. Запись $n \in \omega$ означает, что n – натуральное число.

Следующие два понятия широко известны (см. напр.: [2, Гл. II, § 3])

Определение 1. Скажем, что последовательность подмножеств $\eta = \{A_n\}_{n \in \omega}$ пространства X сходится к X (пишем $A_n \rightarrow X$ или $\eta \rightarrow X$), если произвольная точка $x \in X$ принадлежит всем членам последовательности η , начиная с некоторого (зависящего от x) номера.

Определение 2. Семейство η подмножеств пространства X называется ω -покрытием этого пространства, если для каждого конечного множества $K \subset X$ существует $U \in \eta$ такое, что $K \subset U$.

Приведем также для удобства читателя определения понятий, введенных в [1] и активно используемых в дальнейшем.

Определение 3. Пусть η – произвольное семейство открытых подмножеств пространства X . Скажем, что η' является n -насыщенным семейством для η , если $\eta' = \{\bigcup_{i \leq m} U_i : U_i \in \eta, m \leq n\}$. Скажем, что η' является насыщенным семейством для η , если $\eta' = \{\bigcup_{i \leq m} U_i : U_i \in \eta, m \in \omega\}$.

Очевидно, что если η – ω -покрытие пространства X , то его n -насыщенное (насыщенное) семейство η' также является ω -покрытием X для любого $n \in \omega$.

Определение 5. Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ'_n , если для любого открытого ω -покрытия η пространств X , в его n -насыщенном семействе η' найдется последовательность $\zeta = \{B_k\}_{k \in \omega}$ такая, что $B_k \rightarrow X$. При этом само пространство X будем называть γ'_n -пространством.

Определение 6. Будем говорить, что в топологическом пространстве X выполнено свойство γ'_ω , если для любого открытого ω -покрытия η пространства X , в его насыщенном семействе η' найдется последовательность $\zeta = \{B_k\}_{k \in \omega}$ такая, что $B_k \rightarrow X$. При этом само пространство X будем называть γ'_ω -пространством.

Обратимся теперь к пространствам непрерывных функций.

Определение 7. Скажем, что в пространстве $C_p(X)$ выполнено свойство ω -Фреше–Урысона, если для любого подмножества A из $C_p(X)$ и для любой функции $f \in \bar{A}$ существует последовательность $A' = \{A_k\}_{k \in \omega}$, состоящая из конечных подмножеств в A такая, что для любой окрестности $W = W(f, K, \varepsilon) \subset C_p(X)$ существует такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n \geq n_0$ и для каждой точки $x \in K$ найдется функция $g_x \in A_n$ такая, что $|g_x(x) - f(x)| < \varepsilon$.

В [1] получена следующая характеристика свойства Линделёфа пространства X :

Теорема 8 [1]. Пространство X линделёфово тогда и только тогда, когда X является γ'_ω -пространством.

В то же время А.В. Осипов охарактеризовал свойство Линделёфа пространства X некоторым свойством пространства $C_p(X)$. Напомним, что множество $A \subseteq C_p(X)$ называется n -плотным в $C_p(X)$, если $A \cap W \neq \emptyset$ для каждой стандартной окрестности $W = W(f, x_1, \dots, x_m, \varepsilon)$ в $C_p(X)$, где $m \leq n$.

Теорема 9 [3]. Пространство X линделёфово тогда и только тогда, когда каждое 1-плотное множество в $C_p(X)$ содержит счетное 1-плотное подмножество.

Установим теперь один из основных результатов данной работы.

Теорема 10. Пусть X является тихоновским пространством, тогда следующие условия эквивалентны:

(1) в пространстве X выполнено свойство γ'_ω ;

(2) в пространстве $C_p(X)$ выполнено свойство ω -Фреше–Урысона.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1) Пусть η является ω -покрытием пространства X . Через η' обозначим насыщенное семейство для η . Для каждого $U \in \eta'$ построим

семейство $A_U = \bigcup_{i=1}^k A_{W_i}$, где $A_{W_i} = \{f \in C_p(X) \mid \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \subset W_i\}$, $U = W_1 \cup \dots \cup W_k$

и $W_i \in \eta$ для всех $i = \overline{1, k}$. Положим $A = \cup \{A_U \mid U \in \eta'\}$, тогда $f_0 \in \bar{A}$, где $f_0 \equiv 1$.

Так как выполнено условие (2), то существует последовательность $A' = (A_i)_{i \in \omega}$ конечных подмножеств $A_i \subset C_p(X)$, такая как в определении 7. Для каждого $k \in \omega$

и каждого $f \in A_k$ зафиксируем $W_f \in \eta$ такое, что $\overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \subset W_f$, и положим $U_k = \cup \{W_f \mid f \in A_k\}$. Ясно, что $U_k \in \eta'$.

Покажем, что последовательность $U = \{U_k\}_{k \in \omega}$ является искомой. Пусть $x \in X$, тогда существует такое $n \in \omega$, что $A_k \cap W(f_0, x, 1) \neq \emptyset$ для всех $k \geq n$. Это означает, что существует функция $f \in A_k$, для которой $f(x) > 0$, следовательно, $x \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset W_f \subset U_k$. Поэтому $x \in U_k$ для всех $k \geq n$, что означает $U_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Рассмотрим произвольное подмножество $A \subset C_p(X)$ с предельной функцией f_0 . Обозначим через η_n семейство прообразов U_g интервала $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ относительно функций вида $|f_0 - g|$, где $g \in A$. Покажем, что η_n является ω -покрытием пространства X . Пусть K – произвольное конечное подмножество в X . Так как $f_0 \in \bar{A}$, то существует функция $g \in A \cap W(f_0, K, \frac{1}{n})$, а значит $|f_0 - g|(x) < \frac{1}{n}$ при $x \in K$. Таким образом, $K \subset (|f_0 - g|)^{-1}(I_n)$.

Для каждого $n \in \omega$ обозначим η'_n насыщенное семейство для η_n . Так как в пространстве X выполнено свойство γ'_ω , то для каждого $n \in \omega$ существует последовательность $\zeta_n \subset \eta'_n$ такая, что $\zeta_n = (W_n^j)_{j \in \omega}$ и $\zeta_n \rightarrow X$. Пусть $H = (H_n)_{n \in \omega}$, где $H_n = \bigcup_{i+j=n+1} W_i^j$. Рассмотрим $H_1 = W_1^1 = U_{g_1} \cup \dots \cup U_{g_k}$, положим $A_1 = (g_1, \dots, g_k)$.

Аналогично рассмотрим множество

$$H_2 = W_2^1 \cup W_1^2 = (U_{g_1} \cup \dots \cup U_{g_k}) \cup (U_{f_1} \cup \dots \cup U_{f_h})$$

и положим $A_2 = (g_1, \dots, g_k, f_1, \dots, f_h)$. Продолжая процесс построения множеств A_n по множествам H_n , получим последовательность $A' = (A_n)_{n \in \omega}$.

Покажем, что последовательность A' искомая. Рассмотрим произвольную окрестность $W = W(f_0, K, \varepsilon)$ функции f_0 , и пусть $x \in K$. Выберем $n \in \omega$ так, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Для последовательности ζ_n существует $k' \in \omega$ такое, что для всех $k \geq k'$ выполнено $x \in W_n^k$. Тогда при всех $l \geq k' + n + 1$ имеем $x \in H_l$. Следовательно, существует $f \in A_l$ такая, что $|f_0(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. $\square$

Таким образом, из теорем 8 и 10 мы получаем еще одну характеризацию свойства Линделёфа в дополнение к теореме 9.

Теорема 11. Пусть X – тихоновское пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) пространство X линделёфово;
- (2) в пространстве $C_p(X)$ выполнено свойство ω -Фреше–Урысона.

Комбинируя теоремы 9 и 10, получаем:

Следствие 12. Пусть X – тихоновское пространство, тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) в пространстве X выполнено свойство γ'_ω ;
- (2) каждое 1-плотное множество в $C_p(X)$ содержит счетное 1-плотное подмножество.

Далее мы рассматриваем свойства γ'_n и их связи со свойствами пространства $C_p(X)$.

Определение 13. Скажем, что в пространстве $C_p(X)$ выполнено свойство n -Фреше–Урысона, если для любого подмножества A из $C_p(X)$ и для любой функции $f \in \bar{A}$ существует последовательность $A' = (A_m)_{m \in \omega}$ состоящая из конечных подмножеств A мощности не более n такая, что для любой окрестности $W = W(f, K, \varepsilon) \subset C_p(X)$ существует такое натуральное число $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что для всех $k \geq k_0$ и для каждой точки $x \in K$ найдется функция $g_x \in A_k$, такая что $|g_x(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Определение 14. Скажем, что в пространстве X выполнено свойство γ'_{sn} , если для любой последовательности $\{\eta_k\}_{k \in \omega}$, состоящей из ω -покрытий пространства X , можно для всех $k \in \omega$ так выбрать $U_k \in \eta'_k$, где η'_k – n -насыщенное семейство для η_k , что $U_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X$.

Несложно увидеть, что из свойства γ'_{sn} следует свойство γ'_n для всех $n \in \omega$.

Следующие утверждения напрямую вытекают из определений 7 и 13.

Предложение 15. (а) Свойство 1-Фреше–Урысона эквивалентно свойству Фреше–Урысона;

(б) Для любого $n \in \omega$ из свойства n -Фреше–Урысона следует свойство $(n + 1)$ -Фреше–Урысона.

(в) Для любого $n \in \omega$ из свойства n -Фреше–Урысона следует свойство ω -Фреше–Урысона.

Ниже устанавливается, как свойства n -Фреше–Урысона связаны со свойствами γ'_n и γ'_{sn} .

Теорема 16. Пусть X – тихоновское пространство, тогда:

(1) если в $C_p(X)$ выполнено свойство n -Фреше–Урысона, то в X выполнено свойство γ'_n ;

(2) если в X выполнено свойство γ'_{sn} , то в $C_p(X)$ выполнено свойство n -Фреше–Урысона.

Доказательство. (2) Рассмотрим произвольное подмножество A из $C_p(X)$ с предельной функцией f_0 . Обозначим через η_k семейство прообразов U_g интервала $I_k = (-1/k, 1/k)$ относительно функций вида $|f_0 - g|$, где $g \in A$. Для каждого $k \in \omega$ обозначим η'_k n -насыщенное семейство для η_k . По условию для каждого $k \in \omega$ существует $U_k = U_{g_1} \cup \dots \cup U_{g_n} \in \eta'_k$ такое, что последовательность $\xi = (U_k)_{k \in \omega}$ сходится к X . Положим $A_k = \{g_1, \dots, g_n\}$.

Покажем, что последовательность $A' = (A_k)_{k \in \omega}$ является искомой. Зафиксируем произвольную окрестность $W = W(f_0, x, \varepsilon)$ функции f_0 и точку $x \in K$. Так как $U_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X$, то существует $k_0 \in \omega$ такое, что для всех $k \geq k_0$ выполнено $K \subset U_k = W_{g_1^k} \cup \dots \cup W_{g_n^k}$ и $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Значит, для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$ имеем $f_0(x) - g_j^k(x) \in I_k$, т.е. функция g_n^k – искомая.

(1) Данная импликация доказывается аналогично пункту (2) $\Rightarrow$ (1) теоремы 10. $\square$

Известно, что свойства γ'_{s1} и γ'_1 эквивалентны [2. Теорема II.3.2], поэтому в связи с теоремой 16 представляет интерес следующий вопрос:

Вопрос 17. Верно ли, что из свойства γ'_n следует свойство γ'_{sn} при $n > 1$?

Еще один важный вопрос поставлен А.В. Осиповым:

Вопрос 18. Совпадают ли свойства Гуревича и γ'_n при $n > 1$?

Список источников

1. Бадмаев О.О. Об аддитивной модификации γ -свойства // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 5–11. doi: 10.17223/19988621/74/1
2. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М. : Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
3. Osipov A.V. Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram // Topology and its Applications. 2020. V. 278. Art. 107232. doi: 10.1016/j.topol.2020.107232

References

1. Badmaev O.O. (2021) Ob additivnoy modifikatsii γ -svoystva [On additive modification of the γ -property]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 5–11. DOI: 10.17223/19988621.
2. Arkhangel'skij A.V. (1992) *Topological function spaces. Mathematics and its applications, Soviet Series*, vol. 78. Dordrecht: Kluwer Academic.
3. Osipov A.V. (2020) Projective versions of the properties in the Scheepers Diagram, *Topology and its Applications*. 278. 107232. DOI: 10.1016/j.topol.2020.107232.

Сведения об авторе:

Бадмаев Олег Олегович – аспирант кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: badmaev1995@bk.ru

Information about the author:

Badmaev Oleg O. (PhD Student of the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: badmaev1995@bk.ru

Статья поступила в редакцию 21.07.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 21.07.2023; accepted for publication 12.02.2024

Original article

UDC 515.162

doi: 10.17223/19988621/87/2

MSC: 57M27, 57M05

Reidemeister torsion of link complements in a 3-torus

Bao Vuong*Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, vuonghuubao@live.com*

Abstract. We prove that the Reidemeister torsion and the twisted Alexander polynomial of the complement of a link in a three-dimensional torus are the same.

Keywords: knots, links, three-dimensional torus, twisted Alexander polynomial, Reidemeister torsion, CW-complex, Fox calculus

Acknowledgments: I am grateful for everyone, who is close to me and gave me support all the way to the end of this work. I am also thankful to anonymous referee for useful remarks, comments and proof reading. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2023-943).

For citation: Vuong, B. (2024) Reidemeister torsion of link complements in a 3-torus. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 11–21. doi: 10.17223/19988621/87/2

Научная статья

Кручение Рейдемейстера для дополнения зацепления в трехмерном торе

Бао Хыу Вьонг*Томский государственный университет, Томск, Россия, vuonghuubao@live.com*

Аннотация. Классическая теория узлов, изучая задачи вложений окружности в трехмерную сферу, была расширена до более широкой теории. Например, теорию виртуальных узлов можно рассматривать как теорию узлов на утолщенных замкнутых ориентированных поверхностях. Теория узлов в других трехмерных многообразиях, таких как проективное и линзовое пространство, воплотилась в жизнь в последнее десятилетие. Автор исследовал диаграммный подход к изучению узлов в трехмерном торе. В работе предложен алгоритм вычисления скрученных полиномов Александра узлов и зацеплений в трехмерном торе. Доказано, что кручение Рейдемейстера дополнения к зацеплению и его скрученный полином Александра равны. Связь между полиномом Александра узла и инвариантом кручения Рейдемейстера, Франца и де Рама для дополнения узла была впервые замечена Милнором. Как

следствие этого соотношения Милнор дал еще одно доказательство симметрии полинома Александра. Милнор применил этот результат к теории узлов, рассматривая случай классического узла в трехмерной сфере, т.е. дополнение узла имеет гомотопию окружности. Оказывается, существуют аналогичные отношения между кручением Рейдемейстера и скрученным полиномом Александра для случая дополнения узла в других пространствах, отличных от трехмерной сферы, когда первая группа гомотопии содержит также кручение. Технология получения явных отношений была создана Милнором, используя теорию простых гомотопий для CW -комплексов и свободное дифференциальное исчисление Фокса. Они допускают клеточную структуру CW для узла, связанную с данным представлением фундаментальной группы, так что граничные операторы получаются посредством свободных производных Фокса. Таким образом, показано, что этот метод имеет эффект также для случая узлов и зацеплений в трехмерном торе.

Ключевые слова: узлы, зацепления, трехмерный тор, скрученный полином Александра, кручение Рейдемейстера, CW -комплекс, исчисление Фокса

Благодарности: Я благодарен анонимному рецензенту за полезные замечания, комментарии и корректуру. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (договор № 075-02-2023-943).

Для цитирования: Вьонг Б.Х. Кручение Рейдемейстера для дополнения зацепления в трехмерном торе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 11–21. doi: 10.17223/19988621/87/2

1. Introduction

Recently, the classical knot theory has been extended to a wider theory, such as the virtual knot theory that can be considered as the theory of knots in thickened closed oriented surfaces. The theory of knots in other 3-manifolds, such as the projective space and the lens space, had come to life in the last decade. In a forthcoming paper [1] the author investigated the diagrammatic approach to the study of knots in a three-dimensional torus. In that work, I establish an algorithm for computing twisted Alexander polynomials of knots and links in a three-dimensional torus. In this paper, I prove that the Reidemeister torsion of the link complement and its twisted Alexander polynomial are equal.

The relation between the Alexander polynomial of a knot and the torsion invariant of Reidemeister, Franz, and de Rham for knot complement was first noticed by Milnor (see [2]). As a consequence of the relation, Milnor gave another proof for symmetry of the Alexander polynomial [3]. Milnor applied the result to the knot theory, considering the case of classical knot i.e., the knot complement has the homology of the circle. It turns out that there are similar relations between Reidemeister torsion and twisted Alexander polynomial for the case of knot complement in other spaces, rather than three-dimensional sphere when the homology group contains also torsion (see [4, 5]). The technology to get explicit relations as Milnor had created making use of the simple homotopy theory for CW -complexes and Fox free differential calculus. Those ensure a CW structure for the knot complement associated with a presentation of the fundamental group, so that the boundary maps are obtained by free derivatives. Thus, in Section 5 I show that the method works out fine also for the case of knots and links in a three-dimensional torus.

1. The first homology group of link complement in T^3

A link L with n components in a three-dimensional torus T^3 is an embedding of a disjoint union of n circles S^1 into three-dimensional torus. If $n = 1$, the link is called knot. Two links are considered equivalent if they are ambient isotopic, that is, if there exists a continuous deformation of T^3 which takes one link to the other.

A diagram of link in T^3 is a regular plane graph represented on a square (see [1]), which has nodes of 4-valent (with extra structure representing the crossing in the link) and 2-valent nodes (vertices with poles). It is said that two such diagrams are equivalent if there is a sequence of generalized Reidemeister moves (see Fig. 1) and vertex moves indicated in Fig. 2 taking one diagram to the other. These moves are performed locally on the regular plane graph (with extra structure) that constitutes the link diagram.

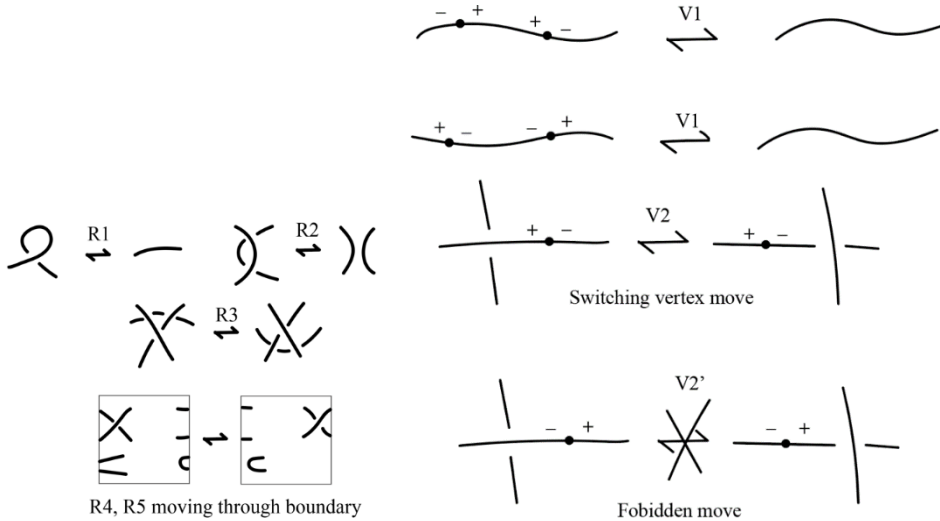


Fig. 1. Generalized Reidemeister moves

Fig. 2. Vertex moves

I proposed an algorithm to get a presentation of the fundamental group of link complement in [1] from a diagram of a link as defined above. Having a diagram of a knot K in a three-dimensional torus, we can easily define its homology class $[K] \in \mathbb{Z}^3$ of K . Also having a presentation of the fundamental group of link complement, the abelianization of the fundamental group $\pi_1(T^3 \setminus L) / [\pi_1(T^3 \setminus L), \pi_1(T^3 \setminus L)]$ is its first homology group $H_1(T^3 \setminus L)$. Thus, I recall the following theorem from [1] about the first homology group of link complement in T^3 .

Theorem 1 [1]. Let L be a link in 3-torus T^3 , with components $L_1, \dots, L_\omega$. For each $i = 1, \dots, \omega$, let $(\delta_i, \sigma_i, \xi_i) = [L_i] \in \mathbb{Z}^3 = H_1(T^3)$. Then

$$H_1(T^3 \setminus L) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_\rho, & \text{if } \omega = 1 \\ \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}_\kappa \oplus \mathbb{Z}_\lambda, & \text{if } \omega = 2 \\ \mathbb{Z}^\omega \oplus \mathbb{Z}_\xi \oplus \mathbb{Z}_\eta \oplus \mathbb{Z}_\theta, & \text{if } \omega \geq 3. \end{cases}$$

where $\rho = \gcd(\delta_1, \sigma_1, \xi_1)$; κ and λ are the invariant factor of the matrix M_1 ; ζ, η and θ are the invariant factor of the matrix M_2 .

$$M_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_\omega \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_\omega \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\omega \end{pmatrix}.$$

Now we see that the first homology group might contain torsion part. We say that a link $L \in T^3$ is nontorsion if torsion part $\text{Tors}(H_1(T^3 \setminus L))$ is zero, otherwise we say that L is torsion. A local link or affine link is a link that can be isotoped so that it is contained inside a 3-ball in T^3 . A local link is clearly nontorsion.

2. Twisted Alexander polynomial

Given a presentation of the group of a link, one may calculate its Alexander polynomial using Fox free calculus [6]. We recall the following definition of Alexander polynomials (compare [5, 7–9]). Let

$$P = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

be a presentation of a group G and denote by $H = G/[G, G]$ its abelianization. Let $F = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ be the corresponding free group. We apply the chain of maps

$$\mathbb{Z}F \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \mathbb{Z}F \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}H,$$

where $\frac{\partial}{\partial x}$ denotes the Fox differential, γ is the quotient map by relations $r_1, \dots, r_m$ and α is the abelianization map. The Alexander–Fox matrix of the presentation P is the matrix $A = [a_{i,j}]$, where $a_{i,j} = \alpha(\gamma(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}))$ for $i = 1, \dots, m$ and $j = 1, \dots, n$. For

$k = 1, \dots, \min\{m-1, n-1\}$, the k -th elementary ideal $E_k(P)$ is the ideal of $\mathbb{Z}H$, generated by the determinants of all the $(n-k)$ minors of A . The first elementary ideal $E_1(P)$ is the ideal of $\mathbb{Z}H$, generated by the determinants of the all the $(n-1)$ minors of A .

Definition 1. Let $L \subset S^3$ be a link, and let $E_k(P)$ be the k -th elementary ideal obtained from a presentation P of fundamental group $\pi_1(S^3 \setminus L, *)$. Then the k -th link polynomial $\Delta_k(L)$ is the generator of the smallest principal ideal containing $E_k(P)$. The Alexander polynomial of L , denoted by $\Delta(L)$, is the first link polynomial of L .

For a classical link L in S^3 , the abelianization of $\pi_1(S^3 \setminus L, *)$ is the free abelian group, whose generators correspond to the components of L . For a link in a 3-torus T^3 , the abelianization of its link group may also contain torsion, as we know by Theorem 1. In this case, the Alexander polynomial is not defined, we need the notion of twisted Alexander polynomials. Thus, we recall the definition of twisted Alexander polynomials.

Let G be a group with a finite presentation P and abelianization $H = G/[G, G]$ and denote $K = H / \text{Tors}(H)$. Then every representation $\phi: \text{Tors}(H) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ determines a twisted Alexander polynomial $\Delta^\phi(P)$ as follows. Choosing a splitting $H = \text{Tors}(H) \times K$, ϕ induces a ring homomorphism $\phi: \mathbb{Z}[H] \rightarrow \mathbb{C}[K]$ sending $(f, g) \in \text{Tors}(H) \times K$ to $\phi(f)g$. The ring homomorphism is called twisted homomorphism. Thus, we apply the chain of maps

$$\mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[K]$$

and obtain the ϕ -twisted Alexander matrix $A^\phi = \left[\phi(\alpha(\gamma(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}))) \right]$. The twisted Alexander polynomial is then defined by $\Delta^\phi(P) = \gcd(\phi(E_1(P)))$.

Definition 2. Let $L \subset T^3$ be a link in the three-dimensional torus T^3 . For any presentation P of the link group $\pi_1(T^3 \setminus L, *)$, we may define the following.

The Alexander polynomial of L , denoted by $\Delta(L)$, is the generator of the smallest principal ideal containing $E_1(P)$.

For any homomorphism $\phi: \text{Tors}(H_1(T^3 \setminus L)) \rightarrow \mathbb{C}^*$, the ϕ -twisted Alexander polynomial of L is $\Delta^\phi(L) = \gcd(\phi(E_1(P)))$.

We know from Theorem 1 that the torsion subgroup of $H_1(T^3 \setminus L)$ is the group $\mathbb{Z}_\zeta \oplus \mathbb{Z}_\eta \oplus \mathbb{Z}_\theta$ in general. So the image of the group homomorphism $\phi: \text{Tors}(H_1(T^3 \setminus L)) \rightarrow \mathbb{C}^*$ is contained in the cyclic group, generated by Ω , the d -root of unity, where d is $\text{lcm}(\zeta, \eta, \theta)$. The ϕ -twisted Alexander polynomial $\Delta^\phi(L) \in \mathbb{Z}[\Omega][K]$ is defined up to multiplication by a unit.

3. Reidemeister torsion of cell complex

In this section I recall the definition of Reidemeister torsion following [4] (for further references see Turaev [9, 10], Milnor [11]).

Let $\mathbb{F}$ be a field, V be a k -dimensional vector space over $\mathbb{F}$. Suppose that $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ and $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ are two bases of V then there is a non-singular $k \times k$ matrix (a_{ij}) such that $b_j = \sum_{i=1}^k a_{ij} c_i$. We write $[b/c] = \det(a_{ij}) \in \mathbb{F}^*$. Two bases b and c are said to have the same orientation if $[b/c] > 0$, and to be equivalent if $[b/c] = 1$.

Let $0 \rightarrow C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 0$ be a short exact sequence of vector spaces. Let $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ be a basis for C and $e = (e_1, e_2, \dots, e_l)$ be a basis for E . Since the map β is surjective we can lift e_i to a vector $\tilde{e}_i$ in D . Then $ce = (c_1, \dots, c_k, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_l)$ is a basis for D and its equivalent class depends not on the choice of $\tilde{e}_i$ but only on the equivalence classes of c and e .

The finite chain complex $(C, \partial) = (0 \rightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0)$ of finite-dimensional vector spaces over $\mathbb{F}$ is called acyclic if it is exact. The chain is called based if for each C_i a basis is chosen.

Assume that (C, ∂) is acyclic and based with basis c . Choose a basis b_i for $B_i = \text{Im } \partial_{i+1} = \ker \partial_i$. From the short exact sequence $0 \rightarrow B_i \rightarrow C_i \rightarrow B_{i-1} \rightarrow 0$ we get a basis $b_i b_{i-1}$ for C_i .

Definition 3. The torsion of the acyclic and based chain complex C is defined to be

$$\tau(C) = \prod_{i=0}^m [b_i b_{i-1} / c_i]^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{F}. \text{ If } C \text{ is not acyclic, then } \tau(C) \text{ is defined to be } 0.$$

The torsion $\tau(C)$ depends on c but does not depend on the choice of b_i 's. If a basis $c_{i'}$ is used instead of c_i , then the torsion is multiplied with $[c_i / c_{i'}]^{(-1)^{i+1}}$.

Let X be a finite connected CW-complex and let $\pi = \pi_1(X)$. The universal cover $\tilde{X}$ of X has a canonical CW-complex structure obtained by lifting the cells of X . If $\{e_i^k, 1 \leq i \leq n_k\}$ is an ordered set of oriented k -cells of X and $\tilde{e}_i^k$ is any lift of e_i^k , then the ordered set $\{\tilde{e}_i^k, 1 \leq i \leq n_k\}$ is a basis of the $\mathbb{Z}[\pi]$ -module $C_i(\tilde{X})$.

If $\mathbb{Z}[\pi] \xrightarrow{\phi} \mathbb{F}$ is a ring homomorphism then by the change of rings construction $\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X})$ is a chain complex of finite dimensional vector spaces over $\mathbb{F}$. If this chain complex is acyclic then its torsion $\tau(\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X})) \in \mathbb{F}^*$ is defined. However, $\tau(\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X}))$ depends on the chosen of basis for $C_*(\tilde{X})$, that is on the choices of lifting cells $\{\tilde{e}_i^k, 1 \leq i \leq n_k\}$. If we fix a choice of a set of lifting cells as a basis for the $\mathbb{Z}[\pi]$ -module $C_i(\tilde{X})$ but change the order of the cells in the basis then $\tau(\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X}))$ is multiplied with ± 1 . If we change the orientations of the cells, then torsion is also multiplied with ± 1 . If we choose a different lifting cell for e_i^k —by an action $h \cdot \tilde{e}_i^k$ of a covering transformation $h \in \pi$ —then torsion is multiplied with $\phi(h)^{\pm 1}$.

Definition 4. The Reidemeister torsion $\tau^\phi(X)$ of the CW-complex X is defined to be the image of $\tau(\mathbb{F} \otimes C_*(\tilde{X}))$ under the quotient map $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} / \pm \phi(\pi)$.

It is well known that torsion is a simple homotopy invariant and a topological invariant of compact connected CW-complexes. And for every topological manifold of dimension 3 admits a piecewise linear structure or in other words admits a triangulation. Such a piecewise linear structure is unique in the sense that every homeomorphism h between two piecewise linear manifolds is isotopic to a piecewise linear homeomorphism. In terms of triangulations, the triangulations can be subdivided so that there is an isomorphism of the subdivided triangulations isotopic to h . Thus, torsion is well-defined for our cases.

Remark. We see that for defining the twisted Alexander polynomial we need a representation $\phi: \text{Tors}(H) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ of the torsion part $\text{Tors}(H)$ into $\mathbb{C}^*$ as described

in the section 3. The representation induces the twisted homomorphism $\mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[K]$, that we also denote by ϕ . If $\mathbb{Q}(K)$ denotes the field of quotient of $\mathbb{C}[K]$. Then by composing with the projection into the quotient, twisted homomorphism ϕ determines a ring homomorphism from $\mathbb{Z}[H]$ to the field $\mathbb{Q}(K)$ that we still denote by ϕ . Thus with a representation $\phi: \text{Tors}(H) \rightarrow \mathbb{C}^*$ we can define both a twisted Alexander polynomial Δ^ϕ and a torsion τ^ϕ .

4. Reidemeister torsion of link complements in a 3-torus

Let L be a link in a three-dimensional torus T^3 . The Euler characteristic of a 3-torus T^3 is $\chi(T^3) = 0$. Removing a tubular neighborhood $N(L)$ of the link L from the 3-torus T^3 , we obtain a compact 3-manifold X with a boundary that is the link complement in the 3-torus. In terms of the Euler characteristic, we have $0 = \chi(T^3) = \chi(X \cup N(L)) = \chi(X) + \chi(N(L)) - \chi(X \cap N(L))$, that implies $\chi(X) = 0$.

The complement X , then by pushing in one free face at a time, we can collapse X down to a 2-dimensional subcomplex Y , so X is simple homotopic to Y (see Whitehead [12]). The 2-cell complex Y is of Euler characteristic zero. We can ensure that Y has a cellular structure, containing only one 0-cell σ^0 ; n 1-cells $\sigma_1^1, \dots, \sigma_n^1$, m 2-cells $\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2$, where $m = n - 1$.

The boundary maps are $\partial_1 = 0$ and $\partial_2(\sigma_i^2) = r_i$, where r_i is a word in σ_j^1 , giving a presentation of fundamental group as $\pi = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_m \rangle$. This presentation is not necessarily the same as the one, given in another paper (see [1]).

For the sake of completeness, I carry out derivation of some formulas from a paper by Huynh and Le [4] related to the Reidemeister torsion and Alexander–Fox matrix for a presentation of a group, that is the fundamental group of a manifold. Let $\tilde{Y}$ be the maximal abelian cover of Y . The cellular complexes of $\tilde{Y}$ is considered as modules over integral group ring $\mathbb{Z}(H)$, where H is the first homology group of Y . We have a chain complex of $\mathbb{Z}(H)$ -modules

$$C_2(\tilde{Y}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{Y}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{Y}) \rightarrow 0.$$

The boundary maps are obtained by Fox's free differential calculus (Compare Fox [13. P. 547] and [14], Milnor [2. P. 146]): $\partial_1(\tilde{\sigma}_i^1) = \text{pr}(x_i - 1)\tilde{\sigma}^0$ and $\partial_2(\tilde{\sigma}_i^2) = \sum_{j=1}^n \text{pr}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\tilde{\sigma}_j^1$,

where the tilde sign denotes a lift of the cell to $\tilde{Y}$. The natural projection pr is the composition of the maps α, γ in the chain $\mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[H]$ as defined in section 3 for the case group G is the fundamental group π .

Fix a splitting of H as a product $H = K \times \text{Tors}(H)$ of the free part $K = H / \text{Tors}(H)$ and the torsion part $\text{Tors}(H)$. Denote the quotient field $Q(\mathbb{C}[K])$ of $\mathbb{C}[K]$ by $\mathbb{Q}(K)$. Using the homomorphism $\phi: \mathbb{Z}[H] \rightarrow \mathbb{C}[K] \xrightarrow{\text{embedding}} \mathbb{Q}(K)$,

construct the tensor $\mathbb{Q}(K) \otimes_{\mathbb{Z}[H], \phi} C_i(\tilde{Y})$, considered as a vector space over $\mathbb{Q}(K)$. We have a chain complex of vector spaces over $\mathbb{Q}(K)$:

$$C = (\mathbb{Q}(K) \otimes_{\mathbb{Z}[H], \phi} C_2(\tilde{Y}) \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Q}(K) \otimes_{\mathbb{Z}[H], \phi} C_1(\tilde{Y}) \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Q}(K) \otimes_{\mathbb{Z}[H], \phi} C_0(\tilde{Y}) \rightarrow 0).$$

The boundary maps are $[\partial_1]_i = \phi(x_i) - 1$, and $[\partial_2]_{i,j} = \phi\left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)$, $1 \leq i < n, 1 \leq j \leq n-1$.

Let $A = [\partial_2]^t$. Denote the columns of A by u_i , $1 \leq i \leq n$, and denote the $(n-1) \times (n-1)$ matrix obtained from A by omitting the column u_i by A_i . Since C is a chain, we have

$$0 = \partial_1(\partial_2(\tilde{\sigma}_i^2)) = \left(\sum_{j=1}^n \phi\left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)(\phi(x_j) - 1)\right)\tilde{\sigma}_i^0, \text{ hence } \sum_{j=1}^n \phi\left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)(\phi(x_j) - 1) = 0. \text{ That means}$$

$$\sum_{j=1}^n (\phi(x_j) - 1)u_j = 0. \text{ For any } i > j \text{ we have}$$

$$\begin{aligned} (\phi(x_j) - 1)\det A_i &= \det[u_1, \dots, u_{j-1}, (\phi(x_j) - 1)u_j, u_{j+1}, \dots, u_i, \dots, u_n] \\ &= \det[u_1, \dots, u_{j-1}, -\sum_{k \neq j} (\phi(x_k) - 1)u_k, u_{j+1}, \dots, u_i, \dots, u_n] \\ &= (-1)^{i-j+1}(\phi(x_i) - 1)\det A_j. \end{aligned}$$

Thus, for any i and j ,

$$(\phi(x_i) - 1)\det A_j = \pm(\phi(x_j) - 1)\det A_i. \quad (1)$$

Because H has at least three free generators (Theorem 1), the image $\phi(\pi)$ cannot be $\{1\}$, thus there is at least one x_i such that $\phi(x_i) \neq 1$. The property

$$\partial_1(\tilde{\sigma}_i^1) = (\phi(x_i) - 1)\tilde{\sigma}_i^0 \text{ implies } \partial_1\left(\frac{1}{\phi(x_i) - 1}\tilde{\sigma}_i^1\right) = \tilde{\sigma}_i^0, \text{ so } \partial_1 \text{ is onto. Therefore, the chain}$$

C is exact if and only if ∂_2 is injective, which means the rank of its matrix is exactly $n-1$. Thus C is acyclic if and only if A has a nonzero $(n-1) \times (n-1)$ minor.

The Reidemeister torsion of C with respect to ϕ is the torsion $\tau^\phi(Y)$ of Y , and since torsion is a simple homotopy invariant, it is also the torsion $\tau^\phi(X)$ of X .

Now if we assume that C is acyclic. Take the standard bases of $\mathbb{Q}(K) \otimes_{\mathbb{Z}[H], \phi} C_*(\tilde{Y})$ given by $\tilde{\sigma}_j^i$ as above. A lift of $c_0 = \{\tilde{\sigma}_0\}$ is $\left\{\frac{1}{\phi(x_i) - 1}\tilde{\sigma}_i^1\right\}$. Then

$$\tau^\phi(X) = \left[\sum_{j=1}^n \phi\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_j}\right)\tilde{\sigma}_j^1, \dots, \sum_{j=1}^n \phi\left(\frac{\partial r_{n-1}}{\partial x_j}\right)\tilde{\sigma}_j^1, \frac{1}{\phi(x_i) - 1}\tilde{\sigma}_i^1\right] / (\tilde{\sigma}_1^1, \dots, \tilde{\sigma}_n^1) = \frac{(-1)^{i+n}}{(\phi(x_i) - 1)}\det A_j.$$

Thus if $\phi(x_i) \neq 1$ then $\tau^\phi(X) = \pm \det A_i / (\phi(x_i) - 1)$. By equation (1), if $\phi(x_j) = 1$ then $\det A_j = 0$, hence the following formula is correct for all i , whether C is acyclic or not:

$$(\phi(x_i) - 1)\tau^\phi(X) = \pm \det A_i \in \mathbb{Q}(K) / \pm K. \quad (2)$$

Remark. Equation (2) derived in the work by Huynh and Le [4] for links in projective space holds for links in lens space [5] and for link complement in any space of Euler characteristic zero. The derivation above is carried over from [4].

Theorem. The Reidemeister torsion and the twisted Alexander polynomial of the complement of a link in 3-torus are the same.

Proof.

The cellular structure of the link complement X in a 3-torus is simple homotopic to a 2-dimensional subcomplex Y of Euler characteristic zero, so the structure admits a presentation for the fundamental group of X with n generators and $m = n - 1$ relations. So the Alexander–Fox matrix A associated to such a presentation is a $(n - 1) \times n$ matrix. So the twisted Alexander polynomial $\Delta^\phi(X)$ is defined to be the greatest common divisor $\gcd(\det A_1, \dots, \det A_n)$ of all $(m - 1)$ -minor A_i of matrix A , obtained by removing the i -th column of A .

By equation (2), we have

$$\Delta^\phi(X) = \gcd(\det A_1, \dots, \det A_n) = \gcd((\phi(x_1) - 1)\tau^\phi(X), \dots, (\phi(x_n) - 1)\tau^\phi(X))$$

We will show that $\gcd((\phi(x_1) - 1), \dots, (\phi(x_n) - 1)) = 1$ in the case of non-torsion and torsion links.

Case 1: L is a non-torsion knot or link. We have the first homology group of complement (see section 2) is $H_1(T^3 \setminus L) \cong \mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}^\omega$, where ω is the number of components. Denote with $t_1, \dots, t_{\omega+3}$ the generators of H_1 . Then $\phi(x_i) = t_1^{h_i^1} \dots t_{\omega+3}^{h_i^{\omega+3}}$ for $i = 1, \dots, n$.

Let $g = \gcd((\phi(x_1) - 1), \dots, (\phi(x_n) - 1)) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

For a moment we set $t_2 = \dots = t_{\omega+3} = 1$. So g divides each of $(t_1^{h_i^1} - 1)$ for $i = 1, \dots, \omega + 3$.

Observe that (see Lickorish [15]) for any $a, b \in \mathbb{Z}$

$$(t^a - 1) + t^a(t^b - 1) = t^{a+b} - 1$$

and

$$(t^a - 1) - t^{a-b}(t^b - 1) = t^{a-b} - 1.$$

Applying the argument, we conclude that g divides $t_1^{\sum_{i=1}^n \alpha_i h_i^1} - 1$ for any $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

Since t_1 is an element of canonical projection of fundamental group $\text{pr}(\pi)$ there is a collection of $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ such that $t_1 = \prod_{i=1}^n \text{pr}(x_i^{\alpha_i}) = t_1^{\sum_{i=1}^n \alpha_i h_i^1}$. Thus g divides $(t_1 - 1)$. Now by letting $t_j = 1$ for $j \neq i, i = 2, \dots, (\omega + 3)$ and repeating the argument we obtain $g = \gcd((\phi(x_1) - 1), \dots, (\phi(x_n) - 1)) = \gcd((t_1 - 1), \dots, (t_{\omega+3} - 1)) = 1$.

Case 2: L is a torsion link. The first homology group of link complement has free part of rank at most $\omega + 2$ and the torsion part might be a product of at most three cyclic group $\mathbb{Z}_\zeta \oplus \mathbb{Z}_\eta \oplus \mathbb{Z}_\theta$, where $\zeta, \eta, \theta \in \mathbb{N}$ are the order of respective groups. Without loss of generality, we consider the case when the first homology group has the

rank r and torsion part has the structure $\mathbb{Z}_\zeta \oplus \mathbb{Z}_\eta \oplus \mathbb{Z}_\theta$. Now denote with $t_1, \dots, t_r$ the generators of free part F and u_1, u_2, u_3 are the generator of torsion part $\text{Tors}(H_1)$.

We have projection of x_i is $pr(x_i) = t_1^{h_1^i} \dots t_r^{h_r^i} u_1^{k_1^i} u_2^{k_2^i} u_3^{k_3^i}$. For some homomorphism $\phi: \text{Tors}(H_1) \rightarrow \mathbb{C}^*$ the image $\phi(x_i)$ is defined to be $\phi(x_i) = t_1^{h_1^i} \dots t_r^{h_r^i} \phi(u_1^{k_1^i} u_2^{k_2^i} u_3^{k_3^i})$.

Setting $t_2 = \dots = t_r = 1$, applying the previous reasoning we conclude that

$g = \gcd((\phi(x_1) - 1), \dots, (\phi(x_n) - 1))$ divides $t_1^{\sum_{i=1}^n \alpha_i h_1^i} \phi(u_1^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_1^i} u_2^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_2^i} u_3^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_3^i}) - 1$ for any $\alpha_i \in \mathbb{Z}$.

Since t_1 is an element of canonical projection of fundamental group $pr(\pi)$ there

is a collection of $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ such that $t_1 = \prod_{i=1}^n pr(x_i^{\alpha_i}) = t_1^{\sum_{i=1}^n \alpha_i h_1^i} \phi(u_1^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_1^i} u_2^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_2^i} u_3^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_3^i})$.

So $\sum_{i=1}^n \alpha_i h_1^i = 1$ and $\phi(u_1^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_1^i} u_2^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_2^i} u_3^{\sum_{i=1}^n \alpha_i k_3^i}) = 1$. Thus, analogously we get $\gcd((\phi(x_1) - 1), \dots, (\phi(x_n) - 1)) = 1$ that completes the proof.

Remark. The identifications between Alexander type polynomial and Reidemeister torsion for knot complements in different cases were proved by different people (see Milnor [2], Kitano [16], Kirk and Livingston [17], Turaev [9], Cattabriga [5], Huynh and Le [4]). The proving method of Theorem 2 is technically due to Huynh–Le’s work.

References

1. Vuong B. Fundamental group and twisted Alexander polynomial of knots in 3-torus. <https://arxiv.org/abs/2302.10461> (submitted).
2. Milnor J. (1962) A duality theorem for Reidemeister torsion. *Annals of Mathematics*. 76(2). pp. 137–147.
3. Seifert H. (1934) Über das Geschlecht von Knoten. *Mathematische Annalen*. 110. pp. 571–592.
4. Huynh V.Q., Le T.T.Q. (2008) Twisted Alexander polynomial of links in the projective space. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. 17. pp. 411–438.
5. Cattabriga A., Manfredi E., Mulazzani M. (2013) On knots and links in lens spaces. *Topology and Its Applications*. 160. pp. 430–442.
6. Fox R. H. (1962) *A quick trip through knot theory*, in *Topology of 3-Manifolds*, M.K. Fort, Jr., editor, Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.
7. Wada M. (1994) Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology*. 33:2. pp. 241–256.
8. Horvat E., Boštjan Gabrovšek. (2019) The Alexander polynomial of links in lens spaces. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*. 28(8). 1950049.
9. Turaev V. (2002) *Torsion of 3-Dimensional Manifolds*. Basel: Birkhäuser Verlag.
10. Turaev V. (2001) *Introduction to Combinatorial Torsions. Lectures in Mathematics ETH Zurich*. Basel: Birkhäuser Verlag.
11. Milnor J. (1966) Whitehead torsion. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 72. pp. 358–426.

12. Whitehead J.H.C. (1950) Simple homotopy types. *American Journal of Mathematics*. 72. pp. 1–57.
13. Fox R.H. (1953) Free differential calculus I. *Annals of Mathematics*. 57. pp. 547–560.
14. Fox R.H. (1954) Free differential calculus II. *Annals of Mathematics*. 59. pp. 196–210.
15. Lickorish W.B.R. (1997) *An Introduction to Knot Theory*. Graduate Texts in Mathematics. 175. Springer.
16. Kitano T. (1996) Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion. *Pacific Journal of Mathematics*. 174(2). pp. 431–442.
17. Kirk P., Livingston C. (1999) Twisted Alexander invariants, Reidemeister torsion, and Casson–Gordon invariants. *Topology*. 38(3). pp. 635–661.

Information about the author:

Vuong Bao (Ph.D., Senior researcher, Regional scientific and educational mathematical center, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russia.). E-mail: vuonghuubao@live.com

Сведения об авторе:

Вьонг Хыу Бао – кандидат физико-математических наук, Региональный научно-образовательный математический центр, механико-математический факультет Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: vuonghuubao@live.com

The article was submitted 19.09.2023; accepted for publication 12.02.2024

Статья поступила в редакцию 19.09.2023; принята к публикации 12.02.2024

Научная статья

УДК 519.853.6; 519.853.4

MSC: 90C30, 65K05

doi: 10.17223/19988621/87/3

Минимизация гладкой функции на границе внешнего обобщенного сегмента сферы

Айдар Мансурович Дуллиев

*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия, dulliev@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается задача минимизации гладкой функции на границе так называемого внешнего обобщенного сегмента сферы, который строится определенным образом из сферы и выпуклого телесного конуса с вершиной, лежащей вне соответствующего замкнутого шара. Предлагается модификация метода проекции градиента и обосновывается ее сходимость к стационарной точке задачи.

Ключевые слова: невыпуклые задачи оптимизации, релаксационный метод, обобщенный сегмент сферы, метод проекции градиента

Благодарности: Автор выражает глубокую благодарность Б.Р. Хузину за помощь в написании некоторых частей данной статьи.

Для цитирования: Дуллиев А.М. Минимизация гладкой функции на границе внешнего обобщенного сегмента сферы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 22–33. doi: 10.17223/19988621/87/3

Original article

Minimization of a Smooth Function on the Boundary of an Outer Generalized Spherical Segment

Aidar M. Dulliev

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, Russian Federation, dulliev@yandex.ru*

Abstract. In this paper we consider a constrained optimization problem of the form

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \partial_S X \subset \mathbb{R}^n,$$

where $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is Lipschitz smooth on $\mathbb{R}^n$; $\partial_S X$ is the boundary of X relative to the sphere $S = S^{n-1}$; X is an outer generalized segment of S and is defined as follows. Let K be an affine convex cone with a nonempty interior and with the vertex c located in the exterior of the closed ball B generated by S . We assume that the set $K \cap S$ is represented as disjoint unions of its connected components X_1 and X_2 . Let X_1 be closer to c than X_2 with respect to the Euclidean distance; by definition, put $X = X_1$.

In this work we modify the method proposed by the author, where the cone vertex is located in the interior of the ball B . Our method works according to the following scheme. After choosing a starting point x_1 and setting up a few parameters of Algorithm, the new iteration point is determined in three steps. First, we perform gradient descent along the tangent cone to the feasible set; the result of this operation is the point S_k . Then we find the point t_k by projecting S_k onto K and return to the feasible set by reconstructing the ray starting from the vertex of K and passing through t_k ; finally, we update the iteration point x_{k+1} . By a lemma and a proposition, we state that the sequence $\{f(x_k)\}$ is monotonic and each accumulation point x_* of $\{x_k\}$ is stationary for the optimization problem.

Keywords: nonconvex optimization, descent method, spherical segment, gradient projection algorithms

Acknowledgments: The author would like to thank B.R. Khuzin for his assistance in writing some parts of the article.

For citation: Dulliev, A.M. (2024) Minimization of a Smooth Function on the Boundary of an Outer Generalized Spherical Segment. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 22–33. doi: 10.17223/19988621/87/3

1. Введение

Рассмотрим задачу минимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \partial_S X \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, производная которой на всем $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$; ∂_Y – граница множества в относительной топологии $Y \subset \mathbb{R}^n$; X – внешний обобщенный сегмент $(n - 1)$ -мерной сферы S , определяемый следующим образом. Пусть K – выпуклый телесный конус с вершиной c , расположенной вне замкнутого шара B , ограничиваемого S . Считаем, что каждая образующая конуса K пересекает S ровно в двух точках. Очевидно, множество $K \cap S$ состоит из двух связных компонент, одна из которых, X_1 , ближе к c в евклидовой метрике, а другая, X_2 , – дальше. По определению полагаем, что множество X равно X_1 .

Ранее в статье [1] рассматривалась аналогичная задача, в которой вершина конуса находилась во внутренности шара B . Был предложен алгоритм, который при определенных ограничениях, накладываемых на целевую функцию и допустимое множество, обеспечивал сходимость итерационной последовательности к стационарной точке. В настоящей работе приводится модификация данного алгоритма для задачи (1.1). Главное отличие этой модификации от предложенного в [1] алгоритма состоит в том, что на каждой итерации необходимо следить, чтобы при решении вспомогательной задачи проектирования на конус K найденная проекция не оказалась расположенной вне множества $U = \{(1 - \lambda)c + \lambda u \mid u \in X_2, \lambda \in (0, 1)\}$. Как мы увидим ниже, это достигается путем соответствующего выбора величины шага.

Если говорить кратко, то алгоритм работает по следующей схеме (рис. 1). Переход к новой итерационной точке осуществляется в три этапа. Вначале произво-

дится спуск вдоль конуса касательных направлений к допустимому множеству; затем находится проекция на конус K ; после этого осуществляется возврат на допустимое множество путем восстановления луча, исходящего из вершины конуса через найденную проекцию на конусе.

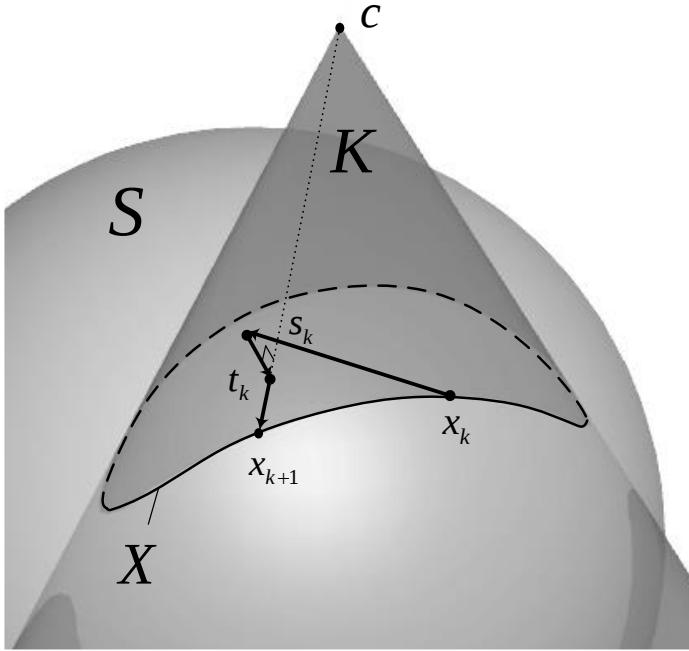


Рис. 1. Итерация алгоритма в $\mathbb{R}^3$
Fig. 1. An iteration of the algorithm in $\mathbb{R}^3$

Алгоритмы подобного типа, в которых используются процедуры, так или иначе связанные с проектированием, не редкость. Среди них встречаются алгоритмы как общего вида (например, метод проекции градиента, метод линеаризации), так и специального, различающиеся, как правило, видом целевой функции или структурой допустимого множества (например, методы, разработанные в [2]). К последним относится и предлагаемый в данной статье алгоритм. Важным его свойством является то, что целевая функция может быть невыпуклой (в отличие от метода, приведенного в [3]), а генерируемая им итерационная последовательность $\{x_k\}$ является релаксационной, причем каждая точка x_k , $k = 0, 1, \dots$, принадлежит допустимому множеству $\partial_S X$, возврат на которое производится не прямым проектированием на $\partial_S X$ (как, например, в [4]), а через ряд более простых операций.

Кроме того, стоит отметить, что множества типа внешнего сегмента сферы возникают естественным образом в задачах обзора искусственными спутниками заданных областей поверхности планеты. При этом сфера служит моделью поверхности планеты; вершина конуса соответствует положению искусственного спутника, а сам конус – лучу направленности его антенны. Тогда множество X точек

поверхности планеты, видимых со спутника, является внешним сегментом сферы. Если в качестве целевой функции взять, например, угловое расстояние между двумя точками на сфере, одна из которых, x , фиксирована и не принадлежит X , то задача проектирования точки x на множество X может быть записана в виде (1.1).

2. Описание алгоритма

Всюду ниже будем придерживаться следующих допущений и обозначений в дополнение к уже перечисленным выше. $\| \cdot \|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$; $\text{pr}_Q x$ – проекция точки x на множество Q по норме $\| \cdot \|$; сфера S имеет центр в нуле и радиус R ; конус $\tilde{K} = K \cup (2c - K)$ с вершиной c задается неравенством $F(x) \leq 0$, где $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция, производная которой на $\tilde{K}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $M > 0$, и существует такое $\tilde{C} > 0$, что $\|F'(x)\| \geq \tilde{C}$

всюду в S ; $d = R - \min_{x \in \partial_S X} \left(\max_{y \in B \cap \{c + \lambda(x-c) | \lambda \geq 0\}} \|y - S\| \right)$ (здесь вычитаемое показывается, насколько множество отрезков, лежащих на образующих границы конуса K и расположенных в шаре B , близко к сфере S); для точки $x_k \in X$ положим: Γ_k – опорная гиперплоскость к S в x_k , Z_k – опорная гиперплоскость к K в x_k ,

$$\Sigma_k = \Gamma_k \cap Z_k, \quad s_k = \text{pr}_{\Sigma_k} (x_k - \alpha_k f'(x_k)),$$

$$t_k = \text{pr}_K s_k, \quad \lambda_k = \min \{ \lambda \geq 0 \mid c + \lambda(t_k - c) \in S \}, \quad (2.1)$$

$$x_{k+1} = \{c + \lambda_k(t_k - c) \mid \lambda \geq 0\} \cap S,$$

$$p_k = \text{pr}_{\Sigma_k} (x_k - f'(x_k)), \quad y_k = \{\beta t_k \mid \beta \geq 0\} \cap S,$$

$$T = 2\sqrt{R^2 - d^2}, \quad B = 2RL + \|f'(x_0)\|,$$

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{M}{\gamma} \right), \quad \sqrt{E} = \min \left\{ \frac{C - \gamma}{MB}, \left(\frac{N - \zeta}{B^2 D (R + \|c\|)} \right)^{1/2} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\Delta = \frac{BM(1 + L\sqrt{E})}{\gamma} + \frac{LB^2 M^2 E}{4\gamma^2} +$$

$$+ \frac{BD}{\zeta^2} (R + \|c\|) (R + \|c\| + B^2 DE) (2\zeta + LBDE (R + \|c\| + B^2 DE)),$$

$$0 < N < \|c\| + R^2, \quad 0 < C < \tilde{C}, \quad 0 < \gamma < C, \quad C - \gamma < \tilde{C} - C,$$

$$0 < \zeta < \|c\| - R, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

Алгоритм

Шаг 0. Выбрать начальную точку $x_0 \in X$ и задать параметры $N, C, \gamma, \zeta, \varepsilon$, исходя из условий (2.3). Вычислить B, D, E, Δ, T по формулам (2.2) и задать A ,

$\varepsilon_0, \alpha \in (\varepsilon_0, A)$, удовлетворяющие условиям из (3.29) (см. лемму ниже). Установить $k = 0$.

Шаг 1. Найти множества Γ_k, Z_k и определить p_k .

Шаг 2. Положить $\alpha_k = \alpha$ и найти s_k, t_k и x_{k+1} по формулам (2.1).

Шаг 3. Если $x_{k+1} = x_k$, то считать x_{k+1} решением задачи. В противном случае установить $k := k + 1$ и перейти к шагу 1.

3. Обоснование сходимости алгоритма

Покажем, что последовательность, генерируемая алгоритмом, является релаксационной.

Лемма. *Существуют такие $A, \varepsilon_0 > 0$, не зависящие от k , что шаг 2 алгоритма при любом $\alpha_k \in (\varepsilon_0, A)$ обеспечивает оценку*

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \varepsilon \alpha_k^2 \|p_k - x_k\|^2. \quad (3.1)$$

Доказательство. Представим разность $f(x_k) - f(x_{k+1})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x_{k+1}) &= (f(x_k) - f(s_k)) + \\ &+ (f(s_k) - f(t_k)) + (f(t_k) - f(x_{k+1})). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оценим каждую из разностей, стоящих в скобках правой части равенства (3.2).

Рассуждения для первых двух разностей повторяют соответствующие рассуждения для случая, когда вершина с конуса K находится во внутренней части шара B [1]. Из них следуют неравенства

$$f(x_k) - f(s_k) \geq \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{L}{2} \right) \|x_k - s_k\|^2, \quad (3.3)$$

$$f(s_k) - f(t_k) \geq -\|x_k - s_k\|^2 \left(\frac{BM(1 + L\alpha_k)}{2\gamma} + \frac{LB^2M^2\alpha_k^2}{8\gamma^2} \right), \quad (3.4)$$

которые выполняются при

$$\alpha_k < \frac{C - \gamma}{MB}. \quad (3.5)$$

Найдем оценку третьей разности $f(t_k) - f(x_{k+1})$, представив ее в виде, аналогичном (3.4), а именно $f(t_k) - f(x_{k+1}) \geq -\|x_k - s_k\|^2 \text{const}$, $\text{const} > 0$.

Поскольку $x_0 \in S$, то

$$\|f'(x_{k+1})\| \leq \|f'(x_{k+1}) - f'(x_0)\| + \|f'(x_0)\| \leq L\|x_{k+1} - x_0\| + \|f'(x_0)\| \leq 2RL + \|f'(x_0)\| = B.$$

Отсюда и из липшицевости производной функции $f(x)$ вытекает

$$\begin{aligned} f(t_k) - f(x_{k+1}) &\geq \langle f'(x_{k+1}), t_k - x_{k+1} \rangle - \frac{L}{2} \|x_{k+1} - t_k\|^2 \geq \\ &\geq -B\|x_{k+1} - t_k\| - \frac{L}{2} \|x_{k+1} - t_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, необходимо оценить $\|x_{k+1} - t_k\|$. Из геометрических соображений ясно, что возможно три случая расположения точки t_k относительно сферы S

в зависимости от удаленности от c . Разберем эти случаи подробно. При этом условимся начало координат в $\mathbb{R}^n$ обозначать через O , луч $\{a + \tau(b-a) \mid \tau \geq 0\}$ с началом в $a \in \mathbb{R}^n$ и проходящий через $b \in \mathbb{R}^n$ обозначать символом ab ; кроме того, положим

$$\{z_k\} = ct_k \cap S \setminus \{x_{k+1}\}, \quad \{v_k, w_k\} = cO \cap S, \quad \|v_k - c\| > \|w_k - c\|,$$

$$\delta_k = \|t_k - y_k\|, \quad \mu_k = \frac{1}{\lambda_k}, \quad \rho_k = \|t_k - z_k\|.$$

Случай 1. $\|c - t_k\| \geq \|c - z_k\|$.

Покажем, что величину шага α_k можно подобрать таким образом, чтобы данный случай никогда не реализовался, т.е. чтобы точка t_k оказалась или внутри шара B , или между внутренностью шара B и точкой c (при этом не исключается $t_k \in X$).

