ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014 Математика и механика № 3(29)

# МЕХАНИКА

УДК 532.5.031

**О.А. Арбит**

## О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Показывается, что координаты частиц жидкости и давление можно выразить через одну произвольную функцию $\psi$ так, что условие несжимаемости будет выполнено при любом ее выборе. Введение такой функции в качестве искомой величины существенно облегчает получение аналитических и численных решений уравнений гидродинамики, записанных в переменных Лагранжа.

**Ключевые слова:** *уравнение движения в форме Лагранжа, функциональные определители, волны Герстнера.*

### 1. Уравнения Лагранжа

Течение несжимаемой жидкости можно записывать в переменных Эйлера или в переменных Лагранжа. Обе формы этих уравнений были известны давно, но гидродинамики обычно предпочитают пользоваться переменными Эйлера. Это объясняется необычностью уравнений Лагранжа. В них нелинейные члены входят в форме, которая неудобна для расчетов и аналитических выкладок. Так, для двумерной задачи уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{\partial x}{\partial a}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial a}\ddot{y}=-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right),\quad \frac{\partial x}{\partial b}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial b}\ddot{y}=-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right). \tag{1}$$

Предполагается, что сила тяжести является единственной внешней силой. К уравнениям (1) добавляется условие несжимаемости в виде детерминанта, который должен быть равен единице:

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}=1. \tag{2}$$

Искомыми величинами являются функции $x(a,b,t)$, $y(a,b,t)$ и $p(a,b,t)$, которые должны определяться из системы трех дифференциальных уравнений (1), (2). Дополнительными условиями являются граничные условия, условия на свободной поверхности и начальные данные. Независимыми переменными являются параметры $a$ и $b$, которые позволяют различать частицы.

Система уравнений Лагранжа все еще недостаточно исследована с математической точки зрения. В классических работах [1, 2] этим уравнениям посвящены не более трех небольших параграфов. Из точных решений известна только волна Герстнера, распространяющаяся над бесконечно глубокой жидкостью. В задачах о разрушении плотины или о всплывании пузыря [3] предполагается существование решения в виде степенных рядов по времени с коэфициентами, зависящими от $a$ и

$b$. Сходимость для этих рядов не была изучена, но кажется правдоподобным, что они сходятся, по крайней мере, для достаточно малых промежутков времени. В последней из известных нам работ [4] переменные Эйлера и переменные Лагранжа используются одновременно в глубокой связи друг с другом. Но и в ней не делается попыток исключения условия несжимаемости (2) из уравнений Лагранжа с целью уменьшения числа искомых переменных величин. Поэтому в настоящей статье показывается, что условие несжимаемости (2) можно выполнить автоматически, если координаты частицы $x(a,b,t)$ и $y(a,b,t)$ выразить через одну и ту же произвольную функцию, зависящую от координат и времени. В переменых Лагранжа такая функция играет ту же роль что и функция тока в переменных Эйлера.

## 2. Условие несжимаемости

Переменные $a$ и $b$ не обязательно должны обозначать начальные положения частиц жидкости. Вместо них можно применять и другие величины $\alpha$ и $\beta$, которые также являются координатами Лагранжа и изменяются непрерывно при переходе от одной частицы к другой. Уравнения движения (1) при этом не изменятся, а условие несжимаемости (2) в переменных $\alpha$ и $\beta$ примет следующий вид:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} = \frac{\partial(a,b)}{\partial(\alpha,\beta)}. \tag{3}$$

Для уравнения (3) можно дать решение, содержащее произвольную функцию. Для этого целесообразно рассматривать величины $x$, $y$ и $a$, $b$ одновременно как функции двух параметров $\alpha$ и $\beta$. Тогда решение уравнения (3) с помощью функции $\psi(\alpha,\beta,t)$ может быть представлено в следующем виде:

$$x = \alpha + \psi_\beta, \qquad y = \beta - \psi_\alpha; \tag{4}$$

$$a = \alpha - \psi_\beta, \qquad b = \beta + \psi_\alpha. \tag{5}$$

Действительно, вычисляя функциональные определители (3) отдельно для левой и правой частей с помощью выражений (4) и (5), имеем

$$\begin{vmatrix} 1+\psi_{\alpha\beta} & -\psi_{\alpha\alpha} \\ \psi_{\beta\beta} & 1-\psi_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\psi_{\alpha\beta} & \psi_{\alpha\alpha} \\ -\psi_{\beta\beta} & 1+\psi_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = 1 - \psi_{\alpha\beta}^2 + \psi_{\alpha\alpha}\psi_{\beta\beta}. \tag{6}$$

