

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.1, 004.05

DOI 10.17223/20710410/63/5

КОЛИЧЕСТВО АТТРАКТОРОВ И ЦИКЛИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ
В КОНЕЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
ОРИЕНТАЦИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

А. В. Жаркова

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия***E-mail:** ZharkovaAV3@gmail.com

Графовые модели занимают важное место в задачах, связанных с защитой информации и информационной безопасностью, в том числе при построении моделей и методов управления непрерывным функционированием и восстановлением систем, противодействия отказам в обслуживании. Рассматривается конечная динамическая система (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, состояниями которой являются все возможные ориентации полного графа K_n , а эволюционная функция задаётся следующим образом: динамическим образом орграфа является орграф, полученный из исходного путём переориентации всех дуг, входящих в стоки, других отличий между исходным орграфом и его образом нет. Получены формулы для подсчёта количества циклических (принадлежащих аттракторам) состояний системы; состояний, не являющихся циклическими; аттракторов системы, в том числе различных типов. Приведены соответствующие таблицы для n от 1 до 20 включительно.

Ключевые слова: аттрактор, граф, кибербезопасность, конечная динамическая система, отказоустойчивость, полный граф, циклическое состояние, эволюционная функция.

NUMBER OF ATTRACTORS AND CYCLIC STATES IN FINITE
DYNAMIC SYSTEMS OF COMPLETE GRAPHS ORIENTATIONS

A. V. Zharkova

Saratov State University, Saratov, Russia

Graph models occupy an important place in information security tasks, including the construction of models and methods for managing the continuous operation of systems and system recovery, countering denials of service. Finite dynamic systems of complete graphs orientations are considered. States of a dynamic system (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, are all possible orientations of the complete graph K_n , and evolutionary function transforms the graph orientation by reversing all the arcs that enter into sinks, and there are no other differences between the given and the next digraphs. Formulas are obtained for counting the number of cyclic (belonging to attractors) system states and the number of states that are not cyclic (not belonging to attractors), namely, the number of states belonging to attractors is 1, if $n = 1$; $2^{(n-1)(n-2)/2}(2^{n-1} - n) + n!$, if $n > 1$,

the number of states not belonging to attractors is 0, if $n = 1$; $n \cdot 2^{(n-1)(n-2)/2} - n!$, if $n > 1$. Formulas are obtained for counting the number of attractors of the system, including various types, namely, the number of attractors of length 1 is 1, if $n = 1$; $2^{(n-1)(n-2)/2}(2^{n-1} - n)$, if $n > 1$, the number of attractors of length n is $(n - 1)!$, the number of attractors (basins) is 1, if $n = 1$; $2^{(n-1)(n-2)/2}(2^{n-1} - n) + (n - 1)!$, if $n > 1$. The corresponding tables are given for $n = 1, \dots, 20$.

Keywords: *attractor, complete graph, cybersecurity, cyclic state, evolutionary function, fault-tolerance, finite dynamic system, graph.*

Введение

Графовые модели занимают важное место в задачах, связанных с информационной безопасностью. В вопросах кибербезопасности с помощью графовых моделей можно, например, выявлять связи между сущностями системы, группировать их, оценивать поведение, выявлять различные аномалии. В задачах, связанных с отказоустойчивостью компьютерных сетей, отказы процессоров интерпретируются как удаление соответствующих вершин, а отказы сетевых каналов — как удаление дуг.