Сперва оценим $\|c - z_k\|$. Записывая теорему о секущих для лучей cz_k и cv

$$\|c - z_k\| \|c - x_{k+1}\| = \|c - v_k\| \|c - w_k\|,$$

получаем

$$\|c - z_k\| \|c - x_{k+1}\| = \|c\|^2 - R^2. \quad (3.7)$$

Рассматривая треугольник с вершинами в точках O, z_k, x_{k+1} , находим

$$\|c - z_k\| = \|c - x_{k+1}\| + 2\sqrt{R^2 - h^2},$$

где h – расстояние от нуля до луча cz_k . Поскольку $d \geq h$, то

$$\|c - z_k\| \geq \|c - x_{k+1}\| + 2\sqrt{R^2 - d^2}. \quad (3.8)$$

Выражая $\|c - x_{k+1}\|$ из (3.7) и подставляя затем в (3.8), приходим к неравенству

$$\|c - z_k\|^2 - 2\sqrt{R^2 - d^2} \|c - z_k\| - (\|c\|^2 - R^2) \geq 0,$$

откуда

$$\|c - z_k\| \geq \sqrt{R^2 - d^2} + \sqrt{\|c\|^2 - d^2}. \quad (3.9)$$

Далее, подберем α_k таким образом, чтобы $\|c - t_k\|$ было меньше правой части неравенства (3.9). Поскольку точка t_k определяется как проекция с касательного направления к конусу K , то $t_k = x_k + \alpha_k(p_k - x_k) + r_k(\alpha_k)$, где $\|r_k(\alpha_k)\| = o(\alpha_k)$ при $\alpha_k \rightarrow 0$.

Кроме того, согласно [1] имеет место оценка $\|r_k(\alpha_k)\| \leq \frac{M}{2\gamma} \|x_k - s_k\|^2$, следовательно,

$$\begin{aligned} \|c - t_k\| &\leq \|x_k - c\| + \alpha_k \left(\|p_k - x_k\| + \left\| \frac{r_k(\alpha_k)}{\alpha_k} \right\| \right) \leq \\ &\leq \|x_k - c\| + \alpha_k \|p_k - x_k\| \left(1 + \frac{M\alpha_k}{2\gamma} \|p_k - x_k\| \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.9) получаем, что α_k должно удовлетворять неравенству

$$\alpha_k \|p_k - x_k\| \left(1 + \frac{M\alpha_k}{2\gamma} \|p_k - x_k\| \right) \leq \sqrt{R^2 - d^2} + \sqrt{\|c\|^2 - d^2} - \|x_k - c\|.$$

Так как $d < R$ и

$$\|x_k - c\| \leq V := \sqrt{\|c\|^2 - d^2} - \sqrt{R^2 - d^2}, \quad (3.10)$$

то $\sqrt{R^2 - d^2} + \sqrt{\|c\|^2 - d^2} - \|x_k - c\| \geq T = 2\sqrt{R^2 - d^2} > 0$.

Стало быть, требуемое α_k можно определить из неравенства

$$\frac{M}{2\gamma} \|p_k - x_k\|^2 \alpha_k^2 + \|p_k - x_k\| \alpha_k - T \leq 0,$$

из которого находим

$$0 < \alpha_k \leq \frac{\sqrt{1 + \frac{2MT}{\gamma}} - 1}{\frac{M}{\gamma} \|x_k - p_k\|}. \quad (3.11)$$

Поскольку $x_k \in \Sigma_k$ и p_k является проекцией точки $x_k - f'(x_k)$ на выпуклое множество Σ_k , то $\|x_k - p_k\| \leq \|f'(x_k)\| \leq B$. Используя это в (3.11), окончательно для рассматриваемого случая получаем оценку величины шага α_k :

$$0 < \alpha_k \leq \frac{\gamma}{MB} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{MT}{\gamma}} - 1 \right). \quad (3.12)$$

Случай 2. $0 < \|c - t_k\| \leq \|c - x_{k+1}\|$.

Данный случай соответствует расположению точки t_k между внутренностью шара B и точкой c (причем не исключается $t_k \in X$), при этом, очевидно, $\|t_k\| \geq R$. Здесь, как и в [1], можно получить оценки

$$\|t_k - y_k\| \leq D \|x_k - s_k\|^2, \quad (3.13)$$

$$\|t_k - s_k\| \leq \alpha_k \frac{M}{2\gamma} B^2, \quad \|s_k - x_k\| \leq \alpha_k B, \quad (3.14)$$

$$\|x_{k+1} - t_k\| \leq |\lambda_k - 1| \left(R + \|c\| + D \|x_k - s_k\|^2 \right), \quad (3.15)$$

где, напомним, величина $\lambda_k \geq 0$ определяется условием (2.1).

Заметим, что согласно (3.15) порядок величины $\|x_{k+1} - t_k\|$ относительно $\|x_k - s_k\|$ определяется порядком величины $|\lambda_k - 1|$. Покажем, что величину шага α_k можно подобрать удовлетворяющей условию $|\lambda_k - 1| = O(\|x_k - s_k\|^2)$. При этом, не ограничивая общности, считаем, что $\lambda_k \neq 1$, так как иначе $f(t_k) - f(x_{k+1}) = 0$ и α_k будет оцениваться только из первых двух разностей (3.2).

Из определения точки x_{k+1} имеем

$$x_{k+1} - t_k = (1 - \mu_k)(x_{k+1} - c). \quad (3.16)$$

Положим $\{u_k\} = t_k y_k \cap S \setminus \{y_k\}$. Так как $u_k \in S$ и $\|t_k\| < \|c\|$, то

$$\|t_k - u_k\| < R + \|c\|. \quad (3.17)$$

Записывая теорему о секущих для лучей $t_k y_k$ и $t_k z_k$

$$\|t_k - y_k\| \|t_k - u_k\| = \|t_k - x_{k+1}\| \|t_k - z_k\|$$

и апеллируя к (3.16), (3.17), получаем

$$\|t_k - y_k\| (R + \|c\|) > |1 - \mu_k| \|x_{k+1} - c\| \|t_k - z_k\|. \quad (3.18)$$

Как и в случае 1, выполнено равенство (3.7), из которого находим

$$\|x_{k+1} - c\| \|t_k - z_k\| = \|c\|^2 - R^2 - \|t_k - c\| \|x_{k+1} - c\|. \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.18) и учитывая, что $\mu_k \neq 1$ и $\|x_{k+1} - c\| \leq V$, имеем

$$\frac{\|t_k - y_k\|}{|1 - \mu_k|} (R + \|c\|) > \|c\|^2 - R^2 - V \|t_k - c\|. \quad (3.20)$$

Теперь убедимся, что найдется такое α_k , для которого правая часть неравенства (3.20) не меньше любого $0 < N < TV$. Во-первых, заметим, что

$$\|t_k - c\| \leq \|t_k - s_k\| + \|s_k - x_k\| + \|x_k - c\|.$$

Во-вторых, принимая во внимание (3.10) и (3.14), получаем

$$\|c\|^2 - R^2 - V \|t_k - c\| \geq \|c\|^2 - R^2 - V \left(V + \alpha_k \left(B + \frac{MB^2}{2\gamma} \right) \right) \geq V \left(T - \alpha_k \left(B + \frac{MB^2}{2\gamma} \right) \right).$$

Очевидно, что правая часть последнего неравенства, а значит, и (3.20), не меньше N при

$$\alpha_k \leq \left(T - \frac{N}{V} \right) \left(B + \frac{MB^2}{2\gamma} \right)^{-1}. \quad (3.21)$$

Таким образом, из (3.20) находим

$$|1 - \mu_k| < \|t_k - y_k\| \frac{R + \|c\|}{N}.$$

Так как $\|t_k\| > R$, то $\lambda_k > 1$ и $\mu_k < 1$, следовательно, с учетом (3.13)

$$1 - \mu_k < \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{N}.$$

Отсюда вытекает, что при выполнении условия (3.21) справедлива оценка

$$\lambda_k - 1 < \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{N - \|x_k - s_k\|^2 D(R + \|c\|)}. \quad (3.22)$$

Случай 3. $\|c - x_{k+1}\| < \|c - t_k\| < \|c - z_k\|$.

Данный случай соответствует расположению точки t_k внутри шара B , т.е. при этом $\|t_k\| < R$ и $\lambda_k < 1$. Проводя рассуждения аналогично предыдущему случаю, в результате приходим к тому, что формула (3.21) остается без изменений, а оценка для $1 - \lambda_k$ выглядит следующим образом:

$$1 - \lambda_k < \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{N + \|x_k - s_k\|^2 D(R + \|c\|)}. \quad (3.23)$$

Объединяя соответствующие случаям 2 и 3 оценки (3.22) и (3.23), получаем

$$|\lambda_k - 1| < \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{N - \|x_k - s_k\|^2 D(R + \|c\|)}. \quad (3.24)$$

Теперь подберем α_k так, чтобы выражение, стоящее в знаменателе правой части (3.24), было не меньше какого-либо числа $0 < \zeta < N$. Поскольку $\|x_k - s_k\| = \alpha_k \|x_k - p_k\|$, то требуемое условие достигается при

$$\alpha_k^2 < \frac{N - \zeta}{\|x_k - p_k\|^2 D(R + \|c\|)}.$$

Вспоминая, что $\|x_k - p_k\| \leq B$ видим, что достаточно выбрать α_k , удовлетворяющее неравенству

$$\alpha_k < \sqrt{\frac{N - \zeta}{B^2 D(R + \|c\|)}}. \quad (3.25)$$

Таким образом, получаем

$$|\lambda_k - 1| \leq \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{\zeta}. \quad (3.26)$$

Так как $\|x_k - s_k\| \leq \alpha_k B$, то $\|x_k - s_k\|^2 \leq B^2 E$ при $\alpha_k < \sqrt{E}$. С учетом этого и (3.15), (3.26), находим оценку для $\|x_{k+1} - t_k\|$:

$$\|x_{k+1} - t_k\| \leq \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\| + B^2 DE)(R + \|c\|)}{\zeta}.$$

Отсюда и из (3.6) получаем оценку разности $f(t_k) - f(x_{k+1})$:

$$\begin{aligned} f(t_k) - f(x_{k+1}) &\geq \\ &\geq -\frac{BD}{2\zeta^2} (R + \|c\|) (R + \|c\| + B^2 DE) (2\zeta + LBDE (R + \|c\| + B^2 DE)) \|x_k - s_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Объединяя оценки (3.3), (3.4), (3.27), для разности $f(x_k) - f(x_{k+1})$ в итоге имеем

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{L + \Delta}{2} \right) \|x_k - s_k\|^2.$$

Осталось подобрать α_k так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках, было положительным, например больше некоторого числа $\varepsilon > 0$:

$$\alpha_k < \frac{2}{L + \Delta + 2\varepsilon}. \quad (3.28)$$

Поскольку все вышеприведенные оценки (3.5), (3.12), (3.25), (3.28) для величины шага α_k не зависят от k , то для завершения доказательства леммы достаточно положить A равным величине

$$\min \left\{ \sqrt{E}, \frac{\gamma}{MB} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{MT}{\gamma}} - 1 \right), \frac{2}{L + \Delta + 2\varepsilon} \right\} \quad (3.29)$$

и в качестве ε_0 взяты любые значения из интервала $(0, A)$. Лемма доказана.

Предложение. При любом выборе начальной точки $x_0 \in X$ любая предельная точка x_* последовательности $\{x_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$, построенной по алгоритму, является стационарной, т.е. удовлетворяет условию

$$\forall x \in \Sigma_* \langle f'(x_*), x - x_* \rangle = 0. \quad (3.30)$$

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на компакте $\partial_S X$ и согласно лемме последовательность $\{f(x_k)\}$ является невозрастающей, то

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) > -\infty. \quad (3.31)$$

Кроме того, последовательность $\{x_k\}$ имеет хотя бы одну предельную точку x_* , которая, очевидно, лежит в $\partial_S X$. Пусть $\{x_{k_m}\}$ – подпоследовательность, сходящаяся к x_* . Из (3.1) и (3.31) следует, что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} p_{k_m}$, причем $\lim_{m \rightarrow \infty} p_{k_m} = x_*$. С другой стороны, ввиду непрерывности оператора проектирования $p(x) = \text{pr}_{\Sigma(x)}(x - f'(x))$ на множестве X имеет место сходимость $p_{k_m} \rightarrow p_* = \text{pr}_{\Sigma_*}(x_* - f'(x_*))$, стало быть, $p_* = x_*$.

Возьмем теперь произвольную точку $x \in \Sigma_*$. Из равенства $f'(x_*) = p_* - (x_* - f'(x_*))$ по свойству проекций на аффинное множество следует, что $\langle f'(x_*), x - x_* \rangle = \langle f'(x_*), x - p_* \rangle = \langle p_* - (x_* - f'(x_*)), x - p_* \rangle = 0$, т.е. условие (3.30) выполняется. Предложение доказано.

4. Численный эксперимент

Экспериментальная проверка предложенного алгоритма была проведена на двух примерах в $\mathbb{R}^3$ с целевыми функциями соответственно $f_1(x, y, z) = (x - 10)^2 + y^2 + (z - 3)^2$ и $f_2(x, y, z) = \sin 6x + x^2 \cos e^y - z \arctg(x + y - z)^2$. Их градиенты удовлетворяют условию Липшица в любом замкнутом шаре B_r радиуса $r > 0$ с центром в нуле. Нетрудно заметить, что алгоритм применим для данных функций при достаточно больших $r > R$. В обоих примерах рассматривались сфера с радиусом 3, эллиптический конус, задаваемый уравнением $14(x - 1.7)^2 + y^2 - 0.3(z - 5)^2 = 0$, начальная точка (1.577; 1.571; 2.011). В качестве критерия останова выбиралось выполнение неравенства $\|s_k - x_k\| < \varepsilon$, где ε – заданная точность.

Результаты численного эксперимента

Пример	Количество итераций для заданной точности			
	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
1	9	10	11	12
2	8	9	10	12

Результаты расчетов приведены в таблице. В ней в зависимости от примера и точности указано количество итераций, произведенных до достижения заданной точности.

5. Заключение

При доказательстве леммы было получено не зависящее от k выражение (3.29), оценивающее сверху величину шага α_k и тем самым обеспечивающее релаксационную сходимость алгоритма. Однако вместо выбора постоянного α_k , которое требует вычисления величины T , можно пользоваться процедурой последовательного уменьшения α_k начиная с некоторого $\alpha_k = \hat{\alpha}$ вплоть до выполнения условия (3.1) и условий для t_k , соответствующих случаю 2 или 3 из доказательства леммы. Также заметим, что выбор параметров $N, C, \gamma, \zeta, \varepsilon$ до некоторой степени произволен и определяется условиями (2.3).

Очевидно, что основные вычислительные затраты алгоритма приходятся на решение вспомогательной задачи проектирования точки на выпуклый конус. Нетрудно показать, что в определенных случаях эту задачу можно решать достаточно эффективно. В частности, когда конус K является конусом второго порядка в $\mathbb{R}^n$ при $n \leq 3$ или круговым конусом, проекция определяется в явном виде; если K – конус второго порядка в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$, то для нахождения проекции можно воспользоваться методами внутренней точки [5].

Список источников

1. Дуллиев А.М. Релаксационный метод минимизации гладкой функции на обобщенном сегменте сферы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 2. С. 208–223. doi: 10.7868/S0044466914020045
2. Заботин В.И., Черняев Ю.А. Обобщение метода проекции градиента на экстремальные задачи с предвыпуклыми ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41, № 3. С. 367–373.
3. Черняев Ю.А. Итерационный алгоритм минимизации выпуклой функции на пересечении сферической поверхности и выпуклого компактного множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 10. С. 1631–1640. doi: 10.7868/S0044466917100064
4. Черняев Ю.А. Метод проекции градиента для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения гладкой поверхности и выпуклого замкнутого множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 1. С. 37–49. doi: 10.1134/S0044466919010058
5. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М. : Изд-во МЦНМО, 2010. 279 с.

References

1. Dulliev A.M. (2014) A relaxation method for minimizing a smooth function on a generalized spherical segment. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 54(2). pp. 219–234. DOI: 10.1134/S0965542514020043.
2. Zabotin V.I., Chernyaev Yu.A. (2001) A generalization of the gradient projection method to extremal problems with preconvex constraints. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 41(3). pp. 340–346.

3. Chernyaev Yu.A. (2017) Iterative algorithm for minimizing a convex function at the intersection of a spherical surface and a convex compact set. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 57(10). pp. 1607–1615. DOI: 10.1134/S0965542517100062.
4. Chernyaev Yu.A. (2019) Gradient projection method for optimization problems with a constraint in the form of the intersection of a smooth surface and a convex closed set. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 59(1). pp. 34–45. DOI: 10.1134/S0965542519010056.
5. Nesterov Yu.E. (2004) *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*. Springer. DOI: 10.1007/978-1-4419-8853-9.

Сведения об авторе:

Дуллеев Айдар Мансурович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия. E-mail: dulliev@yandex.ru

Information about the author:

Dulliev Aidar M. (Department of Applied Mathematics and Informatics, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation). E-mail: dulliev@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 02.10.2022; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 02.10.2022; accepted for publication 12.02.2024

Original article

UDC 512.57, 512.579

MSC: 20M05, 08B20

doi: 10.17223/19988621/87/4

Multi-groups

Tatyana A. Kozlovskaya*Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, t.kozlovskaya@math.tsu.ru*

Abstract. In the present paper we define homogeneous algebraic systems. Particular cases of these systems are semigroup (monoid, group) systems. These algebraic systems were studied by J. Loday, A. Zhuchok, T. Pirashvili, and N. Koreshkov. Quandle systems were introduced and studied by V. Bardakov, D. Fedoseev, and V. Turaev.

We construct some group systems on the set of square matrices over a field $\mathbb{k}$. Also, we define rack systems on the set $V \times G$, where V is a vector space of dimension n over $\mathbb{k}$ and G is a subgroup of $GL_n(\mathbb{k})$. Finally, we find the connection between skew braces and dimonoids.

Keywords: algebraic system, homogeneous algebraic system, groupoid, semigroup, monoid, group, semigroup system, quandle system, dimonoid, skew brace, multi-group, multi-quandle

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement no. 075-02-2023-943).

For citation: Kozlovskaya, T.A. (2024) Multi-groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 34–43. doi: 10.17223/19988621/87/4

Научная статья

Мульти-группы

Татьяна Анатольевна Козловская*Томский государственный университет, Томск, Россия, t.kozlovskaya@math.tsu.ru*

Аннотация. Определяются однородные алгебраические системы. Примерами таких систем являются полугрупповые, моноидальные и групповые системы. Они изучались в работах Ж. Лодя, А. Жучок, Т. Пирашвили и Н. Корешкова. Квандловые системы были введены и изучались в работах В. Бардакова, Д. Федосеева и В. Тураева.

В статье строятся некоторые групповые системы на множестве квадратных матриц над полем $\mathbb{k}$. Определяются рэковые системы на множестве $V \times G$ где V – векторное пространство размерности n над $\mathbb{k}$, G – подгруппа $GL_n(\mathbb{k})$. В заключение найдена связь между косыми брейсами и димоноидами.

Ключевые слова: алгебраическая система, однородная алгебраическая система, группоид, полугруппа, моноид, группа, полугрупповая система, квандловая система, димоноид, косой брейс, мульти-группа, мульти-квандл

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

Для цитирования: Козловская Т.А. Мульти-группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 34–43. doi: 10.17223/19988621/87/4

1. Introduction

In the theory of algebraic systems there exist algebraic systems with a set of one type algebraic operations. Let us give some examples of these algebraic systems.

A brace (skew brace) is a set with two group operations, which satisfy some axioms ([1, 2]). A generalization of skew braces was suggested in the paper by Bardakov–Neshchadim–Yadav [3], where brace systems were introduced as a set with a family of group operations connected by some axioms.

Dimonoids were introduced by J.L. Loday [4] in his construction of a universal enveloping algebra for the Leibniz algebra. A dimonoid is a set with two semigroup operations which are connected by a set of axioms. The construction of a free dimonoid generated by a given set was presented in [4] and applied to the study of free dialgebras and cohomology of dialgebras. Structural properties of free dimonoids have been investigated by A.V. Zhuchok in [5]. In [6], a construction of a free product of arbitrary dimonoids was presented. It generalizes the free dimonoid and describes its structure. Dimonoids are examples of duplexes which were introduced by T. Pirashvili in [7]. A duplex is an algebraic system with two associative binary operations (without added connections between these operations). T. Pirashvili constructed a free duplex generated by a given set via planar trees and proved that the set of all permutations forms a free duplex on an explicitly described set of generators.

In [8], N. Koreshkov introduced n -tuple semigroup as an algebraic system

$$S = (S, *_i, i \in I)$$

such that $(S, *_i)$ is a semigroup for any $i \in I$ and with the following axiom which connects these operations,

$$(a *_i b) *_j c = a *_i (b *_j c), \quad a, b, c \in S, \quad i, j \in I.$$

The free n -tuple semigroup of an arbitrary rank was first constructed in [9].

In the present paper we define homogeneous algebraic systems (see Definition 2.1). Particular cases of these systems are semigroup (monoid, group) system $\mathcal{G} = (G, *_i, i \in I)$, where $(G, *_i)$ is a semigroup (monoid, group) for any $i \in I$. An example of a semigroup system with two operations is a duplex. We call $\mathcal{G}$ a multi-semigroup (multi-monoid, multi-group) if the operations are connected by the following condition

$$(a *_i b) *_j c = a *_i (b *_j c), \quad a, b, c \in G, \quad i, j \in I.$$

An example of a multi-semigroup with n operations is an n -tuple semigroup [8].

V.G. Bardakov and D.A. Fedoseev [10] considered quandle systems $\mathcal{Q} = (Q, *, i \in I)$, where $(Q, *)_i$ is a quandle for any $i \in I$, and defined a multiplication $*_i *_j$ of the operations $*_i$ and $*_j$ by the rule

$$p(*_i *_j)q = (p *_i q) *_j q, \quad p, q \in Q.$$

In the general case, the algebraic system $(Q, *_i *_j)$ is not a quandle, but if the operations satisfy the axioms

$$(x *_i y) *_j z = (x *_j z) *_i (y *_j z), \quad (x *_j y) *_i z = (x *_i z) *_j (y *_i z), \quad x, y, z \in Q,$$

then $(Q, *_i *_j)$ and $(Q, *_j *_i)$ are quandles. V. Turaev called quandle systems that satisfy the last axioms for all $i, j \in I$ multi-quandles and gave them a topological interpretation (see [11]).

In 1971, V.M. Buchstaber and S.P. Novikov [12] introduced a notion of n -valued group in which the product of each pair of elements is an n -multi-set, the set of n elements with multiplicities. An appropriate survey on n -valued groups and its applications can be found in [13].

If we have a group system $\mathcal{G} = (G, *_i, i \in I)$, where $|I| = n$, we can define n -valued multiplication

$$a * b = [a *_1 b, a *_2 b, \dots, a *_n b], \quad a, b \in G,$$

and study the algebraic system $(G, *)$. In [14], connections between group systems and n -valued groups were investigated. It was proved that if all groups $(G, *_i)$ have a common unit and $(G, *)$ is an n -valued group, then $*_i = *_j$ for all $1 \leq i, j \leq n$.

In the present paper we study connections between skew braces and dimonoids and define a semigroup systems on the set of square matrices. We investigate semigroup systems on the set of matrices $M_n(\mathbb{k})$ and give an answer on a question from [14]. Also, we construct some rack systems and multi-racks on the set $V \times G$, where V is a vector space of dimension n over a field $\mathbb{k}$, G is a subgroup of $GL_n(\mathbb{k})$.

The paper is organized as follows.

In Section 2 we introduce homogeneous algebraic systems which include the algebraic systems from the introduction.

In Section 3 we construct some group systems on the set of square matrices over a field and give an answer on a question from [14].

In Section 4, rack systems on the set $V \times G$, $G \leq GL_n(\mathbb{k})$ are defined.

In Section 5, the connection between skew braces and dimonoids is established.

2. Homogeneous algebraic systems

In this section we introduce homogeneous algebraic systems.

Definition 2.1. Let $\mathcal{A} = (A, f_i, i \in I)$ be an algebraic system with a set of algebraic operations f_i of arity n_i . It is said to be an m -homogeneous I -system if all arities n_i are equal to m . In particular, if $|I| = n$, we will say about an m -homogeneous n -system. If $m = 2$, we will say instead 2-homogeneous n -system on groupoid n -system or simply on a groupoid system.

A typical example is a ring $(K, +, \cdot)$ that is a groupoid 2-system. Other examples of 2-homogeneous I -systems are a semigroup (monoid, group) system $\mathcal{G} = (G, *_i, i \in I)$, where $(G, *_i)$ is a semigroup (monoid, group) for all $i \in I$. An example of a semigroup system with two operations is a duplex. We call a system $\mathcal{G}$ a multi-semigroup (multi-monoid, multi-group) if the operations are connected by the following condition

$$(a *_i b) *_j c = a *_i (b *_j c), \quad a, b, c \in G, \quad i, j \in I.$$

An example of a multi-semigroup with n operations is an n -tuple semigroup (see [8]).

Let us give other examples of semigroup systems.

Skew braces (see [1, 2]). A triple $(G, \cdot, \circ)$, where $(G, \cdot)$ and $(G, \circ)$ are groups, is said to be a *skew (left) brace* if

$$g_1 \circ (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \circ g_2) \cdot g_1^{-1} \cdot (g_1 \circ g_3)$$

for all $g_1, g_2, g_3 \in G$, where g_1^{-1} denotes the inverse of g_1 in $(G, \cdot)$. We call $(G, \cdot)$ the *additive group* and $(G, \circ)$ the *multiplicative group* of the skew left brace $(G, \cdot, \circ)$. A skew left brace $(G, \cdot, \circ)$ is said to be a *(left) brace* if $(G, \cdot)$ is an abelian group. In this case we will use the notation $+$ instead $\cdot$ in additive group. We see that a skew left brace is an example of group system with 2 operations.

Dimonoids (see [4, 15]). A dimonoid is a set X together with two binary operations $\vdash$ and $\dashv$ satisfying the following axioms:

$$\begin{cases} x \dashv (y \vdash z) \stackrel{1}{=} (x \dashv y) \dashv z \stackrel{2}{=} x \dashv (y \vdash z), \\ (x \vdash y) \dashv z \stackrel{3}{=} x \vdash (y \vdash z), \\ (x \dashv y) \vdash z \stackrel{4}{=} x \vdash (y \vdash z) \stackrel{5}{=} (x \vdash y) \vdash z \end{cases}$$

for all $x, y, z \in X$. Observe that relations 1 and 5 are the “associativity” of the products $\vdash$ and $\dashv$ respectively.

The typical examples of dimonoid are the following.

a) Let M be a monoid. Put $D = M \times M$ and define the products by

$$\begin{aligned} (m, n) \dashv (m', n') &:= (m, nm'n'), \\ (m, n) \vdash (m', n') &:= (mnm', n'). \end{aligned}$$

Then $\mathcal{D} = (D, \dashv, \vdash)$ is a dimonoid.

b) Let G be a group and X be a G -set. The following formulas define a dimonoid structure on $X \times G$:

$$\begin{aligned} (x, g) \dashv (y, h) &:= (x, gh), \\ (x, g) \vdash (y, h) &:= (g \cdot x, gh). \end{aligned}$$

We see that a dimonoid is an example of a group system with 2 operations.

3. Group systems and multi-groups

Let $M_n(\mathbb{k})$ be a set of $n \times n$ matrices over a field $\mathbb{k}$. The next multiplication was defined in [14]:

$$A^*_{s,t,M_1,M_2} B = sAM_1B + tAM_2B, \quad s, t \in \mathbb{K}, \quad M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{K}),$$

and the following was formulated:

Question 3.1. What can we say on this multiplication? What algebraic systems one can construct using these multiplications? Is there a connection of these multiplications with non-standard matrix multiplications that were studied in [18]?

Let us find conditions under which $(M_n(\mathbb{K}),^*_{s,t,M_1,M_2})$ is a semigroup. It is need to check axiom of associativity,

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= (sAM_1B + tAM_2B) * C = \\ &= s(sAM_1B + tAM_2B)M_1C + t(sAM_1B + tAM_2B)M_2C. \end{aligned}$$

On the other side,

$$\begin{aligned} A * (B * C) &= A * (sBM_1C + tBM_2C) = \\ &= sAM_1(sBM_1C + tBM_2C) + tAM_2(sBM_1C + tBM_2C). \end{aligned}$$

We have a system

$$\begin{cases} AM_1BM_1C = AM_1BM_1C; \\ AM_2BM_1C + AM_1BM_2C = AM_1BM_2C + AM_2BM_1C; \\ AM_2BM_2C = AM_2BM_2C. \end{cases}$$

It is easy to see that $(A * B) * C = A * (B * C)$.

Lemma 3.2. The multiplication $^*_{s,t,M_1,M_2}$ is associative.

Corollary 3.3. The algebraic system $(M_n(\mathbb{K}),^*_{s,t,M_1,M_2}, s, t \in \mathbb{K}, M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{K}))$ is a semigroup system.

Let us check, is this semigroup system a multi-semigroup. Let we have two different multiplications: $* = ^*_{s,t,M_1,M_2}, \circ = \circ_{p,q,N_1,N_2}$ and check the axiom

$$(A * B)^\circ C = A * (B^\circ C).$$

The left hand side:

$$\begin{aligned} (A * B)^\circ C &= (sAM_1B + tAM_2B)^\circ C = \\ &= p(sAM_1B + tAM_2B)N_1C + q(sAM_1B + tAM_2B)N_2C. \end{aligned}$$

The right hand side:

$$\begin{aligned} A * (B^\circ C) &= A * (pBN_1C + qBN_2C) = \\ &= sAM_1(pBN_1C + qBN_2C) + tAM_2(pBN_1C + qBN_2C). \end{aligned}$$

We get a system

$$\begin{cases} AM_1BN_1C = AM_1BN_1C; \\ AM_2BN_1C = AM_2BN_1C; \\ AM_1BN_2C = AM_1BN_2C; \\ AM_2BN_2C = AM_2BN_2C. \end{cases}.$$

Since this system is true for all matrices, we obtain

Proposition 3.4. The semigroup system $(M_n(\mathbb{K}),^*_{s,t,M_1,M_2}, s, t \in \mathbb{K}, M_1, M_2 \in M_n(\mathbb{K}))$ is a multi-semigroup.

Let us find the unit element:

$$A * X = sAM_1X + tAM_2X = A.$$

It means that $t = 0, s = 1, M_1X = E \Rightarrow X = M_1^{-1}$.

Hence, $A * X = AM_1X, E^{(*)} = M_1^{-1}$. On the other side, $X * A = XM_1A = A$.

Lemma 3.5. We have the unit element only for multiplication $A * B = AMB$, $\det M \neq 0, E^{(*)} = M^{-1}$.

The inverse element $A * Y = E^{(*)} \Leftrightarrow AMY = M^{-1}$. Hence, $Y = M^{-1}A^{-1}M^{-1}$.

Theorem 3.6. 1) Let $M \in M_n(\mathbb{k}), \det M \neq 0$. Then $(GL_n(\mathbb{k}), *_M)$ is a group with the product $A *_M B = AMB$, with unit element $E^{(*)} = M^{-1}$ and inverse $\bar{A}^{(*)} = M^{-1}A^{-1}M^{-1}$.

2) The algebraic system $(GL_n(\mathbb{k}), *_M, M \in GL_n(\mathbb{k}))$ is a group system.

4. Rack systems

Some examples of quandle systems and multi-quandles can be found in [10, 11]. In this section we give some other examples. At first, recall basic definitions.

Definition 4.1. ([16, 17]).

A *quandle* is a non-empty set Q with a binary operation $(x, y) \mapsto x * y$ satisfying the following axioms:

(Q1) $x * x = x$ for all $x \in Q$,

(Q2) for any $x, y \in Q$ there exists a unique $z \in Q$ such that $x = z * y$,

(Q3) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ for all $x, y, z \in Q$.

An algebraic system satisfying only (Q2) and (Q3) is called a *rack*. Many interesting examples of quandles come from groups.

Example 4.2.

1. If G is a group, m is an integer, then the binary operation $a *_m b = b^{-m}ab^m$ turns G into the quandle $\text{Conj}_m(G)$ called the *m-conjugation quandle* on G . If $m = 1$, this quandle is called a *conjugation quandle* and is denoted as $\text{Conj}(G)$.

2. A group G with the binary operation $a * b = ba^{-1}b$ turns the set G into the quandle $\text{Core}(G)$ called the *core quandle* of G . In particular, if $G = \mathbb{Z}_n$, the cyclic group of order n , then it is called the *dihedral quandle* and denoted by R_n .

3. Let G be a group and $\varphi \in \text{Aut}(G)$. Then the set G with the binary operation $a *_\varphi b = \varphi(ab^{-1})b$ forms a quandle $\text{Alex}(G, \varphi)$ referred as the *generalized Alexander quandle* of G with respect to φ .

From the last example, it follows that if $Q = GL_n(\mathbb{k}), \varphi \in \text{Aut}(GL_n(\mathbb{k}))$, then we can define a quandle system $(Q, *_\varphi, \varphi \in \text{Aut}(GL_n(\mathbb{k})))$.

In the present section we study the following question: what rack (quandle) systems can be defined on $V \times G$, where V is a vector space of dimension n over a field $\mathbb{k}$, G is a subgroup of $GL_n(\mathbb{k})$? On the set $Q = V \times G$, we can define the operation

$$(a, A)^\circ(b, B) = (Ab, \varphi(AB^{-1})B), \quad a, b \in V, \quad A, B \in G, \quad \varphi \in \text{Aut}(G).$$

In this case

$$(a, A)^\circ(a, A) = (Aa, \varphi(E)A) = (Aa, A).$$

It means that $A = E$; hence, $G = \{E\}$ is the trivial group.

The second quandle axiom:

$$(u, X)^\circ(a, A) = (b, B) \Leftrightarrow (u, X)^\circ(a, A) = (Xa, \varphi(XA^{-1})A).$$

Hence,

$$Xa = b, \quad X = \varphi^{-1}(BA^{-1})A.$$

It means that such element (u, X) exists but it is not unique.

Let us check the third quandle axiom:

$$((a, A)^\circ(b, B))^\circ(c, C) = ((a, A)^\circ(c, C))^\circ((b, B)^\circ(c, C)).$$

The left-hand side:

$$((a, A)^\circ(b, B))^\circ(c, C) = (Ab, \varphi(AB^{-1})B)^\circ(c, C) = (\varphi(AB^{-1})Bc, \varphi(\varphi(AB^{-1})BC^{-1})C).$$

The right-hand side:

$$\begin{aligned} ((a, A)^\circ(c, C))^\circ((b, B)^\circ(c, C)) &= (Ac, \varphi(AC^{-1})C)^\circ(Bc, \varphi(BC^{-1})C) = \\ &= (\varphi(AC^{-1})CBc, \varphi(\varphi(AC^{-1})C)). \end{aligned}$$

We have the system

$$\begin{cases} \varphi(AB^{-1})Bc = \varphi(AC^{-1})CBc, \\ \varphi(\varphi(AB^{-1})BC^{-1})C = \varphi(\varphi(AC^{-1})C). \end{cases}$$

Since $A * B = \varphi(AB^{-1})B$ satisfies the quandle operation, the second equation is true. Consider the first equation of the system. It is equivalent to the equality

$$\varphi(AB^{-1}CA^{-1}) = C,$$

which must be true for arbitrary $A, B, C \in G$. Evidently, this is true for the trivial group.

Let us define the operation (see [19])

$$(a, A)^\circ(b, B) = (Ab, ABA^{-1}), \quad a, b \in V, \quad A, B \in G,$$

and check the left self-distributivity,

$$(a, A)^\circ((b, B)^\circ(c, C)) = ((a, A)^\circ(b, B))^\circ((a, A)^\circ(c, C)).$$

Since

$$(a, A)^\circ((b, B)^\circ(c, C)) = (a, A)^\circ(Bc, BCB^{-1}) = (ABc, ABCB^{-1}A^{-1})$$

and

$$((a, A)^\circ(b, B))^\circ((a, A)^\circ(c, C)) = (Ab, ABA^{-1})^\circ(Ac, ACA^{-1}) = (ABc, ABCB^{-1}A^{-1}),$$

the left self-distributivity holds.

Let us take $n \in \mathbb{Z}$ and define more general operation,

$$(a, A)_n^\circ(b, B) = (A^n b, A^n B A^{-n}), \quad a, b \in V, \quad A, B \in G.$$

Check the left self-distributivity,

$$(a, A)_n^\circ((b, B)_n^\circ(c, C)) = (a, A)_n^\circ(B^n c, B^n C B^{-n}) = (A^n B^n c, A^n B^n C B^{-n} A^{-n}),$$

$$\begin{aligned} ((a, A)_n^\circ(b, B))_n^\circ((a, A)_n^\circ(c, C)) &= (A^n b, A^n B A^{-n})_n^\circ(A^n c, A^n C A^{-n}) = \\ &= (A^n B^n c, A^n B^n C B^{-n} A^{-n}). \end{aligned}$$

Hence, the operation $(a, A)^\circ_n(b, B) = (A^n b, A^n B A^{-n})$ is left self-distributive.

Let us check the left divisibility axiom: $(a, A)^\circ_n(u, X) = (b, B)$. We have

$$(a, A)^\circ_n(u, X) = (A^n u, A^n X A^{-n}).$$

Hence,

$$\begin{cases} u = A^{-n} b, \\ X = A^{-n} B A^n. \end{cases}$$

Since this system has a unique solution, the left divisibility holds.

Summarizing the previous calculations, we get

Theorem 4.3. Let $Q = (V, G)$, where V is a vector space of dimension n over a field $\mathbb{k}$, G be a subgroup of $GL_n(\mathbb{k})$. Then the algebraic system $(Q, *_n, n \in \mathbb{Z})$, where

$$(a, A)^\circ_n(b, B) = (A^n b, A^n B A^{-n}), \quad a, b \in V, A, B \in G,$$

satisfies the following axioms:

1) left self-distributivity,

$$(a, A)^\circ_n((b, B)^\circ_n(c, C)) = ((a, A)^\circ_n(b, B))^\circ_n((a, A)^\circ_n(c, C)), \quad a, b, c \in V, A, B, C \in G.$$

2) left divisibility,

for any $(a, A), (b, B) \in Q$ there is unique $(u, X) \in Q$ such that

$$(a, A)^\circ_n(u, X) = (b, B).$$

From this theorem follows

Corollary 4.4. The algebraic system $(Q, *_n^{op}, n \in \mathbb{Z})$, where the opposite operations are defined by the rules

$$(a, A) *_n^{op}(b, B) = (b, B) *_n(a, A)$$

is a rack system.

5. Connection between skew braces and dimonoids

In this section we find some connections between skew braces and dimonoids.

Proposition 5.1. Let $(G, \cdot)$ be a group.

1) If $a \circ b = ab$, then $(G, \cdot, \circ)$ is a skew brace. If $a \vdash b = a \dashv b = ab$, then we get a dimonoid.

2) If $a \circ b = ba$, then $(G, \cdot, \circ)$ is a skew brace. If $a \vdash b = ab$ and $a \dashv b = ba$, then $(G, \dashv, \vdash)$ is not a dimonoid. $\square$

The binary operation $\vdash$ is associative since it corresponds to the product in group G .

Let us check the following axiom:

$$(a \dashv b) \dashv c = a \dashv (b \dashv c).$$

So let us compute both sides of equation:

$$(ba) \dashv c = c(ba),$$

$$a \dashv (cb) = (cb)a.$$

Since they are the same, the operation is associative.

Let us check the following axiom: $a \dashv (b \dashv c) = a \dashv (b \vdash c)$. We have $cba = bca$.

Therefore, it must satisfy $bc = cb$ and this group is Abelian group.

It means that if $a \vdash b = a \vdash b = ab$, then $(G, \vdash, \dashv)$ is a dimonoid. ■

If we have a skew brace $(G, \cdot, \circ)$, then we can define operations $a \vdash b = ab$, $a \dashv b = a^\circ b$ and formulate the question: is $(G, \vdash, \dashv)$ a dimonoid?

The next example shows that in a general case the answer is negative.

Example 5.2. Let us take the brace $(\mathbb{Z}, +, \circ)$, where $(\mathbb{Z}, +)$ is the infinite cyclic group and $a^\circ b = a + (-1)^a b$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

Note that

$$a^\circ b = a + (-1)^a b = \begin{cases} a + b, & \text{if } a \text{ is even;} \\ a - b, & \text{if } a \text{ is odd.} \end{cases}$$

Put

$$a \vdash b = a + b, a \dashv b = a^\circ b.$$

It is evident that the associativity holds for the binary operations $\vdash$ and $\dashv$. Let us check that

$$a \dashv (b \vdash c) = a \dashv (b \vdash c).$$

We have that

$$a^\circ(b^\circ c) = a^\circ \begin{cases} b + c, & \text{if } b \text{ is even;} \\ b - c, & \text{if } b \text{ is odd.} \end{cases} = \begin{cases} a + b + c & \text{if } a \text{ and } b \text{ are even;} \\ a - b - c & \text{if } a \text{ is odd and } b \text{ is even;} \\ a + b - c & \text{if } a \text{ is even and } b \text{ is odd;} \\ a - b + c & \text{if } a \text{ and } b \text{ are odd.} \end{cases}$$

On the other side we get

$$a^\circ(b + c) = \begin{cases} a + b + c, & \text{if } a \text{ is even;} \\ a - b - c, & \text{if } a \text{ is odd.} \end{cases}$$

Let us take $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Then $a \dashv (b \vdash c) = a + b - c = 1$. On the other side, $a \dashv (b \vdash c) = a + b + c = 9$.

Therefore, the skew brace $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ is not a dimonoid.

At the end, we formulate the following questions.

Question 5.3. Under which conditions a skew brace $(G, \cdot, \circ)$ is a dimonoid with respect to the operations $a \vdash b = ab$, $a \dashv b = a^\circ b$?

Question 5.4. Let $\mathcal{G} = (G, *_i, i \in I)$ be a semigroup system. Define a product of semigroup operations,

$$g(*_i *_j)h = (g *_i h) *_j h, g, h \in G.$$

Find necessary and sufficient conditions under which $(Q, *_i *_j)$ is a semigroup.

References

1. Rump W. (2007) Braces, radical rings and the quantum Yang–Baxter equations, *Journal of Algebra*. 307. pp. 153–170.
2. Guarnieri L., Vendramin L. (2017) Skew braces and the Yang–Baxter equation, *Mathematics of Computation*. 86(307). pp. 2519–2534.
3. Bardakov V.G., Neshchadim M.V., Yadav M.K. (2023) Symmetric skew braces and brace systems. *Forum Mathematicum*. 35(3).

4. Loday J.-L. (2001) *Dialgebras*. In: *Dialgebras and Related Operads. Lecture Notes in Mathematics*. 1763. pp. 7–66. Berlin: Springer.
5. Zhuchok A.V. (2011) Free dimonoids. *Ukrainian Mathematical Journal*. 63. pp. 196–208.
6. Zhuchok A.V. (2013) Free products of dimonoids. *Quasigroups and Related Systems*. 21(2). pp. 273–278.
7. Pirashvili T. (2003) Sets with two associative operations. *Central European Journal of Mathematics*. 1(2). pp. 169–183.
8. Koreshkov N.A. (2008) n -tuple algebras of associative type. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 52(12). pp. 28–35.
9. Zhuchok A.V. (2018) Free n -tuple Semigroups. *Mathematical Notes*. 103(5). pp. 737–744.
10. Bardakov V.G., Fedoseev D.A. (2022) Multiplication of quandle structures. arXiv:2204.12571.
11. Turaev V. (2022) Multi-quandles of topological pairs. arXiv:2205.00951.
12. Buchstaber V.M., Novikov S.P. (1971) Formal groups, power systems and Adams operators. *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 84 (126). pp. 81–118.
13. Buchstaber V.M. (2006) n -valued groups: theory and applications. *Moscow Mathematical Journal*. 6(1). pp. 57–84.
14. Bardakov V.G., Kozlovskaya T.A., Talalaev D.V. n -valued quandles and associated bialgebras, in progress.
15. Loday J.-L. (1995) Algebres ayant deux operations associatives (dialgebres). *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Series I – Mathematics*. 321(2). pp. 141–146.
16. Matveev S. (1984) Distributive groupoids in knot theory, *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 47(1). pp. 73–83.
17. Joyce D. (1982) A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 23(1). pp. 37–65.
18. Bardakov V.G., Simonov A.A. (2013) Rings and groups of matrices with a nonstandard product. *Siberian Mathematical Journal*. 54(3). pp. 393–405.
19. Kinyon M.K. (2007) Leibniz algebras, Lie racks, and digroups. *Journal of Lie Theory*. 17(1). pp. 99–114.

Information about the author:

Kozlovskaya Tatyana A. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Tomsk State University, Associate Professor of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: t.kozlovskaya@math.tsu.ru

Сведения об авторе:

Козловская Татьяна Анатольевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, доцент кафедры геометрии Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: t.kozlovskaya@math.tsu.ru

The article was submitted 02.11.2023; accepted for publication 12.02.2024

Статья поступила в редакцию 02.11.2023; принята к публикации 12.02.2024

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/87/5

**Моделирование упругопластического разрушения
компактного образца****Николай Степанович Астапов¹, Владимир Дмитриевич Кургузов²**^{1,2} *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*¹ *nika@hydro.nsc.ru*² *kurguzov@hydro.nsc.ru*

Аннотация. Прочность компактного образца при нормальном отрыве исследована с помощью модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла, использующей дополнительный параметр – поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). Предложен двухпараметрический критерий разрушения для трещин I типа в упругопластическом материале, включающий в себя деформационный критерий, который сформулирован в вершине трещины, а также силовой критерий, сформулированный в вершине модельной трещины. Подробно проанализированы определяющие уравнения аналитической модели в зависимости от характерного линейного размера структуры материала. Получены простые формулы для критической разрушающей нагрузки и длины зоны предразрушения при квазихрупком и квазивязком разрушении. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения компактного образца в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

Ключевые слова: хрупкое, квазихрупкое и квазивязкое разрушение, двухпараметрический критерий разрушения, упругопластический материал, предельная деформация

Для цитирования: Астапов Н.С., Кургузов В.Д. Моделирование упругопластического разрушения компактного образца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 44–58. doi: 10.17223/19988621/87/5

Original article

Modeling of elasto-plastic fracture of a compact specimen**Nikolay S. Astapov¹, Vladimir D. Kurguzov²**^{1,2} *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of RAS,
Novosibirsk, Russian Federation*

¹ nika@hydro.nsc.ru

² kurguzov@hydro.nsc.ru

Abstract. The strength of a compact specimen under normal fracture (fracture mode I) is studied within the framework of the Neuber–Novozhilov approach. A model of an ideal elasto-plastic material with limiting relative elongation is chosen as the model of the deformable solid. This class of materials includes low-alloy steels that are used in structures operating at temperatures below the cold brittleness threshold. The crack propagation criterion is formulated using the modified Leonov–Panasyuk–Dugdale model, which uses an additional parameter, i.e., the diameter of the plasticity zone (the width of the pre-fracture zone). In the case of stress field singularity occurring in the vicinity of the crack tip, a two-parameter (coupled) criterion for quasi-brittle fracture is developed for type I cracks in an elastoplastic material. The coupled fracture criterion includes the deformation criterion attributed to the crack tip and the force criterion attributed to the model crack tip. The lengths of the original and model cracks differ by the length of the pre-fracture zone. Diagrams of the quasi-brittle fracture of the specimen under plane strain and plane stress conditions are constructed. The constitutive equations of the analytical model are analyzed in terms of the characteristic linear dimension of the material structure. Simple formulas applicable to verification calculations of the critical fracture load and pre-fracture zone length for quasi-brittle and quasi-ductile fractures are obtained. The parameters in the presented model of quasi-brittle fracture are analyzed. It is proposed to select the parameters of the model according to the approximation of the uniaxial tension diagram and the critical stress intensity factor.

Keywords: brittle fracture, quasi-brittle fracture, quasi-ductile fracture, two-parameter fracture criterion, elasto-plastic material, ultimate strain

For citation: Astapov, N.S., Kurguzov, V.D. (2024) Modeling of elasto-plastic fracture of a compact specimen. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 44–58. doi: 10.17223/19988621/87/5

Введение

Неизбежное наличие трещин является одним из важных факторов, вызывающих разрушение в машиностроительных конструкциях. Поэтому проблемы построения простых, пригодных для инженерных расчетов аналитических моделей процесса разрушения материалов и конструкций являются актуальными [1–5]. Отметим, что при использовании когезионной модели [4] отсутствуют параметры, описывающие поперечник зоны предразрушения и структуру самой зоны предразрушения. Однако трещины часто оказываются межзеренными, и наличие периодической структуры существенно влияет на раскрытие трещин. В [5] показано, что критерии разрушения, учитывающие характерный размер структуры материала, позволяют расширить область применения по сравнению с традиционными критериями.

Настоящая публикация является естественным продолжением и обобщением работ [6–8] по исследованию распространения трещины. Представление зоны предразрушения в виде прямоугольника получено с использованием модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла (ЛПД) на основе подхода Нейбера–Новожилова для материалов со структурой. Учет характерного линейного размера материала позволил вывести простые, пригодные в инженерных приложениях соотношения для критической нагрузки и критической длины зоны

предразрушения, а также построить диаграммы разрушения. Предлагаемая модель использует неклассическую схему разрушения материала, когда кроме сплошного и разрушенного состояний рассматривается некоторое промежуточное состояние материала с накопленными повреждениями. Полученные в работе результаты дают возможность оценивать несущую способность конструкций с трещинами в более широком диапазоне условий нагружения, чем это позволяют однопараметрические критерии механики разрушения.

Постановка задачи

Рассмотрим компактный образец шириной w , высотой H с начальной трещиной длины l_0 , растягиваемый силами P (рис. 1). Размеры образца соответствуют рекомендациям в [9, 10]. Поверхность трещины свободна от нагрузок, реализуется I мода разрушения. Материал образца предполагается идеальным упругопластическим материалом с $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммой одноосного деформирования, показанной на рис. 2. Здесь σ_Y – предел текучести, ε_0 – максимальная упругая деформация, ε_1 – предельная деформация до разрушения. Введем параметр $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_0$, характеризующий отношение предельной неупругой деформации к максимальной упругой. Величину $\bar{\varepsilon}_1$ можно трактовать как относительную длину площадки текучести (коротко – показатель пластичности). Материал образца обладает определенной структурой, имеет квазихрупкий или квазивязкий тип разрушения, причем характерный линейный размер d структурного элемента (например, средний диаметр зерна, эффективный диаметр структур разрушения [6]) предполагается известным.

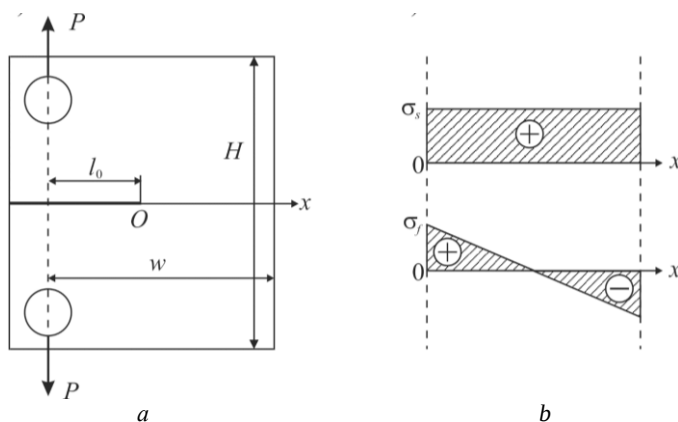


Рис. 1. Схема нагружения компактного образца (а); эпюры номинальных напряжений при растяжении σ_s и изгибе σ_f (b)

Fig. 1. (a) Loading scheme of a compact specimen and (b) diagrams of nominal stresses for a specimen under tension σ_s and bending σ_f

Примем простейшую аппроксимацию реальной $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы исследуемого материала двухзвенной ломаной. При такой аппроксимации исходный материал подменяется идеальным упругопластическим материалом, имеющим предельную деформацию. При достижении предельной деформации материал разрушается.

На рис. 2, а изображены исходная (σ – ϵ)-диаграмма (кривая 1) и ее двухзвенная аппроксимация (кривая 2). Параметры этой аппроксимации подбираются так, чтобы площади под кривыми 1 и 2 совпадали. Кривая 2 полностью определяется следующими параметрами: E – модуль Юнга, σ_Y – предел текучести при одноосном растяжении, ϵ_1 – предельная деформация. Максимальная упругая деформация ϵ_0 связана с пределом текучести соотношением $\sigma_Y = E\epsilon_0$.

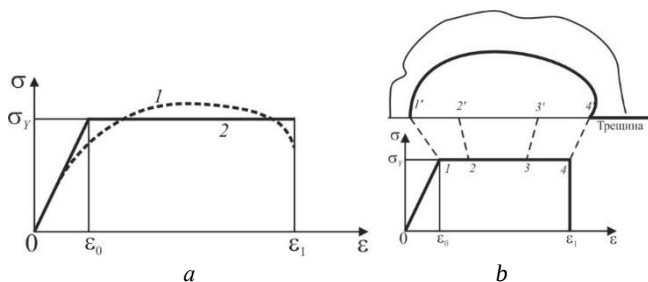


Рис. 2. Исходная (σ – ϵ)-диаграмма материала (кривая 1) и ее (кривая 2) двухзвенная аппроксимация (a); соответствие точек 1–4 диаграммы деформирования точкам 1'–4' зоны предразрушения в окрестности вершины трещины (b)

Fig. 2. (a) Initial (σ – ϵ) diagram of the material (curve 1) and its bilinear approximation (curve 2); (b) the correspondence of points 1–4 of the deformation diagram to points 1'–4' of the pre-fracture zone in the vicinity of the crack tip

Модифицированная модель Леонова–Панасюка–Дагдейла

Кроме реальной трещины длиной l_0 введем в рассмотрение модельную трещину, длина которой $l = l_0 + b$, причем зона предразрушения длиной b расположена на продолжении реальной трещины. Задача о разрушении имеет два линейных масштаба: 1) диаметр зерна d – постоянная величина, определяемая структурой материала; 2) длина зоны предразрушения b , которая зависит от длины реальной трещины, интенсивности нагружения и механических свойств материала.

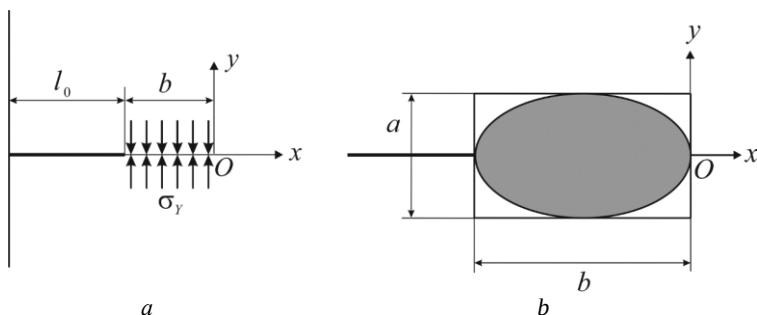


Рис. 3. Модифицированная модель ЛПД: нормальные напряжения, действующие на продолжении модельной трещины (a); аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (плоское напряженное состояние) (b)

Fig. 3. (a) Modified LPD model: normal stresses along the extension of the model crack and (b) the approximation of a plastic zone by a rectangular pre-fracture zone (plane stress)

Подчеркнем, что при однократном нагружении квазихрупких материалов критическая длина зоны предразрушения b_c – вполне определенный параметр ($l_c = l_0 + b_c$ – критическая длина макротрещины). На рис. 3 показаны нормальные напряжения $\sigma_y = \sigma_Y$, действующие в модифицированной модели ЛПД [6–8] на продолжении трещины (а), и аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (б). Заметим, что в классической модели ЛПД [11] поперечник пластической зоны $a = 0$. Напряжения $\sigma_y = \sigma_Y$, действующие на берегах модельной трещины в зоне предразрушения, препятствуют раскрытию трещины и тем самым устраняют сингулярность поля напряжений в окрестности ее вершины.

Сдвоенный критерий разрушения

В соответствии с предлагаемой модификацией модели ЛПД надо различать вершины реальной и модельной трещин. На рис. 2, б приведена схема, качественно поясняющая взаимосвязь между точками 1, 2, 3, 4 на $(\sigma-\epsilon)$ -диаграмме и точками 1', 2', 3', 4' в зоне предразрушения, расположенными на продолжении реальной трещины слева от нее. Вне зоны предразрушения материал деформируется упруго, на границе этой зоны он начинает деформироваться неупруго, при этом точки зоны предразрушения находятся в области неупругого деформирования материала. В модели ЛПД предполагается, что на продолжении модельной трещины реализуется одноосное растяжение [11], поскольку к берегам трещины-разреза приложены постоянные напряжения σ_Y , которые притягивают берега друг к другу и, следовательно, действуют на материал растягивающим образом. В докритическом состоянии материал в вершине реальной трещины претерпевает удлинение $\epsilon < \epsilon_1$, которое в критическом состоянии совпадает с критическим удлинением $\epsilon = \epsilon_1$ (см. в точке 4 на рис. 2, б). Пластическая зона в окрестности вершины трещины приближенно показана на рис. 3, б для случая плоского напряженного состояния.

Для построения модели разрушения компактного образца воспользуемся интегральным критерием разрушения Нейбера–Новожилова [7]:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = \sigma_Y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$\nu(-b_c) = \delta_c, \quad x < 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_y(x, 0)$ – нормальные напряжения на продолжении модельной трещины; Оху – прямоугольная система координат с началом в вершине модельной трещины, ось Ох направлена вдоль трещины (см. рис. 3, а); $\nu(x) = 2\nu(x, 0)$ – раскрытие модельной трещины ($x < 0$); δ_c – критическое раскрытие модельной трещины; при величине раскрытия, равной критическому значению, разрушается структура материала в вершине реальной трещины, b_c – критическая длина зоны предразрушения. По терминологии Новожилова критерий разрушения (1) называется необходимым, а совокупность условий (1), (2) – достаточным критерием разрушения; критические величины, полученные по достаточному и необходимому критериям разрушения, помечены нижними индексами с и 0 соответственно. Критерий (1) называется необходимым, потому что он контролирует начало про-

цесса разрушения, критерий (1), (2) называется достаточным, поскольку при выполнении обоих условий (1) и (2) происходит окончательное разрушение образца. Предлагаемый критерий (1), (2) является сдвоенным: деформационный критерий разрушения (2) сформулирован в вершине исходной трещины, а силовой критерий (1) для нормальных напряжений с учетом осреднения сформулирован в вершине модельной трещины.

Построение диаграмм квазихрупкого разрушения

Поле нормальных напряжений $\sigma_y(x)$ на продолжении модельной трещины $x > 0$ можно представить в виде суммы двух слагаемых [12]:

$$\sigma_y(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_{nom}, \quad (3)$$

где $\sigma_{nom} = \sigma_s + \sigma_f$ – номинальные напряжения, иначе оценка регулярной части поля напряжений в окрестности вершины модельной трещины; σ_s и σ_f – номинальные напряжения при растяжении и изгибе соответственно (см. рис. 1, b); $K_I = K_{Ip} + K_{Ib} > 0$ – суммарный КИН; $K_{Ip} > 0$ – КИН, порождаемый приложенными к компактному образцу силами P ; $K_{Ib} < 0$ – КИН, порождаемый постоянными напряжениями σ_y , действующими в зоне предразрушения. Первое и второе слагаемые в соотношении (3) – сингулярная и регулярная части решения соответственно. Первое равенство (1) сдвоенного критерия контролирует достижение осредненными напряжениями на продолжении модельной трещины предела текучести σ_y , а второе равенство (2) сдвоенного критерия описывает нормальный отрыв в вершине реальной трещины.