Таким образом, преобразования (4) и (5) автоматически выполняют условие несжимаемости при любом выборе функции $\psi(\alpha,\beta,t)$. Допустим, например, что область переменных $\alpha$ и $\beta$ является прямоугольной: $0 < \alpha < \pi$, $-h < \beta < 0$ и функция $\psi(\alpha,\beta)$ имеет вид

$$\psi(\alpha,\beta) = \tau \sin 2\alpha \frac{\operatorname{sh} 2(\beta + h)}{\operatorname{ch} 2h}. \tag{7}$$

На рис. 1 показано как выглядят линии постоянных значений $\alpha,\beta$ и $a,b$ в плоскости $x,y$, вычисленные по формулам (4), (5) и (7) для параметров $\tau = 0{,}1$, $h = 1$. Видно, что сетка координат частиц жидкости имеет разный вид в переменных $\alpha,\beta$ и $a,b$.

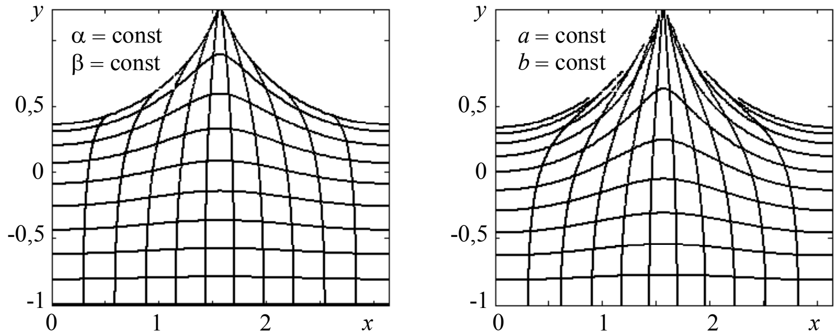


Рис. 1. Пример расчета координат частиц жидкости в плоскостях $\alpha,\beta$ и $a,b$

### 3. Уравнения движения

После введения функции $\psi(\alpha,\beta,t)$ отпадает необходимость в выполнении условия несжимаемости (2). Поэтому два уравнения движения (1) служат теперь для определения функции $\psi$ и давления. В переменных $\alpha$ и $\beta$ уравнения движения (1) записываются в виде

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\ddot{y}=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right),\quad \frac{\partial x}{\partial\beta}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial\beta}\ddot{y}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{p}{\rho}+gy\right). \qquad (8)$$

Если в них подставить величины $x$ и $y$, выраженные через функцию $\psi$ по формулам (4), то система уравнений (8) преобразуется к виду

$$\ddot{\psi}_\beta-g\psi_{\alpha\alpha}+\begin{Vmatrix}\psi_{\alpha\beta} & -\ddot{\psi}_\alpha\\ \psi_{\alpha\alpha} & \ddot{\psi}_\beta\end{Vmatrix}=-\Phi_\alpha,\quad -\ddot{\psi}_\alpha-g\psi_{\alpha\beta}+\begin{Vmatrix}\psi_{\alpha\beta} & -\ddot{\psi}_\beta\\ \psi_{\beta\beta} & \ddot{\psi}_\alpha\end{Vmatrix}=-\Phi_\beta. \qquad (9)$$

Здесь $\Phi=p/\rho+g\beta$ и нелинейные члены записаны в виде детерминантов. Посредством дифференцирования можно исключить правую часть $\Phi$ из системы уравнений (9). Тогда получаем, что функция $\psi$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{\psi}_{\alpha\alpha}+\ddot{\psi}_{\beta\beta}+\frac{\partial(\psi_\alpha,\ddot{\psi}_\alpha)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(\psi_\beta,\ddot{\psi}_\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}=0. \qquad (10)$$

Из него видно, что имеется первый интеграл

$$\dot{\psi}_{\alpha\alpha}+\dot{\psi}_{\beta\beta}+\frac{\partial(\psi_\alpha,\dot{\psi}_\alpha)}{\partial(\alpha,\beta)}+\frac{\partial(\psi_\beta,\dot{\psi}_\beta)}{\partial(\alpha,\beta)}=S(\alpha,\beta), \qquad (11)$$

где $S(\alpha,\beta)$ не зависит от времени.

Если известна какая-либо функция $\psi(\alpha,\beta,t)$, удовлетворяющая уравнению (10) с подходящими граничными условиями на твердых стенках, то поиск давления из системы уравнений (9) сводится к решению уравнения Пуассона. В таких случаях обычно получается точное решение. Но возможны и приближенные математические модели, основанные на линеаризации уравнений (9), (10) или на теории «мелкой воды», как это обычно делается в уравнениях, записанных в переменных Эйлера. В любом случае применение функции $\psi$ существенно упрощает решение прикладных задач, описываемых системой уравнений вида (1) и (2).