При изучении модельных графов можно применять идеи и методы теории конечных динамических систем. В работе [1] представлены нетрадиционные приложения автоматов в алгебре, теории динамических систем, теории графов и спектральной теории. В модели [2] в качестве механизма восстановления работоспособности сети предлагается так называемая SER-динамика бесконтурных связных ориентированных графов. В [3] на множестве всех двоичных векторов заданной размерности вводится структура динамической системы, исследуются её свойства и устанавливается связь с динамикой из предыдущей модели. В [4] представлены конструктивные методы символической динамики и их приложения к изучению непрерывных и дискретных динамических систем. В работе [5] рассмотрены методологические аспекты динамического программирования, в том числе анализируются основные графовые интерпретации динамического программирования и представление структуры задачи динамического программирования с помощью графа взаимосвязей. В [6] рассматривается задача оптимального сопоставления для взвешенных графов и развивается новая аппроксимация этой проблемы путём построения динамических систем на многообразии ортогональных матриц. В [7] характеризуется циклическая эквивалентность класса конечных графовых динамических систем, при этом две конечные графовые динамические системы циклически эквивалентны, если их аттракторы изоморфны как ориентированные графы.

Модель InterSim [8] представляет собой гибкую среду общего назначения для моделирования графовых динамических систем и их обобщений. В [9] изучаются динамические системы, связанные с конечными двудольными разделёнными графами, алгебрами графов и парадоксальными разбиениями. В работе [10] описывается веб-приложение GDSCalc для вычисления и характеристики динамики дискретных графовых динамических систем. В [11] характеризуется широкое обобщение динамических систем над графами, состояния которых могут принимать значения в произвольной булевой алгебре с 2^p элементами, $p \in \mathbb{N}$. В работе [12] излагаются концептуальные основы общей теории дискретных динамических, релейных и логико-динамических систем на основе использования общих фундаментальных свойств рассматриваемых классов — дискретности структур и физической декомпозиции. В [13] предлагаются формализация графовых моделей структур многокомпонентных динамических систем с примене-

нием маркированных графов и матричный способ описания процесса функционирования ориентированных и неориентированных маркированных графов. В [14] решается проблема сосуществования аттракторов в однородных булевых графовых динамических системах, которые индуцируются булевыми функциями минтерма и макстерма, с направленным базовым графом зависимостей. В модели [15] изучается влияние графа взаимодействия на конечную динамическую систему.

В настоящей работе полные графы изучаются с точки зрения динамического подхода к кибербезопасности и отказоустойчивости графовых систем. Подсчитываются количества циклических и не являющихся циклическими состояний, количество аттракторов в конечных динамических системах ориентаций полных графов. Предварительные результаты частично были анонсированы на научных конференциях [16, 17]. Данная работа является полной и завершающей эти исследования.

1. Основные определения и постановка задачи

Основные понятия теории дискретных систем, в частности графов, используются согласно [18].

Под *конечной динамической системой* понимается пара (S, δ) , где S — конечное непустое множество состояний системы; $\delta : S \rightarrow S$ — отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией системы*. Каждой конечной динамической системе сопоставляется карта, представляющая собой функциональный орграф с множеством вершин S и дугами, проведёнными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности орграфа, задающего динамическую систему, называются её *бассейнами*. Каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контур, в свою очередь, называется *предельными циклами*, или *аттракторами*. Под *длиной* аттрактора будем понимать количество различных состояний в соответствующем контуре. Состояние, принадлежащее аттрактору, называется *циклическим*.

Основными проблемами теории конечных динамических систем являются задачи отыскания эволюционных параметров системы без построения карты и проведения динамических исследований на её основе. К числу таких характеристик относятся принадлежность состояния аттрактору, количество таких состояний, описание аттракторов системы, их количество.

В [19] описаны свойства принадлежности состояний аттракторам, сами аттракторы, подсчитано их количество в конечных динамических системах ориентаций некоторых типов графов. В данной работе подсчитываются количества циклических и не являющихся циклическими состояний, количество аттракторов в конечных динамических системах ориентаций полных графов.

2. Описание конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α)

Пусть дан полный граф $G = K_n$, $n \geq 1$, $m = n(n-1)/2$ — число рёбер. Пометим его вершины и придадим его рёбрам произвольную ориентацию, тем самым получив направленный граф $\vec{G} = (V, \beta)$, где отношение смежности β антирефлексивно и антисимметрично. Применим к полученному орграфу эволюционную функцию α , которая у данного орграфа одновременно переориентирует все дуги, входящие в стоки, а остальные дуги оставляет без изменения, в результате получим орграф $\alpha(\vec{G})$. Если проделать указанные действия со всеми возможными ориентациями данного графа, то получим карту конечной динамической системы, состоящую из одного или нескольких бассейнов.