Выражение КИН K_{Ip} , обусловленного заданными условиями испытаний компактных образцов, можно представить в виде [9. С. 35; 13. С. 363]:

$$K_{Ip} = \frac{P}{tw} \sqrt{\pi l} Y_s(\xi), \quad (4)$$

где $Y_s(\xi) = 16,7 - 104,375\xi + 369,544\xi^2 - 573,781\xi^3 + 360,517\xi^4$, $\xi = l/w$. КИН K_{Ib} вычисляется следующим образом [9. С. 117; 13. С. 114]:

$$K_{Ib} = -\sigma_y \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{b}{l}\right). \quad (5)$$

Интегрируя в (1) с учетом (3), находим

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + \sigma_s + \sigma_f \left(1 - \frac{d}{w-l}\right). \quad (6)$$

В приближении сопротивления материалов номинальные напряжения σ_s и σ_f представим так:

$$\sigma_s = \frac{P}{t(w-l)} = \frac{\sigma}{1-l/w}, \quad \sigma_f = \frac{3P(w+l)}{t(w-l)^2} = 3\sigma \frac{1+l/w}{(1-l/w)^2}, \quad \sigma = \frac{P}{tw}. \quad (7)$$

Тогда критерий (1) с учетом (6), (7) запишется в виде:

$$K_I \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + Y_r \sigma_c = \sigma_y, \quad (8)$$

$$Y_r = \frac{w}{w-l_c} + 3 \frac{wl_c}{(w-l_c)^2} \left(1 - \frac{d}{w-l_c} \right), \quad (9)$$

где $\sigma_c = P_c / (tw)$ – критическое напряжение, P_c – критическая нагрузка, l_c – критическая длина трещины.

Преобразуем (8), используя для КИН $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ соотношения (4), (5):

$$\sqrt{\pi l_c} \left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{2}{\pi d}} = (1 - Y_r \bar{\sigma}_c). \quad (10)$$

Здесь $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_Y$ – безразмерное критическое напряжение, b_c – критическая длина зоны предразрушения.

Величину раскрытия трещины $2\nu(x)$ в уравнении (2) представим в виде [11]:

$$\nu(x) = \frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{-2x}{\pi}}, \quad x \leq 0, \quad (11)$$

где κ – параметр вида напряженного состояния: $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния. Модуль сдвига материала G дается формулой $G = E / (2(1 + \nu)) = \sigma_Y / (2\varepsilon_0(1 + \nu))$, так как для идеального упругопластического материала $E = \sigma_Y / \varepsilon_0$. Критическое раскрытие модельной трещины δ_c в соотношении (2) зависит от запаса пластичности $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ исследуемого материала и ширины зоны предразрушения a в вершине реальной трещины. Будем вычислять раскрытие по формуле

$$\delta_c = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a, \quad (12)$$

где m – поправочный коэффициент.

Конечно, границы реальных пластических зон в окрестности вершины трещины лишь приближенно похожи на конфигурации, изображенные в [11]. При плоском напряженном состоянии с увеличением нагрузки узкая область пластических деформаций распространяется прямолинейно от вершины трещины по ее оси, принимая форму, похожую на узкий вытянутый прямоугольник. Такую форму пластической зоны, особенно при поперечном сдвиге, и преимущественное направление распространения трещины вдоль ее оси можно наблюдать как в численных, так и в лабораторных экспериментах. В связи с этим в работе [8] для уточнения выражения поперечника зоны предразрушения в соотношение (12) введен поправочный коэффициент m . Для определения величины этого коэффициента необходимо использовать непосредственно данные численного либо лабораторного эксперимента.

Поперечник a зоны предразрушения в (12) полагаем пропорциональным удвоенному максимальному размеру пластической зоны для трещины нормального отрыва в идеально пластических телах [14. С. 290]:

$$a = \frac{9(1 - \nu)}{2\sqrt{2}(2 + \pi)} \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2 = q(\nu) \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (13)$$

Это оценка для плоской деформации. Для плоского напряженного состояния $q = \pi / 4$ [14. С. 282]. Например, при $\nu = 0.33$ получим $q = 0.415$ для плоской

деформации и $q = 0.785$ для плоского напряженного состояния. Критическая величина раскрытия модельной трещины δ_c в соотношении (12) соответствует переходу материала в вершине реальной трещины в критическое состояние и его разрушению.

Подставляя выражения (11)–(13) в уравнение (2), получим уравнение

$$\frac{\kappa+1}{2G} K_{Ic} \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) q \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (14)$$

Учитывая выражение $G = \sigma_Y / (2\varepsilon_0(1+\nu))$ и используя для $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ соотношения (4), (5), запишем уравнение (14) в виде:

$$\sqrt{\pi l_c} \left(Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right) \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = \frac{mq \bar{\varepsilon}_1}{(\kappa+1)(1+\nu)} (\sqrt{\pi l_c} Y_s \bar{\sigma}_c)^2, \quad (15)$$

где $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_0$ – параметр, характеризующий запас пластичности при основном растяжении.

Теперь систему уравнений (10), (15), равносильную исходной системе уравнений (1), (2) при указанном выборе выражений для нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$, раскрытия трещины $2\nu = 2\nu(x)$ и $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$, можно записать в виде:

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] = (1 - Y_r \bar{\sigma}_c) \sqrt{\frac{d}{2l_c}}, \quad (16)$$

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{b_c}{l_c}} = \frac{\pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2}{2\sqrt{2}}, \quad (17)$$

где $p = 2q / [(\kappa+1)(1+\nu)]$. В частности, при плоском напряженном состоянии $p = q / 2 = \pi / 8$, при плоской деформации $p = q / [2(1-\nu^2)] = 9 / [4\sqrt{2}(2+\pi)(1+\nu)]$. Таким образом, получена система двух уравнений (16), (17) с двумя неизвестными $\sqrt{b_c / l_c}$ и $\bar{\sigma}_c$. Исключая выражение в квадратных скобках из системы уравнений (16), (17), находим точное выражение для безразмерной критической длины зоны предразрушения $\bar{b}_c = b_c / l_c$

$$\sqrt{\bar{b}_c} = \pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2 \sqrt{\bar{l}_c} / (2(1 - Y_r \bar{\sigma}_c)), \quad (18)$$

где $\bar{l}_c = l_c / d$ – безразмерная критическая длина трещины.

Используя приближение $\arccos(1 - b_c / l_c) \approx \sqrt{2b_c / l_c}$, погрешность которого не превышает 5% при $0 \leq b_c / l_c \leq 0.55$, запишем систему уравнений (16), (17) в виде:

$$Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{2b_c} = (1 - Y_r \bar{\sigma}_c) / \sqrt{2\bar{l}_c}, \quad (19)$$

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{2b_c} \right] \sqrt{\bar{b}_c} = \pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2 / 2\sqrt{2}. \quad (20)$$

Заменяя в (19) $\sqrt{\bar{b}_c}$ выражением (18), получим квадратное уравнение относительно $\bar{\sigma}_c$

$$\left(Y_r^2 + hY_s^2 + \sqrt{2\bar{l}_c}Y_sY_r\right)\bar{\sigma}_c^2 - \left(2Y_r + \sqrt{2\bar{l}_c}Y_s\right)\bar{\sigma}_c + 1 = 0,$$

где $h = 2\bar{l}_c mp \bar{\epsilon}_1$, из которого найдем два приближенных значения критической разрушающей нагрузки $\bar{\sigma}_c$

$$\bar{\sigma}_{c\pm} = \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{\bar{l}_c}{2}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4mp \bar{\epsilon}_1} \right) \right]^{-1}. \quad (21)$$

Величина $\bar{\sigma}_{c+}$, когда перед корнем выбирается знак «+», соответствует квазихрупкому разрушению ($b/l \ll 1$), величина $\bar{\sigma}_{c-}$ соответствует квазивязкому типу разрушения [8]. Формула (21) предлагаемой модели имеет смысл, если $\bar{\epsilon}_1 \leq 1/(4mp)$ для однородного материала.

Из приближенного уравнения (19) получим выражение для $\sqrt{\bar{b}_c}$:

$$\sqrt{\bar{b}_c} = \pi \left(\left(Y_r + Y_s \sqrt{2\bar{l}_c} \right) \bar{\sigma}_c - 1 \right) / \left(4\sqrt{\bar{l}_c} \right), \quad (22)$$

а из уравнения (20) получим два значения критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{\bar{b}_{c\pm}} = \pi mp \bar{\epsilon}_1 Y_s \bar{\sigma}_c / \left(\sqrt{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4mp \bar{\epsilon}_1} \right) \right), \quad (23)$$

причем квазихрупкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\bar{b}_{c+}}$, когда в равенстве (23) перед корнем выбирается знак «+», квазивязкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\bar{b}_{c-}}$. Интересно отметить, что, выбирая любое из приближенных выражений (22) или (23), получим из системы уравнений (19), (20) точно такое же выражение для критической разрушающей нагрузки, какое дается формулой (21). А исключая выражение в квадратных скобках из приближенной системы уравнений (19), (20), получим для критической длины $\bar{b}_c$ зоны предразрушения такое же выражение (18), какое получено из точной системы уравнений (16), (17). Напомним, что уравнения (16), (19) так же, как исходное уравнение (1), выполняются для любых нагрузок σ_∞ вблизи граничных точек зоны пластичности (точка 1' на рис. 2, b). Поэтому для любых нагрузок σ_∞ , при которых возникает зона пластичности в окрестности вершины трещины, справедлива и формула (22), которая является следствием равенства (19). Однако уравнения (17) и (20) так же, как и уравнение (2), выполняются только для критических разрушающих нагрузок $\bar{\sigma}_c$. Кроме того, приближенные выражения (11) и (12) для раскрытия трещины $2\nu(x)$ и критического раскрытия δ_c вносят дополнительную погрешность в уравнения (17), (20), которые используются при выводе формул (18) и (23). Таким образом, получены формула (21) для критической разрушающей нагрузки и три различные формулы (18), (22), (23), выражающие критическую длину зоны предразрушения через критическую нагрузку. Результаты численного моделирования подтверждают применимость формулы (22) во всем диапазоне нагрузок.

В выражении критической нагрузки (21) возможен предельный переход при $\bar{\epsilon}_1 \rightarrow 0$, что позволяет рассматривать разрушение хрупких материалов (в таких

материалах зона предразрушения отсутствует: $b = 0$). С использованием необходимого критерия разрушения (1) в случае хрупкого разрушения критические напряжения вычисляются по формуле

$$\bar{\sigma}_{c0} = \left(Y_r + Y_s \sqrt{\frac{2l_0}{d}} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Проанализируем выражение критической нагрузки (21) более подробно. Коэффициенты Y_s и Y_r даются формулами (5) и (9), характеризуют геометрию образца и полностью определяются шириной образца w и длиной трещины l . Параметр $\bar{\epsilon}_1$ определяется по $(\sigma-\epsilon)$ -диаграмме материала образца. Параметр p определяется коэффициентом Пуассона. Поэтому исследуем зависимость критической нагрузки от оставшихся двух параметров: характерного линейного размера структуры материала d и поправочного коэффициента m . Для любой длины трещины выполняется неравенство $\bar{\sigma}_{c0} \leq \bar{\sigma}_{c+} \leq \bar{\sigma}_{c-} \leq 1$, причем равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется лишь в том случае, когда подкоренное выражение в (21) равно нулю, т.е. $4mp\bar{\epsilon}_1 = 1$. А равенство $\bar{\sigma}_{c0} = \bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-} = 1$ выполняется лишь для трещины нулевой длины.

При возрастании параметра d возрастают и $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкий сценарий) и $\bar{\sigma}_{c-}$ (квазивязкий сценарий). Оказывается, для любого $d = d_+ > 0$ можно так выбрать $d = d_-$, что для трещины любой длины критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ и $\bar{\sigma}_{c-}$ совпадут, т.е. $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) \equiv \bar{\sigma}_{c-}(d_-)$. В этом случае d_+ и d_- связаны соотношением

$$d_- = \left(\left(1 - \sqrt{1-t} \right)^2 / t \right)^2 d_+, \quad t = 4mp\bar{\epsilon}_1. \quad (25)$$

Наибольшее значение множителя $\left(\left(1 - \sqrt{1-t} \right)^2 / t \right)^2$ равно 1 и достигается при $t = 1$, тогда выполняются равенства $d = d_- = d_+$ и $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) = \bar{\sigma}_{c-}(d_-) = \left[Y_r + Y_s \sqrt{2l/d} / 2 \right]^{-1}$, что легко видеть из выражения (21).

При возрастании параметра m возрастает и $\bar{\sigma}_{c+}$ (квазихрупкий сценарий), а $\bar{\sigma}_{c-}$ убывает. И равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется только тогда, когда $m = 1/(4p\bar{\epsilon}_1)$.

Рассмотрим процесс деформирования при постепенном нагружении $0 < \sigma_\infty < 1$. Если необходимый критерий (1) не выполняется ($\sigma_\infty < \bar{\sigma}_{c0}$), то нелинейные эффекты не проявляются, исходная длина трещины $2l_0$ не меняется. В случае если в достаточном критерии (1), (2) условие (1) выполнено, а условие (2) – нет, имеет место докритическое состояние системы, при котором наблюдается устойчивое увеличение длины модельной трещины $l = l_0 + b$. Первое соотношение в достаточном критерии (1), (2) определяет движение вершины модельной трещины. Если условия (1), (2) выполнены, то система переходит в критическое состояние. Ближайшая к вершине трещины структура разрушается, поскольку длина зоны предразрушения достигает критического значения (18), (23). При $\sigma_\infty = \bar{\sigma}_{c\pm}$ неустойчивость критического состояния нелинейной системы очевидна. Соотноше-

ние (2) определяют обрыв силовых связей в ближайшей к вершине реальной трещины структуре зоны предразрушения. Таким образом, критические нагрузки, вычисленные по необходимому (24) и достаточному (21) критериям разрушения, являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы.

По трем параметрам d , σ_Y и $\bar{\varepsilon}_1$ можно построить в широком диапазоне изменения длин трещин две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$, $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_{c+}(\bar{l}_c)$. Совместим плоскости $(\bar{l}_0, \bar{\sigma}_0)$ и $(\bar{l}_c, \bar{\sigma}_{c+})$. На совмещенной плоскости «длина трещины–напряжения» $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ построим диаграммы квазихрупкого разрушения образца (рис. 4).

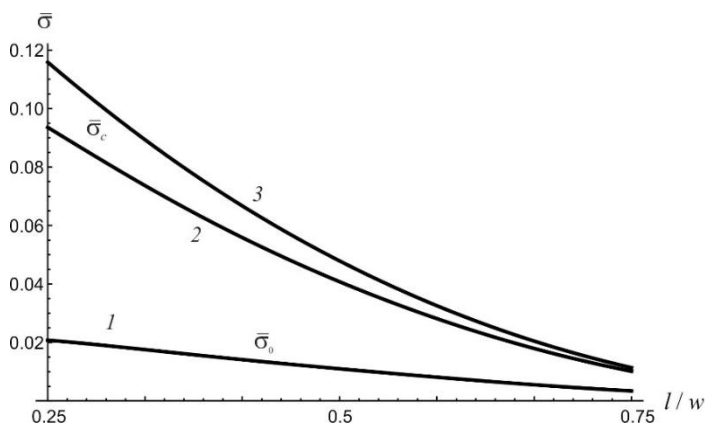


Рис. 4. Диаграммы квазихрупкого разрушения: кривая 1 – необходимый критерий $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$, кривая 2 – достаточный критерий $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (плоская деформация), кривая 3 – достаточный критерий $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (плоское напряженное состояние)

Fig. 4. Diagrams of quasi-brittle fracture: (1) necessary criterion $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$, (2) sufficient criterion $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (plane strain), and (3) sufficient criterion $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (plane stress)

Пусть задана интенсивность нагружения $\bar{\sigma}_\infty = \sigma_\infty / \sigma_Y$. Тогда диаграмма квазихрупкого разрушения позволяет оценить состояние тела с трещиной. Две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ и $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c+}(\bar{l}_c)$ (достаточный критерий представлен двумя кривыми: при плоской деформации и плоском напряженном состоянии) разделяют плоскость $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ на три подобласти: область $\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_0$, где отсутствуют повреждения; область $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma} < \bar{\sigma}_{c+}$, где имеет место накопление повреждений в материале зоны предразрушения; область $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_{c+}$, где образец разрушается при монотонном нагружении. Для удобства практического приложения длина трещины l на рис. 4 отнесена к ширине образца w . Вычисления были проведены при следующих значениях параметров: $d = 0.7$ мм, $\nu = 0.33$, $\bar{\varepsilon}_1 = 2.5$ при плоском напряженном состоянии, $\bar{\varepsilon}_1 = 4$ при плоской деформации.

3. Обсуждение результатов

Выбор параметра осреднения d необходимого критерия (1) в определенной мере субъективен [15]. Зона радиуса d , где напряженное состояние определяет момент инициации трещины, больше сингулярной, поэтому только значения коэффициента интенсивности напряжений K_I как характеристики напряженно-деформированного состояния теперь уже недостаточно. Будем рассматривать эту зону не как область, где реализуется процесс микроповреждений, пластических деформаций, микроразрушений, а как область, где напряженное состояние по известным решениям теории упругости за счет перераспределения внутренних усилий определяет момент разрушения. Размер осреднения d считается характеристикой материала и зависит от других характеристик материала: разрушающих напряжений для образца без трещины и характеристики трещиностойкости. Для относительно длинных трещин, принимая во внимание асимптотику поля напряжений в окрестности вершины трещины, можно получить оценку параметра d в виде:

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2,$$

где K_{Ic} – критический коэффициент интенсивности напряжений, σ_c – предел прочности материала на растяжение. Необходимость осреднения напряжений связывают с образованием зоны предразрушения, в которой происходят перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Размер этой зоны d сопоставим с размерами структурных составляющих материала и намного меньше размеров образца, длины трещины и т.п. [5]. Интегральный критерий Нейбера–Новожилова (1) относится к структурным критериям разрушения. Присутствие в критерии параметра осреднения d означает, что процесс разрушения обладает собственной структурой, которая в общем случае не обязательно связана со структурой материала.

Заключение

Полученные простые структурные формулы (18), (21)–(23) можно применять для прогнозирования критической разрушающей нагрузки $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_y$ и оценки длины зоны предразрушения $\bar{b}_c$ при нагружении по первой моде (нормальный отрыв) в структурированных материалах при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации. Указанные формулы выражают величины нагрузки $\bar{\sigma}_c$ и длины $\bar{b}_c$ через длину трещины l с использованием следующих четырех параметров: d – характерного линейного размера структуры материала, ε_0 и ε_1 – параметров (σ – ε)–диаграммы деформирования, m – поправочного коэффициента. Эти четыре параметра подбираются по результатам лабораторного эксперимента или численного моделирования.

Подробный анализ выражения (21) критической нагрузки $\bar{\sigma}_{c\pm}$ показал следующее. Для двух образцов, отличающихся лишь характерным линейным размером d структуры материала так, что выполняется равенство (25), критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ (кваси хрупкое разрушение) и $\bar{\sigma}_{c-}$ (кваси вязкое разрушение) совпадают,

т.е. $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) \equiv \bar{\sigma}_{c-}(d_-)$ во всем диапазоне длин трещины. Для двух одинаковых образцов равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется тождественно лишь тогда, когда $4\pi r \bar{\epsilon}_1 = 1$.

В целом рассматриваемую аналитическую модель можно использовать при исследовании разрушения конструкций из структурированных материалов с различными упругими свойствами. Это позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

Список источников

1. Himmiche S., Malki M., Newman Jr. J.C. Validation of the two-parameter fracture criterion for various crack configurations made of 2014-T6 aluminum alloy using finite-element fracture simulations – Part 1 LT-Orientation // *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. V. 205. P. 253–267.
2. Wang Y., Wang G., Tu S., Xuan F. Validation and application of a two-parameter J-Ad approach for fracture behaviour prediction // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2020. V. 43, is. 12. P. 2998–3011.
3. Хамидуллин Р.М., Федотова Д.В. Анализ полей напряжений в вершине трещины и параметры сопротивления разрушению в условиях градиентной пластичности // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 4. С. 136–148. doi: 10.15593/pern.mech/2021.4.13
4. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Инченко О.В., Маркин А.А. Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом кмпозите // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 2 (64). С. 63–77.
5. Сукнев С.В. Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // *Физическая мезомеханика*. 2018. Т. 21, № 4. С. 22–32.
6. Корнев В.М. Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов // *Физическая мезомеханика*. 2013. Т. 16, № 5. С. 25–34.
7. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2001. V. 42, № 2. P. 328–336.
8. Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S. Fracture model for structured quasibrittle materials // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. V. 55, № 6. P. 1055–1065.
9. Ковчик С.Е., Морозов Е.М. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. Киев : Наукова думка, 1988. 435 с. (Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие : в 4 т.; т. 3).
10. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений : в 2 т. / под ред. Ю. Мураками. М. : Мир, 1990. Т. 1. 448 с.
11. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. М. : Физматлит, 2006. 328 с.
12. Gross D., Seelig T. *Fracture Mechanics*. Berlin : Springer, 2006. 321 p.
13. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев : Наукова думка, 1988. 619 с. (Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие : в 4 т.; т. 2).
14. Райс Дж. Математические методы в механике разрушений // *Разрушение* : в 7 т. / ред. Г. Либовиц. М. : Мир, 1975. Т. 2. С. 204–335.
15. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. СПб. : Профессия. 2012. 552 с.

References

1. Himmiche S., Malki M., Newman Jr.J.C. (2019) Validation of the two-parameter fracture criterion for various crack configurations made of 2014-T6 aluminum alloy using finite-

- element fracture simulations – Part 1 LT-Orientation. *Engineering Fracture Mechanics*. 205. pp. 253–267. doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.11.005
2. Wang Y., Wang G., Tu S., Xuan F. (2020) Validation and application of a two-parameter J-Ad approach for fracture behaviour prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 43(12). pp. 2998–3011. doi: 10.1111/ffe.13360
 3. Khamidullin R.M., Fedotova D.V. (2021) Analiz poley napryazheniy v vershine treshchiny i parametry soprotivleniya razrusheniyu v usloviyakh gradientnoy plastichnosti [Analysis of stress fields at the crack tip and fracture resistance parameters under conditions of gradient-plasticity]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 136–148. doi: 10.15593/perm.mech/2021.4.13
 4. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Inchenko O.V., Markin A.A. (2020) Ob odnom podkhode k otsenke prochnosti adgezionnogo sloya v sloistom kompozite [On one approach to the assessing of the adhesive layer strength in a layered composite]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 64(2). pp. 63–77. doi: 10.17223/19988621/64/5
 5. Suknev S.V. (2018) Nelokal'nye i gradientnye kriterii razrusheniya kvazikhрупких материалов pri szhatii [Nonlocal and gradient fracture criteria for quasi-brittle materials under compression]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 21(4). pp. 22–32. doi: 10.24411/1683-805X-2018-14003
 6. Kornev V.M. (2013) Kriticheskie krivye razrusheniya i effektivnyy diametr struktury khрупких i kvazikhрупких материалов [Critical fracture curves and effective structure diameter of brittle and quasi-brittle materials]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 16(5). pp. 25–34. doi: 10.24411/1683-805X-2013-00050
 7. Kornev V.M., Kurguzov V.D. (2001) Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 42(2). pp. 328–336. doi: 10.1023/a:1018896407455
 8. Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S. (2014) Fracture model for structured quasibrittle materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 55(6). pp. 1055–1065. doi: 10.1134/S0021894414060182
 9. Kovchik S.E. (1988) *Kharakteristiki kratkovremennoy treshchinostoykosti materialov i metody ikh opredeleniya* [Characteristics of short-term crack resistance of materials and methods for their determination]. Kyiv: Naukova dumka.
 10. Murakami Y. (1986) *Stress Intensity Factors Handbook*. Oxford: Pergamon.
 11. Matvienko Yu.G. (2006) *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya* [Models and criteria of fracture mechanics]. Moscow: FIZMATLIT.
 12. Gross D., Seelig T. (2006) *Fracture Mechanics*. Berlin: Springer.
 13. Savruk M.P. (1988) *Koeffitsienty intensivnosti napryazheniy v telakh s treshchinami. Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov* [Stress intensity factor in bodies with cracks. Fracture mechanics and strength of materials]. Volume 2. Kyiv: Naukova dumka.
 14. Rice J.R. (1968) *Mathematical Methods in Fracture Mechanics*. Fracture. Volume 2. New York.
 15. Pestrikov V.M., Morozov E.M. (2012) *Mekhanika razrusheniya* [Mechanics of fracture]. Saint Petersburg: Professiya.

Сведения об авторах:

Астапов Николай Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Кургузов Владимир Дмитриевич – доктор физико-математических наук, доцент Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Information about the authors:

Astapov Nikolay S. (Candidate of Physics and Mathematics, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Kurguzov Vladimir D. (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 09.06.2022; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 09.06.2022; accepted for publication 12.02.2024

Научная статья

УДК 531.352

doi: 10.17223/19988621/87/6

Состояние фуллерена C_{60} в двухкомпонентной смеси газов

Владислав Иванович Бородин¹, Михаил Алексеевич Бубенчиков²,
Алексей Михайлович Бубенчиков³,
Дмитрий Владимирович Мамонтов⁴, Сергей Викторович Тимченко⁵

¹ ООО «Газпром трансгаз Томск», Томск, Россия

^{2, 3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ borodinttgazprom@mail.ru

² michael121@mail.ru

³ bubenchikov_am@mail.ru

⁴ orevaore@mail.ru

⁵ Timchenko@tsu.ru

Аннотация. В рамках подхода атом-атомных и атом-молекулярных взаимодействий представлена численная модель динамики частиц газа, включая крупную молекулу фуллерена. Под ударами более мелких частиц поддерживающей газовой среды фуллерен приобретает вращения. Для расчета этих вращений авторами статьи разработан оригинальный способ определения поворотов молекулярных тел в пространстве. Расчетами определена установившаяся скорость вращения фуллерена, отвечающая заданным параметрам состояния газовой среды. Дается также оценка времени, за которое фуллерен достигает равновесных значений по кинетической энергии.

Ключевые слова: численное моделирование, молекулярная динамика, фуллерены, энергия

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 19-71-10049.

Для цитирования: Бородин В.И., Бубенчиков М.А., Бубенчиков А.М., Мамонтов Д.В., Тимченко С.В. Состояние фуллерена C_{60} в двухкомпонентной смеси газов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 59–72. doi: 10.17223/19988621/87/6

Original article

State of fullerene C_{60} in a two-component gas mixture

Vladislav I. Borodin¹, Mikhail A. Bubenchikov², Aleksey M. Bubenchikov³,
Dmitriy V. Mamontov⁴, Sergey V. Timchenko⁵

¹ Gazprom Transgaz Tomsk, Tomsk, Russian Federation

^{2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ borodinttgazprom@mail.ru

² michael121@mail.ru³ bubenchikov_am@mail.ru⁴ orevaore@mail.ru⁵ Timchenko@tsu.ru

Abstract. In this paper, the non-equilibrium state of a gaseous molecular system containing nitrogen, helium, and fullerenes is studied in the framework of the model of classical molecular dynamics. In such systems, the non-equilibrium state is determined by different states of single components. Here, the heavy fraction of the fullerenes can induce the internal non-equilibrium state associated with the difference between its translational and rotational temperatures. This paper proposes an original method for calculating the rotations of fullerenes in space, which does not use Euler angles and therefore has no consequential restrictions. The diffusion trajectories of fullerene particles are calculated, and the energy of their rotation is determined as the average temperature in the system of 300 K. The calculated results show that the internal non-equilibrium state of the fullerene fraction becomes apparent at pressures less than 10 atm. At pressures of a few tens of atmospheres, the rotational temperature of fullerenes coincides with their translational temperature.

Keywords: numerical modeling, molecular dynamics, fullerenes, energy

Acknowledgments: This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10049).

For citation: Borodin, V.A., Bubenchikov, M.A., Bubenchikov, A.M., Mamontov, D.V., Timchenko, S.V. (2024) State of fullerene C₆₀ in a two-component gas mixture. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 59–72. doi: 10.17223/19988621/87/6

Введение

Актуальными в настоящее время являются работы по исследованию состояний двухатомных молекул внутри C₆₀ [1–10]. Вызывает большой интерес вращательная динамика самих фуллеренов в фуллерите [7–9]. В этих работах фиксируется зависящая от времени связь спина валентного электрона с вращением фуллерена, от которой зависит ориентационный фазовый переход при $T > 256$ K. В статье [1] на основе масс-спектрометрических экспериментов рассматривается состояние энергии связи C₂, или энергии диссоциации этой молекулы, внутри C₆₀. Результаты согласуются с высокоуровневыми расчетами теории функционала плотности *ab initio*. В [2] изучены электронные свойства одиночных молекул с помощью низкотемпературной сканирующей туннельной спектроскопии. Исследуются молекулы C₆₀, осажденные на поверхности Au(111) при разных температурах подложки и смешанные с двумя разными углеводородами. Таким образом, меняются взаимодействие фуллерена с поверхностью и / или дипольный отклик молекулярного окружения на зарядку. Далее исследуется зависимость выравнивания энергетических уровней от молекулярного окружения. Результаты подтверждают уже установленную картину в фотоэлектронной спектроскопии. Авторы [3] исследовали электронные структуры интерфейсов пентацена и C₆₀ с использованием ультрафиолетовой фотоэлектронной спектроскопии и рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии. Полученные спектры C_{1s} на этих образцах показывают отсутствие значительных химических связей на границе раздела. В исследовании [4] представлен спектр потерь энергии электронов C₆₀

в газовой фазе от 1 до 30 эВ. Спектр аналогичен спектрам твердого тела, но сдвиги взаимно наблюдаемых полос видны только для ранее идентифицированных плазменных особенностей. Данные результаты подтверждают эту идентификацию, а также обеспечивают косвенное измерение относительного сечения поглощения в рассматриваемой области. Результаты измерений рассеяния под большими углами дают первое свидетельство существования мультипольных плазмонов в C_{60} . В [5] электронная структура кристаллических фуллеритов C_{60} и C_{70} исследована методом спектроскопии потерь энергии высокоэнергетических электронов на просвет. По возбуждениям валентной зоны и основным возбуждениям уровня C_{1s} получена информация о занятых и незанятых π - и σ -зонах. Пористый углерод, легированный азотом, получают активацией КОН C_{60} в атмосфере аммиака. В качестве анода для литий-ионных аккумуляторов он показывает обратимую емкость до $\approx 1\,900\text{ мА ч г}^{-1}$ при 100 мА г^{-1} . Моделирование [6] предполагает, что лучшее хранение литий-иона может быть связано с кривизной графена и присутствием легирующих примесей пиррольной / пиридиновой группы. Исследования, собранные в статьях [1–6] так или иначе связаны с изучением энергии фуллеренов C_{60} .

Вращательная динамика C_{60} в твердом состоянии была исследована в [7] с помощью ядерного магнитного резонанса на углероде-13 (^{13}C ЯМР). Скорость релаксации из-за анизотропии химического сдвига ($1/9T_1\rho\text{CSA}$) была точно измерена по зависимости T_1 от магнитного поля, что позволило определить время корреляции молекулярной переориентации τ . При температуре 283 К $\tau = 9,1\text{ пс}$. В серии экспериментов [8] с твердым C_{60} изучались низкоэнергетическая вращательная динамика молекул, высокоэнергетические колебательные спектры и аспекты беспорядка в статической структуре. Почти сферическая форма молекулы C_{60} и возникновение ориентационного фазового перехода при $T_c = 256\text{ К}$ делают твердое тело C_{60} превосходной системой для исследований ориентационной динамики. Когерентное квазиупругое рассеяние нейтронов выше T_c количественно описывается моделью вращательной диффузии. В [9] представлен оригинальный способ проверить связь вращения и вращения Машхуна. Поскольку в низкотемпературной фазе (ниже 300 К) твердого тела C_{60} нецентральный межмолекулярный потенциал будет вызывать прецессию и нутацию частоты вращения молекул C_{60} , что приводит к зависящей от времени связи спина валентного электрона с вращением C_{60} , волновые функции электронов во вращающихся молекулах C_{60} приобретут геометрические фазы, возникающие из-за этой зависящей от времени связи спин–вращение. Геометрические фазы валентных электронов в молекулах C_{60} рассчитаны с использованием теории инвариантов Льюиса–Ризенфельда в настоящей статье. Показано, что геометрические фазы электронов в молекулах C_{60} могут быть измерены с помощью фотоэлектронной спектроскопии C_{60} . Также продемонстрирован физически интересный факт, что информация о вращении и прецессии молекул C_{60} в ориентационно упорядоченной (или неупорядоченной) фазе может быть считана из фотоэлектронной спектроскопии C_{60} . В [10] представлен гамильтониан для колебаний и вращений СО внутри свободно вращающейся или неподвижной молекулы C_{60} и вычислены его собственные состояния из атом-атомного модельного потенциала. Как показано в [11–13], наноразмерные примеси могут оказывать серьезное влияние на свойства расплавов и физических процессов. Одним из наиболее релевантных способов изучения наноматериалов является молекулярная динамика, как, например, в статьях [14–15].

В настоящей работе также используется атом-атомный или атом-молекулярный модельный потенциал как для частиц, составляющих газовую фазу, так и для атомов углерода фуллерена, взаимодействующих с частицами газовой среды. Столь простая модель взаимодействия, объединенная с условиями недеформируемости молекулярного каркаса C_{60} , позволяет получить совершенно конкретные и полные результаты по вращательной динамике фуллерена, а также по его трансляционным перемещениям в многокомпонентной смеси газов. Цель настоящей работы – построение универсальной численной процедуры для описания поворотов фуллерена в двухкомпонентной смеси газов и определение на ее основе характерных частот углеродной молекулы в газовой среде с заданными параметрами состояния.

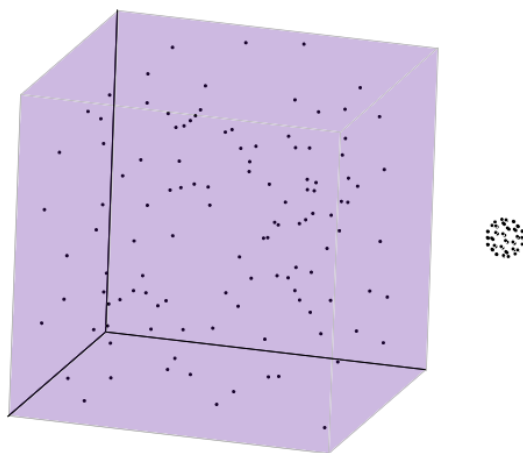


Рис. 1. Представительный объем, содержащий газовые частицы и входящий в него фуллерен
Fig. 1. A representative volume with gas particles and a fullerene penetrating into the volume

Для того чтобы рассчитать взаимодействия атомов и молекул, находящихся в газовой фазе, необходимо выделить мезообъем газовой среды, в которой будут разворачиваться последующие молекулярно-динамические события (рис. 1). Объем должен содержать количество частиц, достаточное для проведения статистических осреднений. Однако по понятным причинам это количество не должно быть слишком большим. Для описания движения частиц используется классическая модель динамики газовых частиц. Однако фуллереновая частица рассматривается как недеформируемая молекулярная конструкция, состоящая из 60 атомов углерода. Газовые частицы взаимодействуют между собой и с атомами фуллерена по модели притяжение–отталкивание, в которой используется одна силовая функция, но различные параметры, отвечающие конкретной паре взаимодействующих частиц.

Математическая модель

Уравнения движения частиц двухкомпонентной смеси газа имеют вид:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = - \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^M \nabla U_{11}(r_{ik}) - \sum_{k=M+1}^N \nabla U_{12}(r_{ik}) - \sum_{k=N+1}^K \nabla U_{13}(r_{ik}) \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (1)$$

$$m_2 \frac{dv_i}{dt} = - \sum_{k=1}^M \nabla U_{21}(r_{ik}) - \sum_{\substack{k=M+1, \\ k \neq i}}^N \nabla U_{22}(r_{ik}) - \sum_{k=N+1}^K \nabla U_{23}(r_{ik}) \quad (i = M+1, \dots, N). \quad (2)$$

Здесь m_1, m_2 – массы частиц первой и второй компонент; $r_{ik} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|$; $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k$ – радиусы-векторы i -й и k -й частиц; $\mathbf{v}_i$ – скорость i -й частицы; M, N – соответственно количество частиц в первой ассоциации и суммарное количество частиц обоих сортов газа; K – сумма количеств всех газовых частиц и всех атомов углерода в фуллерене; U_{11}, U_{22} – потенциалы взаимодействия частиц определенного сорта; $U_{12} = U_{21}$ – потенциалы взаимодействия частиц, принадлежащих различным компонентам. Все эти потенциалы имеют одну форму, но различные значения σ и ε ;

$\sigma_{11} = \sigma_1, \varepsilon_{11} = \varepsilon_1; \sigma_{22} = \sigma_2; \varepsilon_{22} = \varepsilon_2; \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Здесь σ_1, ε_1 –

параметры потенциала Леннарда–Джонса, относящиеся к первой компоненте, $\sigma_2,$

ε_2 – ко второй. $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты абсолютной системы декартовых

координат; $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$; $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$; x, y, z – прямоугольные декартовы координаты.

В рассматриваемый представительный объем, занятый смесью газов, начиная с определенного момента времени входит фуллерен. Его взаимодействие с молекулярным окружением описывается уравнением движения центра масс фуллерена и уравнениями его вращательного движения вокруг собственного центра масс. Трансляционные перемещения фуллерена полностью задаются уравнением движения центра масс молекулы C₆₀

$$m_3 \frac{dv_c}{dt} = - \sum_{k=N+1}^K \sum_{i=1}^M \nabla U_{13}(r_{ik}) - \sum_{k=N+1}^K \sum_{i=M+1}^N \nabla U_{23}(r_{ik}), \quad (3)$$

где m_3 – масса фуллерена; $\mathbf{v}_c$ – скорость его центра масс; U_{13}, U_{23} – потенциалы взаимодействия атомов углерода фуллерена с частицами первой и второй газовых компонент. Эти потенциалы различаются лишь параметрами взаимодействия:

$\sigma_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \varepsilon_{13} = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}; \sigma_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \varepsilon_{23} = \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}$. При этом параметры

σ_3 и ε_3 , относящиеся к углерод-углеродному взаимодействию, берутся для атомов углерода, находящихся в связанном состоянии 2D углеродной структуры.

Эти уравнения необходимо дополнить кинематическими соотношениями

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad (i = 1, 2, \dots, K). \quad (4)$$

В случае движения фуллерена с вращением скорость его силовых центров определяется из теоремы сложения скоростей с использованием векторного произведения для относительной скорости атома углерода:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + [\boldsymbol{\omega}, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)] \quad (i = N+1, \dots, K).$$

Здесь $\mathbf{r}_c$ – радиус-вектор центра масс фуллерена, $\mathbf{v}_c$ – его поступательная скорость, $\boldsymbol{\omega}$ – скорость поворота фуллерена вокруг его центра масс. Эта скорость находится из уравнения, выражающего теорему об изменении момента количества движения фуллерена для относительного движения около его центра масс:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{L}.$$

В последнем выражении кинетический момент $\mathbf{K}$ есть произведение тензора инерции на вектор-столбец мгновенной угловой скорости фуллерена $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (5)$$

При этом тензор инерции определяется выражением

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} m \sum (y_i'^2 + z_i'^2) & -m \sum x_i' y_i' & -m \sum x_i' z_i' \\ -m \sum y_i' x_i' & m \sum (x_i'^2 + z_i'^2) & -m \sum y_i' z_i' \\ -m \sum x_i' z_i' & -m \sum y_i' z_i' & m \sum (x_i'^2 + y_i'^2) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

x_i, y_i, z_i ($i = N+1, \dots, K$) – координаты атомов углерода фуллереновой частицы, x_c, y_c, z_c – координаты центра масс фуллерена. Здесь $x_i' = x_i - x_c$, $y_i' = y_i - y_c$, $z_i' = z_i - z_c$, суммирование производится по числу атомов, составляющих молекулу фуллерена. Момент сил, входящих в правую часть векторного уравнения (6), определяется выражением

$$\mathbf{L} = - \sum_{i=1}^M \sum_{k=N+1}^K [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c), \nabla U_{13}(\mathbf{r}_{ik})] - \\ - \sum_{i=M+1}^N \sum_{k=N+1}^K [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c), \nabla U_{23}(\mathbf{r}_{ik})]. \quad (7)$$

Дифференциальные уравнения (1)–(6) интегрируются численно с использованием следующих начальных условий:

$$t = 0; \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^0 \ (i = 1, 2, \dots, N); \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j^0 \ (j = 1, 2, \dots, K); \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^0; \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0. \quad (8)$$

При этом величины начальных скоростей равны среднетепловым значениям скорости, относящимся к температуре $T = 300$ К. Направления скоростей газовых частиц выбираются случайным образом. Скорость фуллерена направлена в центр грани представительного объема перпендикулярно ее поверхности. Начальные положения газовых частиц должны быть такими, чтобы расстояния между частицами не были слишком малыми. Это позволяет получить прогнозируемую температуру в системе газовых частиц.

Для того чтобы частицы не разлетались из представительного объема, на его границах ставятся условия зеркального отражения частиц с сохранением модуля скорости. Эти условия моделируют переходы частиц из смежных объемов пространства, заполненного газом, и обеспечивают сохранение полной энергии в системе.

Численный метод интегрирования уравнений движения крупных молекул

Во многих процессах молекулярной динамики фуллерен может участвовать как заряженная и магнитовосприимчивая частица, т.е. может реагировать на внешние электромагнитные поля. В этом случае важно уметь рассчитывать не только угловые колебания фуллерена, но и его направленные вращения, вызванные действием внешних полей. При отсутствии электромагнитных полей угловые колебания

фуллерена связаны с тепловым движением окружающих его частиц. Однако и такой случай не является простым в отношении расчета угловых поворотов этой частицы. Движение углеродных частиц, имеющих жесткий каркас, можно разделить на две группы: трансляционные перемещения и повороты. Первая группа, когда любая грань молекулярной конструкции перемещается параллельно самой себе, полностью определяется движением центра масс крупной молекулы. Нахождение этой группы не вызывает затруднений, поскольку получающиеся при этом уравнения явно разрешены относительно компонент линейных скоростей объекта. Уравнения для угловых скоростей молекулярного тела получают из уравнений вращательной динамики относительно центра масс рассматриваемого тела. В таких уравнениях под производную по времени входят проекции момента количества движения молекулярного тела. Каждая из этих компонент в общем случае зависит от трех компонент вектора угловой скорости тела. Численная процедура нахождения элементарных поворотов тела должна быть выстроена так, чтобы на каждом шаге по времени и даже на промежуточных шагах все компоненты вектора мгновенной угловой скорости находились одновременно. Тогда результирующий элементарный поворот будет поворотом относительно мгновенной оси вращения.

Описанная схема позволяет избежать замены результирующего поворота последовательностью поворотов относительно трех различных осей и тем самым избежать ошибок в описании сложных вращений. Решение всех эволюционных уравнений представленной математической модели проводится с использованием пошаговых схем высокого порядка точности, использующих идею пересчета искомых величин в промежуточных позициях каждого отдельного шага. В расчетах использовался постоянный шаг интегрирования $\Delta t = 10^{-6}$ нс. В каждый момент времени полный баланс механической энергии составлял 10^{-6} относительных единиц.

Результаты расчетов

В куб с ребром 5 нм поместим 100 атомов гелия и 100 молекул азота. Пусть скорости частиц газа будут иметь величины, отвечающие среднетепловым скоростям соответствующих компонент для температуры $T = 300$ К. Такое состояние газовой смеси соответствует давлению 35 атм. Начальные скорости всех частиц газа были одинаковыми и отвечали средним тепловым скоростям движения для заданной температуры, а их направления выбирались случайным образом. Систему частиц с такими параметрами движения иногда называют клаузиуским газом (модельная система, предназначенная для подсчета давления газа на выбранную площадку). На гранях куба реализуются зеркальные отражения частиц. Начиная с некоторого момента времени на центр одной из граней куба будет направлен фуллерен, имеющий некоторую скорость движения, перпендикулярную поверхности грани. Нас прежде всего будет интересовать, как раскручивается фуллерен в среде газовых частиц и как энергия полученных вращений будет соотноситься с энергией его трансляционных перемещений. Первоначально рассмотрим состояние газовой среды. Температура газовых компонент определяется как средняя по ансамблю всех частиц данного сорта кинетическая энергия отдельной частицы, отнесенная к величине $3k/2$.

Из рис. 2 видно, что на начальном этапе из-за отсутствия равновесия в системе наблюдается разделение компонентов по температуре. Это разделение полностью исчезает через 7 нс от начала процесса. Отсутствие равновесия на первых двух наносекундах обусловлено заданием для каждой из компонент смеси одинаковых значений модулей скорости в начальный момент времени. После этого за указанное время в газовой системе устанавливается равновесие по скоростям для каждой из компонент.

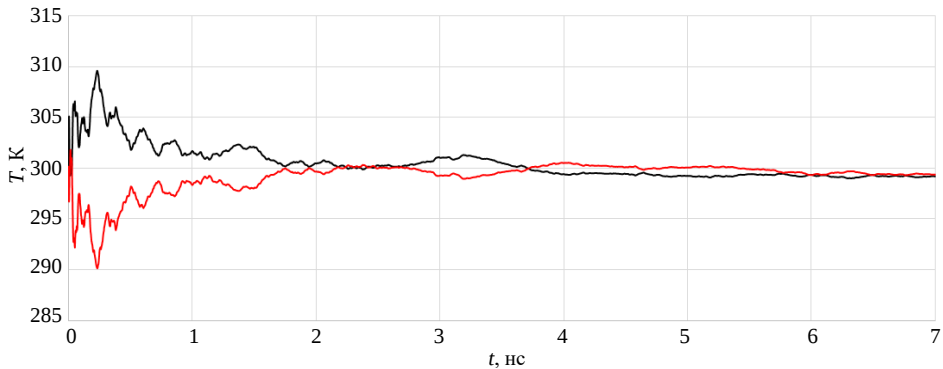


Рис. 2. Температура гелия – красная линия, азота – черная

Fig. 2. Helium and nitrogen temperatures indicated by red and black lines, respectively

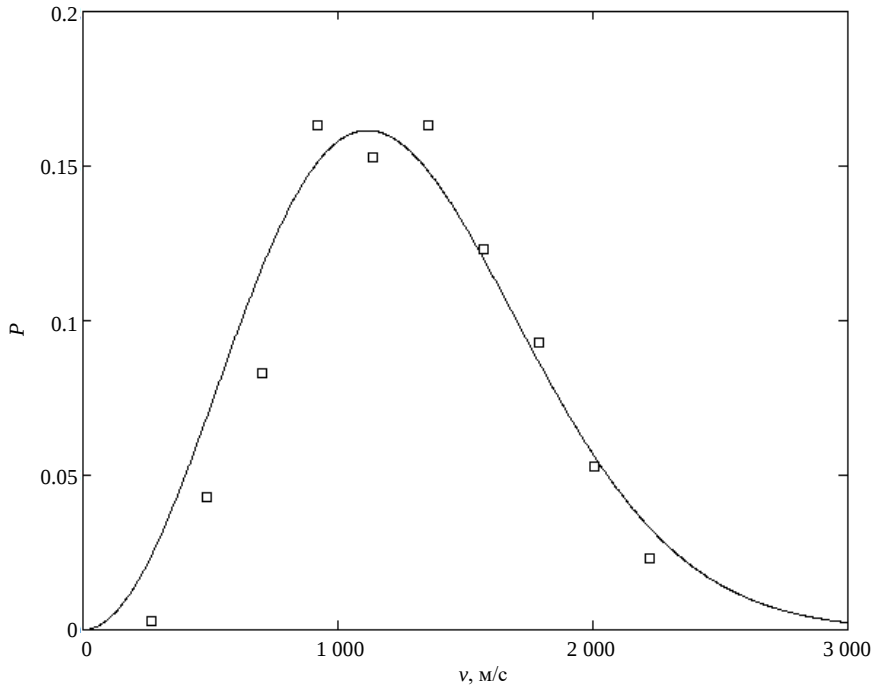


Рис. 3. Аналитическое (сплошная кривая) и численное (символы) распределение Максвелла

Fig. 3. Analytical (solid curve) and numerical (symbols) Maxwell's distribution

На рис. 3 показаны равновесные распределения Максвелла (сплошные линии) и расчетные (символы) плотности вероятности нахождения частиц отдельных компонентов в соответствующих скоростных диапазонах. Определение по заданному количеству частиц не дает регулярных во времени распределений температур компонентов. Кроме того, всякое измерение температуры тем или иным прибором предполагает еще определение по времени, поэтому в данном случае мы его также используем. Интервал осреднения был равен 1 нс. При этом на начальном этапе, если $t < 1$ нс, он был равен t . После этого были получены распределения, показанные на рис. 2.

На рис. 4 показаны проекции угловых скоростей фуллерена. На значениях этих скоростей сказывается каждый удар окружающих газовых частиц. Если усреднить значения мгновенной угловой скорости на определенном интервале времени, то получим вполне регулярное распределение изменяющейся во времени величины.

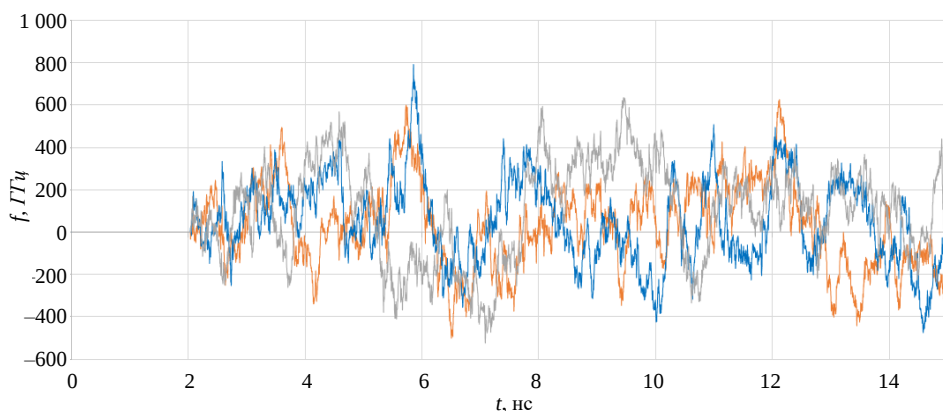


Рис. 4. Угловые скорости фуллерена относительно стационарных осей вращения
Fig. 4. Angular velocities of the fullerene relative to stationary axes of rotation

На рис. 5 представлено значение модуля угловой скорости фуллерена в зависимости от времени. Видно, что за время около 10 нс фуллереновая частица раскручивается до значений угловой скорости 300 нс^{-1} . Далее величина скорости вращения выходит на постоянное значение.

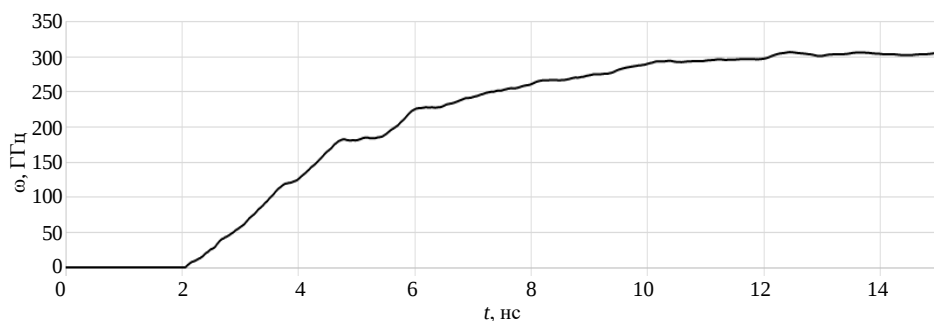


Рис. 5. Величина угловой скорости фуллерена в зависимости от времени
Fig. 5. Angular velocity of the fullerene as a function of time

На рис. 6 приведены локальные значения модуля скорости центра масс фуллера.

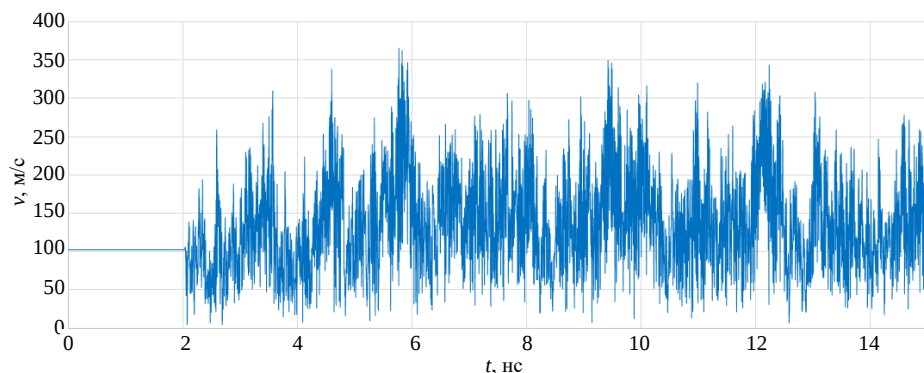


Рис. 6. Локальная трансляционная скорость фуллера
Fig. 6. Local translational velocity of the fullerene

Данный рисунок показывает, как под действием ударов молекул и атомов газовой среды перемещается фуллерен. Однако это лишь скалярное отражение пространственной картины движения. Анализ покомпонентных характеристик движения позволяет выделить составляющие вектора скорости центра масс фуллера, которые отвечают за некоторое среднее перемещение этой частицы:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v}_m + \mathbf{v}_c' \quad (9)$$

Это среднее перемещение можно назвать диффузией ($\mathbf{v}_m$). Три компоненты данного вектора можно найти из условий осреднения полной величины скорости центра масс ($\mathbf{v}_c$). Тогда пульсационная составляющая этой скорости будет подчиняться условию

$$\int_{t-\Theta}^t \mathbf{v}_c' d\tau = 0. \quad (10)$$

Здесь Θ – некоторый интервал осреднения (в нашем случае $\Theta = 1$ нс). Проводя соответствующие статистические расчеты, нетрудно найти вектор миграции $\mathbf{v}_m$. На рис. 7 показано распределение во времени модуля этого вектора.

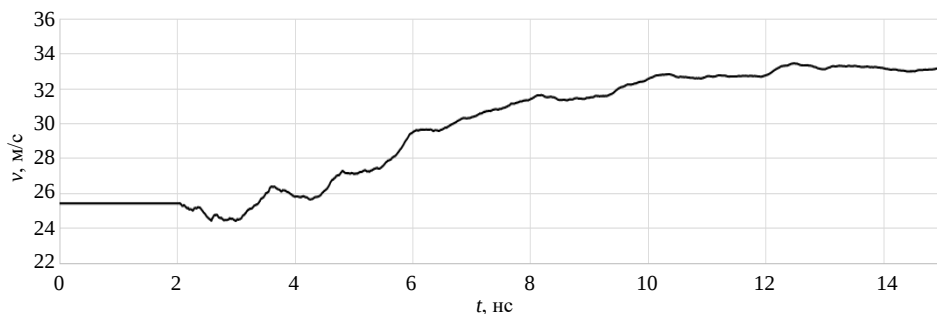


Рис. 7. Величина скорости миграции фуллера
Fig. 7. Fullerene migration rate

Проведенные расчеты позволяют получить мгновенные значения кинетической энергии вращения и энергии трансляционных перемещений. Однако воспользуемся возможностью получить приближенные оценки указанных энергий. Для энергии вращательного движения около собственного центра масс фуллерена имеется формула

$$T_r = I \frac{\omega^2}{2}. \quad (11)$$

Здесь ω – угловая скорость фуллерена; I – момент инерции относительно мгновенной оси вращения. В рамках приближенного описания величину I можно определить как момент инерции бесконечно тонкой сферы, по которой равномерно распределена масса фуллерена:

$$I = \frac{2}{3} m_3 R^2. \quad (12)$$

Здесь m_3 – масса фуллерена, R – его радиус. Энергия трансляционных перемещений есть

$$T_t = \frac{m_3 v_c'^2}{2}. \quad (13)$$

Тогда отношение рассматриваемых энергий будет следующей величиной:

$$\frac{T_r}{T_t} = \frac{3v_c'^2}{2\omega^2 R^2}. \quad (14)$$

Если в эту формулу подставить стабилизированные значения ω из рис. 5, расчетное значение величины v_c' , а также известное значение радиуса фуллерена $R = 0.357$ нм, то получим значение, близкое к единице. Последнее обстоятельство говорит о том, что в газовых смесях с малой концентрацией фуллереновых частиц и высоким давлением несущей фазы вращательная температура фуллереновой среды совпадает с ее трансляционной температурой.

Заключение

Расчеты показывают, что в условиях термодинамического равновесия поддерживающей фуллереновую частицу газовой среды сам фуллерен мигрирует по случайным траекториям, занимающим в конечном счете все пространство представительного объема. При осреднении этой траектории остается след миграционного перемещения. Вообще осреднение является важной процедурой в работе по интерпретации данных вычислений в рассматриваемом кластере задач. Интервал осреднения по времени должен обеспечивать равенство нулю всех трех пульсационных компонент вектора трансляционной скорости. Полученные поля мгновенных характеристик движения и правильно найденный интервал осреднения позволяют заключить, что несмотря на то, что фуллереновая компонента представлена одной частицей, вполне можно говорить о температуре фуллереновой составляющей. Расчетами найдено, что при переходе от клаузиусского состояния системы частиц с максвелловским распределением наблюдается небольшое температурное расслоение по гелию и азоту. При этом естественно, что тяжелые и инерционные углеродные молекулы фуллеренов также находятся в неравновесном состоянии. Однако для систем с высоким давлением и на более продол-

жительных интервалах времени, чем участок начального перехода, наблюдается равенство вращательной температуры фуллереновой фракции.

Список источников

1. Lifshitz C. C₂ binding energy in C₆₀ // *International Journal of Mass Spectrometry*. 2000. V. 198. P. 1–14. doi: 10.1016/S1387-3806(00)00192-5
2. Torrente I.F., Franke K.J., Pascual J.I. Spectroscopy of C₆₀ single molecules: The role of screening on energy level alignment // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008. V. 20. Art. 184001. doi: 10.1088/0953-8984/20/18/184001
3. Kang S.J., Yi Y., Kim C.Y., Cho S.W., Noh M., Jeong K., Whang C.N. Energy level diagrams of C₆₀/pentacene/Au and pentacene/C₆₀/Au // *Synthetic Metals*. 2006. V. 156. P. 32–37. doi: 10.1016/j.synthmet.2005.10.001
4. Gorokhov D.A., Suris R.A., Cheianov V. Electron-energy-loss spectroscopy of the C₆₀ molecule // *Physics Letters A*. 1998. V. 223. P. 116–122. doi: 10.1016/S0375-9601(96)00707-4
5. Lee S., Nicholls R., Nguyen-Manh D., Pettifor D., Briggs G., Lazar S., Pankhurst D.A., Cockayne D.J.H. Electron energy loss spectra of C₆₀ and C₇₀ fullerenes // *Chemical Physics Letters*. 2005. V. 404. P. 206–211. doi: 10.1016/j.cplett.2005.01.089
6. Tan Z., Kun N., Chen G., Zeng W., Zhuchen T., Ikram M., Zhang Q., Wang H., Sun L., Zhu X., Wu X., Ji H., Ruoff R., Zhu Y. Incorporating Pyrrolic and Pyridinic Nitrogen into a Porous Carbon made from C₆₀ Molecules to Obtain Superior Energy Storage // *Advanced Materials*. 2016. V. 29. Art. 1603414. doi: 10.1002/adma.201603414
7. Johnson R.D., Yannoni C.S., Dorn H.C., Salem J.R., Bethune D. C₆₀ Rotation in the Solid State: Dynamics of a Faceted Spherical Top // *Science*. 1992. V. 255. P. 1235–1238.
8. Kamitakahara W., Copley J., Cappelletti R., Rush J., Neumann D., Fischer J., McCauley J., Smit A. Rotations, Vibrations and Structure in Solid C₆₀: Investigations by Neutron Scattering // *MRS Proceedings*. 2011. V. 270. doi: 10.1557/PROC-270-167
9. Shen J.Q., He S. Geometric phases of electrons due to spin-rotation coupling in rotating C₆₀ molecules // *Phys. Rev. B*. 2003. V. 68. doi: 10.1103/PhysRevB.68.195421
10. Olthof E.H.T., van der Avoird A., Wormer P.E.S. Vibration and rotation of CO in C₆₀ and predicted infrared spectrum // *J. Chem. Phys.* 1996. V. 104. P. 832–847. doi: 10.1063/1.470809
11. Афанасьева С.А., Бирюков Ю.А., Белов Н.Н. и др. Повышение эффективности высокоскоростного метания ударников с применением высокоэнергетических топлив с нанодисперсными наполнителями // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2012. № 2 (18). С. 67–79.
12. Крайнов А.Ю., Порязов В.А., Моисеева К.М. Скорость распространения пламени в аэрозвеси наноразмерного порошка алюминия // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. № 53. С. 95–106. doi: 10.17223/19988621/53/9
13. Ворожцов А.Б., Данилов П.А., Жуков И.А. и др. Влияние внешних воздействий на расплав и неметаллических наночастиц на структуру и механические характеристики легких сплавов на основе алюминия и магния // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 64. С. 91–107. doi: 10.17223/19988621/64/7
14. Андриященко В.А., Рудяк В.Я. Самодиффузия молекул флюида в наноканалах // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2012. № 2. С. 63–66.
15. Рудяк В.Я., Андриященко В.А. Молекулярно-динамическое моделирование разделения наножидкости с помощью наномембран // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2014. № 4. С. 88–94.