## 4. Пример точного решения

Решая задачу о стоячих волнах в слое жидкости, возьмем область переменных Лагранжа в виде бесконечной полосы: $-\infty < \alpha < \infty$, $-h < \beta < 0$, у которой нижнему краю $(\beta = -h)$ соответствует твердая стенка. Верхнюю сторону полосы $(\beta = 0)$ будем считать свободной поверхностью, давление на которой равно нулю в любой момент времени. Пусть функция $\psi$ содержит зависящий от времени множитель $f(t)$. Тогда нелинейные члены в уравнении (10) обращаются в нуль и, следовательно, функция $\psi$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Запишем ее в виде

$$\psi(\alpha,\beta,t) = f(t)\cos k\alpha \frac{\operatorname{sh} k(\beta+h)}{k^2 \operatorname{ch} kh}, \tag{12}$$

где $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda$ – длина волны. На твердой стенке величина $y = -h - \psi_\alpha$ имеет постоянное значение, вследствие чего функция $\psi_\alpha$ обращается в нуль. Подстановка (12) в систему уравнений (9) приводит ее к виду

$$\frac{\cos k\alpha}{k}\left[\ddot{f}\frac{\operatorname{ch} k(\beta+h)}{\operatorname{ch} kh} + gk\frac{\operatorname{sh} k(\beta+h)}{\operatorname{ch} kh} f\right] - \frac{f\cdot\ddot{f}}{2k}\frac{\sin 2k\alpha}{\operatorname{ch}^2 kh} = -\Phi_\alpha,$$

$$\frac{\sin k\alpha}{k}\left[\ddot{f}\frac{\operatorname{sh} k(\beta+h)}{\operatorname{ch} kh} + gk\frac{\operatorname{ch} k(\beta+h)}{\operatorname{ch} kh} f\right] - \frac{f\cdot\ddot{f}}{2k}\frac{\operatorname{sh} 2k(\beta+h)}{\operatorname{ch}^2 kh} = -\Phi_\beta. \tag{13}$$

Из этих уравнений требуется найти поле давления $\Phi$ и конкретизировать вид функции $f(t)$, исходя из условия постоянства давления на свободной поверхности. В левой части уравнений (13) содержатся в виде множителей как сама функция $f(t)$, так и произведение функций $f\cdot\ddot{f}$. Искомая функция $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ также должна представляться в виде суммы двух слагаемых с такими же множителями. Дифференцируя первое из уравнений (13) по $\alpha$, второе по переменной $\beta$ и складывая их, получим краевые задачи для получения величин $\Phi_1$ и $\Phi_2$:

$$\Phi_{1\alpha\alpha} + \Phi_{2\beta\beta} = 0, \Phi_1(\alpha,0,t) = 0,\ \Phi_{1\beta}(\alpha,-h,t) = -gf(t)\frac{\sin k\alpha}{\operatorname{ch} kh}; \tag{14}$$

$$\Phi_{2\alpha\alpha} + \Phi_{2\beta\beta} = -f\cdot\ddot{f}\frac{\operatorname{ch} 2k(\beta+h) - \cos 2k\alpha}{\operatorname{ch}^2 kh},\ \Phi_2(\alpha,0,t) = 0,\ \Phi_{2\beta}(\alpha,-h,t) = 0. \tag{15}$$

Граничное условие постоянства давления $\Phi_1(\alpha,0,t) = 0$ для функции $\Phi_1$ означает, что функция $f(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\ddot{f} + gk\operatorname{tg} kh\cdot f = 0, \tag{16}$$

то есть слой жидкости колеблется с частотой $\omega^2 = gk\operatorname{tg} kh$ и с безразмерной амплитудой $\varepsilon$, отнесенной к длине волны. Граничные задачи (14) и (15) легко решаются и, учитывая равенство $\Phi = p/\rho + g\beta$, получаем, что поле давлений имеет следующий вид:

$$\frac{p}{\rho} = -g\beta - gf(t)\frac{\sin k\alpha}{k}\frac{\operatorname{sh} k\beta}{\operatorname{ch}^2 kh} - \frac{f\cdot\ddot{f}}{4k^2}\frac{\operatorname{ch} 2k(\beta+h) - \operatorname{ch} 2kh}{\operatorname{ch}^2 kh}\left(1 - \frac{\cos 2k\alpha}{\operatorname{ch} 2kh}\right). \tag{17}$$