Таким образом, рассмотрим конечную динамическую систему (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, где через Γ_{K_n} обозначено множество всех возможных ориентаций полного графа K_n , $|\Gamma_{K_n}| = 2^m$, а эволюционная функция α задана следующим образом: если дан некоторый орграф $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, то его динамическим образом $\alpha(\vec{G})$ является орграф, полученный из $\vec{G}$ одновременной переориентацией всех дуг, входящих в стоки, других отличий между $\vec{G}$ и $\alpha(\vec{G})$ нет.

На рис. 1 изображён граф K_3 и карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α) .

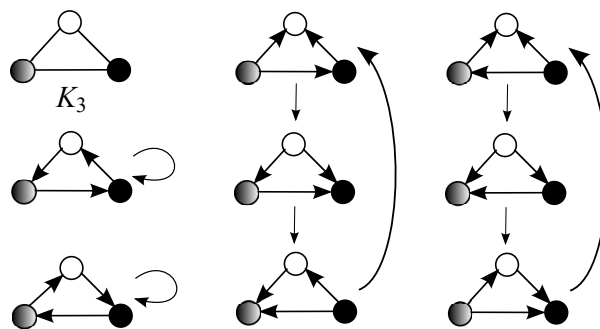


Рис. 1. Граф K_3 и карта конечной динамической системы (Γ_{K_3}, α)

В [2] рассматривается конечная динамическая система (Ω, α) , где Ω — множество всех бесконтурных ориентаций данного связного графа, и отмечается, что для полного графа существует $n!$ бесконтурных ориентаций, где $n!$ — количество перестановок его вершин, при этом система имеет $(n-1)!$ бассейнов, каждый из которых состоит исключительно из аттрактора длины n , то есть все состояния данной системы являются циклическими.

Под *вектором степеней захода* орграфа будем понимать вектор, компонентами которого являются расположенные в убывающем порядке степени захода всех его вершин. Например, на рис. 1 расположенный сверху справа орграф имеет вектор степеней захода $(2, 1, 0)$.

3. Количество циклических состояний в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α)

Теорема 1 [20]. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, состояние $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$ принадлежит аттрактору (является циклическим) тогда и только тогда, когда орграф $\vec{G}$:

- 1) не имеет стока или
- 2) имеет вектор степеней захода $(n-1, n-2, \dots, 0)$.

Теорема 2. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, количество принадлежащих аттракторам (циклических) состояний равно

$$\begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 2^{(n-1)(n-2)/2}(2^{n-1} - n) + n!, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Количество состояний системы (Γ_{K_n}, α) равно $2^{n(n-1)/2}$. В теореме 1 приведён критерий принадлежности состояния системы аттрактору (циклического состояния).

Пусть $n = 1$.

В системе существует единственное состояние $\vec{G} \in \Gamma_{K_1}$, которое является циклическим. Таким образом, в конечной динамической системе (Γ_{K_1}, α) количество принадлежащих аттракторам состояний равно 1.

Пусть $n > 1$.

Заметим, что множества состояний, подходящих под п. 1 и 2 теоремы 1, не пересекаются, так как компонента $n - 1$ в векторе степеней захода указывает на наличие стока в соответствующем орграфе. Таким образом, общее число циклических состояний равно сумме количеств состояний, соответствующих п. 1 и 2 теоремы 1, подсчитаем их.

1) Найдём количество состояний системы, у которых нет стока.

Очевидно, что в ориентации полного графа может быть не более одного стока.