References

1. Lifshitz C. (2000) C₂ binding energy in C₆₀. *International Journal of Mass Spectrometry*. 198. pp. 1–14. doi: 10.1016/S1387-3806(00)00192-5

2. Torrente I.F., Franke K.J., Pascual J.I. (2008) Spectroscopy of C₆₀ single molecules: The role of screening on energy level alignment. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 20. Article 184001. doi: 10.1088/0953-8984/20/18/184001
3. Kang S.J., Yi Y., Kim C.Y., Cho S.W., Noh M., Jeong K., Whang C.N. (2006) Energy level diagrams of C₆₀/pentacene/Au and pentacene/C₆₀/Au. *Synthetic Metals*. 156. pp. 32–37. doi: 10.1016/j.synthmet.2005.10.001
4. Gorokhov D.A., Suris R.A., Cheianov V. (1998) Electron-energy-loss spectroscopy of the C₆₀ molecule. *Physics Letters A*. 223. pp. 116–122. doi: 10.1016/S0375-9601(96)00707-4
5. Lee S., Nicholls R., Nguyen-Manh D., Pettifor D., Briggs G., Lazar S., Pankhurst D.A., Cockayne D.J.H. (2005) Electron energy loss spectra of C₆₀ and C₇₀ fullerenes. *Chemical Physics Letters*. 404. pp. 206–211. doi: 10.1016/j.cplett.2005.01.089
6. Tan Z., Kun N., Chen G., Zeng W., Zhuchen T., Ikram M., Zhang Q., Wang H., Sun L., Zhu X., Wu X., Ji H., Ruoff R., Zhu Y. (2016) Incorporating pyrrolic and pyridinic nitrogen into a porous carbon made from C₆₀ molecules to obtain superior energy storage. *Advanced Materials*. 29. Article 1603414. doi: 10.1002/adma.201603414
7. Johnson R.D., Yannoni C.S., Dorn H.C., Salem J.R., Bethune D. (1992) C₆₀ rotation in the solid state: dynamics of a faceted spherical top. *Science*. 255. pp. 1235–1238. doi: 10.1126/science.255.5049.1235
8. Kamitakahara W., Copley J., Cappelletti R., Rush J., Neumann D., Fischer J., McCauley J., Smit A. (2011) Rotations, vibrations and structure in solid C₆₀: investigations by neutron scattering. *MRS Proceedings*. 270. doi: 10.1557/PROC-270-167
9. Shen J.Q., He S. (2003) Geometric phases of electrons due to spin-rotation coupling in rotating C₆₀ molecules. *Physical Review B*. 68. doi: 10.1103/PhysRevB.68.195421
10. Olthof E.H.T., van der Avoird A., Wormer P.E.S. (1996) Vibration and rotation of CO in C₆₀ and predicted infrared spectrum. *Journal of Chemical Physics*. 104(3). pp. 832–847. doi: 10.1063/1.470809
11. Afanas'eva S.A.-R., Biryukov Yu.A., Belov N.N., Burkin V.V., Ishchenko A.N., Kartashov Yu.I., Kasimov V.Z., Fomenko V.V., Yugov N.T. (2012) Povyshenie effektivnosti vysokoskorostnogo metaniya udarnikov s primeneniem vysokoenergeticheskikh topliv s nanodispersnymi napolnitelyami [Increase of efficiency of high-speed throwing of strikers application of high-energy fuels with nanodispersed fillers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(18). pp. 67–79.
12. Kraynov A.Yu., Poryazov V.A., Moiseeva K.M. (2018). Skorost' rasprostraneniya plameni aerovzvesi nanorazmernogo poroshka allyuminiya [Flame propagation velocity in an aerosuspension of nanoscale aluminum powder]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 53. pp. 95–106. doi: 10.17223/19988621/53/9
13. Vorozhtsov A.B., Danilov P.A., Zhukov I.A., Khmeleva M.G., Platov V.V., Valikhov V.D. (2020) Vliyanie vneshnikh vozdeystviy na rasplav i nemetallicheskich nanochastits na strukturu i mekhanicheskie kharakteristiki legkikh splavov na osnove alyuminiya i magniya [The effect of external actions on a molten metal and the influence of nonmetallic nanoparticles on the structure and mechanical properties of the light alloys based on aluminum and magnesium]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 64. pp. 91–107. doi: 10.17223/19988621/64/7
14. Andryushchenko V.A., Rudyak V.Ya. (2012) Samodiffuziya molekul flyuida v nanokanalakh [Self-diffusion of fluid molecules in nanochannels]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(18). pp. 63–66.
15. Rudyak V.Ya., Andryushchenko V.A. (2014) Molekulyarno-dinamicheskoe modelirovanie razdeleniya nanozhidkosti s pomoshch'yu nanomembran [Molecular dynamics modeling of

nanofluid separation in nanomembranes]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 4. pp. 88–94.

Сведения об авторах:

Бородин Владислав Иванович – Генеральный директор ООО «Газпром трансгаз Томск», Томск, Россия. E-mail: borodingttgazprom@mail.ru

Бубенчиков Михаил Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: michael121@mail.ru

Бубенчиков Алексей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович – младший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: orevaore@mail.ru

Тимченко Сергей Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: Timchenko@tsu.ru

Information about the authors:

Borodin Vladislav I. (Chief Executive Officer, Lead Engineer, Gazprom Transgaz Tomsk, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borodingttgazprom@mail.ru

Bubenchikov Mikhail A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: michael121@mail.ru

Bubenchikov Aleksey M. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Mamontov Dmitriy V. (Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: orevaore@mail.ru

Timchenko Sergey V. (Doctor of Physics and Mathematics, - Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Timchenko@tsu.ru

Статья поступила в редакцию 02.06.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 02.06.2023; accepted for publication 12.02.2024

Научная статья

УДК 537.85

doi: 10.17223/19988621/87/7

Исследование характеристик импульсного МГД-генератора на комбинированном пиротехническом топливе

Владимир Григорьевич Бутов¹, Антон Геннадьевич Афонин²,
Виктор Александрович Солоненко³, Артем Александрович Кулешов⁴,
Алексей Александрович Ящук⁵

1, 2, 3, 4, 5 Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ bvg@niipmm.tsu.ru

² aag@niipmm.tsu.ru

³ vik@niipmm.tsu.ru

⁴ artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

⁵ rainbow@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты разработки и применения физико-математической модели высокого уровня в приближении Эйлера–Лагранжа для расчета многофазного многокомпонентного вязкого течения продуктов сгорания пиротехнического топлива в газодинамическом тракте импульсного МГД-генератора.

Приведены результаты численного исследования течения в газодинамическом тракте и характеристик импульсного МГД-генератора на продуктах сгорания пиротехнического топлива электрической мощностью до 20 МВт.

Установлены пространственная структура, свойства и особенности многофазного многокомпонентного течения. Впервые обнаружено возникновение вторичного течения в канале импульсного МГД-генератора и учтены фазовые превращения полидисперсных конденсированных частиц в газодинамическом тракте.

Ключевые слова: МГД-генератор, пиротехническое топливо, моделирование, приближение Эйлера–Лагранжа, многофазное многокомпонентное течение, конденсированные частицы

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Бутов В.Г., Афонин А.Г., Солоненко В.А., Кулешов А.А., Ящук А.А. Исследование характеристик импульсного МГД-генератора на комбинированном пиротехническом топливе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 73–87. doi: 10.17223/19988621/87/7

A study of characteristics of a pulsed MHD generator running on a combined pyrotechnic fuel

Vladimir G. Butov¹, Anton G. Afonin², Viktor A. Solonenko³,
Artyom A. Kuleshov⁴, Aleksey A. Yashchuk⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ bvg@niipmm.tsu.ru

² aag@niipmm.tsu.ru

³ vik@niipmm.tsu.ru

⁴ artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

⁵ rainbow@niipmm.tsu.ru

Abstract. In this paper, the design of a magnetohydrodynamic (MHD) generator is numerically simulated and analyzed. The regime and overall parameters of the accelerating nozzle and MHD channel of the pulsed MHD generator with a two-chamber plasma generator, operating on pyrotechnic fuel combustion products with afterburning in atmospheric oxygen, are numerically calculated. A mixture of Mg powders (fuel) and KNO₃ saltpeter is chosen as the pyrotechnic fuel. This mixture serves as both an oxidizing agent and a source of an easily ionizing additive. The condensed fraction includes MgO particles that can be solid or liquid depending on the ambient conditions. Relying on the previously calculated parameters of the constructed plasma generator, the developed mathematical model allows the numerical investigation of all the processes occurring in the gas-dynamic duct of the MHD generator. The parameters of a two-phase flow in the MHD channel and its general characteristics can be determined for the given characteristics of the nozzle.

Keywords: MHD generator, pyrotechnic fuel, modeling, Euler–Lagrange model, multi-phase multicomponent flow, condensed particles

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030).

For citation: Butov V.G., Afonin A.G., Solonenko V.A., Kuleshov A.A., Yashchuk A.A. (2024) A study of characteristics of a pulsed MHD generator running on a combined pyrotechnic fuel. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 73–87. doi: 10.17223/19988621/87/7

Введение

В работе [1] определен облик и рассчитаны режимно-габаритные параметры двухкамерного генератора плазмы, состоящего из газогенератора и камеры дожигания для импульсного МГД-генератора (МГДГ), работающего на плазме продуктов сгорания пиротехнического топлива (ПТ) рецептуры $0.64 \cdot \text{Mg} + 0.35 \cdot \text{KNO}_3 + 0.01 \cdot \text{до-}$ добавки [2, 3]. В настоящей работе значения температуры, давления, концентрации газовых компонент из [1] использованы как начальные условия на входе для моделирования течения уже непосредственно в тракте импульсного МГДГ.

Цель данной работы – разработка физико-математической модели высокого (3D) уровня для расчета многофазного многокомпонентного течения продуктов сгорания комбинированного топлива, определение с ее помощью путем численного исследования структуры и особенностей течения в газодинамическом тракте и уточнение характеристик импульсного МГД-генератора. Конденсированная фаза представлена частицами MgO , которые на входе являются жидкими, но при движении по тракту могут кристаллизоваться, а при возможности и снова расплавляться в зависимости от значения окружающей температуры.

Термодинамические расчеты показали, что в газодинамическом тракте МГДГ можно считать постоянным компонентный состав газовой смеси (представлен в таблице). Массовая доля частиц MgO в общем расходе равна 0.46.

Состав газовой смеси

Компоненты газовой смеси	Массовая доля
K	0.089
KCN	0.013
O ₂	0.015
N ₂	0.883

В данной статье разработанная методика расчета характеристик генератора плазмы [1] дополняется моделями и алгоритмами расчета двухфазного течения в газодинамическом тракте импульсного МГДГ, работающего на продуктах сгорания, комбинированного ПТ.

Газодинамический тракт МГДГ состоит из разгонного сопла и МГД-канала. Разгонное сопло начинается сразу после цилиндрической камеры дожигания и в конечном итоге переходит в прямоугольный линейный канал МГДГ. Общий вид расчетной области показан на рис. 1.

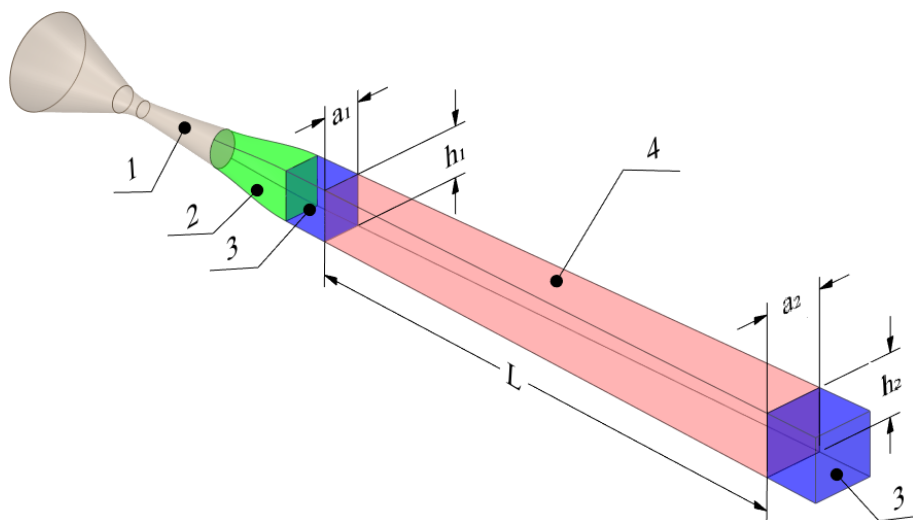


Рис. 1. Газодинамический тракт МГДГ

Fig. 1. Gas-dynamic duct of a magnetohydrodynamic generator (MHDG)

На рис. 1 указаны: участок 1 – сужающаяся (дозвуковая) часть сопла, которая начинается с сечения выхода из цилиндрической камеры дожигания, переходящая в область горловины с минимальным сечением и далее расширяющаяся в сверхзвуковую часть сопла до заданного кругового сечения; участок 2 – переходная область, начинающаяся с выбранного кругового сечения, с которым гладко сопрягается и простирается до входа в линейный МГД-канал прямоугольного сечения, где гладко сопрягается с участком прямоугольного сечения 3. Участок 4 – МГД-канал. Геометрические параметры МГД-канала: $h_1 = 0.22$ м, $h_2 = 0.2805$ м, $a_1 = 0.1681$ м, $a_2 = 0.2805$ м, $L = 2.28$ м. Максимальное значение индукции B_z магнитного поля составляет 2.2 Тл. Число Маха на входе в МГД-канал, полученное на основе одномерной теории в приближении модели «псевдогаза», оценивается в величину, равную 2.6.

Постановка задачи движения многофазной смеси с учетом взаимодействия с внешним электромагнитным полем

Для описания турбулентного течения газовой фазы используются декартовы координаты x_i , $i = 1, 2, 3$. Течение в данной точке пространства и времени характеризуется вектором скорости $\mathbf{U}$ с компонентами u_i , а также термодинамическими параметрами: давлением p , плотностью газовой смеси ρ , температурой T .

В модели для совместного описания течения газовой смеси с частицами выбран дискретно-траекторный подход Эйлера–Лагранжа [4–9], в котором для частиц дисперсной фазы используется подход Лагранжа, а для газовой фазы – подход Эйлера.

Полидисперсный ансамбль твердых или жидких частиц конденсированной фазы характеризуется скоростями $\mathbf{V}_j$ с компонентами v_{ij} , температурой T_j , распределенной плотностью $\rho_{sj} = n_{sj}(\mathbf{x}, t) \cdot m_j$, массой m_j и концентрацией n_{sj} частиц j -й фракции, $j = 1, \dots, N$.

Двухфазное течение газа с частицами в газодинамическом тракте МГДГ описывается на основе законов сохранения массы, импульса, энергии и числа атомов. Уравнение неразрывности для осредненных по времени величин (здесь и далее подразумевается, что по повторяющимся индексам проводится суммирование):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0. \quad (1)$$

Уравнения сохранения импульса:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^N C_{Rj} \rho_{sj} (v_{ij} - u_i) + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + e_{ijk} j_j B_k, \quad (2)$$

где C_{Rj} – коэффициент силового взаимодействия между газовой фазой и частицами. Последнее слагаемое в (2) – компоненты вектора электромагнитной силы $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, приложенной к единице объема; $\mathbf{j}$, $\mathbf{B}$ – векторы плотности тока и магнитной индукции, e_{ijk} – символ Леви–Чивиты. В расчетах МГДГ считалось, что $B_1 = B_2 = 0$, $B_3 = B_z$, где B_z – компонента индукции магнитного поля по направлению к изоляционным стенкам; тогда ненулевыми будут только компоненты с символами Леви–Чивиты $e_{123} = 1$ и $e_{213} = -1$.

Тензор вязких напряжений без учета влияния градиентов давления имеет вид:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k},$$

где μ – динамическая вязкость, δ_i – символ Кронекера.

Уравнение сохранения энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho h_0 - p)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k h_0) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i \tau_{ik}) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_g \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \sum_{j=1}^N C_{Lj} \rho_j (T_j - T) + j_i E_i \end{aligned} \quad (3)$$

где $h_0 = h + 0.5 U^2$ – полная энтальпия смеси, λ_g – коэффициент теплопроводности газовой смеси, C_{Li} – коэффициент теплового взаимодействия между газовой фазой и частицами. Последнее слагаемое в (3) – плотность электрической мощности $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = j_i E_i$, где $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ – вектор напряженности электрического поля.

Уравнения движения и энергии для частиц j -й фракции, записанные вдоль траектории частиц, имеют вид:

$$\begin{aligned} m_j \frac{dv_{ij}}{dt} &= C_{Rj} \rho_{sj} (v_{ij} - u_i), \\ m_j c_s \frac{dT_j}{dt} &= C_{Lj} (T_j - T) + l_m \frac{dm_j}{dt} + \varepsilon \pi d_j^2 (\pi I - \sigma_B n^2 T_j^4), \end{aligned} \quad (4)$$

где c_s – теплоемкость, l_m – удельная теплота образования частиц.

Коэффициенты C_{Rj} и C_{Lj} , имеющие вид: $C_{Rj} = 0.5 C_d A_{pj}$ и $C_{Lj} = \pi d_j \lambda \text{Nu}$, определяются из решений модельных задач или из результатов экспериментов на специально созданных стендах [10, 12–15]. C_d – коэффициент сопротивления частицы, d_j и A_{pj} – диаметр и площадь поперечного сечения частиц j -й фракции соответственно, Nu – число Нуссельта, ε – коэффициент черноты частиц, I – интенсивность излучения, σ_B – постоянная Стефана–Больцмана, n – показатель преломления среды (в расчетах брался равным 1).

Уравнение неразрывности для частиц j -й фракции имеет вид [6–9]:

$$\frac{\partial \rho_{sj}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_{sj} v_{jk}) = \sum_{l=1}^N J_{lj}, \quad (5)$$

где J_{lj} – интенсивность обмена массой между l -й и j -й фракциями за счет столкновений частиц. В расчетах считалось, что правая часть в (5) равна 0. Энтальпия h газовой смеси выражается через удельные энтальпии компонентов h_k , $k = 1, 2, \dots, K$, зависящие от температуры, следующим образом:

$$h = \sum_{k=1}^K Y_k h_k(T), \quad h_k(T) = h_k^0 + \int_0^T c_{pk}(T) dT,$$

где Y_k – массовая доля; c_{pk} – удельная теплоёмкость; h_k^0 – стандартная теплота образования k -й компоненты смеси. Уравнение состояния смеси газов:

$$p = \rho R T \sum_{k=1}^K \frac{Y_k}{M_k},$$

где M_k – молярная масса k -й компоненты смеси, R – универсальная газовая постоянная.

Для описания турбулентных характеристик течения использована хорошо известная SST-модель Ментера [10, 11].

Граничные условия для газодинамических параметров задаются следующим образом. На входе в сужающуюся часть сопла заданы значения температуры $T = 3\,600$ К и полного давления $P = 70$ атм. Минимальное сечение сопла и другие геометрические характеристики разгонного сопла определяют расход газовой смеси и частиц как величину $Q_m = 27.85$ кг/с, при этом фиксированная массовая доля частиц имеет значение 0.46.

На всех твердых поверхностях принимается $U = 0$ м/с. Для температуры T газовой фазы считается, что стенки сопла, переходной области и МГД-канала облицованы керамикой на основе MgO. Данная керамика имеет довольно низкую теплопроводность около 10 Вт/м·К, а ее температура плавления составляет 3 105 К, поэтому граничное условие для T назначалось исходя из значения температуры газа в окрестности твердой стенки: если температура газа выше температуры плавления 3 105 К, то на стенке реализуется условие первого рода для температуры $T_w = 3\,105$ К, если же температура газа ниже температуры плавления, то на стенке ставится условие теплоизоляции. По факту расчетов получилось, что на всех твердых поверхностях реализуется температура 3 105 К, так как за счет условия прилипания температура восстанавливается до температур, превышающих температуру плавления.

На выходе из канала считается, что поток сверхзвуковой и реализуются т.н. мягкие граничные условия.

Электромагнитные величины вектора плотности тока, напряженности электрического поля, магнитной индукции $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, входящие в уравнения (2) и (3), определяются из уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома для изотропно проводящей среды. Далее используются стандартные обозначения: для координат $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ и компонент скорости $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$. Ось x направлена вдоль канала, y – вертикально вверх от катода к аноду, ось z дополняет систему координат до правой. С учетом ряда обстоятельств в рассматриваемом МГДГ возможно упрощение полной системы уравнений Максвелла [12, 13], приводящее к следующей системе:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \mathbf{j} + \frac{\beta}{|\mathbf{B}|} \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (6)$$

где σ – удельная электропроводность среды, β – параметр Холла.

Характерное время установления электродинамических величин на несколько порядков меньше времени установления газодинамических параметров, поэтому задачи определения электрических полей и токов и газодинамических параметров можно решать попеременно до их согласования. Определение электрических полей и токов на основе уравнений (6) осуществлялось следующим образом. Кроме описанных допущений в (2) для компонент индукции магнитного поля, для напряженности электрического поля считается, что $E_z = 0$. Тогда из уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ следует, что

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Отсюда, вводя электрический потенциал φ такой, что $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, из уравнения неразрывности электрического тока и обобщенного закона Ома (первое и третье уравнения в (6)) получим уравнение для потенциала φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\lambda \beta)}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial (\lambda \beta)}{\partial x} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} [\lambda B_z (v + \beta u)] + \frac{\partial}{\partial y} [\lambda B_z (\beta v - u)], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\lambda = \sigma / (1 + \beta^2)$. Для параметра Холла β , удельной электропроводности σ и подвижности электронов μ_e используются зависимости Саха [13, 14]:

$$\beta = \mu_e |\mathbf{B}|, \quad \mu_e = \mu_e \frac{p_*}{p} \sqrt{\frac{T}{T_*}}, \quad \sigma = \sigma_* \sqrt{\frac{p_*}{p}} \left(\frac{T}{T_*} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left[\frac{I_e}{2} \left(\frac{1}{T_*} - \frac{1}{T} \right) \right]. \quad (9)$$

Здесь I_e – потенциал ионизации, соответствующий калийной присадке. Значок «*» в (9) приписан опорным значениям электропроводности σ , подвижности электронов μ_e для соответствующих им давлению p_* и температуре T_* . Опорные значения в данной работе были взяты из термодинамических расчетов по программе «Плазма» [15].

В уравнении для потенциала (8) из-за возможности допущения, что $B_1 = B_2 = 0$, $E_z = 0$, нет частных производных по координате z , но все входящие в это уравнение функции зависят от x , y и z . Расчет электродинамических параметров проводился в области, отмеченной серым цветом на рис. 2, что соответствует участкам 3 и 4 на рис. 1.

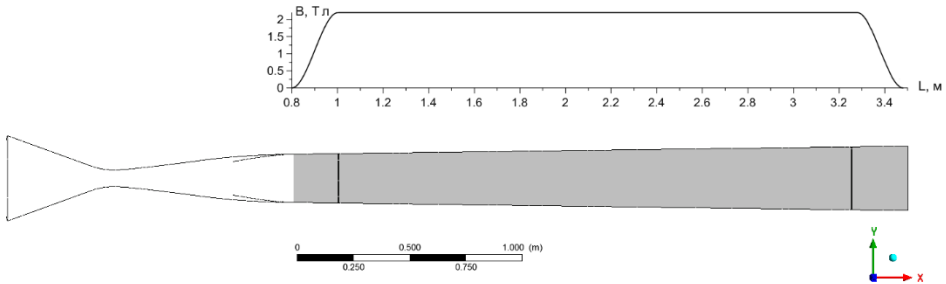


Рис. 2. Газодинамический тракт МГДГ и канал МГДГ (выделен серым цветом) с распределением напряженности магнитного поля B_z

Fig. 2. A gas-dynamic duct and a channel (shaded gray) of the MHDG with the distribution of magnetic field strength B_z

Модель электродинамики использовалась в квазитрехмерной постановке, что, в отличие от предыдущих работ, основанных на двумерной модели течения газа и электродинамики, позволило учесть неоднородность потока в направлении оси z , связанную с формированием пограничных слоев на изоляторных стенках, неоднородность распределения частиц в расчетной области и др. Для этого при решении уравнения потенциала (8) после разбиения оси z проводились верти-

кальные сечения со сгущением к изоляционным стенкам. Также на рис. 2 представлено распределение напряженности магнитного поля B_z по длине канала. Вертикальными линиями отмечены начало (расстояние 1 м от минимального сечения) и конец (3.28 м) электродной зоны МГДГ.

В качестве граничных условий на электродной части твердых стенок ставится распределение потенциала вида:

$$\varphi_a = \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \varphi_c = -\frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (10)$$

где $\Delta\varphi$ – заданная разность потенциалов на электродах, индексы a и c соответствуют аноду и катоду.

На непроводящих участках стенок ставилось условие непротекания для нормальной компоненты электрического тока $j_n = 0$.

Из уравнения (8) с учетом граничных условий определяется распределение потенциала φ . Затем по (6) вычисляются значения $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ и плотности электрической мощности $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$, т.е. определяются правые части уравнений (2) и (3). Далее проводится расчет уравнений газовой динамики на некотором количестве временных шагов, а затем по измененному полю газодинамических параметров опять пересчитываются электромагнитные параметры и, соответственно, правые части уравнений (2) и (3), и так далее до достижений сходимости полей газодинамических и электромагнитных параметров.

Результаты моделирования

В качестве результатов расчетов демонстрируются распределение газодинамических параметров по газодинамическому тракту МГДГ и общие графики мощности и нагрузочной характеристики в зависимости от разности потенциалов на электродных стенках.

На рис. 3 представлены нагрузочная (черным цветом, шкала слева) и вольт-амперная (синим цветом, шкала справа) характеристики в зависимости от разности потенциалов $\Delta\varphi$ на аноде и катоде. Полученная максимальная мощность 17.4 МВт с током 34.8 кА соответствует разности потенциалов $\Delta\varphi = 500$ В.

На рис. 4, 5 представлены распределения газодинамических параметров для случая получения максимальной мощности $\Delta\varphi = 500$ В. На этих рисунках в вертикальной плоскости симметрии показаны распределения давления и числа Маха соответственно. Хорошо заметен так называемый перекося давления [13] по длине канала, явно проявляющийся внутри электродной зоны (между вертикальными черными линиями на рис. 4, 5).

На рис. 6, 7 показаны траектории частиц с указанием доли жидкой фазы. Видно, что на входе частицы полностью жидкие, а по мере движения по газодинамическому тракту они, попадая в область более низких температур, частично кристаллизуются. Особенно это заметно в областях вблизи твердых стенок. Из этого же рисунка можно сделать вывод, что в пограничном слое в непосредственной близости от твердых поверхностей траектории движения частиц исключают их выпадение на стенку даже в области тракта непосредственно за переходной областью (2 на рис. 1).

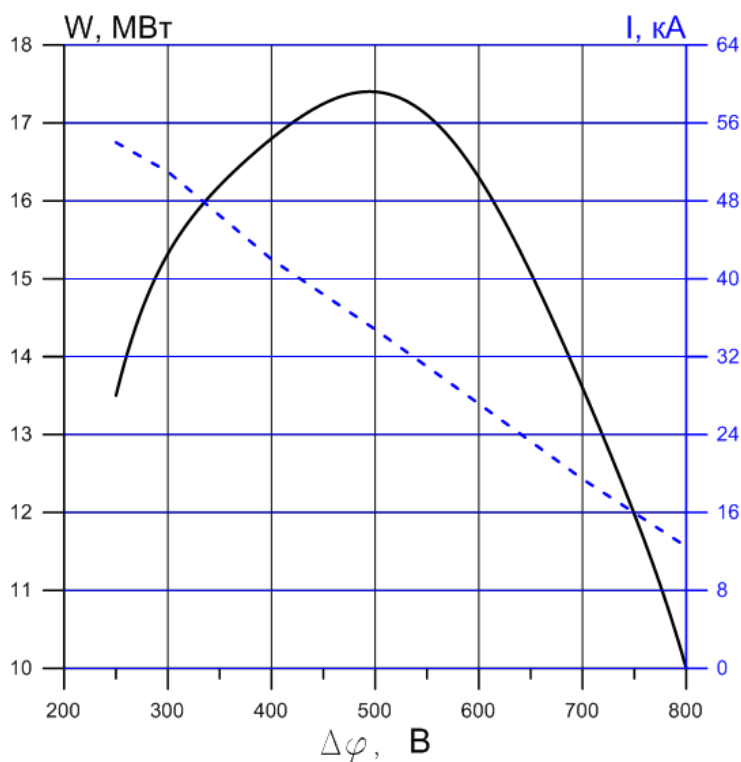


Рис. 3. Вольтамперная и нагрузочная характеристики МГДГ

Fig. 3. Current-voltage and load characteristics of the MHDG



Рис. 4. Распределение давления в плоскости xy

Fig. 4. Pressure distribution on xy-plane

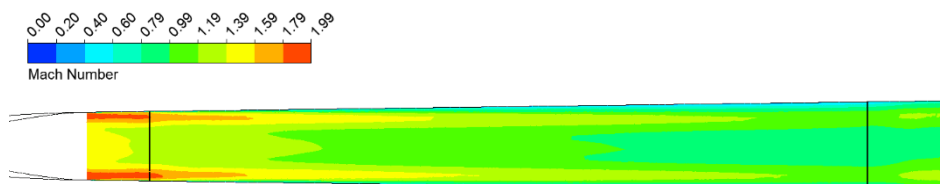


Рис. 5. Распределение числа Маха в плоскости xy

Fig. 5. Mach number distribution on xy-plane

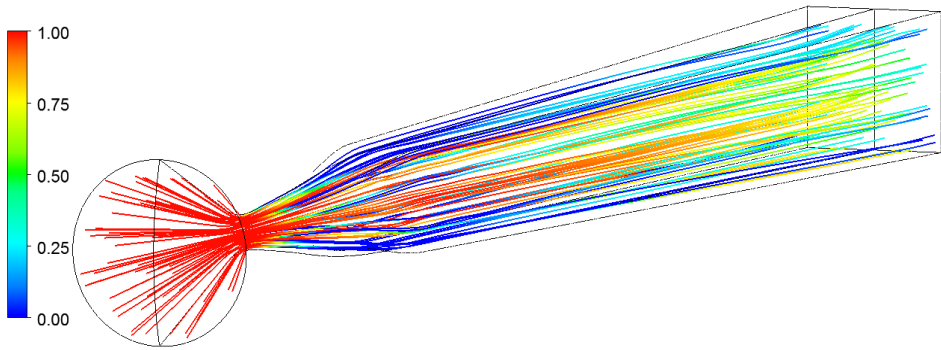


Рис. 6. Траектории конденсированных частиц диаметром не более 5 мкм с указанием доли жидкой фазы

Fig. 6. Trajectories of condensed particles (the diameter is less than or equal to 5 μm) with indicated liquid phase fractions

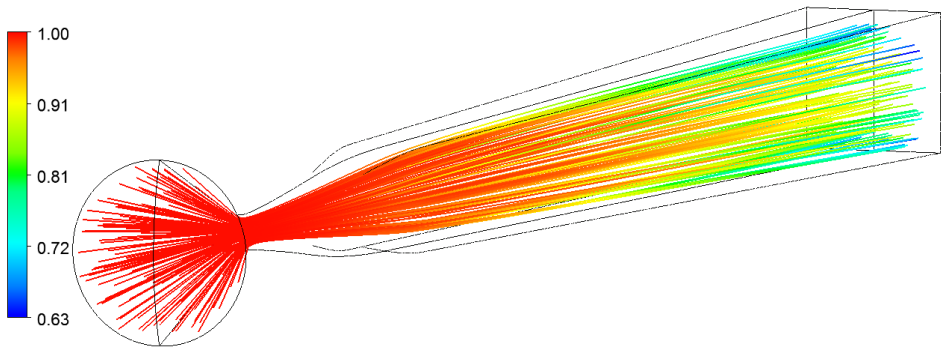


Рис. 7. Траектории конденсированных частиц диаметром 15 мкм и более с указанием доли жидкой фазы

Fig. 7. Trajectories of condensed particles (the diameter is greater than or equal to 15 μm) with indicated liquid phase fractions

Для оценки достоверности получаемых результатов проведено исследование, включающее в себя сравнение с результатами одномерного расчета, основанного на приближении модели псевдогаза. Также проводилось сравнение полученных результатов с результатами ранее проведенных расчетов в двумерных и трехмерных постановках [16, 17]. Например, одномерная модель, основанная на приближении псевдогаза [6, 7], при таком же расходе ($Q_m = 27.85 \text{ kg/s}$) дает значение мощности 18.5 МВт при разности потенциалов на электродах $\Delta\varphi = 620 \text{ В}$. Качественное согласование можно считать удовлетворительным, а количественную разницу значений можно объяснить значительными различиями в математической постановке.

При анализе результатов был обнаружен эффект развития вторичного течения в канале МГДГ. На рис. 8, 9 показаны его схемы в виде характерных значений относительных скоростей v/u и w/u соответственно в плоскости $y-z$, перпендикулярной оси канала МГДГ.

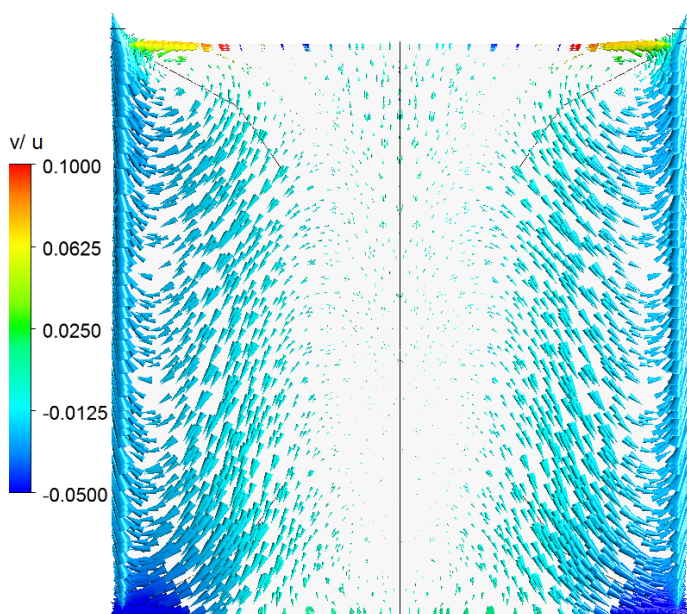


Рис. 8. Схема развития вторичного течения в канале МГДГ с указанием относительных значений скоростей v/u
Fig. 8. Pattern of the secondary flow development in the MHDG channel with indicated relative velocities v/u

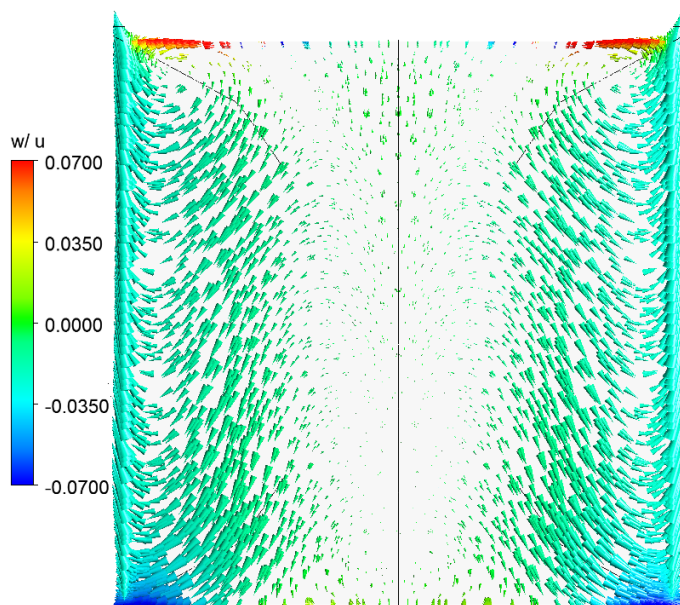


Рис. 9. Схема развития вторичного течения в канале МГДГ с указанием относительных значений скоростей w/u
Fig. 9. Pattern of the secondary flow development in the MHDG channel with indicated relative velocities w/u

Ранее появление вторичного течения было численно обнаружено в «длинных» каналах энергетических стационарных МГД-генераторов [16]. Возможным объяснением подобного явления в характере течения могут быть эффекты, связанные с неоднородностью электрического поля и газодинамических параметров потока по сечению канала и, в частности, с большим давлением на нижней электродной стенке (катоде) из-за перекаса давления.

Выводы

Основные научные результаты проведенного исследования заключаются в следующем.

Разработаны и апробированы физико-математическая модель высокого (3D) уровня в приближении Эйлера–Лагранжа и алгоритм расчета многофазного многокомпонентного вязкого течения продуктов сгорания комбинированного пиротехнического топлива в газодинамическом тракте импульсного МГД-генератора. Полученные результаты в целом совпадают с результатами, полученными ранее и описывающими течение однородной среды в канале МГДГ при помощи модели псевдогаза с постоянными R и γ и изотермическими граничными условиями на твердых стенках. В модели корректно учитываются многофазность рабочего тела, зависимость теплофизических свойств каждого компонента смеси от температуры, плавление и кристаллизация частиц, ограничения температуры на твердых поверхностях газодинамического тракта.

Впервые количественно установлены следующие особенности течения в импульсных МГД-генераторах:

- возможность изменения фазового состояния полидисперсных частиц из жидкого в твердое и обратно в зависимости от температурных условий течения;
- траектории и доли частиц твердой и жидкой фаз в газодинамическом тракте;
- возникновение и развитие вторичного течения в МГД-канале.

Численно показано, что корректный учет процессов в импульсном МГД-генераторе на комбинированном топливе приводит к заметному (5–10%) уменьшению его интегральных характеристик относительно значений, рассчитанных по моделям более низкого уровня.

Список источников

1. Афонин А.Г., Бутов В.Г., Солоненко В.А., Яцук А.А., Якушев А.А. Исследование процессов в генераторе плазмы импульсного МГД-генератора на комбинированном пиротехническом топливе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 60–73. doi: 10.17223/19988621/78/5
2. Дегтев Ю.Г., Догадаев Р.В., Клычков В.И. и др. Исследование свойств плазмы продуктов сгорания пиротехнических (металлических) горючих в воздухе // Доклады РАН. 1995. Т. 340, № 6. С. 768–771.
3. Дегтев Ю.Г., Догадаев Р.В., Иваненко А.А. и др. Экспериментальные и численные исследования плазмы продуктов сгорания пиротехнического горючего в воздухе // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44, № 4. С. 494–502.
4. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.
5. Турбулентные течения реагирующих газов / пер. с англ. / под ред. П. Либби, Ф. Вильямса. М. : Мир, 1983. 328 с.

6. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М. : Машиностроение, 1974. 212 с.
7. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно и полидисперсные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1980. 172 с.
8. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1994. 320 с.
9. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения газа с частицами. М. : Физматлит, 2008. 600 с.
10. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA-Journal. 1994. V. 32, № 8. P. 1598–1605. doi: 10.2514/3.12149
11. Vieser W., Esch T., Menter F. Heat transfer predictions using advanced two-equation turbulence models // CFX Validation Report 10/0602. AEA Technology, 2002. P. 1–69.
12. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М. : Наука, 1970. 572 с.
13. Бреев В.В., Губарев А.В., Панченко В.П. Сверхзвуковые МГД-генераторы. М. : Энергоатомиздат, 1988. 240 с.
14. Энциклопедия низкотемпературной плазмы / под ред. В.Е. Фортова. М. : Наука, 2000, Т. IV. 507 с.
15. Чернов Ю.Г., Сахаров Б.Б., Веретенев В.Ю. Пакет прикладных программ «Плазма». Препринт № 3522. М. : ИАЭ, 1981.
16. Панченко В.П. Введение в магнитогидродинамическое (МГД) преобразование энергии : электрон. учеб. изд. М. : МГТУ им. Баумана, 2011. 55 с.
17. Афонин А.Г., Бутов В.Г., Панченко В.П. и др. Импульсный магнитогидродинамический генератор большой мощности на твёрдом (пороховом) топливе нового поколения // Прикладная механика и техническая физика. 2018. № 6. С. 75–87. doi: 10.15372/PMTF20180608

References

1. Afonin A.G., Butov V.G., Solonenko V.A., Yashchuk A.A., Yakushev A.A. (2022) Issledovanie protsessov v generatore plazmy impul'snogo MGD-generatora na kombinirovannom pirotekhnicheskom toplive [A study of processes in a plasma generator of the pulsed MHD generator running on a combined pyrotechnic fuel]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 78. pp. 60–73. doi: 10.17223/19988621/78/5
2. Degtev Yu.G., Dogadaev R.V., Klychkov V.I., Panchenko V.P., Yakushev A.A. (1995) Issledovanie svoystv plazmy produktov sgoraniya pirotekhnicheskikh (metallicheskikh) goryuchikh v vozdukh [Investigation of plasma properties in combustion products of pyrotechnic (metal) fuels in the air]. *Doklady RAN*. 340(6). pp. 768–771.
3. Degtev Yu.G., Dogadaev R.V., Ivanenko A.A., Panchenko V.P., Yakushev A.A. (2006) Experimental and numerical investigations of plasma of products of combustion of pyrotechnic fuel in air. *High Temperature*. 44(4). pp. 487–496. doi: 10.1007/s10740-006-0061-8
4. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of multiphase media]. Part I. Moscow: Nauka.
5. Libby P.A., Williams F.A. (1980) *Turbulent Reacting Flows*. New York: Topics in Applied Physics.
6. Sternin L.E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase nozzle flows]. Moscow: Mashinostroenie.
7. Sternin L.E., Maslov B.P., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. (1980) *Dvukhfaznye mono i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami* [Two-phase mono- and polydispersed flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroenie.

8. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase flows of gas with particles]. Moscow: Mashinostroyeniye.
9. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techeniya gaza s chastitsami* [Flows of gas with particles]. Moscow: Fizmatlit.
10. Menter F.R. (1994) Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 32(8). pp. 1598–1605. doi: 10.2514/3.12149
11. Vieser W., Esch T., Menter F. (2002) Heat transfer predictions using advanced two-equation turbulence models. *CFX Validation Report 10/0602*. AEA Technology. pp. 1–69.
12. Vatazhin A.B., Lyubimov G.A., Regirer S.A. (1970) *Magnitogidrodinamicheskie techeniya v kanalakh* [Magnetohydrodynamic flows in channels]. Moscow: Nauka.
13. Breev V.V., Gubarev A.V., Panchenko V.P. (1988) *Sverkhzvukovye MGD-generatory* [Supersonic MHD generators]. Moscow: Energoatomizdat.
14. Fortov V.E. (2000) *Entsiklopediya nizkotemperaturnoy plazmy* [Encyclopedia of low-temperature plasma]. Volume IV. Moscow: Nauka.
15. Chernov Yu.G., Sakharov B.B., Veretenov V.Yu. (1981) *Paket prikladnykh programm «Plazma»* [Applied software package "Plasma"]. Preprint № 3522. Moscow: IAE.
16. Panchenko V.P. (2011) *Vvedenie v magnitogidrodinamicheskoe (MGD) preobrazovanie energii* [Introduction to magnetohydrodynamic energy conversion]. Moscow: Bauman MSTU.
17. Afonin A.G., Butov V.G., Panchenko V.P., Sinyaev S.V., Solonenko V., Shvetsov G.A., Yakushev A.A. (2018) Powerful pulsed magnetohydrodynamic generator fueled by a solid (powder) propellant of a new generation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 59(6). pp. 1024–1035. doi: 10.1134/S0021894418060081

Сведения об авторах:

Бутов Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Афонин Антон Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Солоненко Виктор Александрович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

Кулешов Артем Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

Ящук Алексей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории оптимизации Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Butov Vladimir G. (Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Afonin Anton G. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aag@niipmm.tsu.ru

Solonenko Viktor A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: vik@niipmm.tsu.ru

Kuleshov Artyom A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: artem.kuleshov@niipmm.tsu.ru

Yashchuk Aleksey A. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: rainbow@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 04.07.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 04.07.2023; accepted for publication 12.02.2024

Научная статья

УДК 004.94; 532.5

doi: 10.17223/19988621/87/8

Численное моделирование осаждения твердых частиц в установке погружного горения

Виталий Анатольевич Демин¹, Алексей Валерьевич Костыря²

^{1,2} Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

¹ Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹ demin@psu.ru

² AVKostyrja@pstu.ru

Аннотация. Рассматриваются дрейф и оседание твердых частиц в лабораторной установке погружного горения в условиях трехфазного течения газ–жидкость–твердые частицы, в котором жидкая фаза является несущей средой. При описании движения уже образовавшейся в окрестности горелки газовой фазы проанализирован модельный случай теплового режима работы без последующего перехода жидкой фазы в пар. Сделано заключение о возможности предотвращения неуправляемого осаждения твердых частиц при отборе среды из зоны высоких скоростей восходящего движения жидкости.

Ключевые слова: аппараты погружного горения, численное моделирование, трехфазный поток газ–жидкость–твердые частицы, осаждение

Для цитирования: Демин В.А., Костыря А.В. Численное моделирование осаждения твердых частиц в установке погружного горения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 88–105. doi: 10.17223/19988621/87/8

Original article

Numerical modeling of sedimentation of solid particles in a submerged combustion apparatus

Vitaliy A. Demin¹, Aleksey V. Kostyrja²

^{1,2} Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

¹ Perm State National Research University, Perm, Russian Federation

¹ demin@psu.ru

² AVKostyrja@pstu.ru

Abstract. In this paper, the regularities of solid-phase sedimentation within a laboratory submerged combustion apparatus are considered. The study is conducted using the methods of computational fluid dynamics.

A gas–liquid–solid three-phase flow is simulated. The gas–liquid and liquid–solid interactions are modeled using the Euler–Euler and Euler–Lagrange approaches, respectively. The thermal regime is considered without the vapor phase. The finite volume method is used to solve this problem.

As a result, the trajectories of the solid particles are obtained and their correlation with the streamlines of the fluid is analyzed. The proportion of particles that settled down during the experiment is obtained for different numbers of particles. The conclusion is made on the nonlinear growth of the proportion of settled particles and their percentage on the right side. The velocity of the upward fluid flow is found to be higher than the deposition velocity for the entire considered range of solid particle diameters.

It is concluded that the organized solid-phase withdrawal from the apparatus can be provided if the solid phase is extracted near the area of solid particle nucleation.

Keywords: submerged combustion apparatus, numerical modeling, gas–liquid–solid three-phase flow, sedimentation

For citation: Demin, V.A., Kostyrya, A.V. (2024) Numerical modeling of sedimentation of solid particles in a submerged combustion apparatus. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 88–105. doi: 10.17223/19988621/87/8

Введение

Аппараты погружного горения (АПГ) представляют собой теплотехнические устройства для прямого нагрева жидкостей. Нагрев жидкости происходит при ее непосредственном контакте со струей горячих дымовых газов, образующейся в горелке. Принципиальная схема АПГ приведена на рис. 1. При работе АПГ струя дымовых газов при контакте с жидкостью разбивается на пузырьки, которые, барботируя через слой жидкости, отдают ей свое тепло. После выхода из барботажного слоя дымовые газы инвертируются в сплошную фазу и покидают аппарат через выхлопную трубу. Нагретая жидкая фаза переливается через порог, попадает в приемную емкость и смешивается с новыми порциями жидкости, поступающими в АПГ. Жидкая фаза из приемной емкости принудительно с помощью насоса подается в выпарную емкость, где происходят ее нагрев и последующее выпаривание.

АПГ, как правило, применяются для выпаривания загрязненных жидкостей или концентрированных растворов солей, образующих в ходе технологического процесса осадок. Таким образом, в аппарате неминуемо возникает твердая фаза, представленная мелкодисперсными частицами. Неуправляемое движение твердых частиц приводит к частым засорениям аппарата и, как следствие, длительным простоям для его очистки. Эта проблема может быть решена за счет организации управляемого движения твердой фазы в аппарате [1]. Однако разработка мероприятий по организации движения частиц требует предварительного изучения закономерностей их осаждения в АПГ. В рамках данной статьи проведено теоретическое исследование указанных процессов численными методами.

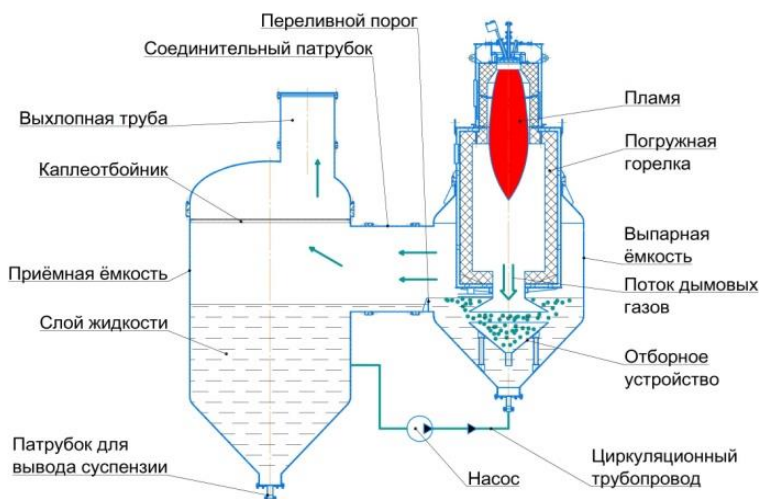


Рис. 1. Принципиальная схема АПП
Fig. 1. Schematic diagram of a submerged combustion Apparatus

Ранее нами были исследованы законы движения трехфазного потока газ–жидкость–твердые частицы на примере лабораторной установки с погружным горением [1]. Настоящая работа является развитием указанного исследования и направлена на уточнение динамики твердой фазы с детальным расчетом доли осевших частиц.

Постановка задачи и метод решения

Для исследования осаждения твердых частиц необходима физико-математическая модель, описывающая движение трехфазного потока газ–жидкость–твердые частицы. Обзор текущего состояния, современных методов и алгоритмов моделирования многофазных течений представлен в [2–4].

В рассматриваемой системе газ присутствует в виде пузырьков, жидкость является сплошной средой, а твердая фаза диспергирована в виде мелких кристаллов. В модели частицы не выходят из сопла горелки, а вводятся в толще жидкости под горелкой. Эта область выбрана в качестве области ввода, так как является зоной максимальной теплонапряженности, и именно в ней наиболее вероятно зарождение частиц. Газовая и жидкая фазы влияют на движение твердой, определяя в конечном итоге ее динамику. В качестве расчетной области принята трехмерная геометрическая модель лабораторной установки с погружной горелкой.

Порядок работы лабораторной модели аналогичен принципу действия полно-размерного АПП. Более подробное описание параметров установки изложено в [1].

Адекватная физико-математическая модель была построена в ходе исследования [1] и дала предварительные результаты, хорошо согласующиеся с ранее известными данными по динамике потоков [1] в рассматриваемой геометрии. Взаимодействие газовой и жидкой фаз моделировалось с помощью подхода «Эйлер–Эйлер» (Eulerian-Eulerian multiphase model) [5, 6], движение твердых частиц – с помощью подхода «Эйлер–Лагранж» (Lagrangian particle tracking model) [7].

Преимуществом подхода «Эйлер–Лагранж» является возможность построить траектории частиц от момента зарождения до момента их осаждения на поверхность или вынужденного самоуничтожения по причине ограниченности вычислительных ресурсов в отношении допустимой длины траектории частиц. В модель были заложены уравнения турбулентного движения, так как струя горячих дымовых газов в момент выхода из сопла горелки имеет скорость, превышающую 100 м/с, и может вызывать значительные турбулентные пульсации в зоне контакта с жидкостью. Вместе с тем в зонах, удаленных от горелки, течение потока может оставаться ламинарным. Таким образом, для корректной имитации течений необходима модель турбулентности, дающая надежные результаты при низких числах Рейнольдса. Этому требованию отвечает модель RNG k-ε (модель с ренормализованными группами) [6].

В работе [1] применялось уничтожение твердых частиц после 10 с жизни либо после 10 м пробега. Это приводило к тому, что траектории большого числа частиц, полученные в результате расчетов, обрывались в толще жидкости. Данное обстоятельство не позволяло увидеть тенденцию к осаждению частиц или их выносу из выпарной зоны под действием энергии потока. В то же время основное внимание в указанном исследовании уделялось структуре течения, а не динамике взвеси. Для достижения целей в настоящем исследовании время жизни частиц было увеличено до 100 с, так что их пробег до уничтожения составил 20 м. Этого оказалось достаточно, чтобы подавляющее число частиц, сделав определенное число оборотов в объеме, абсорбировалась на дне.

Как и в предыдущем исследовании, твердые частицы представляют собой кристаллы хлорида калия (плотность $\rho_s = 1984 \text{ кг/м}^3$), жидкая фаза – воду (плотность $\rho_l = 997 \text{ кг/м}^3$, вязкость $8.9 \cdot 10^{-4} \text{ Па}\cdot\text{с}$), газовая фаза – воздух с диаметром пузырьков 3 мм. Применительно к установкам погружного горения вопрос о размерах пузырьков недостаточно исследован, поэтому их диаметр был выбран по примеру работы [6] в соответствии с экспериментальными данными. Для качественной оценки осаждения твердой фазы диаметр частиц был принят 0.24 мм [1]. Для количественного описания явления седиментации была проведена серия экспериментов с частицами различных диаметров. Перебор значений частиц по диаметру приведен в табл. 1. Данный ряд получен кратным умножением или делением исходного диаметра с добавлением дополнительных точек для уточнения кривизны графиков. Массовый расход твердой фазы корректировался в зависимости от диаметра с целью сохранить постоянным количество вводимых за единицу времени частиц. Дополнительно проводились серии экспериментов с уменьшенным на 50% и увеличенным на 50% количеством частиц.

Таблица 1

Построение ряда диаметров твёрдых частиц

Член ряда	d/16	d/8	d/4	3d/8	d/2	3d/4	d	2d	3d	4d	5d	6d
Числовое значение, мм	0.015	0.03	0.06	0.09	0.12	0.18	0.24	0.48	0.72	0.96	1.2	1.44

Уравнения физико-математической модели решались с помощью коммерческого пакета ANSYS CFX 2020R2, который представляет собой программное обеспечение для моделирования задач гидродинамики. Вычислительным пакетом

реализуется гибридная технология, основанная на методе конечных объемов с использованием метода конечных элементов. Метод выбран в силу его хорошей разработанности применительно к задачам с особыми требованиями к консервативности численной схемы [8]. Кроме того, данный метод дискретизации является оптимальным на произвольных неструктурированных сетках с ячейками произвольной формы [9].

В пакет встроены препроцессор, решатель и постпроцессор. Препроцессор представляет собой специальное приложение для формирования расчетного задания и трансляции его в машинный язык. Сформированное расчетное задание загружается в готовый решатель.

Решение задачи состояло из трех этапов и включало создание расчетной сетки, выполнение вычислительной процедуры и визуализацию полученных данных. Расчетная сетка построена с помощью специализированного приложения ANSYS AUTODYN PrepPost. При построении сетки использовался линейный порядок элементов. Крупность ячеек сетки распределена по расчетной области неравномерно: более мелкие ячейки были заданы в выпарной части установки (на рис. 2 – справа). Общее количество узлов сетки составило 2 166 001, количество элементов – 12 066 247.

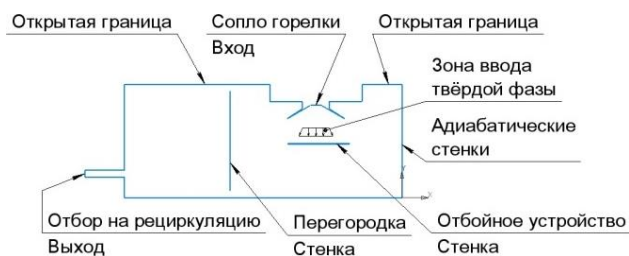


Рис. 2. Расчетная схема лабораторной установки (разрез)

Fig. 2. Design model of a laboratory setup (in section)

Особенностью решателя ANSYS CFX является то, что он рассматривает уравнения гидродинамики как единую систему, используя при этом полностью неявную дискретизацию [10]. Решение уравнений на каждом шаге состоит из следующих стадий:

1. Генерация коэффициентов: нелинейные уравнения линеаризуются и собираются в матрицу решений.

2. Решение уравнений: линейные уравнения решаются с использованием алгебраического многосеточного метода (Algebraic Multi-Grid).

Визуализация результатов вычислений осуществляется с помощью постпроцессора – приложения, декодирующего выходные данные расчёта.

Описание математической модели

Основой системы уравнений является модель «Эйлер–Эйлер» с добавлением некоторых уравнений модели «Эйлер–Лагранж». Базовые уравнения для каждой фазы, соответствующие законы замыкания и определяющие соотношения приведены в табл. 2. Константы модели RNG k – ϵ приведены в табл. 3. Граничные условия приведены в табл. 4 и на рис. 2 и 3. Численные значения граничных

условий приняты теми же, что в исследовании [1]. Массовый расход твердой фазы, использованный в серии экспериментов, приведен в табл. 5. Геометрия задачи и параметры сетки приняты в соответствии с этой же работой [1].