Аналогичным способом решается задача для бегущей волны. В этом случае функция $\psi$, скорость волны $c$ и поле давления определяются выражениями

$$\psi(\alpha,\beta,t)=\varepsilon\frac{\cos k(\alpha-ct)}{k^2}\frac{\operatorname{sh}k(\beta+h)}{\operatorname{ch}kh},\quad c^2=g\frac{\operatorname{tg}kh}{k},$$

$$\frac{p}{\rho}=-g\beta-g\varepsilon\frac{\sin k(\alpha-ct)}{k}\frac{\operatorname{sh}k\beta}{\operatorname{ch}^2 kh}+\varepsilon^2c^2\frac{\operatorname{ch}2k(\beta+h)-\operatorname{ch}2kh}{4\operatorname{ch}^2 kh}\left(1-\frac{\cos 2k(\alpha-ct)}{\operatorname{ch}2kh}\right). \quad (18)$$

На рис. 2 показаны вычисленные по формулам (4) и (18) профиль бегущей волны и линии постоянного давления в слое жидкости конечной глубины.

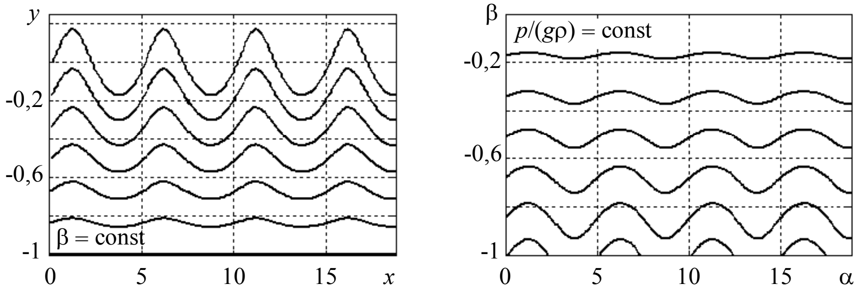


Рис. 2. Профиль бегущей волны и линии равного давления в слое жидкости конечной глубины

Формулы (17) и (18) являются обобщением волн Герстнера на случай слоя жидкости конечной глубины $h$. Траектории жидких частиц являются вытянутыми по горизонтали эллипсами. Для слоя жидкости бесконечной глубины, когда $h\to\infty$, частицы жидкости движутся по окружностям и давление постоянно на каждой линии $\beta=const$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ламб Г.* Гидродинамика: пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1947. 929 с.
2. *Кочин Н.Е.*, *Кибель И.А.*, *Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
3. Дж. Стокер. Волны на воде: пер. с англ. М.: ИЛ, 1959. 618 с.
4. *Абрашкин А.А.*, *Якубович Е.И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006. 176 с.

Статья поступила 17.04.2014 г.

*Arbit O.A.* ON SOLVING EQUATIONS OF LAGRANGIAN HYDRODYNAMICS. The paper shows that coordinates of liquid particles and pressure can be expressed in terms of one arbitrary function $\psi$ so that the incompressibility condition is satisfied for any choice of this function. Introducing this function features as the unknown one significantly simplifies obtaining analytical and numerical solutions of the hydrodynamic equations written in Lagrangian variables. An incompressible flow can be written in Eulerian or Lagrangian variables. Both forms of these equations have been known for a long time but scientists usually prefer to use the Euler variables. This is explained by the unusualness of Lagrange equations. They include nonlinear terms in a form that is inconvenient for numerical and analytical calculations. Until now, hydrodynamicists did not try to exclude the incompressibility condition from the Lagrange equations with the aim of reducing the number of unknown variables. Therefore, in this paper we show that the incompressibility condition can be satisfied automatically if the particle coordinates $x(a, b, t)$ and $y(a, b, t)$ are expressed in terms of the same arbitrary function of coordinates and time. In Lagrangian variables, such a function plays the same role as the function of the current in Euler variables. In this paper, as an example of the exact solution, a solution of the problem of standing waves in a liquid layer is presented. The problem is solved using Lagrange variables. To do this, it is necessary to select an area of the Lagrangian variables in the form of an infinite strip the lower edge of which corresponds to a solid wall. Similarly, the problem is solved for a traveling wave.

Keywords: equation of motion in Lagrangian variables, functional determinants, Gerstner waves.

*Arbit Olga Anatol'evna* (M.Sc., Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: shamak.olya@yandex.ru

REFERENCES

1. Lamb G. Gidrodinamika. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1947. 929 p (in Russian)
2. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. Teoreticheskaya gidromekhanika, P. I. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 584 p. (in Russian)
3. Stoker J.J. Water waves. The mathematical theory with applications. Interscience Publ., 1957
4. Abrashkin A.A., Yakubovich E.I. Vikhrevaya dinamika v lagranzhevom opisanii. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 176 p. (in Russian)