Пусть дано состояние $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которого есть сток. Удалим у орграфа $\vec{G}$ сток и обозначим полученный новый орграф через $\vec{G}'$. Орграф $\vec{G}'$ имеет $n - 1$ вершину и его симметризация G' также является полным графом. Количество всех возможных ориентаций полного графа G' с $n - 1$ вершиной равно $2^{(n-1)(n-2)/2}$. Удалённый сток мог быть на месте любой из n вершин орграфа $\vec{G}$. Таким образом, количество состояний $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которых есть сток, равно $n \cdot 2^{(n-1)(n-2)/2}$. Получаем, что количество состояний $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которых нет стока, равно

$$2^{n(n-1)/2} - n \cdot 2^{(n-1)(n-2)/2} = 2^{(n-1)(n-2)/2} (2^{n-1} - n).$$

2) Найдём количество состояний системы, которые имеют вектор степеней захода $(n - 1, n - 2, \dots, 0)$. Докажем, что оно равно числу перестановок n -элементного множества $\{n - 1, n - 2, \dots, 0\}$, то есть $n!$.

Предположим, что это не так, а именно: есть перестановка n -элементного множества $\{n - 1, n - 2, \dots, 0\}$, не соответствующая ни одному из состояний системы. Попробуем последовательно построить соответствующую ориентацию графа G с n вершинами. При построении будем нумеровать вершины согласно их степени захода.

Начинаем с вершины v'_0 , степень захода которой равна 0: $d^-(v'_0) = 0$, то есть она является источником, все рёбра ориентируем из неё.

Находим вершину v'_1 , степень захода которой равна 1: $d^-(v'_1) = 1$, то есть она достижима только из одной вершины, а именно из вершины v'_0 , все остальные рёбра ориентируем из неё.

Переходим к вершине v'_2 , степень захода которой равна 2: $d^-(v'_2) = 2$, то есть она достижима только из двух вершин, а именно из v'_0 и v'_1 , все остальные рёбра ориентируем из неё.

Продолжая аналогично, доходим до вершины v'_{n-1} , у которой степень захода равна $n - 1$: $d^-(v'_{n-1}) = n - 1$, то есть она является стоком, и на данном шаге все рёбра уже ориентированы в данную вершину.

Таким образом, получили ориентацию полного графа G , причём единственную, у которой вектор, компонентами которого являются расположенные в заданном порядке степени захода вершин, совпадает с данной перестановкой — противоречие.

Таким образом, в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n > 1$, количество принадлежащих аттракторам (циклических) состояний равно $2^{(n-1)(n-2)/2} (2^{n-1} - n) + n!$.

Теорема 2 доказана. ■

Например, в конечной динамической системе (Γ_{K_3}, α) все восемь состояний являются циклическими (см. рис. 1), при этом по теореме 2 имеем $2^1 (2^2 - 3) + 3! = 8$.

В табл. 1 приведены данные по количеству принадлежащих аттракторам состояний в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 \leq n \leq 20$. Можно заметить, что абсолютное большинство составляют циклические состояния.

Т а б л и ц а 1

Количество циклических состояний в (Γ_{K_n}, α)

n	$ \Gamma_{K_n} $	Количество циклических состояний	%
1	2^0	1	100
2	2^1	2	100
3	2^3	8	100
4	2^6	56	87,5
5	2^{10}	824	≈ 80
6	2^{15}	27344	≈ 83
7	2^{21}	1872816	≈ 89
8	2^{28}	251698560	≈ 94
9	2^{36}	66303920512	≈ 96
10	2^{45}	34497180950272	≈ 98
11	2^{55}	35641768965903616	$\approx 98,9$
12	2^{66}	73354630731089640448	$\approx 99,4$
13	2^{78}	301272224211830624013312	$\approx 99,7$
14	2^{91}	2471648838202109434865068032	$\approx 99,8$
15	2^{105}	40527681006124779440955203213312	$\approx 99,9$
16	2^{120}	1328578958677599019450261671029080064	$\approx 99,95$
17	2^{136}	87089689055831903076784535138195324370944	$\approx 99,97$
18	2^{153}	11416413520500907364026648525411317876849311744	$\approx 99,986$
19	2^{171}	2992938411604397870579225677935591422639720079360000	$\approx 99,993$
20	2^{190}	1569215570739605117175417732871168545075536656127224971264	$\approx 99,996$