Таблица 2

Базовые уравнения и законы замыкания

Физический смысл уравнений	Уравнения	Ссылки
Уравнение неразрывности для i -ой фазы	$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i) = 0,$ α_i – объемная доля фазы i , ρ_i – плотность фазы i (кг/м ³), $\vec{v}_i$ – скорость фазы i	[6]
Сумма объемных долей фаз (нормировка)	$\alpha_l + \alpha_g + \alpha_s = 1$	
Тензор напряжений для фазы i	$\overline{\tau}_i = -\alpha_i \mu_i (\nabla \vec{v}_i + \nabla \vec{v}_i^T) - \alpha_i \frac{2}{3} \mu_i (\nabla \vec{v}_i) \delta_{ij},$ μ_i – динамическая вязкость фазы i (Па·с), δ_{ij} – символ Кронекера	
Тензор деформаций для фазы i	$\overline{S}_i = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v}_i + \nabla \vec{v}_i^T)$	
Инвариант тензора деформаций (для жидкой фазы)	$S = \left(2 \overline{S}_i \overline{S}_i \right)^{\frac{1}{2}}$	
Уравнение сохранения импульса для фазы i	$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i) + \nabla(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i) = -\alpha_i \nabla p + \nabla \overline{\tau}_i + \alpha_i \rho_i \vec{g} + \vec{F}_{drag,ij},$ p – давление (Па), $\vec{g}$ – ускорение свободного падения (м/с ²), $\vec{F}_{drag,ij}$ – сила межфазного взаимодействия (кг/м ² ·с ²)	
Уравнение модели турбулентности	$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l k_l)}{\partial t} + \nabla(\alpha_l \rho_l k_l \vec{v}_l) =$ $= \nabla \left(\alpha_l \left[\frac{\theta_k \mu + \mu_t}{\sigma_k} \right] \nabla k \right) + \alpha_l G_{k,b} - \alpha_l \rho_l \varepsilon_l + \Pi_k$	
	$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l \varepsilon_l) + \nabla(\alpha_l \rho_l \varepsilon_l \vec{v}_l) = \nabla \left(\alpha_l \left[\frac{\theta_{1,\varepsilon} \mu + \mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right] \nabla \varepsilon \right) +$ $+ \alpha_l \frac{\varepsilon_l}{k_l} (C_{1\varepsilon} \theta_{2,\varepsilon} G_{k,b} - C_{2\varepsilon} \theta_{3,\varepsilon} \rho_l \varepsilon_l) + C_{3,\varepsilon} \alpha_l \rho_l \Pi_k - \alpha_l R_\varepsilon$	
Дополнительный член, описывающий рассеивание энергии пульсаций	$R_\varepsilon = \frac{\rho C_\mu \eta^3}{1 + \beta \eta^3} \left(\frac{1 - \eta}{\eta_0} \right) \frac{\varepsilon^2}{k}$	
Безразмерный комплекс для вычисления рассеивания энергии пульсаций	$\eta = S \cdot k / \varepsilon$	
Член, описывающий зарождение турбулентности вследствие наличия градиентов скорости (индекс k соответствует кинетической энергии)	$G_k = \mu_{tur} \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x_j}$	

Продолжение табл. 2

Физический смысл уравнений	Уравнения	Ссылки
Член, описывающий зарождение турбулентности вследствие наличия эффектов всплывания (индекс b соответствует подъемной силе)	$G_b = \frac{\mu_{tur}}{\mathbf{Pr}_{tur}} \beta_i \bar{\mathbf{g}} \nabla T_i,$ $\mathbf{Pr}_{tur}$ – турбулентное число Прандтля (принято 0.9)	[11]
Турбулентная вязкость	$\mu_{tur} = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon,$ C_μ – коэффициент турбулентной вязкости	[6]
Критерий Рейнольдса (при взаимодействии жидкости и газа)	$\mathbf{Re}_g = \rho_l d_g \bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_l / \mu_l,$ d_g – диаметр пузырьков газа (м)	
Критерий Рейнольдса (при взаимодействии жидкости и твердых частиц)	$\mathbf{Re}_s = \rho_l d_s \bar{\mathbf{v}}_s - \bar{\mathbf{v}}_l / \mu_l,$ d_s – диаметр твердых частиц (м)	
Коэффициент межфазного взаимодействия (при взаимодействии жидкости с пузырьками газа и твердыми частицами соответственно)	$C_D = \frac{24}{\mathbf{Re}_{g,s}} (1 + 0.15 \cdot \mathbf{Re}_{g,s}^{0.687})$	
Коэффициент передачи импульса	$K_{ij} = C_{D,ij} \frac{3}{4} \rho_i \frac{\alpha_i \alpha_j}{d_j} \bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}}_j ,$ d_j – диаметр частиц фазы j (м)	
Усилие, возникающее при межфазном взаимодействии (для Эйлеровых фаз)	$\bar{\mathbf{F}}_{\text{drag},ij} = K_{ij} (\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}}_j)$	
Закон сохранения энергии для фазы i	$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_i \rho_i H_i) + \nabla (\alpha_i \rho_i \bar{\mathbf{v}}_i H_i) =$ $= \alpha_i \frac{\partial p}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{\tau}} : \nabla \bar{\mathbf{v}}_i + \nabla (\lambda_i \nabla T_i) + Q_{ij},$ Q_{ij} – количество тепла, поступившее из фазы j (Дж/м ³)	[5]
Энтальпия фазы i	$H_i = \int c_{p,i} dT_i,$ $c_{p,i}$ – теплоемкость при постоянном давлении фазы i	
Теплопроводность жидкости	$\lambda_l = \lambda_{\text{lam},l} + \lambda_{\text{tur},l}$	
Турбулентная теплопроводность	$\lambda_{\text{tur},l} = c_{p,l} \mu_{tur} / \mathbf{Pr}_{tur}$	
Передача тепла между фазами	$Q_{lg} = -Q_{gl} = h_{lg} (T_g - T_l)$	
Критерий Прандтля	$\mathbf{Pr} = c_{p,l} \mu_l / \lambda_l$	
Критерий Нуссельта	$\mathbf{Nu} = 2 + 0.6 \cdot \sqrt{\mathbf{Re}} \cdot \mathbf{Pr}^{1/3}$	
Коэффициент теплоотдачи	$h_{ij} = 6 \lambda_i \alpha_i \alpha_j \mathbf{Nu} / d_j$	

Окончание табл. 2

Физический смысл уравнений	Уравнения	Ссылки
Сила сопротивления (для твёрдых частиц)	$\vec{F}_{\text{drag},ls} = \frac{\pi d_s^2}{8} \rho_l C_D \vec{v}_l - \vec{v}_s (\vec{v}_l - \vec{v}_s)$	[7]
Сила тяжести (для твердых частиц)	$\vec{F}_{\text{grav}} = m_s \vec{g},$ m_s – масса одной частицы (кг), $\vec{g}$ – ускорение свободного падения (м/с ²)	
Уравнение движения твердой частицы	$m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{F}_{\text{drag},ls} + \vec{F}_{\text{grav}}$	

Примечания. Индексы *g, l, s* означают газ, жидкость и твердые частицы соответственно. Индексы *lam* и *tur* отвечают ламинарному и турбулентному режимам соответственно.

Таблица 3

Параметры модели RNG k-ε

Параметр	Значение	Ссылка	Параметр	Значение	Ссылка	Параметр	Значение	Ссылка
σ_k	1.39^{-1}	[12]	$\theta_{2,\varepsilon}$	1	[6]	$C_{1\varepsilon}$	1.42	[12]
σ_ε	1.39^{-1}	[12]	$\theta_{3,\varepsilon}$	1	[6]	$C_{2\varepsilon}$	1.68	[12]
θ_k	1	[6]	η_0	4.38	[12]	$C_{3,\varepsilon}$	0	[6]
$\theta_{1,\varepsilon}$	1	[6]	β	0.012	[12]			
Π_k	0	[6]	C_μ	0.085	[6]			

Таблица 4

Граничные условия

Расположение границы	Тип границы	Граничные условия
Сопло горелки	Вход	$\rho \cdot v_n = 0.123 \text{ кг/с}, t = 1300 \text{ }^\circ\text{C}, \alpha_g = 1, \rho_g = 0,225 \text{ кг/м}^3$
Открытая граница	Открытая граница	$p = 101300 \text{ Па}, t = 25 \text{ }^\circ\text{C}, \alpha_g = 1$
Линия рециркуляции	Вход	$\rho \cdot v_n = 1.5 \text{ кг/с}, t = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \alpha_l = 1, \rho_l = 998.2 \text{ кг/м}^3$
Отбор на рециркуляцию	Выход	$\rho \cdot v_n = -1.5 \text{ кг/с}$
Адиабатические стенки	Стенка	$\vec{v} = 0, q = 0$
Перегородка	Стенка	$\vec{v} = 0, q = 0$
Отбойное устройство	Стенка	$\vec{v} = 0, q = 0$

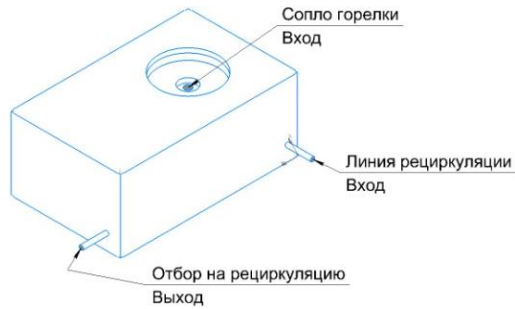


Рис. 3. Расчетная схема лабораторной установки (аксонометрическая проекция)
Fig. 3. Design model of a laboratory setup (axonometric projection)

Таблица 5

Массовый расход твердой фазы

Диаметр частиц	Массовый расход твердой фазы при количестве частиц, кг/с		
	0.5N	N*	1.5N
0.015	$6.104 \cdot 10^{-6}$	$1.221 \cdot 10^{-5}$	$1.831 \cdot 10^{-5}$
0.03	$4.883 \cdot 10^{-5}$	$9.766 \cdot 10^{-5}$	$1.465 \cdot 10^{-4}$
0.06	$3.907 \cdot 10^{-4}$	$7.813 \cdot 10^{-4}$	$1.172 \cdot 10^{-3}$
0.09	$1.318 \cdot 10^{-3}$	$2.637 \cdot 10^{-3}$	$3.955 \cdot 10^{-3}$
0.12	$3.125 \cdot 10^{-3}$	$6.25 \cdot 10^{-3}$	$9.376 \cdot 10^{-3}$
0.18	0.011	0.021	0.032
0.24	0.025	0.05	0.075
0.48	0.2	0.4	0.6
0.72	0.675	1.35	2.025
0.96	1.6	3.2	4.8
1.2	3.125	6.25	9.376
1.44	5.4	10.8	16.201

Примечание. * За N принято число частиц, использованное в исследовании [1] ($3.482 \cdot 10^6$ частиц в секунду).

Обсуждение результатов

По итогам проведения численного эксперимента с диаметром твердых частиц 0.24 мм были получены их траектории (рис. 4–6).

Как видно из приведенных рисунков, на начальном этапе твердые частицы движутся вверх к свободной поверхности жидкости, что согласуется с результатами ранее проведенного исследования. Этот факт объясняется определяющим значением движения пузырьков газа, которые обладают высокой степенью плавучести. После выхода из сопла горелки жидкость, насыщенная пузырьками, разворачивается и движется вверх [1]. При приближении к поверхности жидкость избавляется от газовой фазы. При попадании в зону свободной поверхности твердые частицы теряют вертикальную компоненту скорости и начинают двигаться горизонтально, отдаляясь от зоны высоких скоростей потока.

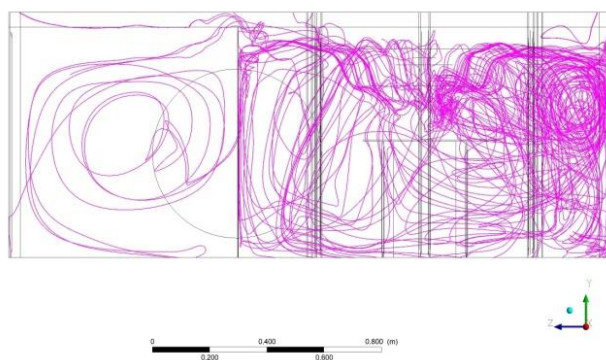


Рис. 4. Траектория твердых частиц, проекция на плоскость ZY
Fig. 4. Trajectory of solid particles (projection onto ZY-plane)

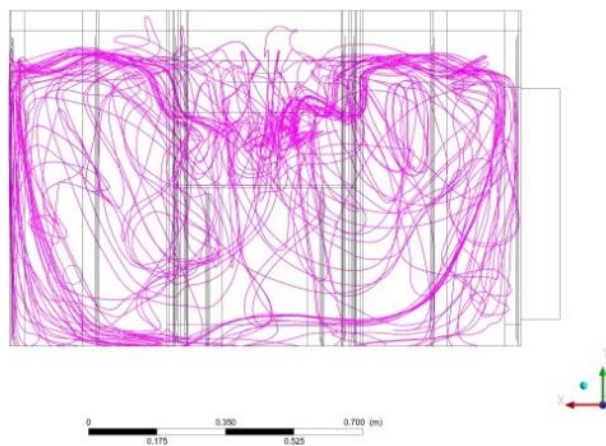


Рис. 5. Траектория твердых частиц, проекция на плоскость XY
Fig. 5. Trajectory of solid particles (projection onto XY-plane)

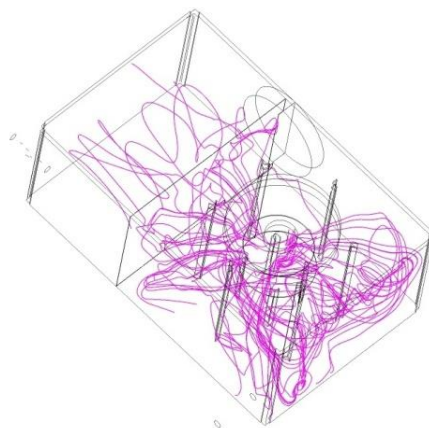


Рис. 6. Траектория твердых частиц, проекция на плоскость XY
Fig. 6. Trajectory of solid particles (projection onto XY-plane)

По мере потери газовой фазы удельный вес элемента жидкости становится большим, и линии тока начинают заворачивать вниз. Далее, достигая наружных стенок и перегородки, частицы приобретают нисходящее движение, при этом большая часть твердой фазы оседает на дне установки. Вместе с тем мы можем видеть, что неосевшие частицы продолжают движение, увлекаясь потоком циркулирующей жидкости. Рассмотрим подробнее закономерности движения твердых частиц, наложив их траекторию на линии тока жидкости (рис. 7, 8).

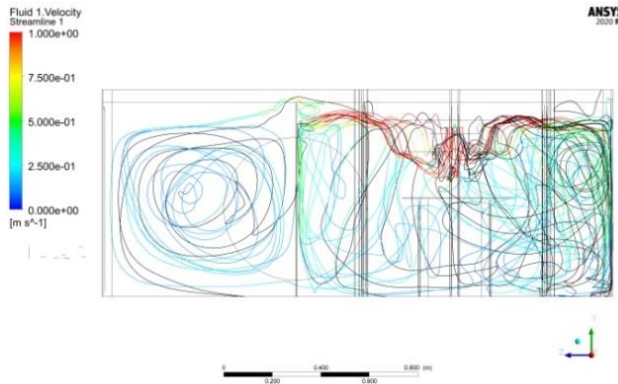


Рис. 7. Траектория твердых частиц, совмещенная с линиями тока жидкости (проекция на плоскость ZY)

Fig. 7. Trajectory of solid particles combined with streamlines of the fluid (projection onto ZY-plane)

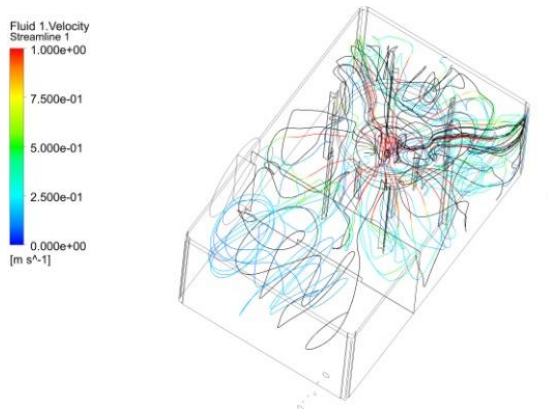


Рис. 8. Траектория твердых частиц, совмещенная с линиями тока жидкости (аксонометрическая проекция)

Fig. 8. Trajectory of solid particles combined with streamlines of the fluid (axonometric projection)

Как видно из приведенных рисунков, твердая фаза следует за потоком жидкости не только на начальных, но и на последующих участках траектории. Особенно отчетливо эта тенденция видна в зоне вихревого движения. Отклонение траек-

торий частиц от линий тока происходит на участках горизонтального движения, что соответствует известным представлениям об осаждении дисперсной фазы в поле силы тяжести [13]. При этом в отношении структуры течения подтверждаются результаты численных экспериментов, проведенных в исследовании [1].

Далее рассмотрим закономерности осаждения твердых частиц при их различном диаметре и количестве. Прежде всего вычислим скорость осаждения частиц хлорида калия в воде и сопоставим ее со скоростями потоков жидкости. Скорость осаждения вычисляется с помощью уравнений [14]

$$\text{Re}_s = \frac{\text{Ar}}{18 + 0.61 \cdot \sqrt{\text{Ar}}}, \quad \text{Ar} = \frac{d_s^3 \rho_l^2 g (\rho_s - \rho_l)}{\mu_l^2 \rho_l}, \quad (1)$$

где **Re** – критерий Рейнольдса, вычисленный по формуле из табл. 2; **Ar** – еще один безразмерный параметр подобия (критерий Архимеда).

Преобразовав уравнения (1), сокращая некоторые члены, получим

$$|\vec{v}_s - \vec{v}_l| = v_{sed} = \frac{d_s^2 g (\rho_s - \rho_l)}{18 \mu_l + 0.61 \cdot \sqrt{d_s^3 \rho_l g (\rho_s - \rho_l)}}. \quad (2)$$

Известно, что при наличии разности температур между осаждающейся частицей и несущей средой зачастую следует вносить поправку к коэффициенту сопротивления C_D , учитывающую влияние неизотермичности [15]. В случае если частица нагрета относительно жидкости, поправка вычисляется по формуле

$$C_D - C_{D0} = -18.2 \cdot \frac{|1 - T/T_l|}{\text{Re}_0^{0.722}}, \quad (3)$$

где **Re**₀ – критерий Рейнольдса, вычисленный для реперного изотермического случая, T – температура частицы (К), T_l – температура жидкости (К). Применительно к нашей ситуации **Re**₀ = **Re**_s и вычисляется по формуле из табл. 2. Подставляя числовые значения физических свойств воды и хлорида калия, а также значение скорости осаждения, получаем **Re**_s = 28.6. В настоящем исследовании температура частицы равна температуре жидкости, окружающей частицу в момент зарождения. В установившемся режиме работы лабораторной установки перепад температур между нагретым ядром потока и периферией будет составлять не более 10 К. Такой же будет и максимальная разность температур твердой частицы и окружающей ее жидкости. Подставляя в уравнение (3) все числовые значения, получим размер поправки, равный –0.0445. Как видно, полученное число достаточно мало для его округления до нуля, что позволят не учитывать поправку на неизотермичность.

Частицы хлорида калия в диапазоне рассматриваемых диаметров имеют коэффициент формы, близкий к единице. Таким образом, в наших условиях форм-фактор не является главным параметром, определяющим режим осаждения при работе лабораторной установки с погружным горением. Для подкрепления данной позиции были проведены дополнительные расчеты осаждения частиц диаметром 1.44 мм с соответствующим ему коэффициентом формы 1.37. Отклонение результатов составило 1%: доля осевшей твердой фазы составила примерно 99% вместо 100% в численном эксперименте без учета коэффициента формы.

Значения скоростей осаждения, вычисленные по формуле (2), приведены в табл. 6 и на рис. 9. В зонах восходящего и вихревого течения жидкость имеет ско-

рости в диапазоне 0.25–2.5 м/с, что превышает скорость осаждения частиц во всем диапазоне диаметров. Таким образом, если делать отбор жидкости с рождающимися частицами из зоны относительно высоких скоростей (на границе раздела фаз, вблизи горелки), то можно свести к минимуму осаждение твердых частиц в выпарной части установки. Это же будет справедливо и для полноразмерного аппарата.

Таблица 6

Закономерности осаждения твердых частиц различного диаметра

Диаметр, мм	Общая доля осевших частиц и процент частиц, осевших в правой части расчетной области						Скорость осаждения, м/с
	0.5N		N		1.5N		
0.015	0.02	50%	0.02	50%	0.02	50%	$3.388 \cdot 10^{-4}$
0.03	0.03	67%	0.03	67%	0.03	67%	$1.314 \cdot 10^{-3}$
0.06	0.05	80%	0.05	80%	0.05	80%	$4.839 \cdot 10^{-3}$
0.09	0.12	83%	0.12	83%	0.12	83%	$9.875 \cdot 10^{-3}$
0.12	0.21	95.2%	0.21	95.2%	0.21	95.2%	0.016
0.18	0.51	94%	0.51	94%	0.51	94%	0.029
0.24	0.705	90.1%	0.765	93.5%	0.705	90.1%	0.042
0.48	0.785	96.2%	0.785	96.2%	0.785	96.2%	0.085
0.72	0.91	100%	0.91	100%	0.91	100%	0.117
0.96	0.939	100%	0.939	100%	0.939	100%	0.142
1.2	0.994	100%	0.984	100%	0.994	100%	0.163
1.44	0.982	100%	0.982	100%	0.982	100%	0.182

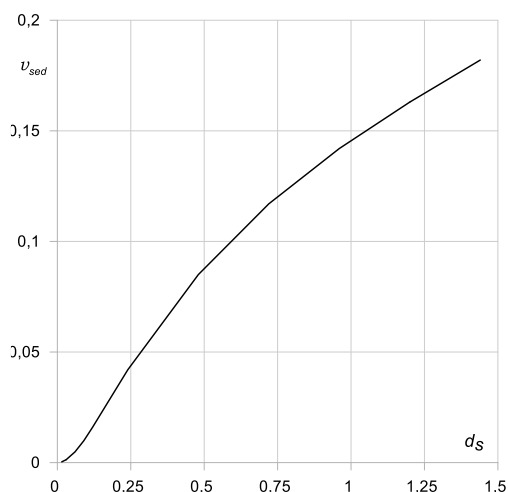


Рис. 9. Скорость осаждения твердых частиц в зависимости от диаметра
Fig. 9. Sedimentation rate of solid particles as a function of diameter

По результатам серии численных экспериментов с исходными данными, указанными в табл. 5, получены доли осевших частиц (ϕ), а также процент частиц, осевших в правой части расчетной области. Результаты численных эксперимен-

тов представлены в табл. 6 и на рис. 9–12. Доля осевших частиц определялась как отношение количества частиц, абсорбированных на нижней границе расчетной области, к количеству вводимых частиц в единицу времени. Процент частиц, осевших в правой части установки, определялся, соответственно, как отношение количества частиц, абсорбированных в правой части дна, к общему количеству абсорбированных частиц.

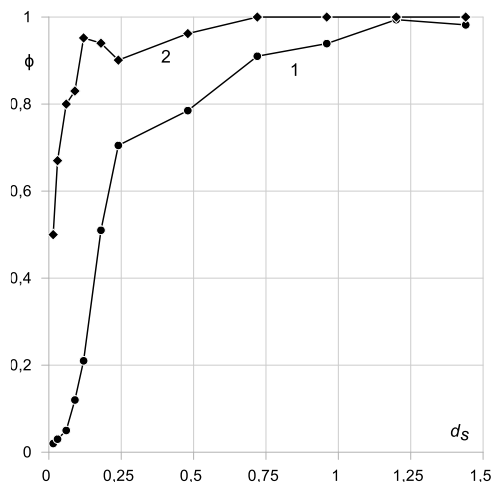


Рис. 10. Закономерности осаждения твердой фазы при числе частиц 0.5N:

1 – доля осевших частиц, 2 – доля частиц, осевших в правой части.

Fig. 10. Regularities of solid-phase sedimentation with a particle number of 0.5N: a proportion of (1) settled particles and (2) the particles settled on the right side

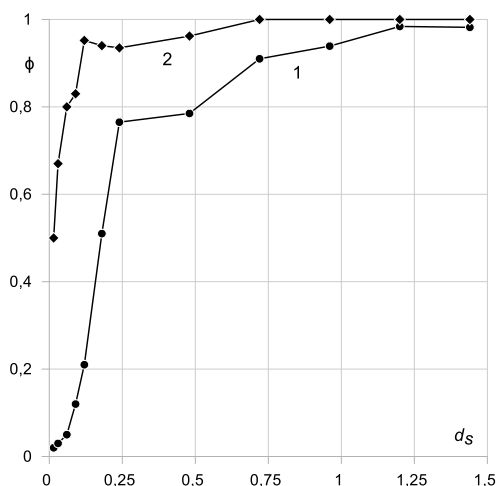


Рис. 11. Закономерности осаждения твердой фазы при числе частиц N:

1 – доля осевших частиц, 2 – доля частиц, осевших в правой части.

Fig. 11. Regularities of solid-phase sedimentation with a particle number of N: a proportion of (1) settled particles and (2) the particles settled on the right side

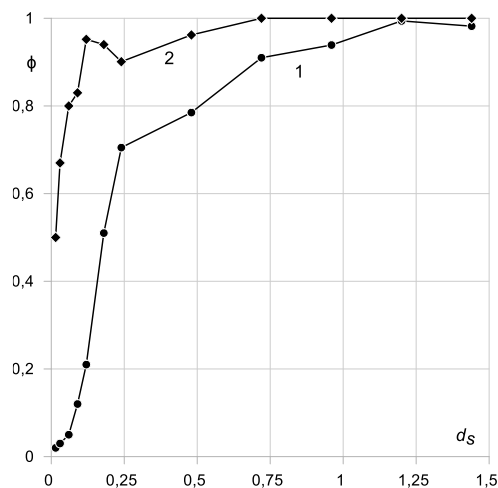


Рис. 12. Закономерности осаждения твердой фазы при числе частиц 1.5N:

1 – доля осевших частиц, 2 – доля частиц, осевших в правой части.

Fig. 12. Regularities of solid-phase sedimentation with a particle number of 1.5N:

a proportion of (1) settled particles and (2) the particles settled on the right side

Как можно видеть, доля осевших частиц возрастает с увеличением их диаметра и не зависит от их количества. Это совпадает с теоретическими положениями о свободном осаждении частиц в вязкой жидкости [5, 6]. К тем же выводам можно прийти, проанализировав формулу (2). Действительно, при малых концентрациях скорость осаждения, которая и определяет интенсивность процесса, зависит от диаметра и плотности частиц, физических свойств несущей среды, но не зависит от количества распределенных в среде частиц. Стоит отдельно отметить, что данный вывод не будет справедлив для стесненного осаждения, при котором отдельные частицы взаимодействуют друг с другом, а также существует влияние потока твердой фазы на структуру потока сплошной среды.

Сравнивая процент частиц, осевших в правой части расчетной области при различных условиях, мы можем обнаружить, что он также зависит только от диаметра и не зависит от количества частиц. Доля осевших справа частиц нелинейно возрастает с ростом диаметра, превышая значение 95% уже при размере частицы 0.12 мм. Это говорит о том, что вывод твердой фазы должен быть организован как можно ближе к горелке, пока крупные частицы еще витают вблизи свободной поверхности.

Заключение

В рамках настоящего исследования проведено численное моделирование осаждения твердых частиц в лабораторной установке погружного горения. Показано, что для принятых условий в аппарате погружного горения скорость свободного осаждения зависит от диаметра частиц и не зависит от их количества. Скорость восходящего течения жидкости в зоне возле горелки превышает скорость осаждения во всем рассматриваемом диапазоне диаметров частиц. Выявлено, что твердая фаза следует за потоком жидкости как на начальных, так и на последую-

щих участках траектории, отклоняясь заметно от линий тока жидкости только на горизонтальных участках. Процент частиц, оседающих в правой части расчетной области (в выпарной части установки), круто возрастает с ростом диаметра частиц, достигая значения 100%. Это говорит о том, что крупные частицы (0.12 мм и более) могут быть выведены из системы только в зоне быстрого восходящего потока жидкости, т.е. вблизи горелки.

Список источников

1. Демин В.А., Костыря А.В. Динамика трехфазного потока газ–жидкость–твердое в лабораторной установке погружного горения // Математические методы в технологиях и технике. 2022. № 4. С. 82–94. doi: 10.52348/2712-8873_MMTT_2022_4_82.
2. Леонов А.А., Чуданов В.В., Аксенова А.Е. Методы прямого численного моделирования в двухфазных средах. М. : Наука, 2013. 197 с.
3. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения газа с частицами. М. : Физматлит, 2008. 600 с.
4. Kolev N.I. Multiphase flow dynamics. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. 751 p.
5. Peng Li, Xuhui Zhang, Xiaobing Lu. Three-dimensional Eulerian modeling of gas–liquid–solid flow with gas hydrate dissociation in a vertical pipe // Chemical Engineering Science. 2019. № 196. С. 1456–1465.
6. Yunfeng Liu, Xiliang Sun, Zeneng Sun, Chao Zhang, Jesse Zhu. Experimental and numerical studies on a bubble-induced inverse gas-liquid-solids fluidized bed // Advanced Powder Technology. 2021. № 32. С. 4496–4508.
7. Mahdavianesh M., Noghrehabadi A.R., Behbahaninejad M., Ahmadi G., Dehghanian M. Lagrangian Particle Tracking: Model Development // Life Science Journal. 2013. № 10. С. 34–41.
8. Ковеня В.М. Алгоритмы расщепления в методе конечных объемов для численного решения уравнений Навье–Стокса // Марчуковские научные чтения – 2017 : тр. междунар. науч. конф. Новосибирск : Изд-во Ин-та вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2017. С. 428–433.
9. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Berlin : Springer, 2001. 423 p.
10. Козелков А.С., Мелешкина Д.П., Куркин А.А., Тарасова Н.В., Лашкин С.В., Курулин В.В. Полностью неявный метод решения уравнений Навье–Стокса для расчета многофазных течений со свободной поверхностью // Вычислительные технологии. 2016. № 5. С. 54–76.
11. Коркодинов Я.А. Обзор семейства k–ε моделей для моделирования турбулентности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. 2013. Т. 15, № 2. С. 5–16.
12. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion technique // Physics of Fluids A Fluid Dynamics. 1992. № 4. doi: 10.1063/1.858424
13. Ушаков С.Л., Зверев М.И. Инерционная сепарация пыли. М. : Энергия, 1974. 168 с.
14. Гельперин Н.И., Гайнштейн В.Г., Кваша В.Б. Основы техники псевдоожижения. М. : Химия, 1967. 664 с.
15. Архипов В.А., Басалаев С.А., Перфильева К.Г., Усанина А.С. Коэффициент сопротивления твердой сферы в неизотермических условиях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 71. С. 13–24. doi: 10.17223/19988621/71/2.

References

1. Demin V., Kostyrya A. (2022) Dinamika tryokhfaznogo potoka gaz-zhidkost'-tvoyrdoe v laboratornoy ustanovke pogruzhnogo gorennya [Gas–liquid–solid three phase flow dynamics in

- a laboratory facility with submerged combustion]. *Matematicheskie metody v tekhnologiyakh i tekhnike – Mathematical Methods in Technique and Technology*. 4. pp. 82–94. doi: 10.52348/2712-8873_MMTT_2022_4_82
2. Leonov A.A., Chudanov V.V., Aksenova A.E. (2013) *Metody pryamogo chislennogo modelirovaniya v dvukhfaznykh sredakh* [Methods of direct numerical simulation in two-phase media]. Moscow: Nauka.
 3. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techeniya gaza s chastitsami* [Flows of gas with particles]. Moscow: Fizmatlit.
 4. Kolev N.I. (2007) *Multiphase Flow Dynamics*. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag.
 5. Li P., Zhang X., Lu X. (2019) Three-dimensional Eulerian modeling of gas–liquid–solid flow with gas hydrate dissociation in a vertical pipe. *Chemical Engineering Science*. 196. pp. 1456–1465. doi: 10.1016/j.ces.2018.10.053
 6. Liu Y., Sun X., Sun Z., Zhang C., Zhu J. (2021) Experimental and numerical studies on a bubble-induced inverse gas-liquid-solids fluidized bed. *Advanced Powder Technology*. 32. pp. 4496–4508. doi: 10.1016/j.appt.2021.10.002
 7. Mahdavianesh M., Noghrehabadi A.R., Behbahaninejad M., Ahmadi G., Dehghanian M. (2013) Lagrangian particle tracking: model development. *Life Science Journal*. 10. pp. 34–41.
 8. Kovenya V.M. (2017) Algoritmy rasshchepleniya v metode konechnykh ob'ёмov dlya chislennogo resheniya uravneniy Nav'e–Stoksa [Splitting algorithms in the finite volume method for the numerical solution of the Navier – Stokes equations]. *Proceedings of the International Conference «Marchukovskie nauchnye chteniya»*. Novosibirsk: The Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS. pp. 428–433.
 9. Ferziger J.H., Peric M. (2001) *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer.
 10. Kozelkov A.S., Meleshkina D.P., Kurkin A.A., Tarasova N.V., Lashkin S.V., Kurulin V.V. (2016) Polnost'yu neyavnyy metod resheniya uravneniy Nav'e–Stoksa dlya rascheta mnogofaznykh techeniy so svobodnoy poverkhnost'yu [A completely implicit method for solving the Navier – Stokes equations for calculating multiphase flows with a free surface]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*. 21(5). pp. 54–76.
 11. Korkodinov Ya.A. (2013) Obzor semeystva k–ε modeley dlya modelirovaniya turbulentsnosti [The review of set of k–ε models for turbulence modeling]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mashinostroyeniye, materialovedeniye – Bulletin PNRPU. Mechanical Engineering, Materials Science*. 15(2). pp. 5–16.
 12. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski, T.B., Speziale C.G. (1992) Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A Fluid Dynamics*. 4. doi: 10.1063/1.858424
 13. Ushakov S.L., Zverev M.I. (1974) *Inertsionnaya separatsiya pyli* [Inertial dust separation]. Moscow: Energiya.
 14. Gelperin N.I., Ainshtein V.G., Kvasha V.B. (1967) *Osnovy tekhniki psevdoozhizheniya* [Fundamentals of fluidization technique]. Moscow: Khimiya.
 15. Arkhipov V.A., Basalaeв S.A., Perfilieva K.G., Usanina A.S. (2021) Koeffitsient soprotivleniya tverdogo sfery v neizotermicheskikh usloviyakh [Drag coefficient of a solid sphere under non-isothermal conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 71. pp. 13–24. doi: 10.17223/19988621/71/2

Сведения об авторах:

Демин Виталий Анатольевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета; профессор кафедры общей физики Пермского государственного национального исследовательского политехнического университета, Пермь, Россия. E-mail: demin@psu.ru

Костыря Алексей Валерьевич – аспирант кафедры общей физики Пермского государственного национального исследовательского политехнического университета, Пермь, Россия. E-mail: AVKostyrja@pstu.ru

Information about the authors:

Demin Vitaliy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Perm State National Research University; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: demin@psu.ru

Kostyrya Aleksey V. (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: AVKostyrja@pstu.ru

Статья поступила в редакцию 23.12.2022; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 23.12.2022; accepted for publication 12.02.2024

Научная статья

УДК 536.46, 536.7

doi: 10.17223/19988621/87/9

Термодинамическое моделирование высокоэнергетических термитных систем на основе йодата кальция

Максим Олегович Енков¹, Татьяна Ивановна Горбенко²,
Михаил Владимирович Горбенко³

^{1,2} Томский государственный университет, Томск, Россия

³ Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ enkov_maksim@mail.ru

² gorbenkoti@rambler.ru

³ gmvski@rambler.ru

Аннотация. Представлены результаты термодинамического расчета энергетических характеристик систем термитного типа $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$, $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$ и $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$. Определены адиабатическая температура горения, энтальпия продуктов сгорания, удельный импульс, скорость истечения продуктов сгорания, массовая доля конденсированных фаз, содержание газообразных и конденсированных продуктов сгорания. Проведена оценка влияния содержания металлизированного окислителя и металлического горючего в составе термитной системы на основные теплофизические и энергетические характеристики.

Ключевые слова: термитная система, адиабатическая температура горения, удельный импульс, конденсированные продукты сгорания, термодинамический расчет

Для цитирования: Енков М.О., Горбенко Т.И., Горбенко М.В. Термодинамическое моделирование высокоэнергетических термитных систем на основе йодата кальция // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 106–119. doi: 10.17223/19988621/87/9

Original article

Thermodynamic modeling of high-energy thermite systems based on calcium iodate

Maksim O. Enkov¹, Tatiana I. Gorbenko², Mikhail V. Gorbenko³

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

³ Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ enkov_maksim@mail.ru

² gorbenkoti@rambler.ru

³ gmvski@rambler.ru

Abstract. The article presents the results of a thermodynamic study of the component content influence and their physical and chemical properties on the regulation of the

main energy characteristics and combustion product characteristics of thermite systems based on calcium iodate containing Al, B and Ti.

The adiabatic combustion temperature, enthalpy of combustion products, specific impulse, exhaust velocity of combustion products, mass fraction of condensed phases, content of gaseous and condensed combustion products are determined. The influence of the metal oxide/metal fuel content in the thermite system composition on the main energy characteristics was assessed.

Based on a comparison of the calculation results of the thermite systems thermodynamic and thermophysical characteristics, it seems possible to divide the studied thermite systems into 3 functional groups according to their application. Taking into account the ratio of components, these can be: 1) thermite systems for welding processes and 2) thermite systems for perforating, cutting metal structures ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ and $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$); 3) thermite systems as a component of energy compositions capable to inactivate harmful aerosol spores and bacteria ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$), since due to the low combustion temperature of $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$, a longer burning time of such systems leads to a gradual release of iodine.

Keywords: thermite system, adiabatic combustion temperature, specific impulse, condensed combustion products, thermodynamic calculation

For citation: Enkov, M.O., Gorbenko, T.I., Gorbenko, M.V. (2024) Thermodynamic modeling of high-energy thermite systems based on calcium iodate. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 106–119. doi: 10.17223/19988621/87/9

Введение

Термодинамическое моделирование возникло в связи с нуждами специалистов, занимающихся исследованием технологических процессов в металлургии, химии, производстве неорганических материалов. Термодинамическое моделирование целесообразно применять при решении задач, связанных с планированием и прогнозированием использования сырья, его количества, выбора эффективных параметров для реализации высокотемпературных процессов. Термодинамическое моделирование применяется для теоретического исследования и оценки энергетических характеристик термитных систем, что позволяет существенно сократить затраты на проведение в дальнейшем экспериментальных исследований.

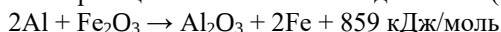
В настоящее время инженерные расчеты термодинамического моделирования в научных, образовательных и отраслевых лабораториях проводятся с использованием разработанных в России интегральных компьютерных программ термодинамического равновесия, таких как «Астра», TERRA (МГТУ им. Н.Э. Баумана [1]) и других, а за рубежом применяется программа NASA CEA. Программы термодинамического расчета содержат значительный архив данных, из которого автоматически выбираются все вещества, состав которых совместим с заданной эквивалентной химической формулой исследуемой системы. Для расчета равновесного состава гомогенной смеси решается система уравнений химического равновесия, включающая уравнения сохранения вещества, уравнения диссоциации и уравнение закона Дальтона. Программа термодинамического равновесия позволяет рассчитывать теплосмкости продуктов сгорания, теплотери, показатель адиабаты, среднюю молекулярную массу газов и другие параметры исследуемых систем.

Термитная система состоит из горючего (металла) и окислителя (оксида другого металла). Термитная реакция сопровождается значительным выделением тепла, образованием металла в жидком перегретом состоянии, что позволяет использовать его для проведения технологических процессов. Продуктами термитной реакции являются газообразные и конденсированные вещества. Термитные системы находят широкое применение в разных отраслях промышленности [2–8]. Безгазовые составы на термитной основе используются для создания тепловых источников импульсного действия, которые используются при монтаже и ремонте магистральных трубопроводов. Термитная сварка применяется при изготовлении, восстановлении и ремонте крупных деталей, при сварке железобетонных конструкций. При монтаже контактной сети, линий электропередачи применяют железомagneйные термитные системы. Интерес представляют исследования по разработке термитных систем для процесса сварки при низких давлениях, в вакууме; термитная реакция происходит за счет кислорода, содержащегося в окислах металлов.

Термитные системы могут быть использованы как компоненты в составе топлив, применяемых в специальных устройствах, а также в средствах пожаротушения, средствах биоцидного направления для обезвреживания биологических отходов.

Н.А. Имховик, В.В. Селиванов и соавт. [4] отмечают, что в США, Великобритании, Китае, России и других странах проводятся исследования новых типов высокоплотных энергетических материалов, механохимических активных композиционных материалов. По отношению к энергетическим материалам термитные системы характеризуются большой запасенной энергией и более рациональным ее использованием.

В последнее время широкое исследуются нанокompозитные термиты [5]. Нанотермиты содержат окислитель и восстановитель. Исследователи отмечают, что нанопорошки характеризуются стабильностью при нормальных условиях и при срабатывании запускающего импульса способны к взаимодействию друг с другом с выделением большого количества энергии [5]. Активно исследуются нанотермиты, содержащие в качестве металлического горючего порошки Al, Mg, Zr и других металлов, а в качестве оксидов металлов – Fe_2O_3 , MnO_4 , MoO_3 , Cr_2O_3 и др. На примере термической реакции алюминия и оксида железа (Fe_2O_3) [5]



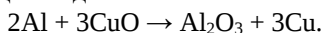
видно, что такая реакция сопровождается выделением большого количества тепла. Добавляя к термитным системам на основе металла и оксида металла полимерные материалы или связующие либо газообразующие реагенты, способные обеспечить получение необходимого рабочего тела в процессе горения в технологической установке, можно при горении термитной системы получить реактивную тягу. Таким образом, нанотермитные системы становятся возможным использовать, например, в микроэнергетических устройствах, применяемых в средствах аварийного спасения людей.

Авторы [6] исследовали влияние соотношения компонентов нанопорошков (НП) оксида алюминия (0.5–5.0 мас. %) и чистого алюминия (99.5–95.0 мас. %) в исходной термитной системе на изменение удельного тепловыделения при горении термитного топлива и снижение содержания жидкой фазы в продуктах сгорания. При горении такой смеси окислительно-восстановительные реакции идут в воз-

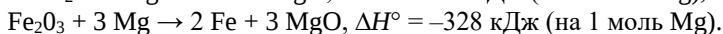
духе без участия специального окислителя. Результаты исследования показали наиболее оптимальный состав термитной смеси при содержании НП Al_2O_3 в пределах 1.5–3.0 мас. % и содержании НП Al 98.5–97 мас. %. При горении такого термита в продуктах его сгорания жидкая фаза не образуется.

Технологии изготовления и ремонта, основанные на сжигании термитных смесей, представляют большой интерес для космических приложений из-за низкого энергопотребления и самоподдерживающегося протекания химических реакций. В работе [7] описывается два метода: экзотермическая сварка медных стрижней и производство конструкционных материалов из лунного реголита путем сжигания. Экзотермическая сварка хорошо известна как надежный метод с низким энергопотреблением, например, для сварки электрических проводников, таких как медные провода или кабели, особенно в полевых условиях.

Реакция имеет следующий вид:



Проводятся исследования реакций термитного типа между лунным / марсианским реголитом и магнием. Результаты могут быть использованы для производства строительных материалов на Луне и Марсе. Авторы [8] провели термодинамическое и экспериментальное исследование горения двух марсианских имитаторов реголита с магнием:



Исследователи указывают, что каждая из реакций по-своему значима: кремнезем имеет наибольшую концентрацию в реголите (более 40 мас. %), а оксид железа термодинамически показывает более высокое тепловыделение [8].

В последнее время отмечается интерес американских исследователей к разработке энергетических материалов для утилизации биологически опасных веществ. Энергетические составы, содержащие галогены, например йод, генерируют бицидные продукты горения, способные инактивировать вредные для здоровья человека аэрозольные споры и бактерии [9, 10].

Авторы [9] исследовали горение двух термитных систем, содержащих в качестве окислителя йодат кальция, $\text{Ca}(\text{IO}_3)_2$, в качестве горючего одна система содержала алюминий, другая – бор. В ходе экспериментов было установлено, что более низкие температуры воспламенения, более короткие задержки воспламенения и более длительное время горения приводят к постепенному высвобождению йода. Таким образом, термитные композиты $\text{B} \cdot \text{Ca}(\text{IO}_3)_2$ лучше подходят в качестве компонентов энергетических составов, предназначенных для уничтожения биологически опасных веществ, по сравнению с композитами $\text{Al} \cdot \text{Ca}(\text{IO}_3)_2$.

Исследование горения тройных композиций $\text{Al} \cdot \text{B} \cdot \text{I}_2$ и $\text{Mg} \cdot \text{B} \cdot \text{I}_2$ показало, что температуры воспламенения для композитов $\text{Mg} \cdot \text{B} \cdot \text{I}_2$ были ниже, чем композитов $\text{Al} \cdot \text{B} \cdot \text{I}_2$. Высвобождение йода происходит за счет образования AlB_2 и MgB_2 . Время горения композиций $\text{Al} \cdot \text{B} \cdot \text{I}_2$ и $\text{Mg} \cdot \text{B} \cdot \text{I}_2$ было больше, чем для чистых порошков Al и Mg. Время горения частиц композиции $\text{Mg} \cdot \text{B} \cdot \text{I}_2$ было короче, чем для того же размера частиц композиции $\text{Al} \cdot \text{B} \cdot \text{I}_2$ [10].

В статье [11] предложено использование железоалюминиевого термита для перфорирования, резания металлических конструкций в малодоступных местах, например при ликвидации аварий на нефтепромыслах. Термит содержит 25% алюминия марки АСД-4 и 75% Fe_2O_3 . Горение термита протекает с выделением

большого количества тепла – 3 878 кДж/кг, и образованием конденсированных веществ Al_2O_3 и Fe. Увеличение импульса газодисперсной среды достигалось за счет введения в состав образца чешуек газообразующей смеси эпоксидного клея с неорганическим веществом, содержащим калий в соотношении 1/1.

Обобщая вышеприведенный анализ публикаций, можно выделить следующие области применения термитных систем как топлив для малогабаритных газогенераторов, применяемых: в процессах сварки деталей из чугуна, стали, хрупких сплавов, арматуры железобетонных конструкций, телефонных коммуникаций, труб; в средствах пожаротушения; в средствах биоцидного направления для обезвреживания биологических отходов; в средствах аварийного спасения людей; в процессах сварки при низких давлениях; при проведении перфорирования или резания металлических конструкций под водой при ликвидации аварий. Также термитные системы могут быть использованы в газогенераторах для утилизации отработанных деталей космических объектов в космосе.

Цель данной работы – термодинамическая оценка энергетических параметров горения термитных систем на основе йодата кальция, содержащих Al, B и Ti. Представляет интерес термодинамическое исследование влияния содержания исходных компонентов и их физико-химических свойств на возможность регулирования теплофизических и энергетических характеристик и образования конденсированных и газообразных продуктов горения, а также выявления термитных систем, которые могут быть эффективно использованы в газогенераторах специального назначения.

Выбор систем термитного типа и расчет изобарного потенциала

Для исследования выбраны химические реакции взаимодействия йодата кальция с алюминием, бором и титаном:



На возможность и интенсивность протекания химических реакций оказывают влияние химическая природа и количество реагентов термитной системы, а также параметры протекания реакции (прежде всего температура).

Расчет изобарно-изотермического потенциала ($\Delta G = \Delta H - T\Delta S$) позволяет определить возможность протекания химических реакций в различных температурных условиях.

В табл. 1 представлены результаты расчета значений изобарных потенциалов для исследуемых реакций (1–3) в диапазоне температур от 2 000 до 5 000 К.

Таблица 1

Изобарный потенциал выбранных реакций

Номер реакции	ΔG (кДж)						
	2 000 К	2 500 К	3 000 К	3 500 К	4 000 К	4 500 К	5 000 К
1	–6 762	–6 638.5	–6 515	–6 391	–6 268	–6 144.5	–6 021
2	–5 217	–5 211	–5 205	–5 199	–5 193	–5 187	–5 181
3	–3 838	–3 811	–3 785	–3 758.5	–3 732	–3 705.5	–3 679

Отрицательное значение изобарного потенциала указывает на возможность самопроизвольного протекания реакции при заданных температурах.

Результаты термодинамических расчетов

Термодинамическое моделирование химически реагирующих термитных систем (ТС) проведено с помощью программного комплекса TERRA [12].

Цель термодинамических расчетов – моделирование соотношений компонентов термитных систем, эффективных для их применения в газогенераторах специального назначения. Для этого в ПК TERRA выбран расчет параметров адиабатического расширения. Термодинамический расчет проведен в допущении равновесных процессов преобразования химической энергии топлива в тепловую энергию в камере сгорания и далее в механическую работу при расширении продуктов сгорания в сопловом блоке газогенератора.

Течение газовых смесей, образующихся при сгорании термитных систем в камере сгорания, сопровождается изменением состава продуктов сгорания и их термодинамических свойств на всем пути истечения продуктов сгорания через сопло. На основе термодинамического моделирования скорость истечения продуктов сгорания (w), тяга двигателя (R), удельный импульс ($I_{уд}$) определяются по следующим формулам:

$$w = \sqrt{\frac{2k}{k-1} R_g T_k \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_k} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]},$$

$$R = G \cdot w + F_a \cdot (p_a - p_n),$$

$$I_{уд} = R/G,$$

где R_g – индивидуальная газовая постоянная ($R_g = R_y/\mu$), R_y – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса газа, T_k – температура в камере, k – показатель адиабаты, F_a – площадь выходного сечения, G – секундный массовый расход газа.

При обращении к ПК TERRA были заданы следующие исходные данные:

1) исходный состав исследуемой термитной системы: химические формулы веществ, энтальпии образования этих веществ и их массовое содержание;

2) для проведения расчета по директиве «Расчет параметров адиабатического расширения в канале» задаются параметры камеры и сопла: давление в камере p_k (МПа), полная энтальпия H (кДж/кг), давление на выходе из сопла p_a (МПа).

Полная энтальпия является аддитивной функцией и вычисляется как сумма вкладов всех простых веществ, образующих исследуемую систему. При стандартной температуре 298.15 К полная энтальпия простого вещества численно равна его энтальпии образования. Это значение задается в исходных данных после химической формулы простого вещества.

Термодинамические расчеты характеристик горения термитных систем проведены при давлениях в камере сгорания 4 и 7 МПа, на срезе сопла 0.1 МПа. Для оценки энергетических характеристик термитных систем выбраны следующие термодинамические параметры: коэффициент избытка окислителя (α) термитных систем, адиабатическая температура горения ($T_{ад}$), энтальпия исходного топлива (H), энтальпия продуктов сгорания в выходном сечении сопла ($H_{вых}$), удельный импульс ($I_{уд}$), скорость истечения продуктов сгорания (W), массовая доля

конденсированных фаз (z), содержание газообразных и конденсированных продуктов сгорания (в значимом количестве).

Результаты термодинамического расчета ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$

На основе анализа результатов термодинамического моделирования была проведена оценка влияния соотношения компонентов металлизированный окислитель / металлическое горючее в составе термитной системы на основные энергетические характеристики.

Анализ результатов (табл. 2, 3) показал существенное влияние соотношения компонентов окислитель / горючее в составе ТС на значения адиабатической температуры горения ($T_{\text{ад}}$). При давлении в камере сгорания $p = 4$ МПа изменение содержания компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ в диапазоне 40/60–80/20 приводит к повышению $T_{\text{ад}}$ в 1.6 раза (от 2 828 до 4 552 К). При давлении 7 МПа наблюдается незначительный рост $T_{\text{ад}}$ на 123, 149 и 161 К при соответствующих соотношениях $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al} - 50/50, 60/40$ и $80/20$.

Таблица 2

Термодинамические параметры и содержание продуктов сгорания ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ при давлении 4 МПа

Термодинамические параметры	№ термитной системы				
	1	2	3	4	5
	Содержание компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ (мас. %)				
	40/60	45/55	50/50	60/40	80/20
α	0.156	0.185	0.217	0.293	0.525
Равновесные параметры в камере сгорания (СИ)					
$T_{\text{ад}}, \text{К}$	2 828.02	2 881.42	2 972.16	3 043.12	4 552.31
$H, \text{кДж/кг}$	–1 028.52	–1 157.08	–1 285.65	–1 542.78	–2 057.04
Равновесные параметры в выходном сечении (СИ)					
$H_{\text{вых}}, \text{кДж/кг}$	–1 173.9	–1 392.51	–1 619.11	–2 084.74	–2 801.13
$I_{\text{уд}}, \text{м/с}$	642.906	799.156	938.026	1 177.61	1 372.07
$W, \text{м/с}$	539	686	816	1 041	1 219
z	0.605	0.515	0.424	0.24	0.387
Газообразные продукты сгорания, моль/кг					
I	0.011	0.016	0.019	0.027	3.590
I_2	следы	следы	следы	следы	$0.868 \cdot 10^{-3}$
Конденсированные продукты сгорания, моль/кг					
Al_2O_3	1.732	1.782	1.825	1.905	3.470
Al	15.894	12.35	8.799	1.7	–
CaO	следы	следы	следы	следы	0.597

Энтальпия характеризует энергетическое состояние системы в термодинамическом равновесии, $H=U + p \cdot v$.

Энтальпия системы – это энергия, которая доступна для преобразования в теплоту при определенных значениях температуры и давления. Энтальпия – величина аддитивная (экстенсивная), для сложной системы равна сумме энталь-

пий ее независимых частей. В случае экзотермических реакций система выделяет тепло, энтальпия является величиной отрицательной.

Таблица 3

Термодинамические параметры и содержание продуктов сгорания ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ при давлении 7 МПа

Термодинамические параметры	№ термитной системы		
	6	7	8
	Содержание компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ (мас. %)		
	50/50	60/40	80/20
α	0.217	0.293	0.525
Равновесные параметры в камере сгорания (СИ)			
$T_{\text{ад}}, \text{K}$	3 095.34	3 192.84	4 713.12
$H, \text{кДж/кг}$	–1 285.65	–1 542.78	–2 057.04
Равновесные параметры в выходном сечении (СИ)			
$H_{\text{вых}}, \text{кДж/кг}$	–1 655.99	–2 153.62	–2 895.35
$I_{\text{уд}}, \text{м/с}$	973.317	1 230.21	1 433.95
$W, \text{м/с}$	861	1 105	1 295
z	0.429	0.252	0.393
Газообразные продукты сгорания, моль/кг			
I	0.019	0.026	3.581
I_2	следы	следы	$0.902 \cdot 10^{-3}$
Конденсированные продукты сгорания, моль/кг			
Al_2O_3	1.851	1.955	3.487
Al	8.931	1.953	–
CaO	следы	следы	0.659

Результаты расчетов энтальпии показали, что увеличение содержания окислителя в термитной системе (соотношение $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ в диапазоне от 40/60 до 80/20) приводит к повышению выделения тепловой энергии системы (энтальпия продуктов сгорания в выходном сечении сопла) в 2.4 раза: $H_{\text{вых } 40/60} = -1173.9 \text{ кДж/кг}$, $H_{\text{вых } 80/20} = -2801.13 \text{ кДж/кг}$ (при $p=4 \text{ МПа}$), что согласуется с физикой процесса горения Al и окислителя йодата кальция. Изменение давления незначительно повышает значение энтальпии системы, и это говорит о том, что энтальпия в большей степени зависит от изменения внутренней энергии системы.

Удельный импульс характеризует эффективность применения исследуемой топливной системы в газогенераторах специального назначения. Анализ расчетов показал, что в исследованном диапазоне соотношения компонентов ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ (от 40/60 до 80/20) удельный импульс возрастает соответственно от 643 до 1 372 м/с при $p = 4 \text{ МПа}$. Повышение давления от 4 до 7 МПа позволяет повысить удельный импульс, и при соотношении компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al} = 80/20$ $I_{\text{уд}} = 1\,434 \text{ м/с}$.

Скорость истечения продуктов сгорания (W) при соотношении $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ в диапазоне 40/60–80/20 возрастает от 539 до 1 219 м/с при $p = 4 \text{ МПа}$. Увеличение давления от 4 до 7 МПа приводит к возрастанию W от 45 до 76 м/с.

Конденсированные и газообразные продукты сгорания термитных систем вносят значительный вклад в процесс передачи тепла, наибольший интерес в данном

исследовании представляют конденсированные алюминий и Al_2O_3 . Расчеты показали, что минимальное значение доли конденсированных фаз $z = 0.240$ реализуется при $p = 4$ МПа в термитной системе $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ при соотношении компонентов 60/40. Повышение давления незначительно увеличивает z , на 1.4–1.6%.

Содержание конденсированного Al_2O_3 в продуктах сгорания увеличивается в 2 раза (1.732–3.470 моль/кг), при изменении соотношения компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ в диапазоне 40/60–80/20 при $p = 4$ МПа. Повышение давления до 7 МПа незначительно увеличивает содержание конденсированного Al_2O_3 в продуктах сгорания.

С уменьшением содержания алюминия в термитной системе $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ в диапазоне значений от 40/60 до 80/20 содержание конденсированного алюминия в продуктах сгорания убывает с 15.9 до 0 моль/кг при $p = 4$ МПа. Повышение давления до 7 МПа незначительно увеличивает содержание Al на 0.132–0.253 моль/кг при соотношении компонентов в термитной системе соответственно 50/50 и 60/40. При соотношении компонентов в ТС 80/20 конденсированный алюминий в продуктах сгорания отсутствует.

Наибольшее содержание газообразного атомарного йода определено в термитной системе при соотношении компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al} = 80/20$ и составляет 3.581 моль/кг ($p = 7$ МПа).

Результаты термодинамического расчета ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{V}$

Расчеты показали, что изменение соотношения компонентов в ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{V}$ не оказывает влияния на значение $T_{\text{ад}}$ (табл. 4). Однако увеличение давления в камере сгорания от 4 до 7 МПа приводит к повышению адиабатической температуры горения на 116 К.

Таблица 4

Термодинамические параметры и содержание продуктов сгорания ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{V}$

Термодинамические параметры	№ термитной системы					
	1	2	3	4	5	6
	Содержание компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{V}$ (мас. %)					
Давление (p)	75/25	80/20	85/15	75/25	80/20	85/15
α	4 МПа			7 МПа		
	0.249	0.307	0.386	0.249	0.307	0.386
Равновесные параметры в камере сгорания (СИ)						
$T_{\text{ад}}$, К	2 565.49	2 565.49	2 565.49	2 681.9	2 681.9	2 681.9
H , кДж/кг	–1928.47	–2 057.04	–2 185.6	–1 928.47	–2 057.04	–2 185.6
Равновесные параметры в выходном сечении (СИ)						
$H_{\text{вых}}$, кДж/кг	–2 266.87	–2 503.2	–2 739.25	–2 287.55	–2 549.16	–2 810.54
$I_{\text{уд}}$, м/с	944.868	1 067.86	1 178.09	964.85	1 107.1	1 233.18
W , м/с	823	945	1 052	847	992	1 118
z	0.219	0.139	0.058	0.223	0.146	0.069
Газообразные продукты сгорания, моль/кг						
I	0.058	0.066	0.073	0.058	0.065	0.072
I_2	следы	следы	следы	следы	следы	следы
Конденсированные продукты сгорания, моль/кг						
V_2O_3	1.111	0.82	0.526	1.152	0.912	0.669
V	13.091	7.485	1.875	13.126	7.563	1.998
CaO	0.012	0.013	0.014	0.012	0.013	0.014

В термитных системах $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$ энтальпия продуктов сгорания (тепловыделение) незначительно повышается при увеличении давления от 4 до 7 МПа. Большее влияние на важный термодинамический параметр $H_{\text{вых}}$ оказывает соотношение компонентов в составе ТС. Так, при $p = 4$ МПа и изменении соотношения компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$ в диапазоне от 75/25 до 85/15 энтальпия $H_{\text{вых}}$ изменяется от $-2\,266.87$ до $-2\,739.25$ кДж/кг.

Расчеты показали возможность увеличения удельного импульса за счет повышения давления в камере сгорания и содержания йодата кальция при одновременном понижении содержания бора. Удельный импульс $I_{\text{уд}}$ изменяется от 945 до 1 178 м/с при $p = 4$ МПа в диапазоне соотношений компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$ от 75/25 до 85/15. При давлении 7 МПа изменение соотношения компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$ от 75/25 до 85/15 приводит к повышению удельного импульса: $I_{\text{уд}}$ изменяется от 965 до 1 233 м/с.

Скорость истечения продуктов сгорания аналогично удельному импульсу возрастает при увеличении давления от 4 до 7 МПа и содержания йодата кальция при одновременном понижении содержания бора. При $p = 4$ МПа W изменяется в диапазоне 823–1 052 м/с, при $p = 7$ МПа W изменяется от 847 до 1 118 м/с.

Снижение содержания бора от 25 до 15 мас. % в термитной системе $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$ приводит к уменьшению массовой доли конденсированных фаз (z) с 0.219 до 0.058 при $p = 4$ МПа. Увеличение давления до 7 МПа приводит к незначительному повышению z на 0.004–0.011.

Повышение давления от 4 до 7 МПа незначительно увеличивает содержание конденсированного бора и оксида бора в продуктах сгорания. При давлении 4 МПа содержание конденсированного бора в продуктах сгорания понижается от 13.091 до 1.875 моль/кг при уменьшении содержания бора в исходной ТС с 25 до 15 мас. %. Аналогично при давлении 7 МПа содержание конденсированного бора понижается от 13.126 до 1.998 моль/кг.

Содержание конденсированного оксида бора в продуктах сгорания понижается пропорционально уменьшению содержания бора в исходной термитной системе, от 1.111 до 0.526 моль/кг при $p = 4$ МПа и от 1.152 до 0.669 при $p = 7$ МПа.

Содержание газообразного атомарного йода в продуктах сгорания ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$ варьирует в небольшом интервале 0.058–0.073 моль/кг и практически не зависит от давления.

Результаты термодинамического расчета ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$

Максимальная адиабатическая температура горения в термитной системе $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ наблюдается при соотношении компонентов 70/30, давлении 7 МПа и равна 4 660 К (табл. 5). При $p = 4$ МПа при уменьшении содержания титана в исходной ТС значение $T_{\text{ад}}$ снижается от 4 524 до 3 067 К.

В термитных системах $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ энтальпия продуктов сгорания (тепловыделение) незначительно повышается (на 77–80 кДж/кг) при увеличении давления от 4 до 7 МПа. При $p = 4$ МПа и изменении соотношения компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ в диапазоне от 75/25 до 85/15 энтальпия $H_{\text{вых}}$ имеет значения в от $-2\,532.67$ до $-2\,722.39$ кДж/кг.

В термитных системах $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ при содержании титана от 20 до 25 мас. % возможно повышение удельного импульса за счет увеличения давления в камере сгорания. Максимальное значение удельного импульса $I_{\text{уд}} = 1\,290$ м/с достигается

при давлении 7 МПа и содержании титана в составе ТС 25 мас. %. При давлении 4 МПа снижение содержания Ti в составе ТС от 25 до 15 мас. % приводит к понижению удельного импульса от 1 234 до 1 156 м/с при одновременном понижении скорости истечения продуктов сгорания через сопловой блок камеры сгорания.

Таблица 5

Термодинамические параметры и содержание продуктов сгорания ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$

Термодинамические параметры	№ термитной системы						
	1	2	3	4	5	6	7
	Содержание компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ (мас. %)						
	75/25	80/20	85/15	60/40	70/30	75/25	80/20
Давление (p)	4 МПа				7 МПа		
α	0.689	0.747	0.807	0.525	0.632	0.689	0.747
Равновесные параметры в камере сгорания (СИ)							
$T_{\text{ад}}$, К	4 523.99	3 855.7	3 066.59	4 475.6	4 660.36	4 644.85	3 902.62
H , кДж/кг	-1 928.47	-2 057.04	-2 185.6	-1 542.78	-1 799.91	-1 928.47	-2 057.04
Равновесные параметры в выходном сечении (СИ)							
$H_{\text{вых}}$, кДж/кг	-2 532.67	-2 658.6	-2 722.39	-2 009.22	-2 420.54	-2 609.91	-2 739.1
$I_{\text{уд}}$, м/с	1 233.98	1 228.57	1 156.19	1 077.1	1 235.95	1 290.36	1 288.16
W , м/с	1 099	1 097	1 036	966	1 114	1 167	1 168
z	0.447	0.431	0.372	0.533	0.459	0.454	0.435
Газообразные продукты сгорания, моль/кг							
I	3.808	4.093	4.299	2.232	3.1	3.809	4.093
I_2	0.001	0.003	0.028	следы	0.001	0.001	0.003
Конденсированные продукты сгорания, моль/кг							
TiO	–	–	–	7.428	–	–	–
TiO ₂	–	–	0.951	–	–	–	0.653
Ti ₂ O ₃	–	–	–	–	1.832	–	–
Ti ₃ O ₅	0.87	–	–	–	0.246	0.897	–
Ti ₄ O ₇	–	0.499	–	–	–	–	0.341
CaTiO ₃	1.853	2.051	2.18	0.432	1.033	1.864	2.051

Соотношения компонентов 75/25 и 80/20 в ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ показывают наиболее высокие скорости истечения продуктов сгорания в зависимости от давления. Так, максимальная скорость W при 4 МПа составляет 1 099 м/с, а при 7 МПа $W = 1 168$ м/с, минимальное значение $W = 966$ м/с соответствует ТС с соотношением компонентов $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti} = 60/40$.

Снижение содержания титана в термитной системе $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ приводит к понижению значений массовой доли конденсированных фаз (z) независимо от давления. Так при $p = 4$ МПа z изменяется в диапазоне 0.447–0.372, а при $p = 7$ МПа z изменяется от 0.533 до 0.435.

Содержание титаната кальция (CaTiO_3) в конденсированных продуктах сгорания ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ практически не зависит от давления. При $p = 4$ МПа при уменьшении содержания Ti в исходной ТС от 25 до 15% содержание титаната кальция увеличивается от 1.853 до 2.18 моль/кг.

Содержание газообразного атомарного йода в ТС $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ не зависит от давления и повышается от 3.808 до 4.299 моль/кг при уменьшении содержания Ti в исходной термитной системе от 25 до 15%.

Заключение

Термодинамические расчеты позволили установить, что основные термодинамические характеристики горения термитных систем $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$, $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$, $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$ при соотношении компонентов 80/20 и при $p = 7$ МПа можно представить в виде убывающего ряда значений:

- максимальное значение адиабатической температуры горения ($T_{\text{ад}}$)
4 713 К ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$) – 3 903 К ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$) – 2 682 К ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$);
- наибольшее тепловыделение (энтальпия продуктов сгорания, $H_{\text{вых}}$) в результате химических реакций
(–2 895.35 кДж/кг) ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$) – (–2 739.1 кДж/кг) ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$) –
(–2 549.16 кДж/кг) ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$);
- удельный импульс ($I_{\text{уд}}$)
1 433.95 м/с ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$) – 1 288.16 м/с ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$) – 1 107.1 м/с ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$);
- скорость истечения продуктов сгорания (W)
1 295 м/с ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$) – 1 168 м/с ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$) – 992 м/с ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$);
- массовая доля конденсированных фаз (z)
0.435 ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$) – 0.393 ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$) – 0.146 ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$);
- содержание в газообразных продуктах сгорания атомарного йода (I , моль/кг)
4.093 ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$) – 3.581 ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$) – 0.065 ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$).

На основании сравнения результатов расчетов термодинамических и теплофизических характеристик термитных систем представляется возможным разделить изученные термитные системы на три группы по их назначению. С учетом соотношения компонентов это могут быть:

- 1) термитные системы для сварочных процессов;
- 2) термитные системы для перфорирования, резания металлических конструкций ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Al}$ и $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{Ti}$);
- 3) термитные системы как компонент энергетических композиций, способных инактивировать вредные аэрозольные споры и бактерии ($\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$), так как за счет низкой температуры горения $\text{CaI}_2\text{O}_6/\text{B}$ более длительное время горения таких систем приводит к постепенному выделению йода.

Термодинамическое моделирование сложных физико-химических процессов при горении термитных систем при использовании ПК TERRA позволило получить аналитическую оценку работоспособности и области применения исследованных термитных систем. Полученные результаты позволяют отобрать целесообразные компоновки термитных систем как топлива для газогенераторов в соответствии с конкретными инженерными задачами для их дальнейшего изучения при проведении экспериментальных исследований.

Список источников

1. Белов Г.В., Трусов Б.Г. Термодинамическое моделирование химически реагирующих систем : учеб. пособие по курсу «Термодинамика» / МГТУ им. Н.Э. Баумана, фак. «Энергомашиностроение». М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 1 CD-ROM.
2. Моногаров К.А., Мееров Д.Б., Фролов Ю.В., Пивкина А.Н. Особенности горения наноразмерных термитов в пиронагревателях // Химическая физика. 2019. Т. 38, № 8. С. 40–45. doi: 10.1134/S0207401X19080119

3. Енков М.О., Горбенко Т.И., Горбенко М.В. Топлива на основе термитных систем для двигателей малой тяги // Решетневские чтения : материалы XXVI Междунар. науч.-практ. конф., Красноярск, 9–11 ноября 2022. Красноярск : Сиб. гос. ун-т науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева, 2022. Ч. 1. С. 246–248.
4. Имховик Н.А., Селиванов В.В., Симонов А.К., Сергеева А.И., Яшин В.Б. Об исследованиях по разработке за рубежом новых высокоплотных реактивных материалов (High-Density Reactive Materials) и их применению в боеприпасах повышенного могущества действия // Вооружение и экономика. 2014. № 1 (26). С. 53–63.
5. Бернер М.К., Зарко В.Е., Талавар М.Б. Наночастицы энергетических материалов: способы получения и свойства (обзор) // Физика горения и взрыва. 2013. Т. 49, № 6. С. 3–30. doi: 10.1134/S0010508213060014
6. Ильин А.П., Толбанова Л.О., Мостовицков А.В. Состав термитного топлива : описание изобретения к патенту // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Бюл. № 14. 20.05.2011.
7. Alvarez F., Delgado A., Frias J., Rubio M., White Ch., Ashvin K., Shafirovich E. Combustion of Thermites in Reduced Gravity for Space Applications // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2013. V. 27 (3). P. 576–583. doi: 10.2514/1.T3876
8. Delgado A., Shafirovich E. Thermite Reactions in the Mixtures of Magnesium with Lunar and Martian Regolith Simulants // AIAA. 2015-1179. Session: Lunar Resource Utilization. Published Online: 2 Jan 2015. doi: 10.2514/6.2015-1179
9. Wang S., Liu X., Schoenitz M., Dreizin E.L. Nanocomposite Thermites with Calcium Iodate Oxidizer // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. 2017. V. 42 (3). P. 284–292. doi: 10.1002/prep.201600213
10. Wang S., Abraham A., Zhong Z., Schoenitz M., Dreizin E.L. Ignition and combustion of boron-based AlBI₂ and MgBI₂ composites // Chemical Engineering Journal. 2016. V. 293. P. 112–117. doi: 10.1016/j.cej.2016.02.071
11. Костин С.В., Барзыкин В.В., Нечаев М.А., Ловля С.А. Прожигание стальных труб газодисперсными продуктами горения термита // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 79–82. doi: 10.1007/BF02699479
12. Белов Г.В. Термодинамическое моделирование: методы, алгоритмы, программы. М. : Научный Мир, 2002. 184 с.

References

1. Belov G.V., Trusov B.G. (2013) *Termodinamicheskoe modelirovanie khimicheski reagiruyushchikh sistem: uchebnoe. posobie po kursu "Termodinamika". MGTU im. N.E. Bauman, Fakul'tet "Energomashinostroyeniye"* [Thermodynamic modeling of chemically reacting systems: a textbook for a "Thermodynamics" course of the "Energy Engineering" faculty in Bauman MSTU]. Moscow: Publishing house of the Bauman MSTU.
2. Monogarov K.A., Meerov D.B., Frolov Yu.V., Pivkina A.N. (2019) Osobennosti goreniya nanorazmernykh termitov v pironagrevatelyakh [Peculiarities of combustion of nanosized thermites in pyroheaters]. *Khimicheskaya fizika – Russian Journal of Physical Chemistry B*. 38(8). pp. 40–45. doi: 10.1134/S0207401X19080119
3. Enkov M.O., Gorbenko T.I., Gorbenko M.V. (2022) *Topliva na osnove termitnykh sistem dlya dvigateley maloy tyagi* [Fuels based on thermite systems for low-thrust engines]. *Reshetnev Readings: Proceedings of the XXVI International Scientific and Practical Conference, Krasnoyarsk: Siberian State University of Science and Technology named after Academician M.F. Reshetnev*. 1. pp. 246–248.
4. Imkhovik N.A., Selivanov V.V., Simonov A.K., Sergeeva A.I., Yashin V.B. (2014) Ob issledovaniyakh po razrabotke za rubezhom novykh vysokoplotnykh reaktivnykh materialov («High-Density Reactive Materials») i ikh primeneniiyu v boeprisakh povyshennogo mogushchestva deystviya [About the abroad development research of new "High-Density

- Reactive Materials" and its appliance in high-lethality ammunition]. *Vooruzhenie i ekonomika – Armament and Economics*. 1(26). pp. 53–63.
5. Berner M.K., Zarko V.E. Talawar M.B. (2013) Nanoparticles of energetic materials: Synthesis and properties (review). *Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 49(6). pp. 625–647. doi: 10.1134/S0010508213060014
 6. Il'in A.P., Tolbanova L.O., Mostovshchikov A.V. (2011) *Sostav termitnogo topliva. Opisanie izobreteniya k patentu* [Composition of thermite fuel. Description of the invention to a patent]. Federal'naya sluzhba po intellektual'noy sobstvennosti, patentam i tovarnym znakam – Federal Service for Intellectual Property, Patents and Trademarks. Bulletin No. 14.
 7. Alvarez F., Delgado A., Frias J., Rubio M., White C., Swamy N., Shafirovich E. (2013) Combustion of thermites in reduced gravity for space applications. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 27(3). pp. 576–583. doi: 10.2514/1.T3876
 8. Delgado A., Shafirovich E. (2015) Thermite reactions in the mixtures of magnesium with lunar and Martian regolith simulants. *American Institute of Aeronautics and Astronautics. Session: Lunar Resource Utilization*. 1179. doi: 10.2514/6.2015-1179
 9. Wang S., Liu X., Schoenitz M., Dreizin E.L. (2017) Nanocomposite thermites with calcium iodate oxidizer. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*. 42(3). pp. 284–292. doi: 10.1002/prep.201600213
 10. Wang S., Abraham A., Zhong Z., Schoenitz M., Dreizin E.L. (2016.) Ignition and combustion of boron-based AlB_{12} and MgB_{12} composites. *Chemical Engineering Journal*. 293. pp. 112–117. doi: 10.1016/j.cej.2016.02.071
 11. Kostin S.V., Barzykin V.V., Nechaev M.A., Lovlya S.A. (2000) Prozhiganiye stal'nykh trub gazodispersnymi produktami goreniya termitya [Burning through steel tubes by gas-dispersed products of thermite combustion]. *Fizika goreniya i vzryva – Combustion, Explosion, and Shock Waves*. 36(4). pp. 79–82. doi: 10.1007/BF02699479
 12. Belov G.V. (2002) *Termodinamicheskoe modelirovaniye: metody, algoritmy, programmy* [Thermodynamic modeling: methods, algorithms, and programs]. Moscow: Nauchnyy mir.

Сведения об авторах:

Енков Максим Олегович – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: enkov_maksim@mail.ru

Горбенко Татьяна Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной газовой динамики и горения Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: gorbenkoti@rambler.ru

Горбенко Михаил Владимирович – кандидат технических наук, доцент отделения общетехнических дисциплин школы базовой инженерной подготовки Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: gmovski@rambler.ru

Information about the authors:

Enkov Maksim O. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: enkov_maksim@mail.ru

Gorbenko Tatiana I. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gorbenkoti@rambler.ru

Gorbenko Mikhail V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gmovski@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 19.07.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 19.07.2023; accepted for publication 12.02.2024

Научная статья

УДК 539.42

doi: 10.17223/19988621/87/10

Численное исследование высокоскоростного взаимодействия вращающихся ударников с различной формой головной части с преградой конечной толщины

Павел Андреевич Радченко¹, Андрей Васильевич Радченко²,
Станислав Павлович Батуев³

^{1, 2, 3} *Институт физики прочности и материаловедения
Сибирского отделения РАН, Томск, Россия*

¹ *pavel@ispms.ru*

² *andrey@ispms.ru*

³ *spbatauev@gmail.com*

Аннотация. Исследуется влияние вращения ударников на процесс их взаимодействия с преградой при высокоскоростном ударе. Рассмотрены различные типы головных частей ударников. Частота вращения варьировала от 0 до 10 000 об/с. Рассмотрен диапазон углов взаимодействия от 0 до 75°. Показано, что отличия в проникании вращающегося и невращающегося ударника обусловлены наличием во вращающемся ударнике напряженно-деформированного состояния, вызванного вращательным движением. Определены условия возникновения рикошета ударников для различных углов взаимодействия, скоростей вращения и форм головной части.

Ключевые слова: разрушение, деформация, удар, рикошет, вращение

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00407, <https://rscf.ru/project/22-21-00407>

Для цитирования: Радченко П.А., Радченко А.В., Батуев С.П. Численное исследование высокоскоростного взаимодействия вращающихся ударников с различной формой головной части с преградой конечной толщины // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 120–134. doi: 10.17223/19988621/87/10

Original article

A numerical study of the high-velocity interaction of rotating strikers having different head shapes with a barrier of finite thickness

Pavel A. Radchenko¹, Andrey V. Radchenko², Stanislav P. Batuev³

^{1, 2, 3} *Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of RAS,
Tomsk, Russian Federation*

¹ *pavel@ispms.ru*

² andrey@ispms.ru

³ spbatuev@gmail.com

Abstract. Numerical simulation methods are used to study the effect of rotation of cylindrical strikers made of high-strength steel on the high-velocity interaction with a steel barrier. Three types of striker head shapes are considered: ogival, hemispherical, and flat. The initial velocity of the striker is 1000 m/s, and the rotation frequency varies from 0 to 10000 revolutions per second. The striker–barrier interaction angle varies from 0° to 75°. The modeling is carried out in a three-dimensional formulation using the author’s EFES 2.0 software package. This allows the simulation of the fragmentation of interacting bodies with the formation of new contact and free surfaces, as well as the erosion of materials. The obtained results show that the difference in the penetrating power of rotating and non-rotating strikers is due to the presence of a stress–strain state in the rotating striker caused by rotational motion. The effect of the rotation of the striker on its penetrating power is studied. The conditions for the striker ricochet are determined for various striker–barrier interaction angles, rotation velocities, and head part shapes.

Keywords: destruction, deformation, impact, ricochet, rotation

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-21-00407), <https://rscf.ru/project/22-21-00407>

For citation: Radchenko, P.A., Radchenko, A.V., Batuev, S.P. (2024) A numerical study of the high-velocity interaction of rotating strikers having different head shapes with a barrier of finite thickness. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 120–134. doi: 10.17223/19988621/87/10

Введение

Представленные ранее результаты [1] показали, что вращение ударника оказывает влияние на процесс его взаимодействия с преградой. Вместе с тем систематические исследования влияния вращения ударника на динамику процесса взаимодействия и разрушения материалов отсутствуют. Это отчасти связано с предположением, что при взаимодействии вращающегося ударника основное влияние будет оказывать трение. Но проведенные Джозефом Краффтом эксперименты по исследованию проникающей способности вращающихся и невращающихся ударников показали, что вклад трения несуществен: для низкоскоростного взаимодействия он не превышает 3–4%, а при высокоскоростном ударе менее 1% [2]. В дальнейшем, основываясь на выводах работы [2], влиянием вращения на процесс проникания ударников в преграды пренебрегали [3], и влияние вращения не исследовалось. Кстати, эти результаты явились обоснованием использования условия идеального скольжения на контактной поверхности между ударником и преградой при математическом и численном моделировании процессов ударного взаимодействия твердых тел.

Влиянию геометрических параметров взаимодействия ударника с преградой (форма головной части ударника, угол взаимодействия, толщина преграды и т.п.) посвящено достаточно много как экспериментальных, так аналитических и численных исследований. Можно выделить ряд работ, отражающих основные направления исследований [3–14]. В работе [14] экспериментально исследуется нормаль-

ное внедрение жестких ударников с конической и с полусферической формами головной части в преграды из мягкой низкоуглеродистой стали со скоростями до 600 м/с. Полученные результаты свидетельствуют, что форма головной части при рассмотренных условиях не оказывает существенного влияния на глубину кратера в преграде. Аналогичный вывод содержится и в работе [9] для случая нормального внедрения ударника в преграду.

Данная работа посвящена подробному анализу влияния вращательного движения ударника и геометрии его головной части на кинематику взаимодействия и разрушение материалов.

Основные уравнения математической модели

Задача решается в трехмерной адиабатической постановке. В произвольной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$) система уравнений включает следующие уравнения [1, 9]:

– неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla_i v^i = 0; \quad (1)$$

– движения

$$\rho a^k = \nabla_i \sigma^{ik} + F^k, \quad (2)$$

где $a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \nabla_i v^k$, $\nabla_i \sigma^{ik} = \sigma_{,i}^{ik} + \Gamma_{im}^k \sigma^{im} + \Gamma_{im}^m \sigma^{ik}$;

– энергии

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma^{ij} e_{ij}. \quad (3)$$

Здесь F^k – компоненты вектора массовых сил; Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля; σ^{ij} – контравариантные компоненты симметричного тензора напряжений; E – удельная внутренняя энергия; ρ – плотность среды; v^i – компоненты вектора скорости; e_{ij} – компоненты симметричного тензора скоростей деформаций:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Тензор напряжений представляется в виде суммы девиаторной S^{ki} и шаровой части (давления) P :

$$\sigma^{ij} = -Pg^{ij} + S^{ij}, \quad (4)$$

где g^{ij} – метрический тензор.

Шаровая часть тензора напряжений (давление) определяется уравнением Мигрюнайзена:

$$P = \sum_{n=1}^3 K_n \left(\frac{V}{V_0} - 1 \right)^n + K_0 \rho E, \quad (5)$$

где K_0, K_1, K_2, K_3 – константы материала, V_0 – начальный удельный объем, V – текущий удельный объем.

Связь компонент тензора скоростей деформаций и девиатора имеет вид:

$$2G \left(g^{im} g^{jk} e_{mk} - \frac{1}{3} g^{mk} e_{mk} g^{ij} \right) = \frac{DS^{ij}}{Dt} + \lambda S^{ij}, \quad (\lambda \geq 0). \quad (7)$$

Влияние поворота на напряженно-деформированное состояние (НДС) описывается коротационной производной Яуманна

$$\frac{DS^{ij}}{Dt} = \frac{dS^{ij}}{dt} - g^{im} \omega_{mk} S^{kj} - g^{jm} \omega_{mk} S^{ik},$$

где $\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i)$, G – модуль сдвига.

Материал ведет себя упруго ($\lambda = 0$), если выполняется условие Мизеса

$$S^{ij} S_{ij} \leq \frac{2}{3} \sigma_d^2, \quad (8)$$

и пластически ($\lambda > 0$), если оно нарушается, σ_d – динамический предел текучести.

Для описания разрушения используется предельная величина интенсивности пластических деформаций

$$e_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3T_2 - T_1^2}, \quad (9)$$

где T_1, T_2 – первый и второй инварианты тензора деформаций.

Постановка задачи

Исследуется как нормальное ($\alpha = 0^\circ$), так и косое ($\alpha \neq 0^\circ$) взаимодействие цилиндрических стальных ударников с различной формой головной части: оживальной (рис. 1, а), полусферической (рис. 1, б) и плоской (рис. 1, с), со стальной преградой. Процесс удара рассматривается в декартовой системе координат XYZ ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, \Gamma_{ij}^k = 0, \sigma^{ij} = \sigma_{ij}, g^{ij} = \delta_{ij}, \delta_{ij}$ – символ Кронеккера, $i, j = 1, 2, 3$).

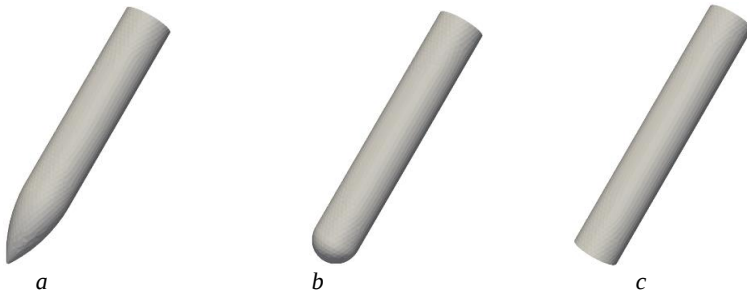


Рис. 1. Типы исследуемых ударников
Fig. 1. Design of the strikers under study

В момент времени $t = 0$ ось симметрии ударника совпадает с Z (рис. 2, а), вектором скорости ударника v_0 и образует с нормалью к преграде угол α . Помимо поступательного движения с скоростью v_0 , ударник вращается вокруг своей оси с начальной угловой скоростью $|\omega_0| = 2\pi\nu$, где ν – частота вращения, показыва-

ющая количество оборотов ударника в секунду (об/с). Линейную скорость вращательного движения точек ударника определим из векторного произведения $\mathbf{v}_\omega = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки. Проекции вектора скорости $\mathbf{v}_\omega$ на оси X и Y определяются соотношениями $v_\omega^1 = |\mathbf{v}_\omega| \sin \varphi$ и $v_\omega^2 = |\mathbf{v}_\omega| \cos \varphi$ соответственно (рис. 2, b). Проекция $\mathbf{v}_\omega$ на ось Z будет равна нулю: $v_\omega^3 = 0$.

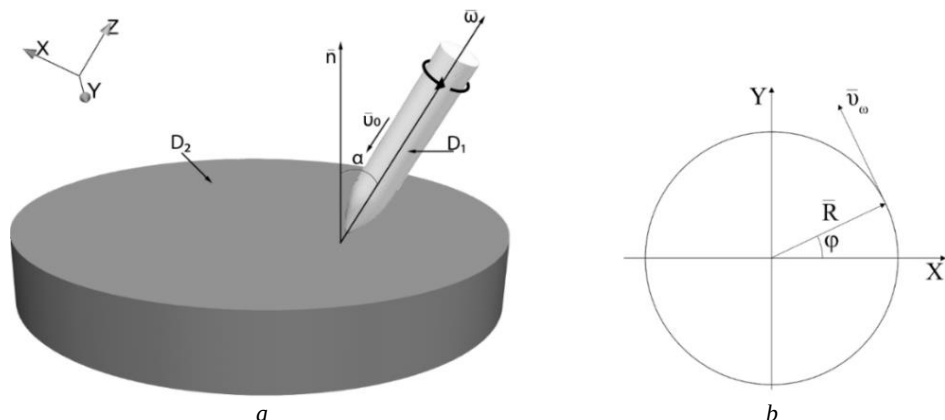


Рис. 2. Постановка задачи
Fig. 2. Formulation of the problem

Начальные условия ($t = 0$):

$$\sigma_{ij} = P = E = 0 \text{ при } (x^i) \in D_1 \cup D_2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$v^1 = |\mathbf{v}_\omega| \sin \varphi, \quad v^2 = |\mathbf{v}_\omega| \cos \varphi, \quad v^3 = -|\mathbf{v}_0|, \text{ при } (x^i) \in D_1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$v^i = 0 \text{ при } (x^i) \in D_2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$\rho = \rho_i \text{ при } (x^i) \in D_k, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2. \quad (13)$$

Граничные условия:

– на контактной поверхности между ударником и преградой реализовано условие скольжения без трения

$$T_{nn}^+ = T_{nn}^-, \quad T_{n\tau}^+ = T_{n\tau}^- = T_{ns}^+ = T_{ns}^- = 0, \quad v_n^+ = v_n^-, \quad (14)$$

– на свободных поверхностях задано условие отсутствия напряжений

$$T_{nn} = T_{ns} = T_{n\tau} = 0. \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности в рассматриваемой точке, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{s}$ – взаимно перпендикулярные единичные векторы в плоскости, касательной к поверхности в этой точке, $\mathbf{T}_n$ – вектор силы на площадке с нормалью $\mathbf{n}$, $\mathbf{v}$ – вектор скорости. Нижние индексы у векторов $\mathbf{T}_n$ и $\mathbf{v}$ означают проекции на соответствующие векторы базиса; знак «+» характеризует значение параметров в ударнике, знак «-» в преграде. Система уравнений (1)–(9) совместно с начальными и граничными условиями (10)–(15) полностью определяет краевую задачу.

Материал ударника – высокопрочная сталь плотностью $\rho_0 = 8020 \text{ кг/м}^3$ с динамическим пределом текучести $\sigma_d = 1.72 \text{ ГПа}$. Диаметр ударника $D = 25.4 \text{ мм}$,

длина $L = 142.9$ мм, $L/D = 5.65$. Материал преграды – сталь плотностью $\rho_0 = 7850$ кг/м³ и динамическим пределом текучести $\sigma_d = 1.01$ ГПа. Толщина преграды $h = 50$ мм, диаметр 350 мм. Начальная скорость ударника в расчетах составляла $|v_0| = 1000$ м/с, частота вращения $v = 0 \div 10\,000$ об/с. Рассмотрен диапазон углов взаимодействия $\alpha = 0 \div 75^\circ$. Для численного решения задачи используется авторский программный 3D комплекс EFES 2.0 [1].

Результаты численных исследований

Предложенная модель поведения материала и реализующие ее численные алгоритмы были протестированы сравнением с экспериментальными данными, которые подтвердили адекватность численных результатов [1, 15, 16].

На рис. 3 в сечении ZX представлены конфигурации ударников с различной формой головной части, преграды и распределение интенсивности пластической деформации (9) при нормальном ударе в момент времени 150 мкс после начала взаимодействия. В этом случае для всех типов ударников наблюдается перфорация преграды. Наибольшие значения интенсивности пластической деформации в преграде локализованы на контактной поверхности с ударником и боковой поверхности кратера, переходящего в процессе взаимодействия в сквозное отверстие. В ударнике при $v = 0$ и $v = 3\,000$ об/с максимальные значения интенсивности пластической деформации локализованы в головной части ударника в зоне контакта с материалом преграды, при этом на боковой поверхности ударника и во внутренней области ударника уровень e_d невысокий. При частоте вращения $v = 10\,000$ об/с за счет увеличения центробежной силы наблюдаются увеличение диаметра деформирующегося ударника и, как следствие, увеличение диаметра отверстия в преграде.

В невращающемся ударнике НДС возникает только в результате его взаимодействия с преградой, во вращающемся ударнике дополнительно возникает НДС, вызванное его вращением вокруг своей оси, в этом случае в ударнике возникают как нормальные растягивающие напряжения σ_{xx} и σ_{yy} , вызванные действием центробежной силы на материал ударника, так и сдвиговые напряжения σ_{xy} , возникающие за счет градиента линейной скорости материала ударника вдоль его радиуса (рис. 4). Таким образом, в момент взаимодействия с преградой во вращающемся ударнике уже существует ненулевое поле напряжений, интенсивность которого будет определяться частотой вращения ударника. Максимальные значения напряжений, вызванных вращательным движением ударника, локализованы вблизи боковой поверхности. Особенно это характерно для сдвиговых напряжений (см. рис. 4, b).

В табл. 1 представлены значения остаточной длины ударников и их остаточной скорости после перфорации преграды при нормальном ударе. Для всех рассмотренных форм головной части наблюдается уменьшение остаточной длины ударника с увеличением скорости его вращения. Это обусловлено интенсификацией пластического деформирования и эрозионного разрушения ударника в результате его вращения. Остаточная длина ударников при $v = 10\,000$ об/с составляет от 13 до 16%. Остаточная скорость ударника с оживальной головной частью с увеличением скорости вращения уменьшается, для ударников с полусферической и плоской формой головной части, напротив, остаточная скорость ударника

с ростом частоты вращения увеличивается. Это связано с двумя факторами: увеличением областей пластического течения и разрушения в преграде за счет большей площади контактной зоны, обусловленной формой ударников, и большей кинетической энергией ударников с полусферической и плоской формой головной части: их массы на 11 и 14% соответственно больше массы оживальной ударника.

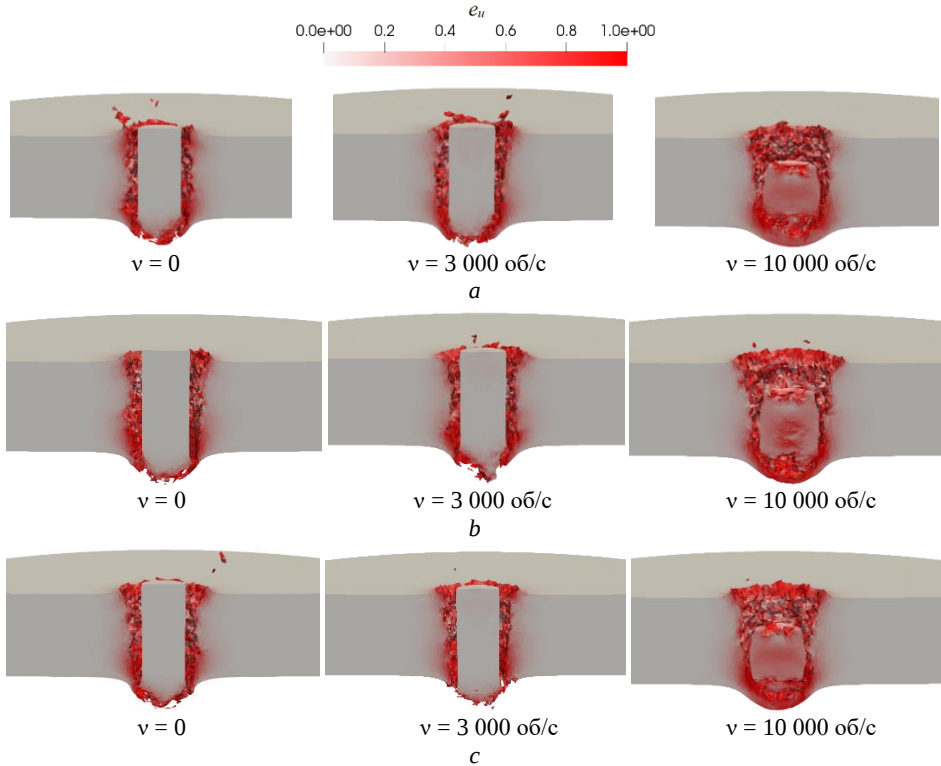


Рис. 3. Конфигурации ударников и преграды, распределение интенсивности пластической деформации (сечение ZX, $\alpha = 0^\circ$, $t = 150$ мкс): *a* – оживальная головная часть, *b* – полусферическая головная часть, *c* – плоская головная часть

Fig. 3. Distribution of plastic deformation intensity in the barrier for different design of strikers (ZX-section, $\alpha = 0^\circ$, $t = 150$ μ s): (a) ogival-headed, (b) hemispherical-headed, and (c) flat-headed

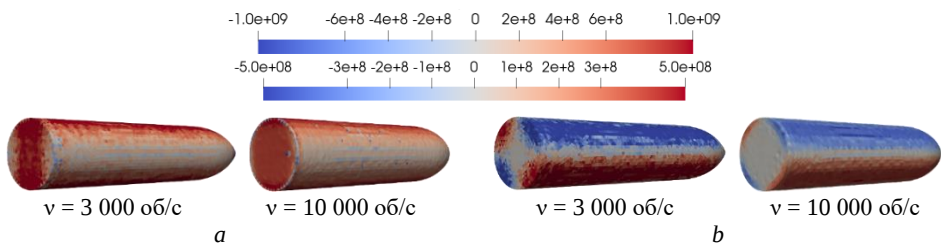


Рис. 4. Распределение в ударнике нормальной и сдвиговой компонент напряжения в Па при $t = 1$ мкс: *a* – σ_{xx} , *b* – σ_{xy}

Fig. 4. Distribution of normal and shear stress components along the striker in Pa at $t = 1$ μ s: (a) σ_{xx} and (b) σ_{xy} ,

Таблица 1

Итоговые значения параметров взаимодействия для $\alpha = 0^\circ$

Форма головной части	Частота вращения v , об/с	Остаточная длина ударника l_r , мм / %	Остаточная скорость ударника v_r , м/с	Результат взаимодействия
Оживало	0	53 / 37	806	Перфорация
	3 000	51 / 36	804	Перфорация
	10 000	18 / 13	781	Перфорация
Полусфера	0	59 / 41	810	Перфорация
	3 000	58 / 40.6	817	Перфорация
	10 000	23 / 16	852	Перфорация
Плоскость	0	63 / 44	816	Перфорация
	3 000	63 / 44	835	Перфорация
	10 000	22 / 15	857	Перфорация

На рис. 5 приведены конфигурации ударников и распределение интенсивности пластической деформации для угла взаимодействия $\alpha = 30^\circ$ в момент времени 200 мкс. В этом случае так же, как и при нормальном ударе, происходит перфорация преграды для всех типов ударников. При ударе под углом увеличивается эффективная толщина преграды h_{ef} , определяемая соотношением $h_{ef} = h/\cos\alpha$, что приводит к большей потере скорости ударника (табл. 2).

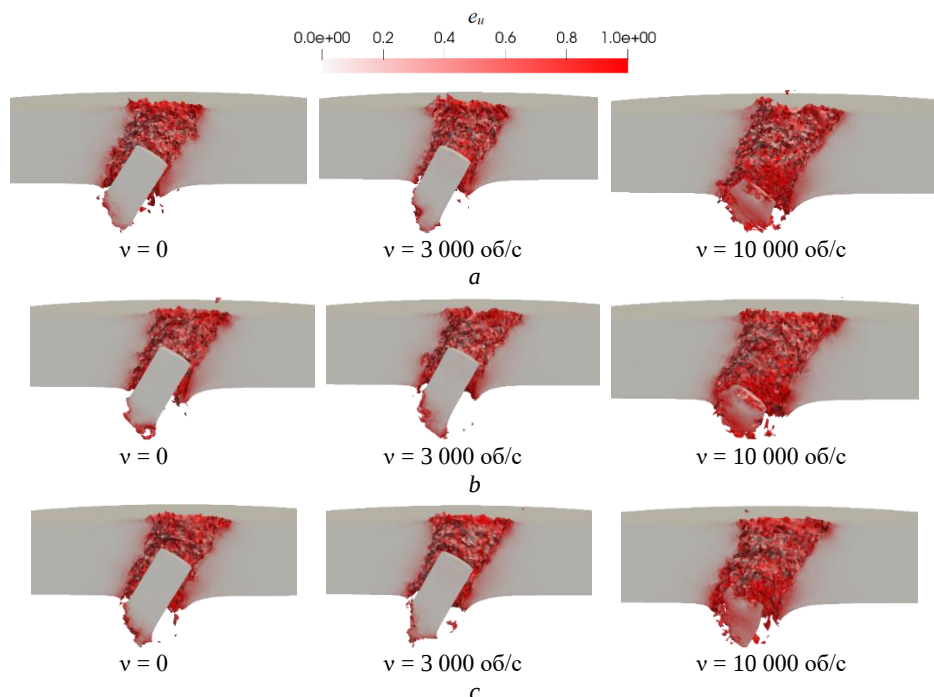


Рис. 5. Конфигурации ударников и преграды, распределение интенсивности пластической деформации (сечение ZX, $\alpha = 30^\circ$, $t = 200$ мкс): а – оживальная головная часть, б – полусферическая головная часть, с – плоская головная часть

Fig. 5. Distribution of plastic deformation intensity in the barrier for different design of strikers (ZX-section, $\alpha = 30^\circ$, $t = 200$ μ s): (a) ogival-headed, (b) hemispherical-headed, and (c) flat-headed

Таблица 2

Итоговые значения параметров взаимодействия для $\alpha = 30^\circ$

Форма головной части	Частота вращения v , об/с	Остаточная длина ударника l_r , мм / %	Остаточная скорость ударника v_r , м/с	Результат взаимодействия
Оживало	0	51 / 36	770	Перфорация
	3 000	49 / 34	769	Перфорация
	10 000	13 / 9	704	Перфорация
Полусфера	0	59 / 41	776	Перфорация
	3 000	58 / 40.5	764	Перфорация
	10 000	23 / 16	754	Перфорация
Плоскость	0	64 / 45	778	Перфорация
	3 000	63 / 44	790	Перфорация
	10 000	22 / 15	813	Перфорация

Увеличение угла взаимодействия до $\alpha = 60^\circ$ приводит к тому, что перфорация преграды происходит не для всех типов рассматриваемых ударников и скоростей вращения (рис. 6). Так, для оживального ударника перфорация преграды происходит только когда отсутствует вращение ударника ($v = 0$). В случае вращающегося ударника происходит торможение ударника в преграде без сквозного проби-тия (см. рис. 6, а).

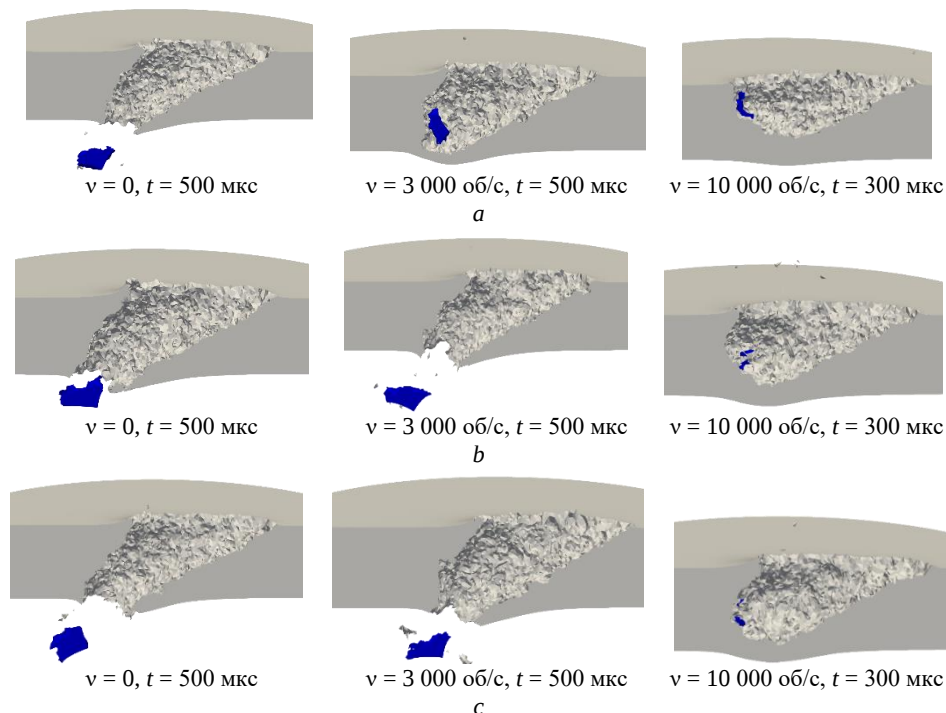


Рис. 6. Конфигурации ударников и преграды (сечение ZX, $\alpha = 60^\circ$): а – оживальная головная часть, б – полусферическая головная часть, с – плоская головная часть

Fig. 6. Configuration of the barrier with different design of strikers (ZX-section, $\alpha = 60^\circ$): (a) ogival-headed, (b) hemispherical-headed, and (c) flat-headed

Для ударников с полусферической и плоской формой головной части сквозное пробитие преграды происходит в случае отсутствия вращения ударника и для частоты вращения $\nu = 3\,000$ об/с; при $\nu = 10\,000$ об/с (см. рис. 6, b, c) наблюдается торможение ударников. В табл. 3 приведены значения интегральных параметров, характеризующих процесс взаимодействия ударников с преградой при ударе под углом $\alpha = 60^\circ$. В данном случае эффективная толщина преграды увеличивается в два раза, что увеличивает время взаимодействия ударника с преградой и приводит к большему разрушению ударника. Так, при $\nu = 10\,000$ об/с происходит практически полное срабатывание ударников.

Таблица 3

Итоговые значения параметров взаимодействия для $\alpha = 60^\circ$

Форма головной части	Частота вращения ν , об/с	Остаточная длина ударника l_r , мм / %	Остаточная скорость ударника v_r , м/с	Глубина кратера в преграде h , мм	Результат взаимодействия
Оживало	0	14 / 10	290	—	Перфорация
	3 000	8 / 5	—	50	Кратер
	10 000	—	—	34	Кратер
Полусфера	0	14 / 10	347	—	Перфорация
	3 000	15 / 12	378	—	Перфорация
	10 000	—	—	40	Кратер
Плоскость	0	13 / 9	408	—	Перфорация
	30 00	12 / 8	389	—	Перфорация
	10 000	—	—	45	Кратер

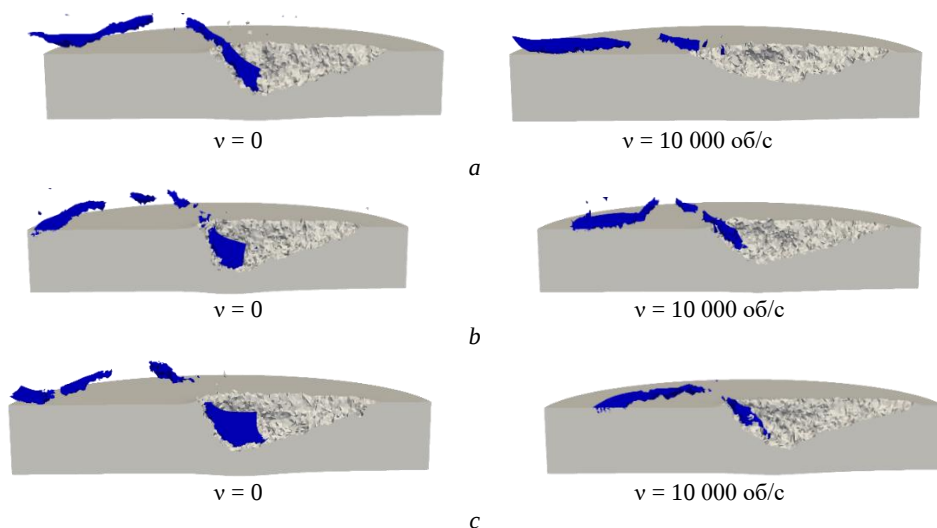


Рис. 7. Конфигурации ударников и преграды (сечение ZX, $\alpha = 70^\circ$, $t = 250$ мкс): а – оживальная головная часть, б – полусферическая головная часть, с – плоская головная часть

Fig. 7. Configuration of the barrier with different design of strikers (ZX-section, $\alpha = 70^\circ$, $t = 250$ μs): (a) ogival-headed, (b) hemispherical-headed, and (c) flat-headed

При угле взаимодействия $\alpha = 70^\circ$ происходит рикошет всех типов ударников как в случае отсутствия вращения ударника, так и при его вращении. На рис. 7 представлены конфигурации невращающихся ударников и вращающихся с ча-

стойкой $v = 10\,000$ об/с. В данном случае происходит фрагментация ударников с образованием осколков различных размеров, а в преграде формируются кратеры, протяженные вдоль оси X .

Таблица 4

Глубины кратеров в преграде для $\alpha = 70^\circ$

Форма головной части	v , об/с	Глубина кратера в преграде, h , мм	Результат взаимодействия
Оживало	0	33	Рикошет
	3 000	32	Рикошет
	10 000	25	Рикошет
Полусфера	0	40	Рикошет
	3 000	36	Рикошет
	10 000	29	Рикошет
	0	40	Рикошет
Плоскость	3 000	35	Рикошет
	10 000	33	Рикошет

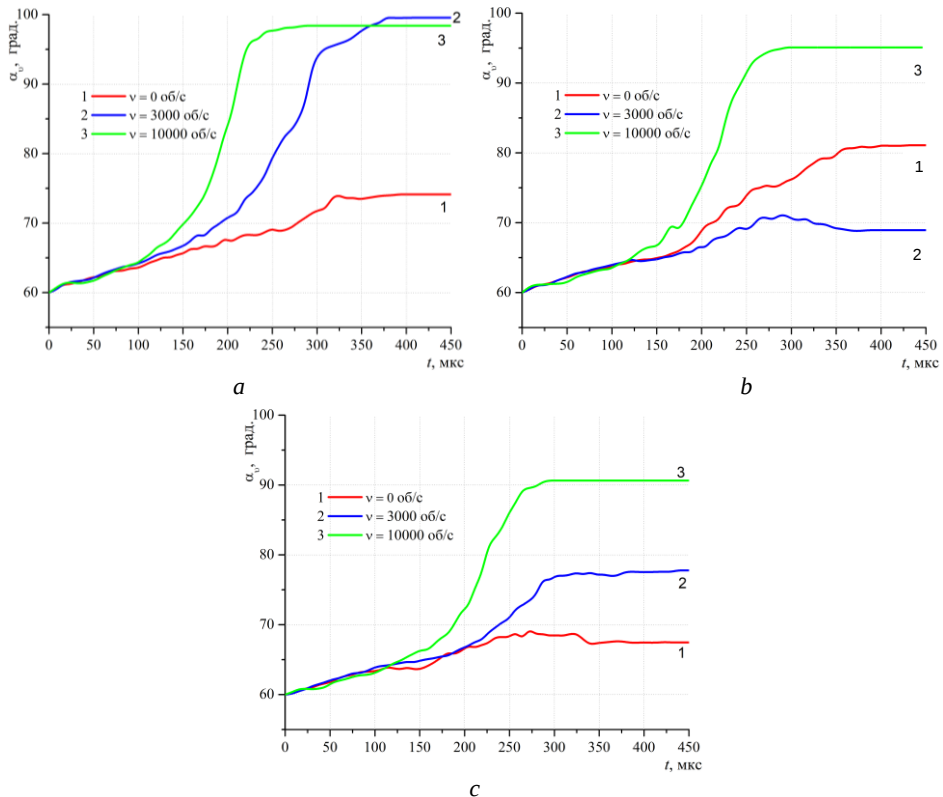


Рис. 8. Изменение во времени угла между вектором скорости центра масс ударника и нормалью к преграде для различных форм головной части ударника: *a* – оживальная, *b* – полусферическая, *c* – плоская

Fig. 8. Time variation of the angle between the velocity vector of the striker's center of mass and the normal to the barrier for different striker head shapes: (*a*) ogival, (*b*) hemispherical, and (*c*) flat

В табл. 4 приведены значения глубин кратеров, образованных ударниками в преграде при ударе под углом $\alpha = 70^\circ$. Для всех типов ударников наблюдается уменьшение глубины кратера с увеличением скорости вращения. При частоте вращения ударника $\nu = 10\,000$ об/с глубина кратера в преграде для оживального ударника по сравнению с невращающимся ударником уменьшается на 24%, для ударников с полусферической и плоской головной частью на 28 и 18% соответственно.

Влияние вращения ударника на процесс взаимодействия ударников с преградой иллюстрируют графики изменения во времени угла между вектором скорости центра масс внедряющегося ударника α_0 и нормалью к преграде $\mathbf{n}$ для угла взаимодействия $\alpha = 60^\circ$, приведенные на рис. 8. С течением времени значение α_0 увеличивается для всех типов ударника. Если значения $\alpha_0 \geq 90^\circ$, то это свидетельствует о рикошете ударника от преграды. Так, для оживального ударника для скоростей вращения $\nu = 3\,000$ об/с и $\nu = 10\,000$ об/с значения $\alpha_0 = 90^\circ$ достигаются в 300 и 210 мкс соответственно (см. рис. 8, а кривые 2, 3). Для ударников с полусферической и плоской головной частью значения $\alpha_0 = 90^\circ$ достигаются только для частоты вращения $\nu = 10\,000$ об/с (см. рис. 8, б, с, кривые 3). Характер кривых 3 для всех типов ударников одинаков, но для оживального ударника момент времени, когда начинается резкий рост α_0 , наступает раньше, при $t = 100$ мкс, для ударников с полусферической и плоской формой головной части это происходит в 125 и 140 мкс соответственно. Для оживального ударника значения частот вращения $\nu \geq 3\,000$ об/с при угле взаимодействия $\alpha = 60^\circ$ приводят к рикошету ударника.

Заключение

Проведенные параметрические исследования показали:

1. При вращении ударника в нем формируется напряженно-деформированное состояние, влияющее как на разрушение ударника и преграды, так и на кинематические параметры процесса взаимодействия.
2. Увеличение скорости вращения приводит к увеличению объема материала, находящегося в пластическом состоянии, и, как следствие, интенсификации эрозийного разрушения и срабатывания ударника.
3. Рикошет вращающегося ударника для рассматриваемого соотношения физико-механических свойств материалов ударника и преграды зависит от формы головной части и может происходить при меньших углах взаимодействия, причем для ударника с оживальной формой головной части эта закономерность выражена наиболее ярко.

Список источников

1. Radchenko P.A., Radchenko A.V., Batuev S.P. Effect of Projectile Rotation on High-Velocity Impact Fracture // Physical Mesomechanics. 2022. V. 25. P. 119–228. doi: 10.1134/S1029959922020035
2. Krafft J.M. Surface Friction in Ballistic Penetration // Journal of Applied Physics. 1955. V. 26, № 10. P. 1248–1253. doi: 10.1063/1.1721884
3. Goldsmith W. Non-ideal projectile impact on targets // Int. J Impact Eng. 1999. V. 22. P. 95–395. doi: 10.1016/s0734-743x(98)00031-1

4. Gupta N.K., Madhu V. Normal and oblique impact of a kinetic energy projectile on mild steel plates // *Int. J. Impact Eng.* 1992. V. 12, № 3. P. 333–343. doi: 10.1016/0734-743X(92)90101-X
5. Manes A., Serpellini F., Pagani M., Saponara M., Giglio M. Perforation and penetration of aluminium target plates by armour piercing bullets // *Int. J. Impact Eng.* 2014. V. 69. P. 39–54. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2014.02.010
6. Seidt J.D., Pereira J.M., Gilat A., Revilock D.M., Nandwana K. Ballistic impact of anisotropic 2024 aluminum sheet and plate // *Int. J. Impact Eng.* 2013. V. 62. P. 27–34. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2013.06.001
7. Børvik T., Langseth M., Hopperstad O.S., Malo K.A. Ballistic penetration of steel plates // *Int. J. Impact Eng.* 1999. V. 22. P. 855–886. doi: 10.1016/S0734-743X(99)00011-1
8. Iqbal M.A., Senthil K., Madhu V., Gupta N.K. Oblique impact on single, layered and spaced mild steel targets by 7.62 AP projectiles // *Int. J. Impact Eng.* 2017. V. 110. P. 26–38. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2017.04.011
9. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. The influence of steel projectile shape on its fracture at high strain rates // *Russian Physics Journal*. 2021. V. 64, № 5. P. 811–819. doi: 10.1007/s11182-021-02396-1
10. Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. Impact resistance of ceramics in a numerical experiment // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020. V. 61 (5). P. 847–854. doi: 10.1134/S002189442005020X
11. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация формы затупленных осесимметричных тел, движущихся поступательно с вращением в упругопластической среде // *Проблемы прочности пластичности*. 2015. Т. 77, № 4. С. 367–378.
12. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Афанасьева С.А., Югов А.А., Архипов И.Н., Федосов О.Ю. Исследование особенностей ударного взаимодействия длинных стержней с пространственно-разнесенными защитными конструкциями // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2010. № 3. С. 77–87.
13. Зелепугин С.А., Толкачев В.Ф., Тырышкин И.М. Анализ эффективности противоударной стойкости двух групп керамических и композитных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 80. С. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
14. Голубев В.К., Медведкин В.А. О внедрении жесткого снаряда в толстую стальную преграду при умеренных скоростях удара // *Проблемы прочности*. 2001. № 4. С. 138–146.
15. Батуев С.П., Дьячковский А.С., Радченко П.А., Радченко А.В., Саммель А.Ю., Чупашев А.В. Моделирование взаимодействия конических ударников с подводными преградами при наличии у ударников угла атаки // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 80. С. 39–48. doi: 10.17223/19988621/80/4
16. Батуев С.П., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Радченко А.В., Радченко П.А., Саммель А.Ю., Степанов Е.Ю., Чупашев А.В. Экспериментально-теоретические исследования взаимодействия суперкавитирующих ударников с подводными разнесенными преградами // *Известия вузов. Физика*. 2023. Т. 66, № 2. С. 113–117. doi: 10.17223/00213411/66/2/113.

References

1. Radchenko P.A., Radchenko A.V., Batuev S.P. (2022) Effect of projectile rotation on high-velocity impact fracture. *Physical Mesomechanics*. 25. pp. 119–228. doi: 10.1134/S1029959922020035
2. Krafft J.M. (1955) Surface friction in ballistic penetration. *Journal of Applied Physics*. 26(10). pp. 1248–1253. doi: 10.1063/1.1721884
3. Goldsmith W. (1999) Non-ideal projectile impact on targets. *International Journal of Impact Engineering*. 22. pp. 95–395. doi: 10.1016/s0734-743x(98)00031-1

4. Gupta N.K., Madhu V. (1992) Normal and oblique impact of a kinetic energy projectile on mild steel plates. *International Journal of Impact Engineering*. 12(3). pp. 333–343. doi: 10.1016/0734-743X(92)90101-X
5. Manes A., Serpellini F., Pagani M., Saponara M., Giglio M. (2014) Perforation and penetration of aluminium target plates by armour piercing bullets. *International Journal of Impact Engineering*. 69. pp. 39–54. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2014.02.010
6. Seidt J.D., Pereira J.M., Gilat A., Revilock D.M., Nandwana K. (2013) Ballistic impact of anisotropic 2024 aluminum sheet and plate. *International Journal of Impact Engineering*. 62. pp. 27–34. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2013.06.001
7. Børvik T., Langseth M., Hopperstad O.S., Malo K.A. (1999) Ballistic penetration of steel plates. *International Journal of Impact Engineering*. 22. pp. 855–886. doi: 10.1016/S0734-743X(99)00011-1
8. Iqbal M.A., Senthil K., Madhu V., Gupta N.K. (2017) Oblique impact on single, layered and spaced mild steel targets by 7.62 AP projectiles. *International Journal of Impact Engineering*. 110. pp. 26–38. doi: 10.1016/j.ijimpeng.2017.04.011
9. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. (2021) The influence of steel projectile shape on its fracture at high strain rates. *Russian Physics Journal*. 64(5). pp. 811–819. doi: 10.1007/s11182-021-02396-1
10. Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. (2020) Impact resistance of ceramics in a numerical experiment. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 61(5). pp. 847–854. doi: 10.1134/S002189442005020X
11. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. (2015) Optimizatsiya formy zatuplennykh osesimmetrichnykh tel, dvizhushchikhsya postupatel'no s vrashcheniem v uprugoplasticheskoy srede [Optimization of the shape of blunt axisymmetric bodies moving translationally with rotation in an elastic-plastic medium]. *Problemy prochnosti plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*. 77(4). pp. 367–378.
12. Belov N.N., Yugov N.T., Afanas'eva S.A., Yugov A.A., Arkhipov I.N., Fedosov O.Yu. (2010) Issledovanie osobennostey udarnogo vzaimodeystviya dlinnykh sterzhney s prostanstvenno-raznesennymi zashchitnymi konstruktivnymi [Investigation of the features of impact interaction of long rods with spatially spaced protective structures]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 3(11). pp. 77–87.
13. Zelepugin S.A., Tolkachev V.F., Tyryshkin I.M. (2022) Analiz effektivnosti protivoudarnoy stoykosti dvukh grupp keramicheskikh i kompozitnykh materialov [Analysis of impact resistance for two groups of ceramic and composite materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
14. Golubev V.K., Medvedkin V.A. (2001) O vnedrenii zhestkogo snaryada v tolstuyu stal'nyuyu pregradu pri umerennykh skorostyakh udara [On the penetration of a rigid projectile into a thick steel barrier at moderate impact velocities]. *Problemy prochnosti – Strength of Materials*. 4. pp. 138–146.
15. Batuev S.P., D'yachkovskiy A.S., Radchenko P.A., Radchenko A.V., Sammel' A.Yu., Chupashev A.V. (2022) Modelirovanie vzaimodeystviya konicheskikh udarnikov s podvodnymi pregradami pri nalichii u udarnikov ugla ataki [Simulation of the interaction of conical impactors having an angle of attack with underwater barriers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 39–48. doi: 10.17223/19988621/80/4
16. Batuev S.P., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Radchenko A.V., Radchenko P.A., Sammel' A.Yu., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V. (2023) Eksperimental'no-teoreticheskie issledovaniya vzaimodeystviya superkavitiruyushchikh udarnikov s podvodnymi raznesennymi pregradami [Experimental and theoretical studies of the interaction of

supercavitating projectiles with underwater spaced barriers]. *Izvestiya vuzov. Fizika – Russian Physics Journal*. 66(2). pp. 113–117. doi: 10.17223/00213411/66/2/113

Сведения об авторах:

Радченко Павел Андреевич – доктор физико-математических наук, доцент, научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия. E-mail: pavel@ispms.ru

Радченко Андрей Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия. E-mail: andrey@ispms.ru

Батуев Станислав Павлович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия. E-mail: spbatuev@gmail.com

Information about the authors:

Radchenko Pavel A. (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: pavel@ispms.ru

Radchenko Andrey V. (Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: andrey@ispms.ru

Batuev Stanislav P. (Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of RAS, Tomsk, Russian Federation). E-mail: spbatuev@gmail.com

Статья поступила в редакцию 10.04.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 10.04.2023; accepted for publication 12.02.2024

Научная статья

УДК 531.01

doi: 10.17223/19988621/87/11

Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции

Сергей Викторович Савелькаев

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
Новосибирск, Россия, sergei.savelkaev@yandex.ru*

Аннотация. Проведен динамический анализ двухмассовой механической системы с разложением ее абсолютного импульса на переносный и относительный. При разложении показано, что в диссипативной среде относительные силы инерции оказывают существенное влияние на абсолютное движение этой механической системы. Выписано уравнение такого движения, в котором суммарная масса механической системы условно сосредоточена в одном из ее тел, выбранном за опорное. Полученные результаты и выводы обеспечивают решение задачи двух и трех тел для диссипативной среды, оказывающей сопротивление движению опорного тела, с учетом относительных сил инерции.

Ключевые слова: двухмассовая механическая система, импульс и силы инерции, инерционный домен, диссипативный параметр, угол диссипативных потерь

Для цитирования: Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 135–149. doi: 10.17223/19988621/87/11

Original article

Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium with allowance for inertial forces

Sergey V. Savel'kaev

*Siberian State University of Geosystems and Technologies,
Novosibirsk, Russia, sergei.savelkaev@yandex.ru*

Abstract. In this paper, a dynamic analysis of a two-mass mechanical system is performed. The aim of this work is to study the effect of the inertial forces of bodies in relative motion within the mechanical system on the motion of this system in a dissipative medium with linear viscous resistance to the motion of one of its bodies (a reference body). The analysis is based on the decomposition of the absolute impulse of the mechanical system into portable and relative components. The resolution shows that the

relative inertia forces significantly affect the absolute motion of the mechanical system in a dissipative medium. The equation for such motion is presented, where the total mass of the mechanical system is conditionally concentrated in the reference body. The obtained results and conclusions can be used to solve the problem of two gravitating bodies, one of which is located in a dissipative medium, with the center of mass of the bodies moving relative to the center of the inertial domain. The results are also applicable to three-mass mechanical systems of the inertoid type.

Keywords: two-mass mechanical system, momentum and inertial forces, inertial domain, dissipative parameter, dissipative loss angle

For citation: Savel'kaev, S.V. (2024) Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium with allowance for inertial forces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 135–149. doi: 10.17223/19988621/87/11

Введение

В настоящее время силы инерции $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_r + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k$ (относительные $\vec{\Phi}_r$, переносные $\vec{\Phi}_e$, Кориолиса $\vec{\Phi}_k$ и др.) рассматривают с различных точек зрения [1].