Следствие 1. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, количество не принадлежащих аттракторам (не являющихся циклическими) состояний равно

$$\begin{cases} 0, & \text{если } n = 1, \\ n \cdot 2^{(n-1)(n-2)/2} - n!, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

4. Количество аттракторов в конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α)

Теорема 3 [20]. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, существуют следующие аттракторы:

- 1) длины 1, каждый из которых образован состоянием $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которого нет стока;
- 2) длины n , каждый из которых состоит из состояний $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которых вектор степеней захода есть $(n-1, n-2, \dots, 0)$, при этом аттрактор представляет собой контур, в котором каждое следующее состояние получается из предыдущего таким образом: если $(d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n))$ — вектор, составленный из степеней захода вершин в порядке их нумерации для $\vec{G}$, то для $\alpha(\vec{G}) \in \Gamma_{K_n}$ соответствующий вектор равен $(d^-(v_1)+1, d^-(v_2)+1, \dots, d^-(v_n)+1)$, где сложение осуществляется по модулю n ,

и только они.

Теорема 4. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, количество аттракторов длины 1 равно

$$\begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 2^{(n-1)(n-2)/2} (2^{n-1} - n), & \text{если } n > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. Согласно теореме 3, количество аттракторов длины 1 совпадает с количеством состояний $\vec{G} \in \Gamma_{K_n}$, у которых нет стока, подсчитано в доказательстве теоремы 2 и совпадает с (1). ■

Например, в конечной динамической системе (Γ_{K_3}, α) количество аттракторов длины 1 равно 2 (см. рис. 1), при этом по теореме 4 имеем $2^{(3-1)(3-2)/2} (2^{3-1} - 3) = 2$.

В табл. 2 приведены данные по количеству аттракторов длины 1 в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 \leq n \leq 20$. Можно заметить, что с ростом n аттракторы длины 1 начинают составлять абсолютное большинство по сравнению с аттракторами длины n .

Т а б л и ц а 2

Количество аттракторов длины 1 в (Γ_{K_n}, α)

n	Количество аттракторов длины 1	%
1	1	100
2	0	0
3	2	50
4	32	≈ 84
5	704	≈ 97
6	26624	$\approx 99,6$
7	1867776	$\approx 99,96$
8	251658240	$\approx 99,998$
9	66303557632	≈ 100
10	34497177321472	≈ 100
11	35641768925986816	≈ 100
12	73354630730610638848	≈ 100
13	301272224211824396992512	≈ 100
14	2471648838202109347686776832	≈ 100
15	40527681006124779439647528845312	≈ 100
16	1328578958677599019450240748239192064	≈ 100
17	87089689055831903076784534782507896274944	≈ 100
18	11416413520500907364026648525404915503143583744	≈ 100
19	2992938411604397870579225677935591300994619670528000	≈ 100
20	1569215570739605117175417732871168545073103754119048331264	≈ 100

Теорема 5. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, количество аттракторов длины n равно $(n-1)!$

Доказательство. При $n = 1$ имеем $1 = 0!$ аттрактор длины 1 (по теореме 4).

Пусть $n > 1$. В теореме 3 описаны аттракторы длины n в системе; согласно доказательству теоремы 2, п. 2, количество соответствующих циклических состояний равно $n!$. Таким образом, в системе (Γ_{K_n}, α) , $n > 1$, количество аттракторов длины n равно $n!/n = (n-1)!$. ■

Например, в конечной динамической системе (Γ_{K_3}, α) количество аттракторов длины 3 равно 2 (см. рис. 1), при этом по теореме 5 имеем $(3-1)! = 2$.

В табл. 3 приведены данные по количеству аттракторов длины n в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 \leq n \leq 20$.

Т а б л и ц а 3
Количество аттракторов длины n в (Γ_{K_n}, α)

n	Количество аттракторов длины n	%
1	1	100
2	1	100
3	2	50
4	6	≈ 16
5	24	≈ 3
6	120	$\approx 0,4$
7	720	$\approx 0,04$
8	5040	$\approx 0,002$
9	40320	$\approx 6 \cdot 10^{-5}$
10	362880	$\approx 1 \cdot 10^{-6}$
11	3628800	$\approx 1 \cdot 10^{-8}$
12	39916800	$\approx 5 \cdot 10^{-11}$
13	479001600	$\approx 2 \cdot 10^{-13}$
14	6227020800	$\approx 3 \cdot 10^{-16}$
15	87178291200	$\approx 2 \cdot 10^{-19}$
16	1307674368000	$\approx 1 \cdot 10^{-22}$
17	20922789888000	$\approx 2 \cdot 10^{-26}$
18	355687428096000	$\approx 3 \cdot 10^{-30}$
19	6402373705728000	$\approx 2 \cdot 10^{-34}$
20	121645100408832000	$\approx 8 \cdot 10^{-39}$

Теорема 6. В конечной динамической системе (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, количество аттракторов (бассейнов) равно

$$\begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 2^{(n-1)(n-2)/2} (2^{n-1} - n) + (n-1)!, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Доказательство. При $n = 1$, очевидно, количество аттракторов равно 1.

Пусть $n > 1$. Согласно доказательству теоремы 2 и теореме 3, общее число аттракторов в системе (Γ_{K_n}, α) равно сумме количеств аттракторов длины 1 и n , которые подсчитаны в теоремах 4 и 5. ■

Например, в конечной динамической системе (Γ_{K_3}, α) четыре аттрактора (см. рис. 1), при этом по теореме 6 имеем $2^{(3-1)(3-2)/2} (2^{3-1} - 3) + (3-1)! = 4$.

В табл. 4 приведены данные по количеству аттракторов в конечных динамических системах (Γ_{K_n}, α) для $1 \leq n \leq 20$.

Например, карта системы (Γ_{K_7}, α) , $|\Gamma_{K_7}| = 2097152$, состоит из 1868496 бассейнов, при этом 224336 состояний не являются циклическими (что составляет $\approx 11\%$ от общего числа состояний), 1872816 состояний являются циклическими, которые образуют 1867776 аттракторов длины 1 (что составляет $\approx 99,96\%$ от общего числа аттракторов) и 720 аттракторов длины 7.

Т а б л и ц а 4

Количество аттракторов в (Γ_{K_n}, α)

n	Количество аттракторов (бассейнов)
1	1
2	1
3	4
4	38
5	728
6	26744
7	1868496
8	251663280
9	66303597952
10	34497177684352
11	35641768929615616
12	73354630730650555648
13	301272224211824875994112
14	2471648838202109353913797632
15	40527681006124779439734707136512
16	1328578958677599019450242055913560064
17	87089689055831903076784534803430686162944
18	11416413520500907364026648525405271190571679744
19	2992938411604397870579225677935591307396993376256000
20	1569215570739605117175417732871168545073225399219457163264

Заключение

В работе получены формулы для подсчёта количества циклических (принадлежащих аттракторам) и не являющихся циклическими состояний конечной динамической системы (Γ_{K_n}, α) , $n \geq 1$, всех возможных ориентаций полного графа K_n ; получены формулы для подсчёта количества аттракторов системы, в том числе различных типов, что является полезным для задач, связанных с информационной безопасностью, например для построения отказоустойчивых графовых систем с непрерывным функционированием и восстановлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И. Автоматы, динамические системы и группы // Труды МИАН. 2000. Т. 231. С. 134–214.
2. Barbosa V. C. An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London: Chapman&Hall/CRC, 2001. 372 p.
3. Салий В. Н. Об одном классе конечных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Приложение. 2005. № 14. С. 23–26.
4. Osipenko G. Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2007. 300 p.
5. Щербина О. А. Методологические аспекты динамического программирования // Динамические системы. 2007. Вып. 22. С. 21–36.
6. Zavlanos M. M. and Pappas G. J. A dynamical systems approach to weighted graph matching // Automatica. 2008. V. 44. No. 11. P. 2817–2824.
7. Macauley M. and Mortveit H. S. Cycle equivalence of graph dynamical systems // Nonlinearity. 2009. V. 22. No. 2. P. 421–436.
8. Kuhlman C. J., Kumar V. S. A., Marathe M. V., et al. A general-purpose graph dynamical system modeling framework // Proc. 2011 Winter Simulation Conf. Phoenix, USA, 2011. P. 296–308.

9. *Ara P. and Exel R.* Dynamical systems associated to separated graphs, graph algebras, and paradoxical decompositions // *Adv. Math.* 2014. V. 252. P. 748–804.
10. *Abdelhamid S. H. E., Kuhlman C. J., Marathe M. V., et al.* GDSCalc: a web-based application for evaluating discrete graph dynamical systems // *PLoS ONE*. 2015. No. 10 (8). 24 p. <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0133660>.
11. *Aledo J. A., Martinez S., and Valverde J. C.* Graph dynamical systems with general Boolean states // *Appl. Math. & Inform. Sci.* 2015. V. 9. No. 4. P. 1803–1808.
12. *Кадыров А. А., Кадыров А. А.* Концептуальные основы общей теории дискретных динамических, релейных и логико-динамических систем на базе физической декомпозиции и графовых моделей // *Вестник Волгогр. гос. ун-та. Сер. 10. Иннов. деят.* 2015. № 2 (17). С. 80–89.
13. *Волгина М. А.* Формализация информационных потоков графовых моделей динамических систем // *Альманах современной науки и образования*. 2015. № 3 (93). С. 23–26.
14. *Aledo J. A., Diaz L. G., Martinez S., and Valverde J. C.* Coexistence of periods in parallel and sequential boolean graph dynamical systems over directed graphs // *Math.* 2020. No. 8 (10). P. 1812–1825.
15. *Gadouleau M.* On the influence of the interaction graph on a finite dynamical system // *Natural Computing*. 2020. No. 19. P. 15–28.
16. *Жаркова А. В.* О количестве циклических состояний в конечных динамических системах ориентаций полных графов // *Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. Саратов, 2018*. С. 149–151.
17. *Жаркова А. В.* О количестве аттракторов в конечных динамических системах ориентаций полных графов // *Прикладная дискретная математика. Приложение*. 2018. № 11. С. 106–109.
18. *Богомолов А. М., Салый В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997. 368 с.
19. *Власова А. В.* Аттракторы в динамических системах двоичных векторов. Деп. в ВИНТИ 23.06.2010. № 392–В2010. 19 с.
20. *Жаркова А. В.* Аттракторы и циклические состояния в конечных динамических системах ориентаций полных графов // *Прикладная дискретная математика*. 2023. № 59. С. 80–87.

REFERENCES

1. *Grigorchuk R. I., Nekrashevych V. V., Sushchansky V. I.* Avtomaty, dinamicheskie sistemy i gruppy [Automata, Dynamic Systems and Groups]. *Trudy MIAN*, 2000, vol. 231, pp. 134–214. (in Russian)
2. *Barbosa V. C.* An Atlas of Edge-Reversal Dynamics. London, Chapman&Hall/CRC, 2001. 372 p.
3. *Salii V. N.* Ob odnom klasse konechnykh dinamicheskikh sistem [On a class of finite dynamic systems]. *Vestnik Tomskogo Gosuniversiteta. Prilozhenie*, 2005, no. 14, pp. 23–26 (in Russian).
4. *Osipenko G.* Dynamical Systems, Graphs, and Algorithms. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2007. 300 p.
5. *Shcherbina O. A.* Metodologicheskie aspekty dinamicheskogo programmirovaniya [Methodological aspects of dynamic programming]. *Dinamicheskie Sistemy*, 2007, no. 22, pp. 21–36. (in Russian)
6. *Zavlanos M. M. and Pappas G. J.* A dynamical systems approach to weighted graph matching. *Automatica*, 2008, vol. 44, no. 11, pp. 2817–2824.
7. *Macauley M. and Mortveit H. S.* Cycle equivalence of graph dynamical systems. *Nonlinearity*, 2009, vol. 22, no. 2, pp. 421–436.

8. Kuhlman C. J., Kumar V. S. A., Marathe M. V., et al. A general-purpose graph dynamical system modeling framework. Proc. 2011 Winter Simulation Conf., Phoenix, USA, 2011, pp. 296–308.
9. Ara P. and Exel R. Dynamical systems associated to separated graphs, graph algebras, and paradoxical decompositions. Adv. Math., 2014, vol. 252, pp. 748–804.
10. Abdelhamid S. H. E., Kuhlman C. J., Marathe M. V., et al. GDSCalc: a web-based application for evaluating discrete graph dynamical systems. PLoS ONE, 2015, no. 10 (8), 24 p. <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0133660>.
11. Aledo J. A., Martínez S., and Valverde J. C. Graph dynamical systems with general boolean states. Appl. Math. & Inform. Scie., 2015, vol. 9, no. 4, pp. 1803–1808.
12. Kadyrov A. A. and Kadyrov A. A. Kontseptual'nye osnovy obshchey teorii diskretnykh dinamicheskikh, releynykh i logiko-dinamicheskikh sistem na baze fizicheskoy dekompozitsii i grafovyykh modeley [Conceptual foundations of general theory of discrete dynamic, relay and logical-dynamic systems based on physical decomposition and graph models]. Vestnik VolSU, Ser. 10, Innov. Deyat., 2015, no. 2 (17), pp. 80–89. (in Russian)
13. Volgina M. A. Formalizatsiya informatsionnykh potokov grafovyykh modeley dinamicheskikh sistem [Formalization of information flows of graph models of dynamical systems]. Al'manakh Sovremennoy Nauki i Obrazovaniya, 2015, no. 3 (93), pp. 23–26 (in Russian).
14. Aledo J. A., Diaz L. G., Martínez S., and Valverde J. C. Coexistence of periods in parallel and sequential Boolean graph dynamical systems over directed graphs. Math., 2020, no. 8 (10), pp. 1812–1825.
15. Gadouleau M. On the influence of the interaction graph on a finite dynamical system. Natural Computing, 2020, no. 19, pp. 15–28.
16. Zharkova A. V. O kolichestve tsiklicheskikh sostoyaniy v konechnykh dinamicheskikh sistemakh orientatsiy polnykh grafov [On the number of cyclic states in finite dynamic systems of complete graphs orientations]. Komp'yuternye Nauki i Informatsionnye Tekhnologii, Saratov, 2018, pp. 149–151. (in Russian)
17. Zharkova A. V. O kolichestve attraktorov v konechnykh dinamicheskikh sistemakh orientatsiy polnykh grafov [On the number of attractors in finite dynamic systems of complete graphs orientations]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika. Prilozhenie, 2018, no. 11, pp. 106–109. (in Russian)
18. Bogomolov A. M. and Salii V. N. Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem [Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1997. 368 p. (in Russian)
19. Vlasova A. V. Attraktory v dinamicheskikh sistemakh dvoichnykh vektorov [Attractors in Dynamic Systems of Binary Vectors]. Dep. in VINITI 23.06.2010, no. 392-B2010, 19 p. (in Russian)
20. Zharkova A. V. Attraktory i tsiklicheskie sostoyaniya v konechnykh dinamicheskikh sistemakh orientatsiy polnykh grafov [Attractors and cyclic states in finite dynamic systems of complete graphs orientations]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2023, no. 59, pp. 80–87. (in Russian)