Например, согласно одной из них, силы инерции $\vec{\Phi}$ взаимодействующих тел механических систем (МС) рассматриваются как фиктивные, условные, введенные для того, чтобы совместно с аксиомой связей придать уравнению Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ наиболее удобную форму равновесия в виде принципа Даламбера $\vec{\Phi} + \vec{F} + \vec{R} = 0$ в неинерциальной системе отсчета одного из тел МС, где $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ и $\vec{R} = \sum_{i \neq j} \vec{R}_{ij}$ – главный вектор внешних сил $\vec{F}_i$, приложенных к i -м телам МС, и реакций $\vec{R}_{ij}$ связи ее i -го и j -го тел.

При этом уравнение движения механической МС в инерциальной системе отсчета записывают в виде:

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}_C = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{F}, \quad (1)$$

где $m = \sum_i m_i$ и m_i – суммарная масса МС и масса ее i -го тела; $\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i / m$ и $\vec{v}_i$ – скорость ее центра масс (ЦМ) C и ее i -го тела.

Уравнение (1) описывает движение ЦМ C (центра инерции) МС в инерциальной системе отсчета K . Если главный вектор $\vec{F} = 0$, то ЦМ C покоится либо совершает равномерное прямолинейное движение. Исходя из этого в задаче двух тел [2] в качестве инерциальной системы отсчета выбирают систему отсчета K_C , связанную с ЦМ C , в которой главный вектор сил инерции равен нулю: $\vec{\Phi}_C = -d(\sum m_{iC} \vec{v}_{iC}) / dt = 0$. В диссипативной среде (например, с линейным вязким сопротивлением движению опорного тела m_1) внешняя сила $\vec{F}_1 \neq 0$, система отсчета K_C неинерциальна и решение задачи двух тел [2] некорректно. Поэтому для анализа движения тел m_1 и m_2 , а также их ЦМ C удобнее выбрать собственную систему отсчета K_1 опорного тела m_1 (тело m_2 выбирается за рабочее [3, 4]).

При анализе необходимо учитывать относительную силу инерции $\vec{\Phi}_r = \vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 , действующую в системе отсчета K_1 . Она в инерциальной системе K оказывает влияние на движение тел m_1 и m_2 и является реальной (другая точка зрения) [1, 3–6]. Такая точка зрения не согласуется с уравнением движения МС (1), так как в него относительные силы инерции $\vec{\Phi}_r$ в явном виде не входят.

Цель работы – исследование влияния относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 двухмассовой механической системы на движение ее опорного тела m_1 , находящегося в диссипативной среде. Результатом исследования является разработка описания, обеспечивающего анализ амплитудных и фазовых характеристик движения опорного m_1 и рабочего m_2 тел механической системы, а также движения ее центра C в инерциальной системе отсчета K .

Динамический анализ

Рассмотрим МС2, которая показана на рис. 1. МС2 содержит рабочее (ускоряемое) тело с массой m_2 , которое с помощью жесткого идеального стержня с длиной R шарнирно закреплено на опорном (ускоряющем) теле с массой m_1 , с возможностью вращения рабочего тела m_2 относительно опорного тела m_1 внутренним активным моментом M , действующим на оси шарнира опорного тела m_1 . Движение опорного m_1 и рабочего m_2 тел может совершаться в общей плоскости, перпендикулярной оси шарнира опорного тела m_1 .

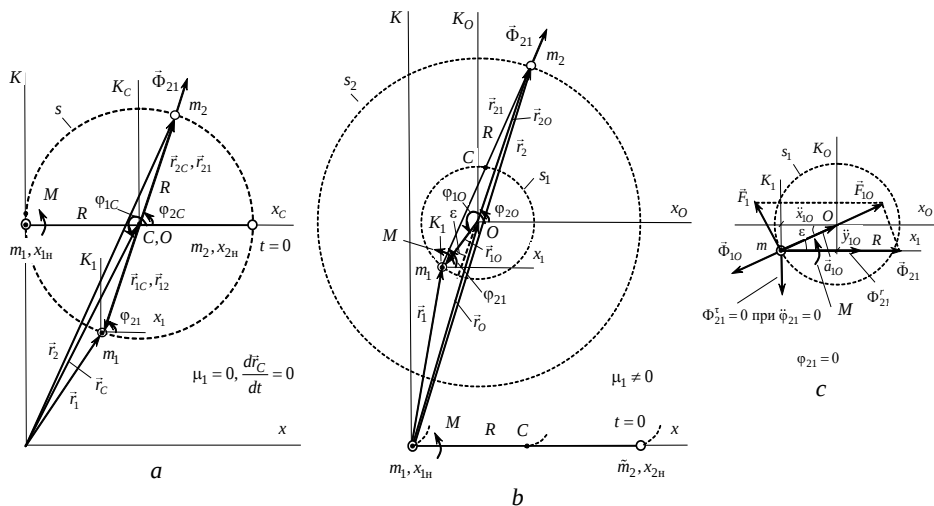


Рис. 1. Двухмассовая механическая система в среде без потерь ($\mu_1 = 0$) – а; в среде с потерями ($\mu_1 \neq 0$) – б; действующая на нее система сил – в
Fig. 1. Two-mass mechanical system in the (a) lossless medium ($\mu_1 = 0$) and (b) lossy medium ($\mu_1 \neq 0$); (c) a system of acting forces

Коэффициент сопротивления диссипативной среды μ_1 движению опорного тела m_1 МС2 составляет $\mu_1 = 0$ на рис. 1, а и $\mu_1 \neq 0$ на рис. 1, б. Для рабочего тела m_2 он всегда составляет $\mu_2 = 0$.

Для проведения динамического анализа МС2 введем неподвижную систему отсчета K , начало координат которой для случая $\mu_1 = 0$ (см. рис. 1, a) выберем произвольно, а для случая $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, b) свяжем с начальным положением $x_{1н}$ опорного тела m_1 в момент времени $t = 0$. При $t = 0$ рабочее тело m_2 находится в начальном положении $x_{2н}$, как показано на рис. 1, a , b . Начальные скорости опорного m_1 и рабочего m_2 тел при $t = 0$ нулевые: $\dot{x}_{1н} = 0$, $\dot{x}_{2н} = 0$.

Кроме того, введем собственную систему K_1 опорного тела m_1 , которая вместе с ним может двигаться в системе отсчета K только поступательно. Эту систему отсчета в дальнейшем будем рассматривать как опорную.

Пусть в момент времени $t = 0$ рабочее тело m_2 приводится в движение активным моментом M , который за малый интервал времени $dt \rightarrow 0$ достигает стационарного значения. Исходя из мгновенной передачи взаимодействий в механике, одновременно достигает своего стационарного значения и угловая скорость ω_{21} вращательного движения рабочего тела m_2 . При этом опорное тело m_1 при $\mu_1 = 0$ вместе с системой отсчета K_1 будет совершать движение в системе отсчета K по окружности s (см. рис. 1, a) и при $\mu_1 \neq 0$ по окружности s_1 (см. рис. 1, b). Рабочее тело m_2 в системе отсчета K_1 будет совершать вращательное движение по траектории s (см. рис. 1, a) или s_2 (см. рис. 1, b).

Траекторией движения опорного m_1 и рабочего m_2 тел в системе отсчета K при $\mu_1 = 0$, когда $\vec{v}_C = d\vec{r}_C / dt = 0$ (см. рис. 1, a), также является окружность s , но при $\mu_1 = 0$, когда скорость $\vec{v}_O = d\vec{r}_O / dt$ убывает экспоненциально от некоторого начального значения, зависящего от μ_1 , до нуля, эти тела будут двигаться по спиральным траекториям [4], переходящим в траектории s_1 и s_2 (см. рис. 1, b , где спиральные траектории показаны частично). Зависимость изменения скорости $\vec{v}_O = d\vec{r}_O / dt$ от μ_1 подробно будет показана при дальнейшем анализе.

Момент M (см. рис. 1) возникает в результате приложения к стержню R пары сил. Эту пару можно представить как совокупность сил, действующих на рабочее тело m_2 : силы

$$F = M / R, \quad (2)$$

перпендикулярной к стержню R , и силы, равной

$$F = -M / R, \quad (3)$$

которая приложена к шарниру, соединяющему стержень и опорное тело m_1 . Момент $-M$ силы F (3) вызовет вращение (откат) $dK_z^- / dt = -M$ опорного тела m_1 в направлении, противоположном вращению рабочего тела m_2 , где $K_z^- = -I_z \dot{\phi}_{11}$ и I_z – кинетический момент и момент инерции опорного тела m_1 ; $\dot{\phi}_{11}$ – угловая скорость вращения опорного тела m_1 в системе отсчета K_1 по оси z его шарнира. Результирующий кинетический момент МС2 $K_z = K_z^- + K_z^+$, являющийся суммой ее кинетического момента K_z^+ и кинетического момента K_z^- опорного тела m_1 (см. рис. 1, a), сохраняется: $K_z = \text{const}$ при $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, а при $\mu_1 \neq 0$ поддерживается постоянным в стационарном состоянии МС2 (когда угловая скорость вращательного движения рабочего тела m_2 достигает своего стационарного значения $\dot{\phi}_{21} = \text{const}$ за счет источника активного момента M) [4]. Величина стационарного значения $\dot{\phi}_{21} = \text{const}$ определяется мощностью источника активного момента M .

Подробный анализ результирующего кинетического момента $\vec{K}_z$ МС2 при $\mu_1 \neq 0$ будет проведен при выводе полной системы уравнений ее движения.

В общем случае радиусы-векторы, определяющие положение опорного m_1 и рабочего m_2 тел МС2 и ее ЦМ С (см. рис. 1) в системе отсчета К, можно представить в виде:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{C,O} + \vec{r}_{1C,O}; \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{21}; \vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

где $\vec{r}_{C,O}$ – радиусы-векторы, которые при $\mu_1 = 0$ имеют индекс $\vec{r}_C$ и определяют положение начала координат собственной системы отсчета K_C ЦМ С МС2 (см. рис. 1, а), исходя из закона сохранения импульса, $\vec{r}_C = \text{const}$, а при $\mu_1 \neq 0$ имеют индекс $\vec{r}_O$ и определяют положение начала координат собственной системы отсчета K_O (см. рис. 1, б) центра О ИД, образованного взаимодействующими телами m_1 и m_2 [4], физический смысл которого будет более подробно раскрыт при дальнейшем анализе; $\vec{r}_{1C,O}$ и $\vec{r}_{2C,O}$ – радиусы-векторы, которые при $\mu_1 = 0$ (см. рис. 1, а) имеют индекс $\vec{r}_{1C}$, $\vec{r}_{2C}$ и определяют положение опорного m_1 и рабочего m_2 тел в системе отсчета K_C :

$$\vec{r}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21}; \vec{r}_{2C} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21} \quad (5)$$

(получены из уравнений $m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0$ и $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$, где $\vec{r}_{21}$ – радиус-вектор рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1) и аналогичные радиусы-векторы с индексами $\vec{r}_{1O}$ и $\vec{r}_{2O}$, определяющие положение этих тел в системе отсчета K_O при $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, б), подлежащие дальнейшему определению.

Импульс тел m_1 и m_2 МС2 в системе отсчета К, выраженный непосредственно через радиус-вектор $\vec{r}_1$ и радиус-вектор $\vec{r}_2$ (4), равен

$$\vec{p}_1 = m_1 \frac{d}{dt} \vec{r}_1; \vec{p}_2 = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (6)$$

Суммарный (абсолютный) импульс МС2 запишем в виде:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_e + \vec{p}_r = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (7)$$

Он складывается из ее переносного и относительного импульсов

$$\vec{p}_e = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \vec{r}_1, \vec{p}_r = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (8)$$

С учетом импульсов (6) запишем второй закон Ньютона отдельно для каждого из взаимодействующих тел m_1 и m_2 с учетом аксиомы связей и диссипативной силы

$$\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1, \quad (9)$$

действующей на опорное тело m_1 МС2 (см. рис. 1, б):

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_1; \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{R}_{21}, \quad (10)$$

где $\vec{v}_1$ – скорость опорного тела m_1 в системе отсчета К; $\vec{R}_{12}$ и $\vec{R}_{21}$ – реакции связи R.

Суммируя левые и правые части уравнений (10) с учетом того, что по третьему закону Ньютона $\sum_{i,j=1,2; i \neq j} \vec{R}_{ij} = 0$, и того, что $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_e + \vec{p}_r$ (7), получим уравнение

$$\frac{d\vec{p}_e}{dt} + \frac{d\vec{p}_r}{dt} = \vec{F}_1, \quad (11)$$

которое записано для системы отсчета K в терминах переносного $\vec{p}_e$ и относительного $\vec{p}_r$ импульсов (8).

Первые два члена уравнения (11) можно обозначить переносной $\vec{\Phi}_1$ и относительной $\vec{\Phi}_{21}$ силами инерции:

$$\vec{\Phi}_1 = -\frac{d\vec{p}_e}{dt} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}; \quad \vec{\Phi}_{21} = -\frac{d\vec{p}_r}{dt} = -m_2 \frac{d^2 \vec{r}_{21}}{dt^2}. \quad (12)$$

Для систем отсчета K_1 и K с параллельными осями $x_1 \parallel x$ и $y_1 \parallel y$ проекции $r_{21x} = R \cos \varphi_{21}$ и $r_{21y} = R \sin \varphi_{21}$ радиуса-вектора $\vec{r}_{21}$ в системе отсчета K_1 инвариантны этим же проекциям в системе отсчета K $r_{21x} = x_{21}$ и $r_{21y} = y_{21}$. Тогда уравнение (11) посредством раздельного или одновременного переноса сил инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_{21}$ (12) в его правую часть можно свести как к форме второго закона Ньютона, так и к форме принципа Даламбера:

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1; \quad \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0. \quad (13)$$

Для удобства последующего анализа представим первое уравнение (13) в проекциях на оси координат x и y системы отсчета K :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 \omega_{21}^2 R \cos \varphi_{21} + F_{1x}; \quad (m_1 + m_2) \ddot{y}_1 = m_2 \omega_{21}^2 R \sin \varphi_{21} + F_{1y}, \quad (14)$$

где $R = r_{12} = r_{21}$; $x_1 = r_{1x}$, $y_1 = r_{1y}$; $F_{1x} = -\mu_1 \dot{x}_1$ и $F_{1y} = -\mu_1 \dot{y}_1$ – проекции диссипативной силы $\vec{F}_1$ (9) на оси x и y системы отсчета K .

Согласно принципу Даламбера, на МС2 как на целую с массой $m = m_1 + m_2$ в системе отсчета K_1 действует уравновешенная система сил $\vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0$. При этом переносная сила инерции $\vec{\Phi}_1$ определена абсолютным ускорением $\vec{a}_1 = -d^2 \vec{r}_1 / dt^2$ (13), взятым с обратным знаком. Согласно (4), абсолютное ускорение $\vec{a}_1$ при $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, б) есть сумма $d^2 \vec{r}_1 / dt^2 = d^2 \vec{r}_O / dt^2 + d^2 \vec{r}_{1O} / dt^2$ переносного ускорения $d^2 \vec{r}_O / dt^2$ центра O ИД и относительного ускорения $d^2 \vec{r}_{1O} / dt^2$ рабочего тела m_2 в системе отсчета K_O , связанной с центром O .

Проанализируем систему сил, действующих в МС2 в системе отсчета K_O , показанную на рис. 1, с, где для наглядности принято $\varphi_{21} = 0$, когда связь R направлена по оси x_1 системы отсчета K_1 . В этой системе отсчета на тело $m = m_1 + m_2$ также действуют относительная $\vec{\Phi}_{21}$ сила инерции (12) и диссипативная сила $\vec{F}_1$ (9). Результирующая сила $\vec{F}_{10} = \vec{F}_1 + \vec{\Phi}_{21}$ вызывает ускорение $\vec{a}_{10}$

тела m , направленное в системе отсчета K_O к центру O ИД и, следовательно, силу инерции

$$\vec{\Phi}_{10} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_{10}}{dt^2} \quad (15)$$

этого тела в этой же системе отсчета K_O , направленную в противоположном направлении, что будет подтверждено частным решением уравнений (14) относительно ускорений $\ddot{x}_{10}$ и $\ddot{y}_{10}$, определяющих вектор ускорения $\vec{a}_{10}$ (см. рис. 1, с).

Диссипативная сила $\vec{F}_1$ (9) задает угол диссипативных потерь ε , который определяет угол запаздывания $\varphi = \pi + \varepsilon$ вектора переносной силы инерции $\vec{\Phi}_{10}$ по отношению к вектору относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$, который в системах отсчета K_1 и K_O инвариантен, так как их оси x_1 и x_O параллельны $x_1 \parallel x_O$. Методика определения угла ε будет предложена в соответствующем разделе статьи.

При $\vec{F}_1 = 0$ ($\mu_1 = 0$) значение $\varepsilon = 0$, и движение тела m будет совершаться относительно ЦМ С МС2 (см. рис. 1, а), с которым в данном случае совпадает центр O ИД.

Таким образом, уравнения (13) и (14) сводят МС2 к материальной точке с суммарной массой ее тел $m = m_1 + m_2$, условно сосредоточенной в ее опорном теле m_1 , которое движется под действием силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 и диссипативной силы $\vec{F}_1$, оказывающей сопротивление движению опорного тела m_1 .

Эти уравнения по своему виду аналогичны уравнению вибратора (1.1), используемому в робототехнике, которое без вывода приведено в работе [6].

Определим вид частного решения уравнений (14). Согласно рис. 1, а, фаза φ_{1C} вращательного движения опорного тела m_1 в системе отсчета K_C ЦМ С связана с фазой φ_{21} вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1 преобразованием

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \varphi, \quad (16)$$

где $\varphi = \varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \pi$ – угол запаздывания фазы φ_{1C} вращательного движения опорного тела m_1 относительно фазы φ_{2C} вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_C при $\mu_1 = 0$ (см. рис. 1, а).

Для случая $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, б) опорное m_1 и рабочее m_2 тела будут совершать вращательное движение в системе отсчета K_O центра O ИД по окружностям s_1 и s_2 , как показано на рис. 1, б. В этом случае фаза φ_{1O} вращательного движения рабочего тела m_1 в системе отсчета K_O связана с фазой вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1 подобным (16) преобразованием

$$\varphi_{1O} = \varphi_{21} + \varphi, \quad (17)$$

где теперь $\varphi = \pi + \varepsilon$, а ε – угол диссипативных потерь [3, 4], учитывающий влияние действия на опорное тело m_1 диссипативной силы $\vec{F}_1$ (9).

С учетом преобразования (17) частное решение уравнений (14) для МС2 при $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, b), когда $\varepsilon \neq 0$, в системе отсчета K_O можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_{1O} &= A_1 \cos \varphi_{1O} = A_1 \cos(\varphi_{21} + \varphi) = A_1 \cos(\varphi_{21} + \pi + \varepsilon) = -A_1 \cos(\varphi_{21} + \varepsilon); \\ y_{1O} &= A_1 \sin \varphi_{1O} = A_1 \sin(\varphi_{21} + \varphi) = A_1 \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) = -A_1 \sin(\varphi_{21} + \varepsilon), \end{aligned} \quad (18)$$

где A_1 – амплитуда, подлежащая дальнейшему определению.

В среде без потерь при $\mu_1 = 0$, когда $\varepsilon = 0$ (см. рис. 1, a), решения (18) определяют положение рабочего тела m_1 в системе отсчета K_C [1, 2]:

$$\begin{aligned} x_{1C} &= A_1 \cos \varphi_{1C} = A_1 \cos(\varphi_{21} + \pi) = -A_1 \cos \varphi_{21}; \\ y_{1C} &= A_1 \sin \varphi_{1C} = A_1 \sin(\varphi_{21} + \pi) = -A_1 \sin \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (19)$$

начало координат которой связано с ЦМ С МС2, где $A_1 = a$ и $a = m_2 R / (m_1 + m_2)$.

Подстановка скоростей $\dot{x}_1 = dx_{1C} / dt$ и $\dot{y}_1 = dy_{1C} / dt$, полученных из (19) при $x_C = \text{const}$ и $y_C = \text{const}$ (4) в импульс $\vec{p}$ (7), выраженный в проекциях на оси x и y неподвижной системы отсчета K

$$\begin{aligned} p_x &= p_{ex} + p_{rx} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 - m_2 \omega_{21} R \sin(\varphi_{21}); \\ p_y &= p_{ey} + p_{ry} = (m_1 + m_2) \dot{y}_1 + m_2 \omega_{21} R \cos(\varphi_{21}) \end{aligned} \quad (20)$$

показывает, что $p_x = 0$ и $p_y = 0$, и, следовательно, при $\mu_1 = 0$ он сохраняется

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \overline{\text{const}}. \quad (21)$$

Из (21) и (7) следует

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_e = -\frac{d}{dt} \vec{p}_r. \quad (22)$$

Таким образом, при любом характере изменения угловой скорости $d\omega_{21}/dt$ относительного движения рабочего тела m_2 (любом изменении относительного импульса $\vec{p}_r$) абсолютный импульс $\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}_r$ (7) замкнутой МС2 при $\mu_1 = 0$ сохраняется (21). Следствием равенства (22) является то, что угол запаздывания φ (16) замкнутой МС2 равен $\varphi = \varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \pi$.

Методика определения угла ε и координат x_0, y_0 центра О ИД

Общее решение неоднородных дифференциальных уравнений вида (14) есть сумма его частного и общего решений [2]. Частное решение в системе отсчета K_C (при $\varepsilon = 0$) или в системе отсчета K_O (при $\varepsilon \neq 0$) будем искать в общем для этих случаев виде (18).

Для определения входящих в (18) амплитудного коэффициента A_1 и угла ε представим уравнения (14) в комплексной форме

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma_1 \dot{q}_1 = a\omega_{21}^2 \exp j\omega_{21}t, \quad (23)$$

где q_1 – обобщенная координата; $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + m_2)]$ – коэффициент затухания движения опорного тела m_1 .

Решение комплексного уравнения (23) будем искать в виде:

$$q_1 = B_1 \exp j\omega_{21}t, \quad (24)$$

где B_1 – комплексная амплитуда, подлежащая определению.

Дифференцирование (24) по времени t дает

$$\dot{q}_1 = jB_1\omega_{21} \exp j\omega_{21}t; \quad \ddot{q}_1 = -B_1\omega_{21}^2 \exp j\omega_{21}t. \quad (25)$$

Подстановка (25) в уравнение (23) сводит его к виду:

$$-B_1\omega_{21}^2 + 2j\gamma_1 B_1\omega_{21} = a\omega_{21}^2. \quad (26)$$

Из (26) комплексную амплитуду B_1 можно выразить в виде:

$$B_1 = \frac{a\omega_{21}^2}{\omega_{21}^4 + 4\gamma_1^2\omega_{21}^2} (-\omega_{21}^2 - j2\gamma_1\omega_{21}) = A_1 \exp(j\varphi), \quad (27)$$

которая находится в III четверти ее комплексной плоскости, где $A_1 = |B_1|$.

С учетом того, что амплитуда B_1 (27) находится в III четверти ее комплексной плоскости, ее модуль $A_1 = |B_1|$ и фазу φ можно определить следующим образом:

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi = \pm\pi + \varepsilon; \quad \varepsilon = \arctg\xi, \quad (28)$$

где $\xi = \text{Im } B_1 / \text{Re } B_1 = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ – диссипативный параметр, зависящий как от коэффициента сопротивления μ_1 внешней среды, так и от собственных параметров МС2 m_1, m_2 и ω_{21} ; знак «+» или «-» соответствует равноценным по результату положительному и отрицательному отсчетам угла φ .

Подстановка (27) в (24) для положительного отсчета угла $\varphi = \varphi_{10} = \pi + \varepsilon$ при $\varphi_{21} = 0$ (см. рис. 1, b) дает

$$q_1 = A_1 \exp j\omega_{21}t \exp(j\varphi) = -A_1 [\cos(\omega_{21}t + \varepsilon) + j \sin(\omega_{21}t + \varepsilon)]. \quad (29)$$

Действительная часть $\text{Re } q_1$ (29) является частным решением дифференциальных уравнений (14) в виде (18) для $\varepsilon \neq 0$ или в виде (19) для $\varepsilon = 0$.

Согласно (28) угол ε зависит как от коэффициента сопротивления μ_1 , входящего в коэффициент затухания γ_1 (23), так и от собственных параметров (m_1, m_2 и ω_{21}) МС2.

Далее были записаны общие решения

$$x_O(t) = C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t); \quad y_O(t) = C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) \quad (30)$$

однородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_O + 2\gamma_1 \dot{x}_O = 0; \quad \ddot{y}_O + 2\gamma_1 \dot{y}_O = 0, \quad (31)$$

характеризующих переносную часть движения МС2 вместе с центром O ИД как $\bar{v}_O = d\bar{r}_O / dt$ в системе отсчета K (см. рис. 1, b).

Сумма решений (18) и (30) дает решения дифференциальных уравнений (14) в системе отсчета K в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \cos(\omega_{21}t + \varepsilon); \\ \dot{x}_1(t) &= -2C_{2x}\gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) + A_1\omega_{21} \sin(\omega_{21}t + \varepsilon); \\ y_1(t) &= C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \sin(\omega_{21}t + \varepsilon); \\ \dot{y}_1(t) &= -2C_{2y}\gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) - A_1\omega_{21} \cos(\omega_{21}t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (32)$$

Для нулевых начальных условий опорного тела m_1 примем $x_1(t=0)=0$, $\dot{x}_1(t=0)=0$ и $y_1(t=0)=0$, $\dot{y}_1(t=0)=0$. Тогда из (32) найдем

$$\begin{aligned} C_{1x} &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \sin \varepsilon \right); C_{2x} = A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \sin \varepsilon; \\ C_{1y} &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon \right); C_{2y} = -A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставив (33) в (32), получим общее решение дифференциальных уравнений (14):

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left(\exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ y_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \cos \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{y}_1(\varphi_{21}) &= A_1 \omega_{21} \left(\exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \cos \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Координаты и скорость ЦМ С МС2 в системе отсчета К можно определить по формулам

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}; \dot{x}_C = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2}; \dot{y}_C = \frac{m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2}{m_1 + m_2}, \quad (35)$$

где координаты $x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}$, $y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}$ и определенные по ним скорости $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} R \sin \varphi_{21}$, $\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \omega_{21} R \cos \varphi_{21}$.

Траектории движения s_1 , s_2 и s_C опорного m_1 , рабочего m_2 тел и ЦМ С МС2 в системе отсчета К, рассчитанные по решениям (34) и формулам (35) при $\mu_1 = 3.77; \infty$ Н·с/см, показаны на рис. 2.

Координаты центра О ИД можно определить из решений (34) в виде:

$$\begin{aligned} x_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon \right); \\ y_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \cos \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Образование ИД за малый интервал времени $dt \rightarrow 0$ при $\mu_1 = 3.77$ Н·с/см соответствует представлению о мгновенной передаче взаимодействий в классической механике. Координаты центра О ИД в системе отсчета К, определенные из (36) при $t \rightarrow \infty$, составляют $x_O = \cos \varepsilon = 0.707$ см и $y_O = \sin \varepsilon = 0.707$ см, где угол ε равен 45° (см. рис. 2).

Согласно выражениям (36), центр О ИД при $\mu_1 \neq 0$ и $\varphi_{21} < \pi$ дрейфует по затухающему закону из положения O_0 в положение О (см. рис. 2) со скоростью

$v_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}$, где скорости $\dot{x}_0$ и $\dot{y}_0$ можно определить дифференцированием этих выражений по времени t .

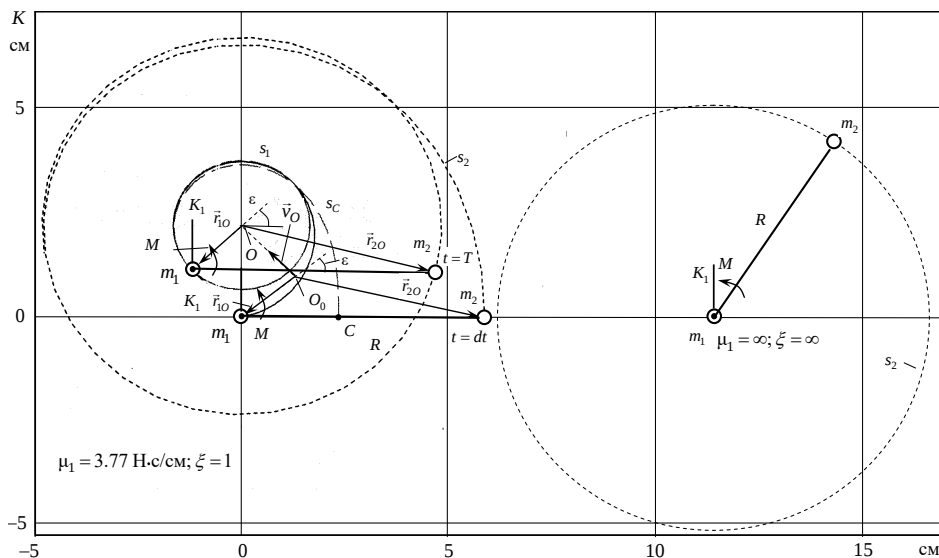


Рис. 2. Движение МС2 в системе отсчета K для различных значений μ_1

Fig. 2. The motion of MS2 (mechanical system 2) in the frame of reference of K at various μ_1

Таким образом, в системе отсчета K опорное m_1 и рабочее m_2 тела, а также их ЦМ C будут двигаться по спиральным траекториям s_1, s_2 и s_C в стационарное состояние [4]. При этом постоянное значение угловой скорости $\omega_{21} = const$ поддерживается активным моментом M .

При $\mu_1 = 0$ центр O ИД совпадает с ЦМ C МС2 и опорное m_1 и рабочее m_2 тела будут двигаться относительно ЦМ C (см. рис. 1, *a*).

При $\mu_1 = \infty$ рабочее тело m_2 будет совершать движение по окружности s_2 относительно неподвижного опорного тела m_1 (см. рис. 2).

Полная система уравнений

Координаты и скорости тел m_1 и m_2 МС2 в системе отсчета K выразим в виде:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R \dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; \\y_1 &= y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R \dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}.\end{aligned}\quad (37)$$

Кинетическую энергию МС2 в этой системе отсчета K определим как

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\phi}_{11}^2. \quad (38)$$

Подстановка в скоростей (37) в (38) определяет лагранжиан МС2

$$L = T - U(R) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - m_2\dot{\varphi}_{21}R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}_{11}^2 - U(R), \quad (39)$$

где $U(R)$ – неизвестная потенциальная энергия рабочего тела m_1 , зависящая от длины стержня R .

Составляя уравнения Лагранжа по координатам x_1, y_1, φ_{21} и углу отката φ_{11} тела m_1 в системе отсчета K_1 , получим следующую систему уравнений движения МС2 для ее нестационарного (40, а) и стационарного (40, б) состояний [4]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a(\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21} + \ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}); \ddot{y}_1 + 2\gamma_1\dot{y}_1 = a(\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21} - \ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}); \\ \frac{dK_z^+}{dt} = 2m_2\gamma_1R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) = M^+; \frac{dK_z^-}{dt} = -I_z\ddot{\varphi}_{11} = M^-, \end{cases} \quad (40, a)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; \ddot{y}_1 + 2\gamma_1\dot{y}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21}; \\ \frac{dK_z^+}{dt} = 2m_2\gamma_1R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) = M^+; \frac{dK_z^-}{dt} = M^-, \end{cases} \quad (40, b)$$

где члены, содержащие угловые ускорения $\ddot{\varphi}_{21}$ и $\ddot{\varphi}_{11}$, в стационарном состоянии упущены (40, б); $\chi_1 = \mu_{1b}S$ и $\mu_{1b} = \pi\eta r$ – обобщенный коэффициент сопротивления внешней среды вращению (откату) тела m_1 в виде сферы с радиусом сферы r и коэффициент сопротивления его вращению (формула Стокса); $S = 4\pi r^2$ – площадь сферической поверхности тела m_1 ; η – вязкость внешней среды; M^+ – активный момент M , действующий на оси шарнира тела m_1 ; $M^- = -M + \chi_1\dot{\varphi}_{11}$ – момент отката.

Согласно рис. 1, с первые слагаемые $a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}$ и $a\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21}$ правой части первых двух уравнений (40, а) образованы проекциями радиальной компоненты $\Phi_{21} = m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R$, а вторые $a\ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}$ и $a\ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}$ – проекциями тангенциальной компоненты $\Phi_{21}^r = m_2\ddot{\varphi}_{21}R$ силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ на оси x_1, x_O и y_1, y_O параллельных систем отсчета K_1 и K_O , при делении этих проекций на $m_1 + m_2$. В стационарном состоянии $\ddot{\varphi}_{21} = 0$ и влияние компонент $a\ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} = 0$ и $-a\ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} = 0$ в (40, а) равно нулю ($\Phi_{21}^r = 0$) и (40, а) переходит (40, б). Если $\vec{F}_1 = 0$, то согласно принципу наименьшего действия МС2 будет совершать движение относительно ее ЦМ C (см. рис 1, а) при $\Phi_{21}^r = 0$, когда ее кинетический момент $K_z = const$.

Силы инерции $\vec{\Phi}_{1k}$ и $\vec{\Phi}_{2k}$ Кориолиса опорного m_1 и рабочего m_2 тел в системе уравнений (40) не входят, так как по правилу Жуковского они направлены вдоль связи R и образуют равновесную систему сил $\vec{\Phi}_{1k} + \vec{\Phi}_{2k} = 0$.

Третье уравнение (40, а) записано с учетом двух первых.

Четвертое уравнение (40, а) записано с учетом теоремы о кинетическом моменте тела m_1 в неинерциальной системе K_1 , ось z которой скреплена с ЦМ этого тела, движущейся в неподвижной системе отсчета K поступательно.

Первые два уравнения (40, b) МС2 для ее стационарного состояния при $\mu_1 = 0$ имеют решения (19), а при $\mu_1 \neq 0$ – (18).

Суммируя последние два уравнения (40, b), почленно найдем

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M^+ - M^- . \quad (41)$$

Так как стационарному значению $\omega_{21} = const$ соответствует $\dot{\Phi}_{11} = const$, то из (41) получим

$$\frac{d}{dt} K_z = 0 . \quad (42)$$

Таким образом, исходя из мгновенной передачи взаимодействий в механике, любому изменению угловой скорости ω_{21} (кинетического момента dK_z^+ / dt МС2) относительно оси z_C системы отсчета K_C при $\mu_1 = 0$, вызванному действием активного момента M , соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение откатного кинетического момента $-dK_z^- / dt$ опорного тела m_1 . При этом результирующий кинетический момент МС2 сохраняется, $K_z = const$ при $\mu_1 = 0$, а при $\mu_1 \neq 0$ поддерживается постоянным за счет источника активного момента M , обеспечивающего $\omega_{21} = const$.

При $\mu_1 = \infty$ рабочее тело m_2 будет совершать вращательное движение вокруг неподвижной оси z системы отсчета K при $K_z \neq const$ до перехода в стационарный режим $\omega_{21} = const$, когда $K_z = const$. При этом источник активного момента M компенсирует потери кинетической энергии МС2 в диссипативной среде, поддерживая стационарное значение угловой скорости $\omega_{21} = const$, величина которого зависит от мощности этого источника.

Заключение

В результате динамического анализа получено уравнение движения МС2 в диссипативной среде (13), оказывающей линейное вязкое сопротивление ($\mu_1 \neq 0$) движению ее опорного тела m_1 с учетом относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 , влияющей на ее абсолютное движение. Это уравнение обеспечивает решение задачи двух тел для диссипативной среды. По физическому смыслу оно аналогично второму закону Ньютона для МС в инерциальной системе отсчета K . Если в качестве опорной выбрать систему отсчета K_C ЦМ C , то уравнение (13) переходит в классическое (1).

Полученные теоретические выводы и результаты, в отличие от выводов работы [7], позволяют в представлениях современной механики записать уравнение движения трехмассовой механической системы [3, 4], типа инерциод Толчина [5],

а также построить его математическую модель [4] и обосновать независимость величины смещения ЦМ трехмассовой МСЗ от диссипативного параметра МСЗ ξ (28), лежащего в пределах $0 < \xi \leq \infty$ [3, 4, 8].

Список источников

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М. : Высш. школа, 1990. 607 с.
2. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Механика и электродинамика. М. : Наука, 1991. Т. 1. 496 с.
3. Савелькаев С.В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 4 (17). С. 42–48.
4. Савелькаев С.В. Механика. Корреляционная механика механических систем : препринт. Новосибирск : СГГА, 2013. 67 с.
5. Толчин В.Н. Инерциод. Силы инерции как источник поступательного движения. Пермь : Кн. изд-во, 1977. С. 100 с.
6. Егоров А.Г., Захарова О.С. Энергетически оптимальное движение вибратора в среде с наследственным законом сопротивления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 168–176.
7. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. М. : НТ-Центр, 1993. 362 с.
8. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 2. С. 202–215.

References

1. Nikitin N.N. (1990) *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [A course of theoretical mechanics]. Moscow: Vysshaya shkola.
2. Savel'ev I.V. (1991) *Osnovy teoreticheskoy fiziki. Mekhanika i elektrodinamika* [Fundamentals of theoretical physics. Mechanics and electrodynamics]. Moscow: Nauka.
3. Savel'kaev S.V. (2011) Effekt nezavisimosti velichiny smeshcheniya tsentra mass mekhanicheskoy sistemy ot dissipativnosti vneshey sredy [Independence of the displacement of the center of mass of a mechanical system from the dissipativity of the external medium]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov – Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 4(17). pp. 42–48.
4. Savel'kaev S.V. (2013) *Mekhanika. Korelyatsionnaya mekhanika mekhanicheskikh system: preprint* [Mechanics. Correlation mechanics of mechanical systems: preprint]. Novosibirsk: SGGA.
5. Tolchin V.N. (1977) *Inertsiod. Sily inertsii kak istochnik postupatel'nogo dvizheniya* [Inertiod. Inertial forces as a source of translational motion]. Perm: Permskoe knizhnoe izdatel'stvo.
6. Egorov A.G., Zakharova O.S. (2015) Energeticheski optimal'noe dvizhenie vibratora v srede s nasledstvennym zakonom soprotivleniya [Energetically optimal movement of a vibrator in a medium with a hereditary law of resistance]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*. 3. pp. 168–176.
7. Shipov G.I. (1993) *Teoriya fizicheskogo vakuuma* [Theory of physical vacuum]. Moscow: NT-Tsentr.
8. Chernous'ko F.L. (2008) Optimal'nye periodicheskie dvizheniya dvukhmassovoy sistemy v soprotivlyayushcheyseya srede [Optimal periodic motions of a two-mass system in a resisting medium]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 72(2). pp. 202–215.

Сведения об авторе:

Савелькаев Сергей Викторович – доктор технических наук, доцент ВАК, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии Сибирского государственного университета геосистем и технологий, Новосибирск, Россия. E-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

Information about the author:

Savel'kaev Sergey V. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 06.07.2022; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 06.07.2022; accepted for publication 12.02.2024

Научная статья

УДК 532.517.2+621.928.93

doi: 10.17223/19988621/87/12

Моделирование аэродинамики закрученного турбулентного потока в воздушно-центробежном классификаторе

Артём Евгеньевич Соломаха¹, Александр Вениаминович Шваб²

^{1,2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ solomahaartem@yandex.ru

² avshvab@inbox.ru

Аннотация. Исследуются аэродинамика закрученного турбулентного потока в традиционной и предложенной модифицированной геометрии рабочей камеры воздушно-центробежного классификатора и фракционное разделение твердых частиц порошкового материала по размерам. Турбулентный режим течения моделировался на основе метода RANS с помощью модели $k-\omega$. В силу малости объемной концентрации твердой примеси процесс сепарации частиц проводился на основе известного траекторного метода и предложенного стохастического подхода. Достоверность полученных результатов подтверждается тестовыми исследованиями и их сравнением с опытными данными.

Ключевые слова: турбулентность, воздушный классификатор, численное моделирование, уравнения Рейнольдса, модель турбулентности

Для цитирования: Соломаха А.Е., Шваб А.В. Моделирование аэродинамики закрученного турбулентного потока в воздушно-центробежном классификаторе // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 150–162. doi: 10.17223/19988621/87/12

Original article

Simulation of aerodynamics of a swirling turbulent flow in a centrifugal air classifier

Artyom E. Solomakha¹, Aleksandr V. Shvab²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ solomahaartem@yandex.ru

² avshvab@inbox.ru

Abstract. Centrifugal air classifiers are the promising devices for fractional separation of powders by size. Large particles of a powder material are thrown to the periphery due to the predominance of centrifugal forces over aerodynamic forces. This paper studies the aerodynamics of a swirling turbulent flow for different working area designs of the classifier. Turbulence is simulated using the RANS method and the Wilcox turbulence model.

To determine the efficiency of the classification of the powder material and to obtain a separation curve using the Tromp method, two calculation methods, i.e., trajectory and probabilistic methods, are proposed. The obtained results are validated with experimental data and through various test studies. Analysis of the numerical study of fine powder classification has shown the viability of the proposed geometry for a separation chamber in comparison with the traditional geometry. The most optimal mode of aerodynamic characteristics of the centrifugal classifier is revealed to obtain the best sharpness of particle size separation.

Keywords: turbulence, air classifier, numerical simulation, Reynolds equations, turbulence model

For citation: Solomakha, A.E., Shvab, A.V. (2024) Simulation of aerodynamics of a swirling turbulent flow in a centrifugal air classifier. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 150–162. doi: 10.17223/19988621/87/12

Введение

Самой распространенной продукцией порошковой металлургии являются порошковые материалы конструкционного назначения. Из-за наличия высоких механических и тугоплавких свойств они используются в различных областях промышленности, таких как атомная, химическая и др. [1–3] Дальнейшее совершенствование технологий получения мелкодисперсных порошков с заданными физическими свойствами осуществляется на основе математического моделирования. Поэтому в настоящее время актуальными являются исследования в области аэродинамики турбулентных закрученных течений, которые применяются в сепарации и классификации порошковых материалов [4–8]. Разделение полидисперсных систем в газовых потоках по крупности называют процессом классификации порошковых материалов, а аппараты, разделяющие эти полидисперсные системы, – классификаторами.

Одним из перспективных аппаратов для фракционного разделения порошков по размерам является воздушно-центробежный классификатор [5]. Через специальные воздуховоды обрабатываемый материал поступает в рабочую область аппарата, где после попадания в основной поток воздуха из-за интенсивного вращения крупные частицы – за счет преобладания центробежных сил над аэродинамическими силами – отбрасываются на периферию к стенкам, где происходят дальнейшие процессы оседания и выгрузки. Частицы меньшего размера за счет больших аэродинамических сил трения между частицами и газом устремляются вместе с несущим потоком на выход из аппарата.

Цель работы – создание математической модели аэродинамики турбулентного закрученного потока в оригинальной сепарационной камере воздушно-центробежного классификатора и процесса фракционного разделения частиц по размерам на основе траекторного и предложенного вероятностного подхода.

Физико-математическая постановка задачи

Традиционная сепарационная зона воздушно-центробежного классификатора представляет собой цилиндрическую область с двумя вращающимися параллель-

ными дисками, центры которых находятся на некотором расстоянии от оси вращения [5]. Перпендикулярно вращающемуся диску располагается кольцевой канал для подачи несущего потока, содержащего твердые частицы (рис. 1, а). Как известно, одним из основных способов обеспечения высокой эффективности фракционного разделения частиц по размерам является однородность поля закрученного турбулентного потока, а также равенство между центробежными и аэродинамическими силами для частиц граничного размера в сепарационной камере центробежного аппарата. Опираясь на результаты, полученные в работе [7], была предложена рабочая камера классификатора с симметрично расположенными кольцевыми соплами (рис. 1, б), так как в этом случае имеют место более однородные поля вектора скорости несущей среды. Цифрами 1–7 на рисунке изображены номера сечений, в которых представлены результаты численных исследований.

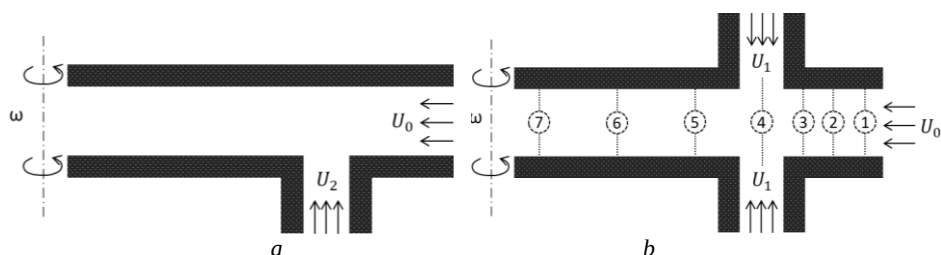


Рис. 1. Схема рабочей камеры воздушно-центробежного классификатора с одним (а) и двумя (б) вертикальными кольцевыми соплами

Fig. 1. Diagram of a working chamber in a centrifugal air classifier with (a) one and (b) two vertical annular nozzles

Динамика закрученного потока в сепарационной камере носит турбулентный характер. Поэтому математическое моделирование аэродинамики в рабочей области центробежного аппарата производится на основе уравнений Рейнольдса в цилиндрической системе координат. Данные уравнения переноса импульса и неразрывности в безразмерном виде представлены следующим образом:

$$\frac{\partial u_r}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_r u_z)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((1 + v_t) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + v_t) \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right] + \frac{u_r^2}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t) \frac{\partial u_r}{\partial r} - (1 + v_t) \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r u_\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_\phi)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((1 + v_t) \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + v_t) \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right) \right] + \frac{2u_r u_\phi}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t) \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - (1 + v_t) \frac{u_\phi}{r^2} + \frac{\partial v_t}{\partial r} u_\phi \right]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r u_z)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z u_z)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((1 + v_t) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((1 + v_t) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{u_r u_z}{r} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t) \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial v_t}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = 0. \quad (4)$$

Замыкание системы уравнений Рейнольдса (1)–(3) осуществлялось с помощью известной модели турбулентности Уилкокса. В соответствии с этой моделью записывается два уравнения переноса для кинетической энергии турбулентности и удельной скорости диссипации турбулентной энергии в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r k)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z k)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 + v_t \sigma^*) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + v_t \sigma^*) \frac{\partial k}{\partial z} \right] \right\} + \frac{u_r k}{r} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t \sigma^*) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + G - \beta^* k \omega; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial(u_r \omega)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \omega)}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 + v_t \sigma) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + v_t \sigma) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \right\} + \frac{u_r \omega}{r} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} (1 + v_t \sigma) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} G - \beta \omega^2 - \beta \omega |\Omega|; \end{aligned} \quad (6)$$

$$v_t = \text{Re} \frac{k}{\omega}. \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G = \frac{v_t}{\text{Re}} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]^2 \right\}; \\ |\Omega| = \sqrt{\Omega_r^2 + \Omega_\phi^2 + \Omega_z^2} = \left[\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u_\phi}{r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \sigma, \beta^*, \sigma^*$ – постоянные модели турбулентности Уилкокса.

Рассматриваемая задача является осесимметричной, поэтому учитывается, что все производные по окружной координате во всех уравнениях равны нулю.

Граничные условия

В работе исследуется три режима турбулентного закрученного течения. Первый режим соответствует случаю, когда основной поток несущей среды образуется за счет подачи газа через вертикальные кольцевые сопла, а горизонтальный, с относительно небольшой скоростью, используется для дополнительного возврата мелких частиц в сепарационную зону. В качестве масштаба скорости для этого режима течения используется скорость U_1 (см. рис. 1). Для второго режима рассматривается случай равенства несущих расходов из горизонтального входного сечения и суммы расходов из обоих вертикальных кольцевых сопел. В этом режиме за масштаб скорости принимается значение U_0 , а значение U_1 пересчитывается для получения равенства расходов. Третий случай – динамика основного потока осуществляется через входное горизонтальное сечение, а расходы с вертикальных сопел имеют существенно меньшие значения и служат только для введения в рабочую зону твердых частиц. Значение масштаба скорости в этом

случае U_0 . В качестве масштаба длины использовалось расстояние между вращающимися дисками H . В силу небольших скоростей газа при процессе сепарации используется постоянное значение плотности ρ . Таким образом, в системе уравнений (1)–(7) число Рейнольдса имеет вид: $Re = U_k H / \nu$, где U_k – масштаб скорости соответствующего режима течения, ν , ν_t – коэффициенты молекулярной и турбулентной кинематической вязкости соответственно.

Для получения единственного решения, применяются следующие граничные условия.

Для первого режима течения в вертикальных входных сечениях задавались постоянные значения осевой и окружной составляющих вектора скорости $u_z = \pm 1$, $u_\phi = R\omega_1 r$, причем число $R\omega_1 = \omega_1 H / U_1$ есть обратный критерий Россби, где ω_1 – угловая скорость вращения газа. Для значения радиальной составляющей скорости использовалось условие Неймана. Для горизонтального входного сечения использовались условия $u_r = u_{r0}$, $u_\phi = R\omega_0 r_0$, а для осевой скорости – условие Неймана.

Во втором и третьем режимах течения для горизонтального входного сечения имеем $u_r = -1$, $u_\phi = R\omega_0 r_0$, значение осевой скорости во втором режиме определялось из равенства расходов, а в третьем режиме – из условия Неймана.

Уровень кинетической энергии и удельная скорость диссипации во входных сечениях задавались постоянными величинами, взятыми из известных опытных данных.

В выходном сечении исследуемой области для всех переменных использовалось условие независимости искомых функций от координаты r , т.е. так называемые мягкие условия.

На стенках использовалось условие прилипания $u_r = u_z = k = 0$, $u_\phi = R\omega r$, причем $R\omega = \omega H / U_k$, где ω – угловая скорость вращения стенок; удельная скорость диссипации кинетической энергии определялась в соответствии со статьей [6] следующими формулами:

$$\omega|_{r \rightarrow r_w} = \frac{4}{\text{Re}\beta(r - r_w)^2}; \quad \omega|_{z \rightarrow z_w} = \frac{6}{\text{Re}\beta(z - z_w)^2}.$$

Таким образом, полученная система уравнений (1)–(7) описывает закрученное турбулентное течение в сепарационной камере воздушно-центробежного классификатора.

Метод решения динамики твердых частиц

Как известно из научной литературы [5], высокая эффективность процесса разделения частиц по размерам достигается только при малой объемной концентрации твердой фазы. Поэтому моделирование поведения частиц порошкового материала в закрученном турбулентном потоке исследуется на основе известного дискретно-траекторного метода расчета [9], основой которого являются расчеты траекторий отдельных частиц под действием на них аэродинамических, центробежных и других сил, приводящих их к попаданию в мелкие или крупные фракции. В силу малости объемной концентрации частиц взаимодействием частиц между собой и обратным силовым влиянием частиц на газ можно пренебречь. Предполагается, что на твердую сферическую частицу действуют только центробежная, инерционная, гравитационная и аэродинамическая силы [9, 10]. В этом

случае уравнения для описания вектора скорости и траекторий движения частиц можно записать в виде:

$$m \frac{d\mathbf{W}}{dt} = \mathbf{F}; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{W}. \quad (8)$$

Первое векторное уравнение (8) в проекциях на цилиндрическую систему координат с учетом действующих сил на твердую частицу можно представить в виде:

$$\frac{dw_r}{d\tau} = \frac{(w_\varphi)^2}{r} + \frac{u_r - w_r}{Stk} \xi; \quad (9)$$

$$\frac{dw_z}{d\tau} = \frac{u_z - w_z}{Stk} \xi - \frac{1}{Fr}; \quad (10)$$

$$\frac{dw_\varphi}{d\tau} = -\frac{w_r w_\varphi}{r} + \frac{u_\varphi - w_\varphi}{Stk} \xi. \quad (11)$$

Здесь w_r , w_φ , w_z – составляющие вектора скорости частицы, ξ – коэффициент, учитывающий отклонение аэродинамического сопротивления частицы от закона сопротивления, определенного Стоксом, $Re_p = |\mathbf{V} - \mathbf{W}| \delta / \nu$ – критерий Рейнольдса, составленный для частицы диаметром δ , причем критерии Стокса Stk и Фруда Fr соответственно имеют вид:

$$Stk = \frac{\rho_p \delta^2 U_k}{18 \rho \nu H}; \quad Fr = \frac{U_k^2}{gH}; \quad \xi = 1 + 0.197 Re_p^{0.63} + 0.64 \cdot 10^{-4} Re_p^{1.38},$$

где ρ_p – плотность рассматриваемой частицы, g – ускорение свободного падения.

Метод численного решения

Решение уравнений переноса импульса для закрученного турбулентного потока в сепарационной зоне классификатора производится численного в переменных «скорость–давление» путем физического расщепления полей скорости и давления по времени на разностной разнесенной сетке. Решение уравнений переноса для кинетической энергии и удельной скорости ее диссипации проводится также установлением по времени на разнесенной сетке. Конвективные и диффузионные слагаемые в уравнениях переноса расписываются конечными разностями методом контрольного объема на основе экспоненциальной схемы [11] на разнесенной разностной сетке, которая снимает ограничение с сеточного числа Рейнольдса. Система дифференциальных уравнений после их дискретизации решается неявным методом переменных направлений в «дельта»-форме [12]. Подробное описание метода численного решения аэродинамики газа и твердых частиц приведено в работах [6, 7, 13].

Анализ полученных результатов

Достоверность проведенных численных исследований аэродинамики закрученного турбулентного потока подтверждается проведением различных тестовых исследований, сравнением с численными данными турбулентного закрученного течения между плоскими вращающимися дисками [6, 8], а также сравнением с экспериментальными данными между плоскопараллельными дисками в направ-

лении от периферии к оси (рис. 2, *a*). На рис. 2, *b* представлено такое сравнение опытных данных [14] с расчетом для распределения безразмерной радиальной скорости $u_r = U_r/U_0$ в зависимости от безразмерной координаты $z = Z/H$ и при различных радиусах $r = R/H$, где U_0 – среднее по сечению значение радиальной скорости.

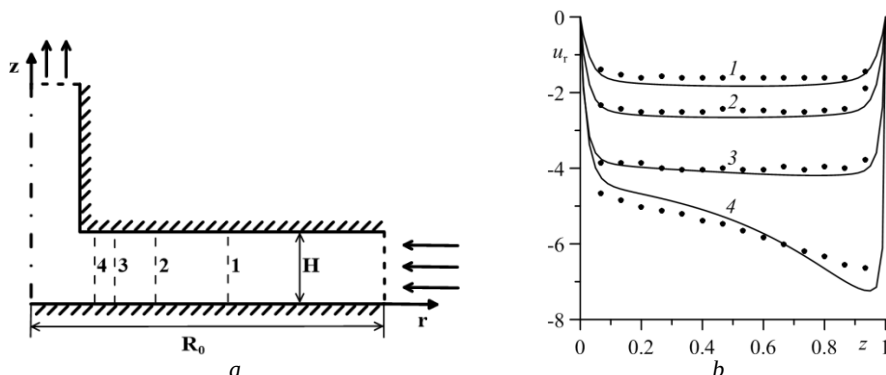


Рис. 2. Сравнение численного решения с экспериментальными данными: *a* – схема экспериментальной установки; *b* – распределение окружной скорости в зависимости от высоты канала при параметрах $Re = 2\,204$, $r_0 = 10$ § сечение 1 соответствует $r_1 = 6$; $2 - r_2 = 4$; $3 - r_3 = 2.75$; $4 - r_4 = 1.85$; сплошной линией представлены результаты расчета, а точками – экспериментальные данные

Fig. 2. Comparison of the numerical solution with experimental data: (a) experimental setup design; (b) circumferential velocity distribution at various channel heights for $Re = 2204$, $r_0 = 10$: $r_1 = 6$ (section 1), $r_2 = 4$ (section 2), $r_3 = 2.75$ (section 3), $r_4 = 1.85$ (section 4); the solid line indicates the calculated results, and the dotted line, the experimental data

Воздушно-центробежный классификатор [5], сепарационная камера которого представлена на рис. 1, *a*, – это пространство между двумя вращающимися дисками, по которому от периферии к оси вращения движется турбулентный закрученный поток. Экспериментальные исследования показывают, что для более высокой эффективности процесса разделения частиц по размерам твердые частицы необходимо вводить в междисковое пространство вертикально для того, чтобы радиальная составляющая скорости в зоне сепарации была достаточно малой, и тогда направление частицы по радиусу определяется балансом центробежной и аэродинамической сил. Для этого и служит вертикальное кольцевое сопло, через которое подается дополнительный газ с частицами.

Процесс сепарации порошковых материалов напрямую зависит от распределения полей радиальной и окружной составляющих вектора скорости: чем более однородные поля скоростей, тем выше острота разделения в центробежном аппарате. С этой точки зрения исследовалась аэродинамика как традиционной зоны сепарации (см. рис. 1, *a*), так и предложенной симметричной камеры (см. рис. 1, *b*). Результаты расчетов турбулентного закрученного течения для этих двух случаев показаны на рис. 3, 4.

Из этих графиков наглядно видно, что однородность линий тока, а следовательно, радиальная и осевая составляющие вектора скорости в симметричной зоне сепарации имеют более однородный характер по сравнению с традиционной

геометрией. Это же можно отметить и относительно окружной составляющей скорости, сравнивая рис. 3, а и рис. 4, а.

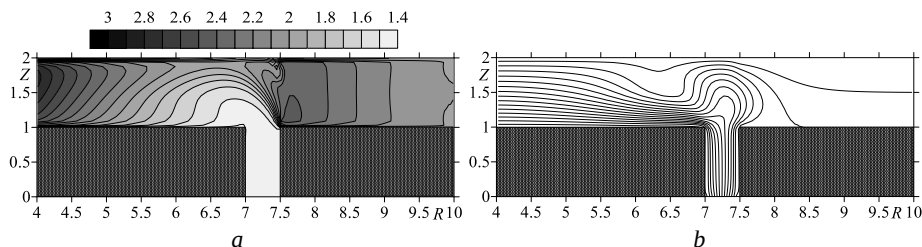


Рис. 3. Изолинии окружной компоненты скорости (а) и функции тока (b) классификатора с одним соплом при параметрах $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

Fig. 3. (a) Isolines of a circumferential velocity and (b) streamlines for a classifier with one nozzle at $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

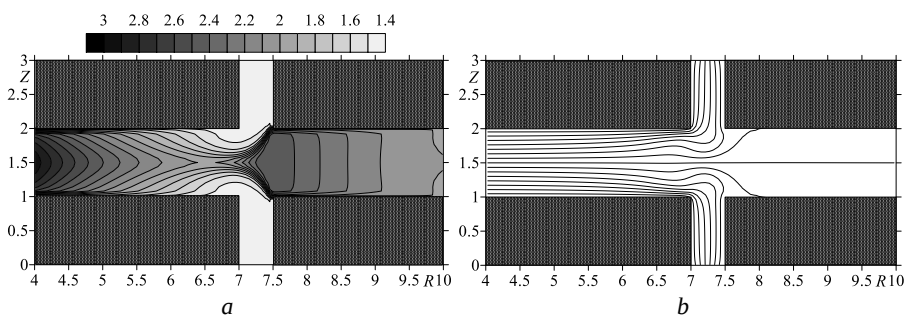


Рис. 4. Изолинии окружной компоненты скорости (а) и функции тока (b) классификатора с двумя соплами при параметрах $Re = 10^4$, $u_{r0} = -0.1$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

Fig. 4. (a) Isolines of a circumferential velocity and (b) streamlines for a classifier with two nozzles at $Re = 10^4$, $u_{r0} = -0.1$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

Анализ численных расчетов аэродинамики закрученного турбулентного течения для традиционной и предложенной камер показал, что геометрия последней позволяет получать наиболее однородные профили вектора скорости и, таким образом, является более перспективной с точки зрения процесса фракционного разделения частиц. Поэтому далее проводился анализ только предложенной геометрии.

Параметрические исследования аэродинамики турбулентного закрученного течения для перспективной сепарационной камеры (см. рис. 1, b) показали, что существует три характерных режима аэродинамики в зоне сепарации. Следует заметить, что имеют место два входных осевых вертикальных потока с одинаковыми расходами несущей среды и один радиальный с периферии зоны сепарации. На рис. 5 представлены распределения линий тока для трех режимов турбулентного течения в зоне сепарации.

Для всех трех режимов работы центробежного классификатора (см. рис. 1, b) представлены наиболее важные профили радиальной (рис. 6) и окружной (рис. 7) составляющих вектора скорости, которые определяют баланс центробежных и аэродинамических сил, действующих на частицы. Этот баланс сил и отвечает за эффективность фракционного разделения частиц по размерам.

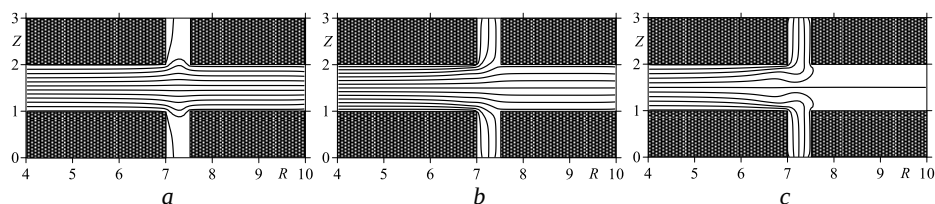


Рис. 5. Линии тока для различных режимов работы классификатора: *a* – основные потоки вертикальные; *b* – равные расходы горизонтального и вертикальных потоков; *c* – основной поток горизонтальный при параметрах $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

Fig. 5. Streamlines for different modes of the classifier operation: (a) the main flows are vertical, (b) the horizontal and vertical flows are of equal flow rate, and (c) the main flow is horizontal at $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

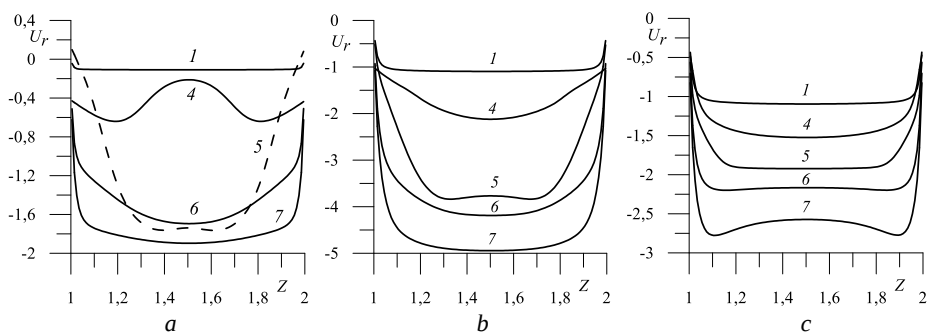


Рис. 6. Графики радиальной составляющей вектора скорости: *a* – основные потоки вертикальные; *b* – равные расходы горизонтального и вертикальных потоков; *c* – основной поток горизонтальный при параметрах $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

Fig. 6. Profiles of a radial velocity component: (a) the main flows are vertical, (b) the horizontal and vertical flows are of equal flow rate, and (c) the main flow is horizontal at $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

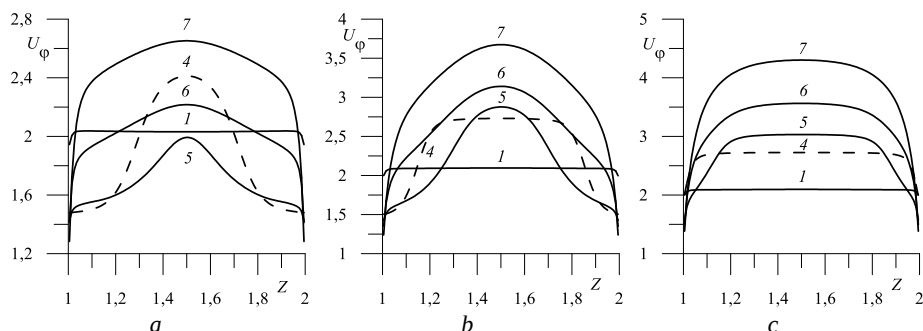


Рис. 7. Графики окружной составляющей вектора скорости: *a* – основные потоки вертикальные; *b* – равные расходы горизонтального и вертикальных потоков; *c* – основной поток горизонтальный при параметрах $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

Fig. 7. Profiles of a circumferential velocity component: (a) the main flows are vertical, (b) the horizontal and vertical flows are of equal flow rate, and (c) the main flow is horizontal at $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

На рис. 8 показаны профили кинетической энергии турбулентности для этих же трех характерных режимов работы центробежного аппарата.

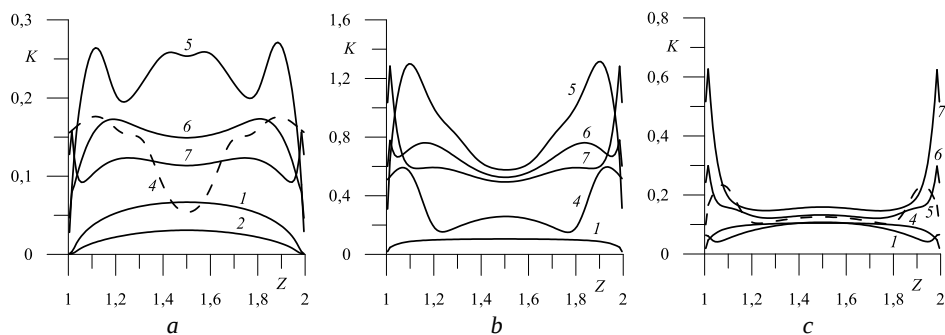


Рис. 8. Графики кинетической энергии турбулентности: *a* – основные потоки вертикальные; *b* – равные расходы горизонтального и вертикальных потоков; *c* – основной поток горизонтальный при параметрах $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

Fig. 8. Distribution of kinetic energy of turbulence: (a) the main flows are vertical, (b) the horizontal and vertical flows are of equal flow rate, and (c) the main flow is horizontal at $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$

Из анализа численных расчетов аэродинамической обстановки в сепарационной камере следует, что профили окружной и радиальной составляющих вектора скорости турбулентного закрученного течения при первом и втором режимах имеют более градиентный вид по сравнению со скоростями третьего режима, что приводит к менее эффективному фракционному разделению частиц. Поэтому более подробно исследуется третий режим аэродинамики.

Экспериментальные данные свидетельствуют, что наиболее эффективно процесс классификации происходит при малой объемной концентрации твердой примеси. Как показано в [5], массовая концентрация твердой примеси должна находиться в области значений меньше 0.5 кг/кг. В силу малости концентрации примеси моделирование двухфазного течения «газ–твёрдые частицы» необходимо проводить с помощью метода одиночных частиц [9]. Применяя такой метод, определяются поле скорости и, соответственно, траектории частицы, что позволяет найти кривую разделения Тромпа. Одна из основных характеристик эффективности работы центробежных классификаторов – кривая фракционного разделения частиц по размерам Тромпа, которая представляет собой вероятность попадания частиц данного размера в мелкий продукт разделения. Очевидно, что вероятностное значение попадания в мелкий продукт, равное 0.5 (50%) для кривой Тромпа, характеризует так называемый граничный размер частиц, относительно которого и происходит процесс классификации. Однако недостатком такого метода является большое количество расчетов, связанных с влиянием пульсационных скоростей газа, размеров частиц и их положений во входных сечениях рабочей зоны аппарата. Причем для расчета одной пробной частицы при одном ее положении и скорости во входном сечении исследуемой области необходимо проводить 2 000–3 000 расчетов ее траекторий [9]. Статистика таких расчетов позволяет определить положение одной частицы в мелком или крупном продукте разделения.

В работе предлагается стохастический метод расчета кривой разделения, который позволяет существенно сократить количество расчетов при определении граничного размера и кривой разделения.

Известно, что для турбулентного режима течения в силу наличия пульсационных характеристик скоростей концентрация твердых частиц равномерно распределяется по всей рабочей камере классификатора. При установившемся стационарном режиме классификации каждая частица одного размера периодически проходит каждую точку исследуемой области. Поэтому, с одной стороны, в силу малой объемной концентрации и, с другой стороны, за счет влияния турбулентности рассматриваемая частица фактически проходит через каждую локальную область зоны сепарации.

Для частиц, размер которых близок к граничному, центробежная сила примерно уравнивается аэродинамической. В результате этого баланса инерционная сила частиц мала, и тогда ею можно пренебречь, что приводит к приближенному равенству окружных скоростей частиц и газа в соответствии с уравнением (11). Таким образом, решая уравнение (9), на основании ранее рассчитанного поля скорости турбулентного закрученного течения можно определить значение и направление радиальной составляющей вектора скорости частицы:

$$w_r = \frac{Stk u_\varphi^2}{\xi r} + u_r. \quad (12)$$

В результате для каждого размера частиц определяется сумма радиальной скорости частицы со своим знаком, которая статистически будет характеризовать вероятность попадания в мелкий или крупный продукт разделения.

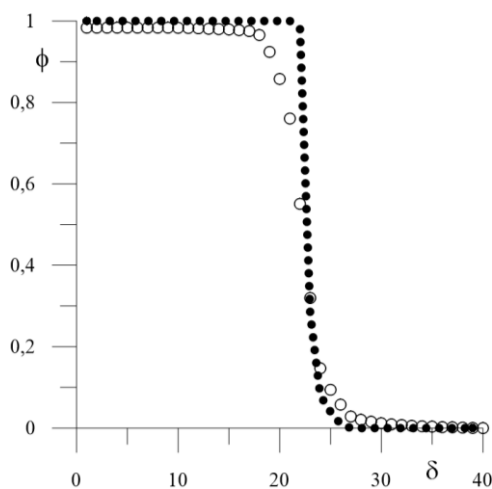


Рис. 9. Вероятность попадания заданного размера частиц δ (мкм) в мелкий продукт разделения при параметрах $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$; светлые точки – предложенный метод, темные – метод пробной частицы

Fig. 9. The probability of the given particle size falling into a fine separation product at $Re = 10^4$, $R\omega = R\omega_0 = R\omega_1 = 0.2$; open circles denote the proposed method, and closed circles, the test particle method

Проводя аналогичные расчеты для других частиц заданного фракционного состава, определяются граничный размер и кривая Тромпа. Совершенно очевидно, что

такой способ разделения частиц по размерам носит стохастический характер. Таким образом, предложенный способ позволяет достаточно просто оценивать граничный размер и определять остроту сепарации процесса разделения для данной геометрии, при этом ориентироваться в определении влияния геометрии на процесс классификации без проведения трудоемких массовых расчетов траекторий движения частиц.

Достоверность данного вероятностного подхода для определения граничного размера и эффективности процесса фракционного разделения частиц подтверждается численными расчетами традиционным методом кривой разделения Тромпа на основе расчета одиночной частицы. На рис. 9 показано сравнение этих двух методов.

Заключение

Представлено математическое моделирование аэродинамики турбулентного закрученного течения в традиционной и предложенной геометрии рабочей камеры воздушно-центробежного классификатора. Показано, что оригинальная симметричная геометрия зоны сепарации обладает лучшей аэродинамикой по сравнению с традиционной. Проведено детальное исследование аэродинамики предложенной геометрии и показано наличие трех характерных режимов турбулентного закрученного течения. В работе также представлен вероятностный метод определения граничного размера и остроты процесса классификации.

Достоверность расчета аэродинамики и вероятностного метода оценки эффективности классификации подтверждается тестовыми расчетами и сравнением численных результатов с опытными данными. Результаты численного моделирования аэродинамики рабочей камеры воздушно-центробежного классификатора могут быть полезными при исследовании двухфазных закрученных турбулентных течений, а также при разработке новых конструкций пневматических центробежных аппаратов порошковой технологии.

Список источников

1. Кафаров В.В., Дорохов И.Н. Системный анализ процессов химической технологии. М. : Наука, 1976. 499 с.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. М. : Химия, 2004. 750 с.
3. Гропянов А.В., Ситов Н.Н., Жукова М.Н. Порошковые материалы : учеб. пособие. СПб. : ВШТЭ СПбГУПТД, 2017. 74 с.
4. Мизонов В.Е., Ушаков С.Г. Аэродинамическая классификация порошков. М. : Химия, 1989. 160 с.
5. Росляк А.Т., Зятиков П.Н. Воздушно-центробежная классификация микропорошков. Томск : ТМЛ-Пресс, 2010. 140 с.
6. Shvab A.V., Khairullina V.Yu. Effect of an unsteady swirled turbulent flow on the motion of a single solid particle // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2011. V. 52, № 1. С. 37–42.
7. Шваб А.В., Соломаха А.Е. Численное моделирование аэродинамики воздушно-центробежного классификатора // Известия вузов. Физика. 2021. Т. 64, № 2-2. С. 155–161. doi: 10.17223/00213411/64/2-2/155
8. Shvab A.V., Turubaev R.R. Simulation of swirling turbulent flow aerodynamics in a centrifugal machine // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2019. Т. 53, № 2. С. 242–250.
9. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение газа с частицами. М. : Физматлит, 2008. 600 с.
10. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки : пер. с англ. М. : Мир, 1987. 589 с.
11. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости, М. : Энергоатомиздат, 1984. 117 с.

12. Peire R., Taylor T.D. Computational Methods for Fluid Flow. New York : Springer-Verlag, 1983.
13. Роуч П. Вычислительная гидромеханика : пер. с англ. М. : Мир, 1977. 618 с.
14. Singh A., Vyas B.D., Powle U.S., Investigations on inward flow between two stationary parallel disks // J. Heat Fluid Flow. 1999. V. 20. P. 395–401.

References

1. Kafarov V.V., Dorokhov I.N. (1976) *Sistemnyy analiz protsessov khimicheskoy tekhnologii* [System analysis of chemical technology processes]. Moscow: Nauka.
2. Kasatkin A.G. (2004) *Osnovnye protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii* [Fundamental processes and devices for chemical technology]. Moscow: Khimiya.
3. Gropyanov A.V., Sitov N.N., Zhukova M.N. (2017) *Poroshkovye materialy* [Powder materials]. Textbook. Saint Petersburg: HSE SPbGUPTD.
4. Mizonov V.E., Ushakov S.G. (1989) *Aerodinamicheskaya klassifikatsiya poroshkov* [Aerodynamic classification of powders]. Moscow: Khimiya.
5. Roslyak A.T., Zyatikov P.N. (2010) *Vozdushno-tsentrobezhnaya klassifikatsiya mikroporoshkov* [Air-centrifugal classification of micropowders]. Tomsk: TML-Press.
6. Shvab A.V., Khayrullina V.Yu. (2011) Effect of an unsteady swirled turbulent flow on the motion of a single solid particle. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52(1). pp. 37–42. doi: 10.1134/S0021894411010068
7. Shvab A.V., Solomakha A.E. (2021) Chislennoe modelirovanie aerodinamiki vozdushno-tsetrobezhnogo klassifikatora [Numerical modeling of aerodynamics of an air-jet classifier]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 64(2-2). pp. 155–161. doi: 10.17223/00213411
8. Shvab A.V., Turubaev R.R. (2019) Simulation of swirling turbulent flow aerodynamics in a centrifugal machine. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 53(2). pp. 242–250. doi: 10.1134/S0040579519010135
9. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techenie gaza s chastitsami* [Flow of gas with particles]. Moscow: FIZMATLIT.
10. Gupta A.K., Lilley D.G., Syred N. (1984) *Swirl Flows*. Tunbridge Wells: Abacus Press. doi: 10.1016/0010-2180(86)90133-1
11. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
12. Peire R., Taylor T.D. (1983) *Computational Methods for Fluid Flow*. New York: Springer-Verlag.
13. Roache P.J. (1976) *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque: Hermosa Publishers.
14. Singh A., Vyas B.D., Powle U.S. (1999) Investigations on inward flow between two stationary parallel disks. *Journal Heat Fluid Flow*. 20(4). pp. 395–401. doi: 10.1016/S0142-727X(98)10058-9

Сведения об авторах:

Соломаха Артём Евгеньевич – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: solomahaartem@yandex.ru

Шваб Александр Вениаминович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: avshvab@inbox.ru

Information about the authors:

Solomakha Artyom E. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: solomahaartem@yandex.ru

Shvab Aleksandr V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: avshvab@inbox.ru

Статья поступила в редакцию 01.07.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 01.07.2023; accepted for publication 12.02.2024

Научная статья

УДК 534.112

doi: 10.17223/19988621/87/13

Нелинейные колебания токонесущей струны в магнитном поле

Александр Константинович Томилин¹, Иван Сергеевич Коноваленко²,
Игорь Сергеевич Коноваленко³

^{1, 2, 3} Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ aktomilin@tpu.ru

² ivkon@tpu.ru

³ iskonovalenko@tpu.ru

Аннотация. Теоретически и экспериментально исследованы колебания медной струны с учетом совокупности механических, тепловых и электромагнитных факторов воздействия. Предложен расчетно-экспериментальный метод, позволяющий достаточно точно определять кумулятивные факторы затухания при первой и второй формах колебаний. Экспериментально обнаружено явление термопараметрического резонанса, возникающее в результате периодического нагревания струны за счет джоулева тепла и охлаждения при достаточно больших амплитудах колебаний в воздушной среде.

Ключевые слова: струнные датчики, магнитная сила, параметрический резонанс

Благодарности: Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТПУ. Авторы выражают благодарность В.А. Томилину за помощь в выполнении расчетно-графических работ. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Для цитирования: Томилин А.К., Коноваленко Ив.С., Коноваленко Иг.С. Нелинейные колебания токонесущей струны в магнитном поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 163–174. doi: 10.17223/19988621/87/13

Original article

Nonlinear oscillations of a current-carrying string in a magnetic field

Aleksandr K. Tomilin¹, Ivan S. Konovalenko², Igor' S. Konovalenko³

^{1, 2, 3} Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ aktomilin@tpu.ru

² ivkon@tpu.ru

³ iskonovalenko@tpu.ru

Abstract. The nonlinear properties of a string must be taken into account when creating string systems that are used in transducers and musical instruments. The forced oscillations

of an electrically conductive string in a magnetic field are described by a nonlinear integro-differential equation. The amplitude–frequency characteristics of nonlinear resonances of the first and second orders are obtained. The damping factor of the first-mode oscillations is determined from the optimal coincidence of the experimental and theoretical amplitude-frequency characteristic graphs. The experimental amplitude-frequency characteristics for the first-order resonance is obtained using a laboratory setup with a copper string 0.4 mm in diameter and 0.57 m long, having a certain initial tension. The cumulative damping factor of the first mode is obtained, which takes into account all the dissipative factors of a real string system.

Low-frequency thermoparametric oscillations of the second mode are observed in experiments with a string. It follows from the analysis of the Mathieu equation that parametric resonance arises even at very low amplitudes of the thermal tension of a string, and it must be taken into account in the frequency analysis of oscillations of string systems.

Keywords: vibrating string transducers, magnetic force, parametric resonance

Acknowledgments: This study was financially supported by the Program for improving the competitiveness of Tomsk Polytechnic University. The authors are grateful to Tomilin V.A. for his help in performing the calculations and graphic work. The authors declare that they have no conflict of interests.

For citation: Tomilin, A.K., Konovalenko, I.S., Konovalenko, Ig.S. (2024) Nonlinear oscillations of a current-carrying string in a magnetic field. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 163–174. doi: 10.17223/19988621/87/13

Введение

Для исследования статических и динамических деформаций, возникающих в сложных конструкциях, часто используются струнные датчики [1]. Принцип их действия основан на зависимости частоты колебаний струны от ее натяжения. Они с высокой точностью тестируют деформационные изменения конструкций. Однако струнные датчики очень чувствительны к температуре и обладают нелинейными свойствами, которые следует учитывать при составлении градировочных графиков [2–5].

Аналогичные проблемы, связанные с качеством струнных систем, возникают при разработке и совершенствовании электромузыкальных инструментов, где используются магнитные поля звукоусъемных датчиков или систем возбуждения колебаний. В связи с этим исследование воздействия электромагнитных сил на колебания струны является актуальной теоретической и экспериментальной задачей. Качество генерируемого струной звука в значительной мере зависит от ее упругих свойств, которые обычно имеют нелинейные характеристики.

Важно обратить внимание на способы возбуждения колебаний в струнных системах. Приоритетными считаются способы бесконтактного возбуждения колебаний. В частности, можно использовать распределенную силу Ампера, воздействующую на токонесущую неферромагнитную струну, расположенную во внешнем магнитном поле [6]. При пропускании по струне электрического тока могут заметно проявляться тепловые эффекты, связанные с ее нагреванием и последующим охлаждением при колебаниях во внешней среде. Теория и различные прикладные примеры параметрических колебаний в системах с распределенными параметрами приведены в работах [7–15]. Таким образом, возникает актуальная проблема теоретического описания

и экспериментального исследования колебаний электропроводной струны с учетом совокупности механических, тепловых и электромагнитных факторов.

Цель настоящего исследования заключается в сопоставлении теоретических и экспериментальных данных с учетом совокупности воздействия всех перечисленных факторов на колебания струны: проявление нелинейности и возникновение параметрической неустойчивости.

Постановка задачи

Рассматриваются плоские нелинейные колебания струны с закрепленными концами. Струна находится в распределенном магнитном поле, вектор индукции которого направлен ортогонально плоскости колебаний струны. При пропускании по струне переменного электрического тока возникает вынуждающая электромагнитная сила. Теоретически и экспериментально исследуются вынужденные колебания электропроводной струны с учетом совокупности механических, тепловых и электромагнитных факторов.

Теория

Элементарная теория плоских колебаний струны с закрепленными концами основана на гипотезе абсолютной гибкости [7], в соответствии с которой натяжение струны в процессе колебаний считается неизменным. Однако в экспериментах при колебаниях струнных систем часто наблюдаются «срывы» и «скачки» амплитуды при плавном изменении частоты вынуждающей силы [8], что свидетельствует о проявлении нелинейных свойств. Это связано со сложной зависимостью силы упругости от деформации струны в процессе колебаний. Резкое изменение амплитуды колебаний негативно отражается на точности измерений струнных датчиков, а также на качестве звука, воспроизводимого музыкальными инструментами. Возникает проблема устранения этого дефекта за счет правильного подбора диапазона рабочих частот, а также диссипативных сил, воздействующих на струну. При этом следует учитывать не только внешнее трение, возникающее за счет взаимодействия струны с окружающей средой, но и воздействие магнитных полей, которые часто используются в струнных системах.

Теория нелинейных колебаний электропроводной струны во внешнем магнитном поле содержится в монографии [6]. Пусть струна расположена вдоль оси z и вектор индукции распределенного магнитного поля $\mathbf{B}(z)$ направлен ортогонально плоскости колебаний струны. Вынужденные колебания нелинейной струны в магнитном поле описываются интегро-дифференциальным уравнением

$$m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[T_0 + \frac{EA}{2l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma AB(z)}{l_0} \int_0^{l_0} B(z) \frac{\partial u}{\partial t} dz = B(z) J_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $u(z, t)$ – функция поперечных смещений струны, m_0 , l_0 , A , E , σ – соответственно погонная масса, длина, площадь

поперечного сечения, модуль упругости и электропроводность струны, T_0 – ее предварительное натяжение с учетом постоянного термического удлинения за счет действующего значения силы тока, β – коэффициент внешнего сопротивления среды, J_0 – амплитуда силы тока, созданного генератором электрических сигналов, ω – циклическая частота этого тока.

Второй член в левой части дифференциального уравнения (1) учитывает нелинейность упругой восстанавливающей силы, возникающей за счет изменения натяжения струны при прогибе. Третий и четвертый члены уравнения соответствуют линейному внешнему сопротивлению и электромагнитной демпфирующей силе. Член, стоящий в правой части уравнения (1) выражает периодическую вынуждающую электромагнитную силу с частотой ω .

Используя метод Фурье и учитывая, что собственные амплитудные функции струны имеют синусоидальную форму:

$$X_r = \sin \frac{r\pi}{l_0} z, \quad (r=1, \infty),$$

уравнение в частных производных (1) можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта процедура подробно описана в монографии [6].

Рассмотрим два частных случая. Первый – имеется один активный участок шириной $\Delta z = z_2 - z_1$, который располагается симметрично посередине струны. На нем действует однородное и стационарное магнитное поле индукции $\mathbf{B}$ (рис. 1).

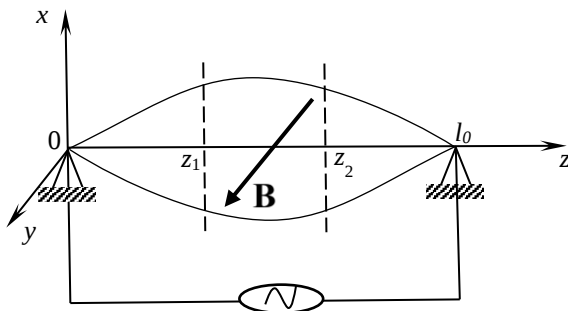


Рис. 1. Вынужденные колебания струны первой формы
Fig. 1. Forced oscillations of a first-mode string

В этом случае возбуждается стоячая волна первой амплитудной формы ($r = 1$), и колебания описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{q}_1 + 2h_1\dot{q}_1 + p_1^2 q_1 + Nq_1^3 = F_0\gamma_1 \cos \omega t, \quad (2)$$

где q_1 – обобщенная координата при первой форме колебаний, циклическая частота незатухающих линейных колебаний

$$p_1 = \frac{\pi}{l_0} \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}, \quad (3)$$

фактор затухания

$$h_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{8\sigma B^2 \gamma_1^2 A}{m_0 \pi^2} \right) \quad (4)$$

и введены обозначения

$$N = \frac{EA\pi^4}{4m_0l_0^4}, \quad F_0 = \frac{4BJ_0}{\pi m_0}, \quad (5)$$

$$\gamma_1 = \sin \frac{\pi(z_1 + z_2)}{2l_0} \sin \frac{\pi(z_2 - z_1)}{2l_0}. \quad (6)$$

Во втором случае имеется два одинаковых активных участка со взаимно противоположным направлением векторов магнитной индукции. Середины этих участков располагаются в точках $l_0/4$ и $3l_0/4$ (рис. 2). Линейные размеры участков обозначим $\Delta_1 = z_2 - z_1$ и $\Delta_2 = z_4 - z_3$, причем $\Delta_1 = \Delta_2$.

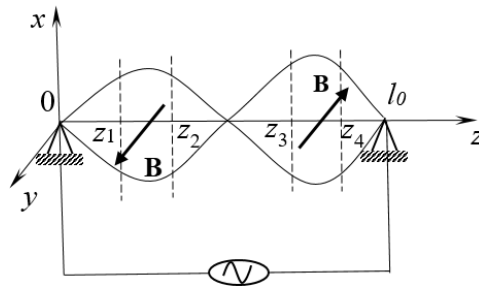


Рис. 2. Вынужденные колебания струны второй формы

Fig. 2. Forced oscillations of a second-mode string

В этом случае возбуждается стоячая волна второй амплитудной формы ($r = 2$). Колебания струны при этом описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{q}_2 + 2h_2\dot{q}_2 + p_2^2q_2 + 16Nq_2^3 = F_0\gamma_2 \cos \omega t, \quad (7)$$

где q_2 – обобщенная координата при второй форме колебаний, циклическая частота незатухающих линейных колебаний

$$p_2 = \frac{2\pi}{l_0} \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}, \quad (8)$$

фактор затухания

$$h_2 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{4\sigma B^2 \gamma_2^2 A}{m_0 \pi^2} \right) \quad (9)$$

и использовано обозначение

$$\gamma_2 = \sin \frac{\pi(z_1 + z_2)}{l_0} \sin \frac{\pi(z_2 - z_1)}{l_0} = \sin \frac{\pi(z_3 + z_4)}{l_0} \sin \frac{\pi(z_4 - z_3)}{l_0}. \quad (10)$$

Неоднородные уравнения Дюффинга (2) и (7) содержат нелинейные члены, которые возникают за счет растяжения струны при колебаниях. Воспользуемся методом гармонического баланса [9–10] для построения графика амплитудно-частотной характеристики уравнения (2). Представим решение этого уравнения в виде:

$$q_1 = q_{01} \sin(\omega t + \theta_1), \quad (11)$$

где θ_1 – произвольно заданная начальная фаза.

Нелинейную функцию

$$f(q_1, \dot{q}_1) = 2h_1 \dot{q}_1 + p_1^2 q_1 + Nq_1^3$$

разложим в ряд Фурье

$$f(q_1, \dot{q}_1) = \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t \quad (12)$$

с коэффициентами

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(q_1, \dot{q}_1) \cos(\omega t + \theta_1) \cdot d(\omega t + \theta_1) = 2h_1 \omega q_{01},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} f(q_1, \dot{q}_1) \sin(\omega t + \theta_1) \cdot d(\omega t + \theta_1) = p_1^2 q_{01} + \frac{3}{4} Nq_{01}^3.$$

После подстановки (11) и (12) в (2), приравняв коэффициенты при одинаковых временных функциях, получим систему двух уравнений. Из них определяем начальную фазу

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\left(p_1^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} Nq_{01}^2 \right)^2 + 4h_1^2 \omega^2}{2h_1 \omega}. \quad (13)$$

Для струн из металла параметр N имеет большое значение (порядка 10^9). Знаменатель дроби (13) в сравнении с N относительно мал, следовательно $\operatorname{tg} \theta_1 \rightarrow \infty$, поэтому можно принять $\theta_1 \approx \pi/2$. С учетом этого получаем уравнение амплитудно-частотной характеристики при резонансе первого порядка:

$$\left[\left(p_1^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} Nq_{01}^2 \right)^2 + 4h_1^2 \omega^2 \right] q_{01}^2 = F_0^2 \gamma_1^2. \quad (14)$$

Для построения амплитудно-частотной характеристики конкретной струнной системы требуется измерить или вычислить все входящие в (14) параметры. При этом возникает проблема с адекватным определением фактора затухания колебаний h_1 в каждом конкретном случае. Предлагается принять значение h_1 , при котором экспериментальный и теоретический графики амплитудно-частотной характеристики совпадают наилучшим образом. Методика измерений амплитуды колебаний струны в лабораторном эксперименте описана ниже.

При резонансе второго порядка амплитудно-частотная характеристика представляется уравнением

$$\left[\left(p_2^2 - \omega^2 + 12Nq_{02}^2 \right)^2 + 4h_2^2 \omega^2 \right] q_{02}^2 = F_0^2 \gamma_2^2, \quad (15)$$

которое также применимо при больших N и малых значениях фактора затухания h_2 .

Заметим, что внутреннее трение, связанное со структурой материала струны, в рассмотренной теории, а следовательно, и в уравнениях (14), (15) не учтено. В отличие от теории поперечных колебаний стержней считается, что в струнных системах внутреннее трение заметно не проявляется. Однако тепловые и электромагнитные воздействия могут существенно влиять на кристаллическую структуру материала струны и отражаться на внутренних диссипативных процессах. Следовательно, в реальных струнных системах при наличии внешних воздействий различной физической природы требуется экспериментально определять кумулятивный фактор затухания колебаний, учитывающий в совокупности все диссипативные процессы.

Эксперименты

Эксперименты с целью построения амплитудно-частотной характеристики произведены на специальной лабораторной установке со струнами из меди и латуни различных длин и размеров поперечного сечения. В качестве примера приведем результаты экспериментов с медной струной (плотность $\rho = 8\,960\text{ кг/м}^3$) диаметром $d = 0.4\text{ мм}$, без изоляционного покрытия. Расстояние между закрепленными концами струны $l_0 = 0.57\text{ м}$. Погонная масса струны $m_0 = 1.127 \cdot 10^{-3}\text{ кг/м}$, натяжение с учетом нагревания при действующем значении пропускаемого тока составляет $T_0 = 0.981\text{ Н}$. Амплитуда переменного тока, пропускаемого по струне, – $J_0 \approx 0.56\text{ А}$. При этом действующее значение силы тока $J_d = J_0/\sqrt{2} = 0.4\text{ А}$. Магнитное поле создано постоянными магнитами на участке шириной $\Delta z = 25\text{ мм}$, расположенном посередине струны: $z_1 = 0.2725\text{ м}$, $z_2 = 0.2975\text{ м}$. Индукция магнитного поля $B \approx 0.4\text{ Тл}$.

В первом эксперименте исследован нелинейный резонанс первого порядка. Струна совершает плоские вынужденные колебания по схеме, представленной на рис. 1. При этом коэффициенты (5) и (6) имеют следующие значения:

$$F_0 = \frac{4BJ_0}{\pi m_0} = 260\text{ м/с}^2, \quad \gamma_1 = \sin \frac{\pi(z_1 + z_2)}{2l_0} \sin \frac{\pi(z_2 - z_1)}{2l_0} = 0.0688,$$

$$N = \frac{EA\pi^4}{4m_0 l_0^4} = 2.59 \cdot 10^9\text{ м}^{-2}\text{с}^{-2}.$$

Здесь учтено, что модуль упругости меди $E = 10^{11}\text{ Па}$.

Линейным незатухающим колебаниям струны с указанными параметрами соответствует частота, определенная по формуле (3): $p_1 = 163.3\text{ с}^{-1}$, или $\nu_1 \approx 26\text{ Гц}$.

На рис. 3 произведено наложение двух графиков амплитудно-частотной характеристики: экспериментального и теоретически рассчитанного в соответствии с уравнением (14). Наилучшее их совпадение происходит при $h_1 = 6.5\text{ с}^{-1}$. Это значение учитывает все диссипативные факторы, присутствующие в реальной струнной системе. Его можно назвать кумулятивным.

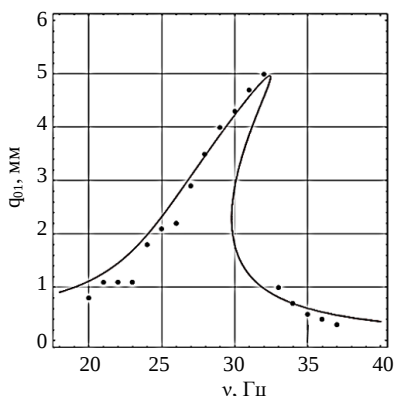


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика струны при $r = 1$

Fig. 3. Amplitude–frequency characteristic of a string at $r = 1$

Используя формулу (4), вычислим коэффициент электромагнитного демпфирования

$$\beta_{\text{эм}} = \frac{8\sigma B^2 \gamma_1^2 A}{m_0 \pi^2} = 4\text{с}^{-1}. \quad (16)$$

Пренебрегать фактором электромагнитной диссипации в данном случае недопустимо, поскольку его значение сравнимо с коэффициентом $\beta = 2h_1 - \beta_{\text{эм}} = 9\text{с}^{-1}$, характеризующем все прочие диссипативные факторы. Предложенный расчетно-экспериментальный метод определения кумулятивного фактора затухания колебаний струны можно использовать при лабораторном исследовании свойств струнных систем, а также при решении инженерных задач в процессе проектирования конкретной аппаратуры.

Термопараметрический резонанс

При пропускании тока по струне происходит ее нагрев за счет джоулева тепла. Следовательно, натяжение струны изменяется в зависимости от действующего значения пропускаемого по ней тока. При возрастании амплитуды колебаний и скорости движения струны усиливается ее теплообмен с окружающей средой, что также влияет на натяжение. Таким образом, натяжение струны является функцией силы тока и обобщенных скоростей: $T(J_0, \dot{q}_r)$. Это явление получило название «термопараметрическое возбуждение» колебаний [6, 16, 17].

В экспериментах с описанной выше струной наблюдается периодическое изменение (биение) амплитуды стоячих волн. Имеет место суперпозиция двух колебаний с различными частотами: резонансных электромеханических с частотой пропускаемого тока ω и термопараметрических, возникающих за счет изменения натяжения струны с частотой Ω .

Перед началом эксперимента к струне с одним закрепленным концом прикладывается растягивающая сила величиной G_0 . Одновременно по струне пропускается переменный электрический ток $J = J_0 \cos \omega t$, за счет которого происходит ее тепловое удлинение. Затем закрепляется второй конец струны. Если отключить ток, то натяжение струны с закрепленными концами составит

$$T_0 = G_0 + T_{J_0},$$

где T_{J_0} – постоянное термическое натяжение.

В процессе колебаний токонесущей струны ее натяжение с учетом термического эффекта ослабляется по закону

$$\Delta T = -T_{J_0} - T^* \cos \Omega t.$$

где T^* – амплитудное изменение натяжения струны за счет периодического нагревания и охлаждения. Тогда полное натяжение токонесущей струны в процессе колебаний можно выразить законом

$$T = G_0 - T^* \cos \Omega t. \quad (17)$$

При этом в эксперименте наблюдаются биения амплитуды стоячих волн при $r = 2$ с частотой $f = 6$ Гц. Следовательно, циклическая частота термопараметрического возбуждения составляет

$$\Omega = 2\pi f = 12\pi\text{с}^{-1} = 37.6\text{с}^{-1}. \quad (18)$$

Учитывая вышесказанное, дифференциальное уравнение термопараметрических колебаний можно записать в виде:

$$\ddot{\chi}_2 + 2h_2\dot{\chi}_2 + \left[\Omega_0^2 - \frac{T_2^*}{m_0} \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^2 \cos \Omega t \right] \chi_2 = 0, \quad (19)$$

где $\chi_2(t)$ – закон параметрических колебаний второй моды, Ω_0 – циклическая частота параметрических колебаний струны при отсутствии сопротивления внешней среды.

При помощи подстановки Хилла [9]

$$\chi_2 = \xi_2 \exp \left[-\int_0^t h_2 dt \right] = \xi_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{8\sigma B^2 \gamma_2^2 A}{m_0 \pi^2} \right) t \right]$$

приводим (19) к параметрическому уравнению

$$\ddot{\xi}_2 + \left(\Omega_0^2 - h_2^2 \right) \left[1 - \frac{T_2^*}{m_0 (\Omega_0^2 - h_2^2)} \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^2 \cos \Omega t \right] \xi_2 = 0. \quad (20)$$

С использованием обозначений

$$\Omega t = 2\tau; \quad a = \left(\Omega_0^2 - h_2^2 \right) \frac{4}{\Omega^2}; \quad \varepsilon = \frac{2T_2^*}{m_0 \Omega^2} \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^2 \quad (21)$$

приходим к уравнению Матье

$$\frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2} + (a - 2\varepsilon \cos 2\tau) \xi_2 = 0. \quad (22)$$

Амплитуда параметрического возбуждения определяется параметром ε в уравнении (22). При невысокой температуре нагрева струны параметр $\varepsilon < 1$, т.е. является малым. При этом параметр a на диаграмме Айнса–Стретта [9] принимает значения, близкие к квадратам целочисленного ряда: 1, 4, 9... Точного совпадения с этими значениями не происходит, поскольку $\varepsilon \neq 0$. Например, при $\Omega \approx \sqrt{\Omega_0^2 - h_2^2}$ значение $a = 4$. Периодическому процессу биений, наблюдаемому в эксперименте, в диаграмме соответствует точка на линии, разграничивающей устойчивую и неустойчивую области. Из третьего соотношения (21) следует, что параметрический резонанс возникает даже при очень малых амплитудах термического натяжения струны T_2^* , и его необходимо учитывать в частотном анализе колебаний струнных систем, разделяя высокочастотные и низкочастотные сигналы.

Заключение

В результате исследования предложен расчетно-экспериментальный метод определения кумулятивного фактора затухания нелинейной струнной системы, основанный на сравнении графиков амплитудно-частотных характеристик: экспериментального и теоретического. Эту методику можно применять для определения свойств материала струны и внешних условий, в которых совершаются колебания конкретной струнной системы.

Теоретически описан термопараметрический резонанс струны, наблюдаемый в эксперименте в виде низкочастотных биений при колебаниях токонесущей

струны во внешнем магнитном поле. Это явление возникает даже при малых изменениях натяжения струны, возникающих за счет периодического изменения ее температуры.

Список источников

1. Аш Ж., Андре П., Бофрон Ж., Дезут П., Жувено К., Зельбиштейн У., Кретинон Б., Ливрозе П., Мазеран А., Меригу Ж., Пейро П., Пике А., Прижан Ж.-К., Сюньяш М., Такюсель Ж., Фулетье Ж., Шарне Ж., Шон Ж.-П. Датчики измерительных систем : пер. с фр. М. : Мир, 1992. Кн. 1. 280 с.
2. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей // Доклады академии наук. 2003. № 388(3). С. 31–38.
3. Крупенин В.Л. К расчету резонансных колебаний гибкой нити, взаимодействующей с точечным ограничителем хода // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. № 2. С. 29–35.
4. Крупенин В.Л. Вибрация струны, расположенной между протяженным и точечным ограничителями // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 13–22.
5. Томилин А.К., Курильская Н.Ф. Колебания электропроводящей струны в нестационарном магнитном поле с учетом двух нелинейных факторов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 4(72). С. 61–66. Doi 0.17377/sibjim.2017.20.408
6. Томилин А.К. Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами. Усть-Каменогорск : ВКГТУ, 2004. 272 с.
7. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. М. : Наука, 1988. 336 с.
8. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных механических колебаний. М. : Высш. школа, 1989. 383 с.
9. Магнус К. Колебания : введение в исследование колебательных систем. М. : Мир, 1982. 304 с.
10. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М. : Высш. школа, 1980. 408 с.
11. Уваров Д.К., Петров А.А. Параметрические колебания струны // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2010. Т. 52 (336), № 2. С. 187–192.
12. Алифов А.А. Автопараметрические колебания при запаздываниях в силах упругости и трения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 2. С. 9–16. doi: 10.31857/S0235711921020024
13. Зейликович И.С., Никитин А.В., Василевич А.Е. Возбуждение и регистрация нелинейного резонанса колебаний пружинного маятника с использованием электромагнитной индукции // Журнал технической физики. 2020. Т. 90, № 1. С. 5–10. doi: 10.21883/JTF.2020.01.48653.48-19
14. Алюшин Ю.А. Энергетическая основа резонанса в упругих телах // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22, № 5. С. 42–53. doi: 10.24411/1683-805X-2019-15006
15. Штукин Л.В., Беринский И.Е., Индейцев Д.А., Морозов Н.Ф., Скубов Д.Ю. Электромеханические модели нанорезонаторов // Физическая мезомеханика 2016. Т. 19, № 1. С. 24–30.
16. Потапов А.И., Ступенин В.В. Термопараметрическое возбуждение нелинейных колебаний струны // Прикладная механика и техническая физика. 1985. № 5. С. 142–146.
17. Потапов А.И., Ступенин В.В. Термопараметрическая дестабилизация токнесущего стержня // Прикладная механика. 1988. Т. 24, № 12. С. 100–104.
18. Грабовский М.А., Млодзеевский А.Б., Телеснин Р.В., Шаскольская М.П., Яковлев И.А. Лекционные демонстрации по физике. М. : Наука, 1972. 639 с.

References

1. Ash Zh., Andre P., Bofron Zh., Degut P., Zhuveno K., Zel'bshteyn U., Kretinon B., Livroze P., Mazeran A., Merigu Zh., Peyro P., Pike A., Prizhan Zh.-K., Syun'yash M., Takyusel' Zh., Fule't'e Zh., Sharne Zh., Shon Zh.-P. (1992) *Datchiki izmeritel'nykh sistem*. [Sensors of measuring systems]. Book 1. Moscow: Mir.
2. Krupenin V.L. (2003) K opisaniyu dinamicheskikh effektov, soprovozhdayushchikh kolebaniya strun vblizi odnotavrovnykh ogranichiteley [On the description of dynamic effects accompanying string vibrations near single-T limiters]. *Doklady Akademii Nauk – Proceedings of the Academy of Sciences*. 388(3). pp. 31–38.
3. Krupenin V.L. (1992) K raschetu rezonansnykh kolebaniy gibkoy niti, vzaimodeystvuyushchey s tochechnym ogranichitelem khoda [On the calculation of resonant oscillations of a flexible thread interacting with a point travel limiter]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2. pp. 29–35.
4. Krupenin V.L. (2017) Vibration of string placed between extended and point limiters. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 46(2). pp. 96–104. doi: 10.3103/S105261881702008X
5. Tomilin A.K., Kuril'skaya N.F. (2017) Vibrations of a conductive string in a nonstationary magnetic field under presence of two nonlinear factors. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 11(4). pp. 600–604. doi: 10.1134/S1990478917040184
6. Tomilin A.K. (2004) *Kolebaniya elektromekhanicheskikh sistem s raspredelennymi parametrami* [Oscillations of electromechanical systems with distributed parameters]. Ust'-Kamenogorsk: VKGTU.
7. Levitskiy N.I. (1988) *Kolebaniya v mekhanizmax* [Vibrations in machines]. Moscow: Nauka.
8. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Popov S.L. (1989) *Prikladnye zadachi teorii nelineynykh mekhanicheskikh kolebaniy* [Applied problems of the theory of nonlinear mechanical oscillations]. Moscow: Vysshaya shkola.
9. Magnus K. (1982) *Kolebaniya. Vvedenie v issledovanie kolebatel'nykh sistem* [Oscillations. Introduction to the study of oscillatory systems]. Moscow: Mir.
10. Biderman V.L. (1980) *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical oscillations]. Moscow: Vysshaya shkola.
11. Uvarov D.K., Petrov A.A. (2010) Parametricheskie kolebaniya struny [Parametric string vibrations]. *Trudy CNII im. akad. A.N. Krylova*. 52(2). pp. 187–192.
12. Alifov A.A. (2021) Autoparametric oscillations with delays in elastic and frictional forces. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 50(2). pp. 98–104. doi: 10.3103/S1052618821020023
13. Zeylikovich I.S., Nikitin A.V., Vasilevich A.E. (2020) Excitation and detection of a nonlinear resonance of oscillations of a spring-mass system using electromagnetic induction. *Technical Physics*. 65(1). pp. 1–6. doi: 10.1134/S1063784220010284
14. Alyushin Yu.A. (2019) Energeticheskaya osnova rezonansa v uprugikh telakh [Energy basis of resonance in elastic bodies]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 22(5). pp. 42–53. doi: 10.24411/1683-805X-2019-15006
15. Shtukin L.V., Berinskiy I.E., Indeytsev D.A., Morozov N.F., Skubov D.Yu. (2016) Elektromekhanicheskie modeli nanorezonatorov [Electromechanical models of nanoresonators]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 19(1). pp. 24–30.
16. Potapov A.I., Stupenin V.V. (1985) Termoparametricheskoe возбуждение нелинейных колебаний струны [Thermoparametric excitation of nonlinear vibrations of a string]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 5. pp. 142–146.
17. Potapov A.I., Stupenin V.V. (1988) Termoparametricheskaya destabilizatsiya tokonesushchego stержnya [Thermoparametric destabilization of a current-carrying rod]. *Prikladnaya mekhanika*. 24(12). pp. 100–104.
18. Grabovskiy M.A., Mlodzeevskiy A.B., Telesnin R.V., Shaskol'skaya M.P., Yakovlev I.A. (1972) *Lektsionnye demonstratsii po fizike* [Lecture demonstrations in physics]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Томилин Александр Константинович – доктор физико-математических наук, профессор Отделения машиностроения Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: aktomilin@tpu.ru

Коноваленко Иван Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент Отделения машиностроения Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: ivkon@tpu.ru

Коноваленко Игорь Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент Отделения машиностроения Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: iskonovalenko@tpu.ru

Information about the authors:

Tomilin Aleksandr K. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aktomilin@tpu.ru

Konovalenko Ivan S. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivkon@tpu.ru

Konovalenko Igor' S. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iskonovalenko@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 17.03.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 17.03.2023; accepted for publication 12.02.2024

МЕМУАРЫ, ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ, ПЕРСОНАЛИИ**MEMOIRS, MEMORABLE DATES, PERSONALITIES**

Научная статья

УДК 51(092)

doi: 10.17223/19988621/87/14

**Аскар Аканович Туганбаев
(к 70-летию со дня рождения)**

Аскар Аканович Туганбаев родился 11 июня 1953 г. в Алма-Ате в далекой от математики семье служащих. Отец – Акан Шарипович Туганбаев (1925–1993), сын рабочего Шарипа Туганбаева. Мать – Алма Муратбековна Туганбаева (1929–1985), в девичестве Лаумулина, из репрессированной ссыльной семьи, дочь Муратбека Лаумулина, расстрелянного в 1938 г. по политическому обвинению и впоследствии реабилитированного.

В 1970 г. окончил в Алма-Ате с золотой медалью физико-математическую школу № 56 (будущая Республиканская физико-математическая школа). Уже в школьном возрасте Аскар проявил себя как незаурядный талантливый молодой человек. Трижды (в 1968, 1969, 1970 гг.) был призером Всесоюзной математической олимпиады школьников (в 1969 году – третья премия). Неоднократно был

призером олимпиады школьников Азиатской части СССР, проводимой в Летней физико-математической школе в Новосибирском Академгородке, а также победителем городских школьных олимпиад Алма-Аты по математике, литературе, географии, английскому языку.

А.А. Туганбаев в 1975 г. с отличием окончил механико-математический факультет Московского государственного университета, аспирантуру МГУ – досрочно в апреле 1978 г. в связи с защитой кандидатской диссертации на механико-математическом факультете МГУ под руководством профессора А.В. Михалева. Там же в 1990 г. защитил докторскую диссертацию по алгебре, а в 1993 г. получил ученое звание профессора.

Аскар Аканович Туганбаев – известный математик, один из ведущих в мире специалистов по теории колец и модулей. Он автор и соавтор 21 монографии, из которых 10 изданы в России и 11 в ЕС: 1 – в издательстве Springer, 1 – в Cambridge University Press, 1 – в Oxford University Press, 3 – в Springer Netherlands (Kluwer), 4 – в Walter de Gruyter, 1 – в CRC Press (Gordon and Breach). Член редакционного совета журнала «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика», член редколлегий журналов «Математика и теоретические компьютерные науки», «Фундаментальная и прикладная математика», «Mathematics MDPI» и «Sci MDPI». Научный консультант двух успешно защищенных диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Был официальным оппонентом более 20 докторских и более 70 кандидатских диссертаций, успешно защищенных в России и СССР. Автор и соавтор 22 печатных учебников и задачников, а также 10 электронных учебников и задачников. Полный список из 325 публикаций А.А. Туганбаева, из которых 287 научных, можно найти на его личной странице в общероссийской математической сети Math-Net.Ru (<https://www.mathnet.ru/rus/person/8489>). В конце статьи мы перечислили некоторые его книги и последние статьи.

С 1978 г. по настоящее время Аскар Аканович преподает на кафедре высшей математики Национального исследовательского университета «Московский энергетический институт», с 1992 г. – профессор этой кафедры.

Научные интересы А.А. Туганбаева лежат в области алгебры (теория колец, коммутативная и гомологическая алгебра, абелевы группы). Здесь ему принадлежит ряд глубоких замечательных теорем. Он разработал теорию дистрибутивных модулей над некоммутативными кольцами, решив несколько важных и трудных проблем. В частности, им решена проблема Л.А. Скорнякова об описании колец, над которыми каждый модуль разлагается в прямую сумму модулей с дистрибутивной решеткой подмодулей. Аскар Аканович развил для некоммутативных колец технику, позволяющую построить некоммутативные аналоги нескольких важных результатов коммутативной алгебры. В частности, он построил теорию не обязательно коммутативных вполне целозамкнутых колец, объединив в этом классе все коммутативные области, вполне целозамкнутые в поле частных, и все самоинъективные кольца. Например, он доказал некоммутативный аналог классического результата о полной целозамкнутости нетеровых целозамкнутых областей. Кроме того, им построена теория локализаций некоммутативных дистрибутивных колец, включающая некоммутативные аналоги важных результатов Йенсена о совпадении коммутативных арифметических колец с локально цепными кольцами и эндоструктуре коммутативных колец единичной слабой глобальной

размерности. Он также получил ряд крупных результатов о модулях над некоммутативными кольцами, являющихся далеко идущими расширениями классических результатов для модулей над коммутативными дедекиндовыми кольцами, и завершил цикл работ ряда математиков путем построения окончательного описания строения близких к инъективным (проективным) модулей над некоммутативными дедекиндовыми кольцами. Кроме того, А.А. Туганбаев получил важные и интересные результаты о нильдеалах и пересечении степеней радикала некоммутативных колец, о кольцах, над которыми каждый ненулевой модуль обладает максимальным подмодулем, построил контрпример к некоторым результатам Райта о полудистрибутивных кольцах. Он описал некоммутативные кольца формальных степенных рядов единичной слабой глобальной размерности, перекрыв результаты Бревера и других для коммутативного случая. А.А. Туганбаев также развил теорию колец, разложимых в прямую сумму дистрибутивных правых идеалов, которая включает в себя как хорошо развитую теорию полуцепных (в частности, обобщенно однорядных) колец, так и теорию дистрибутивных колец (в частности, коммутативных арифметических колец).

А.А. Туганбаев решил ряд важных проблем структурной теории формальных рядов Лорана с произвольным кольцом коэффициентов. В частности, он доказал нильпотентность радикала Джекобсона кольца рядов Лорана с нётеровым кольцом коэффициентов и показал, что этот результат не может быть распространен на случай произвольного кольца коэффициентов.

А.А. Туганбаев решил много других важных задач структурной и гомологической теории колец. В частности, вместе с В.Т. Марковым и О.В. Любимцевым он опубликовал много совместных статей, где получен ряд глубоких результатов о кольцах с существенным центром и показано на многочисленных примерах, что этот класс колец гораздо шире многих других классов колец, близких в каком-то смысле к коммутативным. Например, такие кольца не обязаны быть алгебраическими над центром или удовлетворять какому-либо полиномиальному тождеству.

А.А. Туганбаев вместе с профессором П.А. Крыловым осуществил систематическое исследование ряда вопросов теории колец и модулей. Ими были получены различные результаты об идемпотентных функторах и локализациях в категориях модулей и абелевых групп. Цикл их статей посвящен кольцам формальных (говорят также «обобщенных») матриц, модулям над ними и автоморфизмам таких колец. В последнее время они выполнили изучение автоморфизмов и дифференцирований алгебр и коалгебр инцидентности предпорядоченных множеств.

Сорок пять лет Аскар Аканович преподает на высочайшем педагогическом уровне на кафедре высшей математики НИУ МЭИ, проработав на этой кафедре ассистентом, старшим преподавателем, доцентом и профессором. В высшей степени образованный, многосторонне одаренный человек и талантливый педагог, он снискал глубокое уважение преподавателей кафедры и студентов. Аскар Аканович начиная с первых занятий умеет расположить к себе студентов, вызвать у них интерес к математике. Трудный материал, с которым он знакомит студентов, становится в его умелом и увлекательном изложении интересным. Талант ученого и педагога, жизненная мудрость, открытость, доброта, необыкновенная работоспособность, широкий кругозор, эрудиция, доскональное знание преподаваемого предмета, умение работать с людьми, готовность помочь в любой труд-

ной ситуации, способность увлечь студентов красотой математики и научить их мыслить самостоятельно, доброжелательное, объективное и уважительное отношение к студентам и коллегам – все это притягивает к нему людей.

За научно-педагогические достижения Аскар Аканович награжден Почетной грамотой Министерства образования и науки Российской Федерации, он является ветераном труда РФ и ветераном МЭИ. Победил на конкурсе монографий, посвященном 90-летию НИУ МЭИ.

Аскар Аканович полон идей и планов, как всегда активно, много и результативно работает, пишет новые статьи и книги. Зная его, мы не сомневаемся, что все его идеи и планы будут осуществлены.

Редакционная коллегия журнала «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика», авторы заметки поздравляют Аскара Акановича с юбилеем, желают ему здоровья, благополучия в семье, творческой энергии, новых замечательных статей и книг.

Некоторые монографии А.А. Туганбаева

1. *Туганбаев А.А.* Тензорные произведения. Классические локализации. Алгебры кваaternionов. М. : Флинта, 2024. 176 с. ISBN: 978-5-9765-5402-3
2. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Кольца инцидентности: автоморфизмы и дифференцирования. М. : Флинта, 2023. 116 с. ISBN: 978-5-9765-5343-9
3. *Туганбаев А.А.* Центральные существенные кольца. М. : Флинта, 2022. 160 с. ISBN: 978-5-9765-5093-3
4. *Srivastava A.K., Tuganbaev A., Guil Asensio P.A.* Invariance of Modules under Automorphisms of their Envelopes and Covers. Cambridge University Press ; London Mathematical Society, 2021. 226 p. ISBN: 978-1-1089-5456-3
5. *Tuganbaev A.* Laurent Series Rings and Related Rings. Berlin–Boston :Walter de Gruyter, 2020. 170 p. ISBN: 978-3-11-070216-3
6. *Tuganbaev A.* Arithmetical Rings and Endomorphisms. Berlin–Boston :Walter de Gruyter, 2019. 176 p. ISBN: 978-3-11-065982-5
7. *Krylov P., Tuganbaev A.* Modules over Discrete Valuation Rings. Berlin : Walter de Gruyter, 2018. 337 p. ISBN: 978-3-11-061114-4
8. *Krylov P., Tuganbaev A.* Formal matrices. Springer, 2017. 156 p. ISBN: 978-3-319-53906-5
9. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. М. : МЦНМО, 2017. 190 с. ISBN: 978-5-4439-1115-1
10. *Jain S.K., Srivastava A.K., Tuganbaev A.A.* Cyclic Modules and the Structure of Rings. Oxford : Oxford University Press, 2012. 232 p. ISBN: 978-0-19-966451-1
11. *Туганбаев А.А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М. : МЦНМО, 2009. 472 с. ISBN: 978-5-94057-555-9
12. *Krylov P.A., Tuganbaev A.A.* Modules over Discrete Valuation Domains. Berlin : Walter de Gruyter, 2008. 366 p. ISBN: 978-3-11-020053-9
13. *Krylov P.A., Mikhalev A.V., Tuganbaev A.A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. Dordrecht–Boston–London : Springer Netherlands (Kluwer), 2003. 442 p. ISBN: 1-4020-1438-4
14. *Tuganbaev A.A.* Rings Close to Regular. Dordrecht–Boston–London : Springer Netherlands (Kluwer), 2002. 362 p. ISBN: 1-4020-0851-1
15. *Tuganbaev A.A.* Distributive Modules and Related Topics. Amsterdam : Taylor and Francis (Gordon and Breach), 1999. 258 p. ISBN: 90-5699-192-2
16. *Tuganbaev A.A.* Semidistributive Rings and Modules. Dordrecht–Boston–London : Springer Netherlands (Kluwer), 1998. 362 p. ISBN: 0-7923-5209-2

Некоторые статьи А.А. Туганбаева последних лет

17. *Tuganbaev A.* $\aleph_0$ -Distributive Modules and Rings // International Journal of Algebra and Computation. 2023. V. 33, № 6. P. 1157–1167.
18. *Lyubimtsev O.V., Tuganbaev A.A.* Local centrally essential subalgebras of triangular algebras, Linear and Multilinear Algebra. 2022. V. 70, № 13. P. 2415–2424.
19. *Tuganbaev A.A.* Automorphism-liftable modules // Journal of Algebra and Its Applications. 2022. V. 21, № 6. Art. 2250106.
20. *Tuganbaev A.A.* Right serial skew Laurent series rings // Journal of Algebra and Its Applications. 2021. V. 20, № 3. Art. 2150035.
21. *Lyubimtsev O.V., Tuganbaev A.A.* Centrally essential endomorphism rings of abelian groups // Communications in Algebra. 2020. V. 48, № 3. P. 1249–1256.
22. *Markov V.T., Tuganbaev A.A.* Rings essential over their centers // Communications in Algebra. 2019. V. 47, № 4. P. 1642–1649.
23. *Markov V.T., Tuganbaev A.A.* Cayley–Dickson process and centrally essential rings // Journal of Algebra and Its Applications. 2019. Vol. 18, № 12. Art. 1950229.
24. *Туганбаев А.А.* Модули над строго полупервичными кольцами // Дискретная математика. 2018. Т. 30, вып. 1. С. 129–135.
25. *Tuganbaev A.A.* Arithmetical rings and Krull dimension // Discrete Mathematics and Applications. 2018. V. 28, № 2. P. 113–118.
26. *Tuganbaev A.A.* Injective and automorphism-invariant non-singular modules // Communications in Algebra. 2018. V. 46, вып. 4. P. 1716–1721.
27. *Туганбаев А.А.* Арифметические кольца и размерность Крулля // Дискретная математика. 2017. Т. 29, вып. 3. С. 126–132.
28. *Tuganbaev A.A.* Automorphism-invariant non-singular rings and modules // J. Algebra. – 2017. – Vol. 485. – P. 247–253.
29. *Tuganbaev A.A.* Automorphism-invariant semi-Artinian modules // Journal of Algebra and Its Applications. 2017. V. 16, № 2. Art. 1750029.
30. *Tuganbaev A.A.* On serial rings // Discrete Mathematics and Applications. 2017. V. 27, № 2. P. 131–135.

***М.М. Арсланов, М.В. Зайцев, А.А. Фомин, В.И. Качалов,
В.Ф. Сафонов, П.А. Крылов, Е.А. Тимошенко, А.Р. Чехлов***

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2024. № 87

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 27.02.2024 г. Формат 70×100^{1/16}.
Печ. л. 11,3; усл. печ. л. 14,6. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5799.

Дата выхода в свет 07.03.2024 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru