

Научная статья

УДК 519.853.6; 519.853.4

MSC: 90C30, 65K05

doi: 10.17223/19988621/87/3

## Минимизация гладкой функции на границе внешнего обобщенного сегмента сферы

Айдар Мансурович Дуллиев

*Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия, dulliev@yandex.ru*

**Аннотация.** Рассматривается задача минимизации гладкой функции на границе так называемого внешнего обобщенного сегмента сферы, который строится определенным образом из сферы и выпуклого телесного конуса с вершиной, лежащей вне соответствующего замкнутого шара. Предлагается модификация метода проекции градиента и обосновывается ее сходимость к стационарной точке задачи.

**Ключевые слова:** невыпуклые задачи оптимизации, релаксационный метод, обобщенный сегмент сферы, метод проекции градиента

**Благодарности:** Автор выражает глубокую благодарность Б.Р. Хузину за помощь в написании некоторых частей данной статьи.

**Для цитирования:** Дуллиев А.М. Минимизация гладкой функции на границе внешнего обобщенного сегмента сферы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 22–33. doi: 10.17223/19988621/87/3

Original article

## Minimization of a Smooth Function on the Boundary of an Outer Generalized Spherical Segment

Aidar M. Dulliev

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,  
Kazan, Russian Federation, dulliev@yandex.ru*

**Abstract.** In this paper we consider a constrained optimization problem of the form

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \partial_S X \subset \mathbb{R}^n,$$

where  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is Lipschitz smooth on  $\mathbb{R}^n$ ;  $\partial_S X$  is the boundary of  $X$  relative to the sphere  $S = S^{n-1}$ ;  $X$  is an outer generalized segment of  $S$  and is defined as follows. Let  $K$  be an affine convex cone with a nonempty interior and with the vertex  $c$  located in the exterior of the closed ball  $B$  generated by  $S$ . We assume that the set  $K \cap S$  is represented as disjoint unions of its connected components  $X_1$  and  $X_2$ . Let  $X_1$  be closer to  $c$  than  $X_2$  with respect to the Euclidean distance; by definition, put  $X = X_1$ .

In this work we modify the method proposed by the author, where the cone vertex is located in the interior of the ball  $B$ . Our method works according to the following scheme. After choosing a starting point  $x_1$  and setting up a few parameters of Algorithm, the new iteration point is determined in three steps. First, we perform gradient descent along the tangent cone to the feasible set; the result of this operation is the point  $S_k$ . Then we find the point  $t_k$  by projecting  $S_k$  onto  $K$  and return to the feasible set by reconstructing the ray starting from the vertex of  $K$  and passing through  $t_k$ ; finally, we update the iteration point  $x_{k+1}$ . By a lemma and a proposition, we state that the sequence  $\{f(x_k)\}$  is monotonic and each accumulation point  $x_*$  of  $\{x_k\}$  is stationary for the optimization problem.

**Keywords:** nonconvex optimization, descent method, spherical segment, gradient projection algorithms

**Acknowledgments:** The author would like to thank B.R. Khuzin for his assistance in writing some parts of the article.

**For citation:** Dulliev, A.M. (2024) Minimization of a Smooth Function on the Boundary of an Outer Generalized Spherical Segment. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 22–33. doi: 10.17223/19988621/87/3

## 1. Введение

Рассмотрим задачу минимизации

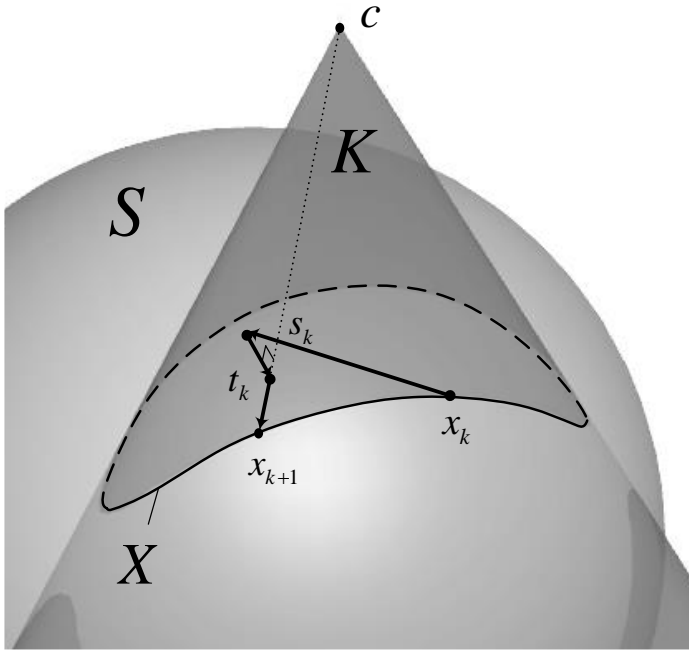
$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \partial_S X \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – гладкая функция, производная которой на всем  $\mathbb{R}^n$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L > 0$ ;  $\partial_Y$  – граница множества в относительной топологии  $Y \subset \mathbb{R}^n$ ;  $X$  – внешний обобщенный сегмент  $(n - 1)$ -мерной сферы  $S$ , определяемый следующим образом. Пусть  $K$  – выпуклый телесный конус с вершиной  $c$ , расположенной вне замкнутого шара  $B$ , ограничиваемого  $S$ . Считаем, что каждая образующая конуса  $K$  пересекает  $S$  ровно в двух точках. Очевидно, множество  $K \cap S$  состоит из двух связных компонент, одна из которых,  $X_1$ , ближе к  $c$  в евклидовой метрике, а другая,  $X_2$ , – дальше. По определению полагаем, что множество  $X$  равно  $X_1$ .

Ранее в статье [1] рассматривалась аналогичная задача, в которой вершина конуса находилась во внутренности шара  $B$ . Был предложен алгоритм, который при определенных ограничениях, накладываемых на целевую функцию и допустимое множество, обеспечивал сходимость итерационной последовательности к стационарной точке. В настоящей работе приводится модификация данного алгоритма для задачи (1.1). Главное отличие этой модификации от предложенного в [1] алгоритма состоит в том, что на каждой итерации необходимо следить, чтобы при решении вспомогательной задачи проектирования на конус  $K$  найденная проекция не оказалась расположенной вне множества  $U = \{(1 - \lambda)c + \lambda u \mid u \in X_2, \lambda \in (0, 1)\}$ . Как мы увидим ниже, это достигается путем соответствующего выбора величины шага.

Если говорить кратко, то алгоритм работает по следующей схеме (рис. 1). Переход к новой итерационной точке осуществляется в три этапа. Вначале произво-

дится спуск вдоль конуса касательных направлений к допустимому множеству; затем находится проекция на конус  $K$ ; после этого осуществляется возврат на допустимое множество путем восстановления луча, исходящего из вершины конуса через найденную проекцию на конусе.



**Рис. 1.** Итерация алгоритма в  $\mathbb{R}^3$   
**Fig. 1.** An iteration of the algorithm in  $\mathbb{R}^3$

Алгоритмы подобного типа, в которых используются процедуры, так или иначе связанные с проектированием, не редкость. Среди них встречаются алгоритмы как общего вида (например, метод проекции градиента, метод линеаризации), так и специального, различающиеся, как правило, видом целевой функции или структурой допустимого множества (например, методы, разработанные в [2]). К последним относится и предлагаемый в данной статье алгоритм. Важным его свойством является то, что целевая функция может быть невыпуклой (в отличие от метода, приведенного в [3]), а генерируемая им итерационная последовательность  $\{x_k\}$  является релаксационной, причем каждая точка  $x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , принадлежит допустимому множеству  $\partial_S X$ , возврат на которое производится не прямым проектированием на  $\partial_S X$  (как, например, в [4]), а через ряд более простых операций.

Кроме того, стоит отметить, что множества типа внешнего сегмента сферы возникают естественным образом в задачах обзора искусственными спутниками заданных областей поверхности планеты. При этом сфера служит моделью поверхности планеты; вершина конуса соответствует положению искусственного спутника, а сам конус – лучу направленности его антенны. Тогда множество  $X$  точек

поверхности планеты, видимых со спутника, является внешним сегментом сферы. Если в качестве целевой функции взять, например, угловое расстояние между двумя точками на сфере, одна из которых,  $x$ , фиксирована и не принадлежит  $X$ , то задача проектирования точки  $x$  на множество  $X$  может быть записана в виде (1.1).

## 2. Описание алгоритма

Всюду ниже будем придерживаться следующих допущений и обозначений в дополнение к уже перечисленным выше.  $\| \cdot \|$  – евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ ;  $\text{pr}_Q x$  – проекция точки  $x$  на множество  $Q$  по норме  $\| \cdot \|$ ; сфера  $S$  имеет центр в нуле и радиус  $R$ ; конус  $\tilde{K} = K \cup (2c - K)$  с вершиной  $c$  задается неравенством  $F(x) \leq 0$ , где  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – гладкая функция, производная которой на  $\tilde{K}$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $M > 0$ , и существует такое  $\tilde{C} > 0$ , что  $\|F'(x)\| \geq \tilde{C}$

всюду в  $S$ ;  $d = R - \min_{x \in \partial_S X} \left( \max_{y \in B \cap \{c + \lambda(x-c) | \lambda \geq 0\}} \|y - S\| \right)$  (здесь вычитаемое показывается, насколько множество отрезков, лежащих на образующих границы конуса  $K$  и расположенных в шаре  $B$ , близко к сфере  $S$ ); для точки  $x_k \in X$  положим:  $\Gamma_k$  – опорная гиперплоскость к  $S$  в  $x_k$ ,  $Z_k$  – опорная гиперплоскость к  $K$  в  $x_k$ ,

$$\Sigma_k = \Gamma_k \cap Z_k, \quad s_k = \text{pr}_{\Sigma_k} (x_k - \alpha_k f'(x_k)),$$

$$t_k = \text{pr}_K s_k, \quad \lambda_k = \min \{ \lambda \geq 0 \mid c + \lambda(t_k - c) \in S \}, \quad (2.1)$$

$$x_{k+1} = \{c + \lambda_k(t_k - c) \mid \lambda \geq 0\} \cap S,$$

$$p_k = \text{pr}_{\Sigma_k} (x_k - f'(x_k)), \quad y_k = \{\beta t_k \mid \beta \geq 0\} \cap S,$$

$$T = 2\sqrt{R^2 - d^2}, \quad B = 2RL + \|f'(x_0)\|,$$

$$D = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{M}{\gamma} \right), \quad \sqrt{E} = \min \left\{ \frac{C - \gamma}{MB}, \left( \frac{N - \zeta}{B^2 D (R + \|c\|)} \right)^{1/2} \right\}, \quad (2.2)$$

$$\Delta = \frac{BM(1 + L\sqrt{E})}{\gamma} + \frac{LB^2 M^2 E}{4\gamma^2} +$$

$$+ \frac{BD}{\zeta^2} (R + \|c\|) (R + \|c\| + B^2 DE) (2\zeta + LBDE (R + \|c\| + B^2 DE)),$$

$$0 < N < \|c\| + R^2, \quad 0 < C < \tilde{C}, \quad 0 < \gamma < C, \quad C - \gamma < \tilde{C} - C,$$

$$0 < \zeta < \|c\| - R, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

### Алгоритм

**Шаг 0.** Выбрать начальную точку  $x_0 \in X$  и задать параметры  $N, C, \gamma, \zeta, \varepsilon$ , исходя из условий (2.3). Вычислить  $B, D, E, \Delta, T$  по формулам (2.2) и задать  $A$ ,

$\varepsilon_0, \alpha \in (\varepsilon_0, A)$ , удовлетворяющие условиям из (3.29) (см. лемму ниже). Установить  $k = 0$ .

**Шаг 1.** Найти множества  $\Gamma_k, Z_k$  и определить  $p_k$ .

**Шаг 2.** Положить  $\alpha_k = \alpha$  и найти  $s_k, t_k$  и  $x_{k+1}$  по формулам (2.1).

**Шаг 3.** Если  $x_{k+1} = x_k$ , то считать  $x_{k+1}$  решением задачи. В противном случае установить  $k := k + 1$  и перейти к шагу 1.

### 3. Обоснование сходимости алгоритма

Покажем, что последовательность, генерируемая алгоритмом, является релаксационной.

**Лемма.** *Существуют такие  $A, \varepsilon_0 > 0$ , не зависящие от  $k$ , что шаг 2 алгоритма при любом  $\alpha_k \in (\varepsilon_0, A)$  обеспечивает оценку*

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \varepsilon \alpha_k^2 \|p_k - x_k\|^2. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Представим разность  $f(x_k) - f(x_{k+1})$  следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x_{k+1}) &= (f(x_k) - f(s_k)) + \\ &+ (f(s_k) - f(t_k)) + (f(t_k) - f(x_{k+1})). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оценим каждую из разностей, стоящих в скобках правой части равенства (3.2).

Рассуждения для первых двух разностей повторяют соответствующие рассуждения для случая, когда вершина  $c$  конуса  $K$  находится во внутренней части шара  $B$  [1]. Из них следуют неравенства

$$f(x_k) - f(s_k) \geq \left( \frac{1}{\alpha_k} - \frac{L}{2} \right) \|x_k - s_k\|^2, \quad (3.3)$$

$$f(s_k) - f(t_k) \geq -\|x_k - s_k\|^2 \left( \frac{BM(1 + L\alpha_k)}{2\gamma} + \frac{LB^2M^2\alpha_k^2}{8\gamma^2} \right), \quad (3.4)$$

которые выполняются при

$$\alpha_k < \frac{C - \gamma}{MB}. \quad (3.5)$$

Найдем оценку третьей разности  $f(t_k) - f(x_{k+1})$ , представив ее в виде, аналогичном (3.4), а именно  $f(t_k) - f(x_{k+1}) \geq -\|x_k - s_k\|^2 \text{const}$ ,  $\text{const} > 0$ .

Поскольку  $x_0 \in S$ , то

$$\|f'(x_{k+1})\| \leq \|f'(x_{k+1}) - f'(x_0)\| + \|f'(x_0)\| \leq L\|x_{k+1} - x_0\| + \|f'(x_0)\| \leq 2RL + \|f'(x_0)\| = B.$$

Отсюда и из липшицевости производной функции  $f(x)$  вытекает

$$\begin{aligned} f(t_k) - f(x_{k+1}) &\geq \langle f'(x_{k+1}), t_k - x_{k+1} \rangle - \frac{L}{2} \|x_{k+1} - t_k\|^2 \geq \\ &\geq -B\|x_{k+1} - t_k\| - \frac{L}{2} \|x_{k+1} - t_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, необходимо оценить  $\|x_{k+1} - t_k\|$ . Из геометрических соображений ясно, что возможно три случая расположения точки  $t_k$  относительно сферы  $S$

в зависимости от удаленности от  $c$ . Разберем эти случаи подробно. При этом условимся начало координат в  $\mathbb{R}^n$  обозначать через  $O$ , луч  $\{a + \tau(b-a) \mid \tau \geq 0\}$  с началом в  $a \in \mathbb{R}^n$  и проходящий через  $b \in \mathbb{R}^n$  обозначать символом  $ab$ ; кроме того, положим

$$\{z_k\} = ct_k \cap S \setminus \{x_{k+1}\}, \quad \{v_k, w_k\} = cO \cap S, \quad \|v_k - c\| > \|w_k - c\|,$$

$$\delta_k = \|t_k - y_k\|, \quad \mu_k = \frac{1}{\lambda_k}, \quad \rho_k = \|t_k - z_k\|.$$

**Случай 1.**  $\|c - t_k\| \geq \|c - z_k\|$ .

Покажем, что величину шага  $\alpha_k$  можно подобрать таким образом, чтобы данный случай никогда не реализовался, т.е. чтобы точка  $t_k$  оказалась или внутри шара  $B$ , или между внутренностью шара  $B$  и точкой  $c$  (при этом не исключается  $t_k \in X$ ).

Сперва оценим  $\|c - z_k\|$ . Записывая теорему о секущих для лучей  $cz_k$  и  $cv$

$$\|c - z_k\| \|c - x_{k+1}\| = \|c - v_k\| \|c - w_k\|,$$

получаем

$$\|c - z_k\| \|c - x_{k+1}\| = \|c\|^2 - R^2. \quad (3.7)$$

Рассматривая треугольник с вершинами в точках  $O$ ,  $z_k$ ,  $x_{k+1}$ , находим

$$\|c - z_k\| = \|c - x_{k+1}\| + 2\sqrt{R^2 - h^2},$$

где  $h$  – расстояние от нуля до луча  $cz_k$ . Поскольку  $d \geq h$ , то

$$\|c - z_k\| \geq \|c - x_{k+1}\| + 2\sqrt{R^2 - d^2}. \quad (3.8)$$

Выражая  $\|c - x_{k+1}\|$  из (3.7) и подставляя затем в (3.8), приходим к неравенству

$$\|c - z_k\|^2 - 2\sqrt{R^2 - d^2} \|c - z_k\| - (\|c\|^2 - R^2) \geq 0,$$

откуда

$$\|c - z_k\| \geq \sqrt{R^2 - d^2} + \sqrt{\|c\|^2 - d^2}. \quad (3.9)$$

Далее, подберем  $\alpha_k$  таким образом, чтобы  $\|c - t_k\|$  было меньше правой части неравенства (3.9). Поскольку точка  $t_k$  определяется как проекция с касательного направления к конусу  $K$ , то  $t_k = x_k + \alpha_k(p_k - x_k) + r_k(\alpha_k)$ , где  $\|r_k(\alpha_k)\| = o(\alpha_k)$  при  $\alpha_k \rightarrow 0$ .

Кроме того, согласно [1] имеет место оценка  $\|r_k(\alpha_k)\| \leq \frac{M}{2\gamma} \|x_k - s_k\|^2$ , следовательно,

$$\begin{aligned} \|c - t_k\| &\leq \|x_k - c\| + \alpha_k \left( \|p_k - x_k\| + \left\| \frac{r_k(\alpha_k)}{\alpha_k} \right\| \right) \leq \\ &\leq \|x_k - c\| + \alpha_k \|p_k - x_k\| \left( 1 + \frac{M\alpha_k}{2\gamma} \|p_k - x_k\| \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.9) получаем, что  $\alpha_k$  должно удовлетворять неравенству

$$\alpha_k \|p_k - x_k\| \left( 1 + \frac{M\alpha_k}{2\gamma} \|p_k - x_k\| \right) \leq \sqrt{R^2 - d^2} + \sqrt{\|c\|^2 - d^2} - \|x_k - c\|.$$

Так как  $d < R$  и

$$\|x_k - c\| \leq V := \sqrt{\|c\|^2 - d^2} - \sqrt{R^2 - d^2}, \quad (3.10)$$

то  $\sqrt{R^2 - d^2} + \sqrt{\|c\|^2 - d^2} - \|x_k - c\| \geq T = 2\sqrt{R^2 - d^2} > 0$ .

Стало быть, требуемое  $\alpha_k$  можно определить из неравенства

$$\frac{M}{2\gamma} \|p_k - x_k\|^2 \alpha_k^2 + \|p_k - x_k\| \alpha_k - T \leq 0,$$

из которого находим

$$0 < \alpha_k \leq \frac{\sqrt{1 + \frac{2MT}{\gamma}} - 1}{\frac{M}{\gamma} \|x_k - p_k\|}. \quad (3.11)$$

Поскольку  $x_k \in \Sigma_k$  и  $p_k$  является проекцией точки  $x_k - f'(x_k)$  на выпуклое множество  $\Sigma_k$ , то  $\|x_k - p_k\| \leq \|f'(x_k)\| \leq B$ . Используя это в (3.11), окончательно для рассматриваемого случая получаем оценку величины шага  $\alpha_k$ :

$$0 < \alpha_k \leq \frac{\gamma}{MB} \left( \sqrt{1 + 2 \frac{MT}{\gamma}} - 1 \right). \quad (3.12)$$

**Случай 2.**  $0 < \|c - t_k\| \leq \|c - x_{k+1}\|$ .

Данный случай соответствует расположению точки  $t_k$  между внутренностью шара  $B$  и точкой  $c$  (причем не исключается  $t_k \in X$ ), при этом, очевидно,  $\|t_k\| \geq R$ . Здесь, как и в [1], можно получить оценки

$$\|t_k - y_k\| \leq D \|x_k - s_k\|^2, \quad (3.13)$$

$$\|t_k - s_k\| \leq \alpha_k \frac{M}{2\gamma} B^2, \quad \|s_k - x_k\| \leq \alpha_k B, \quad (3.14)$$

$$\|x_{k+1} - t_k\| \leq |\lambda_k - 1| \left( R + \|c\| + D \|x_k - s_k\|^2 \right), \quad (3.15)$$

где, напомним, величина  $\lambda_k \geq 0$  определяется условием (2.1).

Заметим, что согласно (3.15) порядок величины  $\|x_{k+1} - t_k\|$  относительно  $\|x_k - s_k\|$  определяется порядком величины  $|\lambda_k - 1|$ . Покажем, что величину шага  $\alpha_k$  можно подобрать удовлетворяющей условию  $|\lambda_k - 1| = O(\|x_k - s_k\|^2)$ . При этом, не ограничивая общности, считаем, что  $\lambda_k \neq 1$ , так как иначе  $f(t_k) - f(x_{k+1}) = 0$  и  $\alpha_k$  будет оцениваться только из первых двух разностей (3.2).

Из определения точки  $x_{k+1}$  имеем

$$x_{k+1} - t_k = (1 - \mu_k)(x_{k+1} - c). \quad (3.16)$$

Положим  $\{u_k\} = t_k y_k \cap S \setminus \{y_k\}$ . Так как  $u_k \in S$  и  $\|t_k\| < \|c\|$ , то

$$\|t_k - u_k\| < R + \|c\|. \quad (3.17)$$

Записывая теорему о секущих для лучей  $t_k y_k$  и  $t_k z_k$

$$\|t_k - y_k\| \|t_k - u_k\| = \|t_k - x_{k+1}\| \|t_k - z_k\|$$

и апеллируя к (3.16), (3.17), получаем

$$\|t_k - y_k\| (R + \|c\|) > |1 - \mu_k| \|x_{k+1} - c\| \|t_k - z_k\|. \quad (3.18)$$

Как и в случае 1, выполнено равенство (3.7), из которого находим

$$\|x_{k+1} - c\| \|t_k - z_k\| = \|c\|^2 - R^2 - \|t_k - c\| \|x_{k+1} - c\|. \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.18) и учитывая, что  $\mu_k \neq 1$  и  $\|x_{k+1} - c\| \leq V$ , имеем

$$\frac{\|t_k - y_k\|}{|1 - \mu_k|} (R + \|c\|) > \|c\|^2 - R^2 - V \|t_k - c\|. \quad (3.20)$$

Теперь убедимся, что найдется такое  $\alpha_k$ , для которого правая часть неравенства (3.20) не меньше любого  $0 < N < TV$ . Во-первых, заметим, что

$$\|t_k - c\| \leq \|t_k - s_k\| + \|s_k - x_k\| + \|x_k - c\|.$$

Во-вторых, принимая во внимание (3.10) и (3.14), получаем

$$\|c\|^2 - R^2 - V \|t_k - c\| \geq \|c\|^2 - R^2 - V \left( V + \alpha_k \left( B + \frac{MB^2}{2\gamma} \right) \right) \geq V \left( T - \alpha_k \left( B + \frac{MB^2}{2\gamma} \right) \right).$$

Очевидно, что правая часть последнего неравенства, а значит, и (3.20), не меньше  $N$  при

$$\alpha_k \leq \left( T - \frac{N}{V} \right) \left( B + \frac{MB^2}{2\gamma} \right)^{-1}. \quad (3.21)$$

Таким образом, из (3.20) находим

$$|1 - \mu_k| < \|t_k - y_k\| \frac{R + \|c\|}{N}.$$

Так как  $\|t_k\| > R$ , то  $\lambda_k > 1$  и  $\mu_k < 1$ , следовательно, с учетом (3.13)

$$1 - \mu_k < \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{N}.$$

Отсюда вытекает, что при выполнении условия (3.21) справедлива оценка

$$\lambda_k - 1 < \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{N - \|x_k - s_k\|^2 D(R + \|c\|)}. \quad (3.22)$$

**Случай 3.**  $\|c - x_{k+1}\| < \|c - t_k\| < \|c - z_k\|$ .

Данный случай соответствует расположению точки  $t_k$  внутри шара  $B$ , т.е. при этом  $\|t_k\| < R$  и  $\lambda_k < 1$ . Проводя рассуждения аналогично предыдущему случаю, в результате приходим к тому, что формула (3.21) остается без изменений, а оценка для  $1 - \lambda_k$  выглядит следующим образом:

$$1 - \lambda_k < \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{N + \|x_k - s_k\|^2 D(R + \|c\|)}. \quad (3.23)$$



Объединяя соответствующие случаям 2 и 3 оценки (3.22) и (3.23), получаем

$$|\lambda_k - 1| < \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{N - \|x_k - s_k\|^2 D(R + \|c\|)}. \quad (3.24)$$

Теперь подберем  $\alpha_k$  так, чтобы выражение, стоящее в знаменателе правой части (3.24), было не меньше какого-либо числа  $0 < \zeta < N$ . Поскольку  $\|x_k - s_k\| = \alpha_k \|x_k - p_k\|$ , то требуемое условие достигается при

$$\alpha_k^2 < \frac{N - \zeta}{\|x_k - p_k\|^2 D(R + \|c\|)}.$$

Вспоминая, что  $\|x_k - p_k\| \leq B$  видим, что достаточно выбрать  $\alpha_k$ , удовлетворяющее неравенству

$$\alpha_k < \sqrt{\frac{N - \zeta}{B^2 D(R + \|c\|)}}. \quad (3.25)$$

Таким образом, получаем

$$|\lambda_k - 1| \leq \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\|)}{\zeta}. \quad (3.26)$$

Так как  $\|x_k - s_k\| \leq \alpha_k B$ , то  $\|x_k - s_k\|^2 \leq B^2 E$  при  $\alpha_k < \sqrt{E}$ . С учетом этого и (3.15), (3.26), находим оценку для  $\|x_{k+1} - t_k\|$ :

$$\|x_{k+1} - t_k\| \leq \|x_k - s_k\|^2 \frac{D(R + \|c\| + B^2 DE)(R + \|c\|)}{\zeta}.$$

Отсюда и из (3.6) получаем оценку разности  $f(t_k) - f(x_{k+1})$ :

$$\begin{aligned} f(t_k) - f(x_{k+1}) &\geq \\ &\geq -\frac{BD}{2\zeta^2} (R + \|c\|) (R + \|c\| + B^2 DE) (2\zeta + LBDE (R + \|c\| + B^2 DE)) \|x_k - s_k\|^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Объединяя оценки (3.3), (3.4), (3.27), для разности  $f(x_k) - f(x_{k+1})$  в итоге имеем

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \left( \frac{1}{\alpha_k} - \frac{L + \Delta}{2} \right) \|x_k - s_k\|^2.$$

Осталось подобрать  $\alpha_k$  так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках, было положительным, например больше некоторого числа  $\varepsilon > 0$ :

$$\alpha_k < \frac{2}{L + \Delta + 2\varepsilon}. \quad (3.28)$$

Поскольку все вышеприведенные оценки (3.5), (3.12), (3.25), (3.28) для величины шага  $\alpha_k$  не зависят от  $k$ , то для завершения доказательства леммы достаточно положить  $\alpha_k$  равным величине

$$\min \left\{ \sqrt{E}, \frac{\gamma}{MB} \left( \sqrt{1 + 2 \frac{MT}{\gamma}} - 1 \right), \frac{2}{L + \Delta + 2\varepsilon} \right\} \quad (3.29)$$

и в качестве  $\varepsilon_0$  взять любое значения из интервала  $(0, A)$ . Лемма доказана.

**Предложение.** При любом выборе начальной точки  $x_0 \in X$  любая предельная точка  $x_*$  последовательности  $\{x_k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ , построенной по алгоритму, является стационарной, т.е. удовлетворяет условию

$$\forall x \in \Sigma_* \langle f'(x_*), x - x_* \rangle = 0. \quad (3.30)$$

**Доказательство.** Поскольку функция  $f(x)$  непрерывна на компакте  $\partial_S X$  и согласно лемме последовательность  $\{f(x_k)\}$  является невозрастающей, то

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) > -\infty. \quad (3.31)$$

Кроме того, последовательность  $\{x_k\}$  имеет хотя бы одну предельную точку  $x_*$ , которая, очевидно, лежит в  $\partial_S X$ . Пусть  $\{x_{k_m}\}$  – подпоследовательность, сходящаяся к  $x_*$ . Из (3.1) и (3.31) следует, что существует  $\lim_{m \rightarrow \infty} p_{k_m}$ , причем  $\lim_{m \rightarrow \infty} p_{k_m} = x_*$ . С другой стороны, ввиду непрерывности оператора проектирования  $p(x) = \text{pr}_{\Sigma(x)}(x - f'(x))$  на множестве  $X$  имеет место сходимость  $p_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} p_* = \text{pr}_{\Sigma_*}(x_* - f'(x_*))$ , стало быть,  $p_* = x_*$ .

Возьмем теперь произвольную точку  $x \in \Sigma_*$ . Из равенства  $f'(x_*) = p_* - (x_* - f'(x_*))$  по свойству проекций на аффинное множество следует, что  $\langle f'(x_*), x - x_* \rangle = \langle f'(x_*), x - p_* \rangle = \langle p_* - (x_* - f'(x_*)), x - p_* \rangle = 0$ , т.е. условие (3.30) выполняется. Предложение доказано.

#### 4. Численный эксперимент

Экспериментальная проверка предложенного алгоритма была проведена на двух примерах в  $\mathbb{R}^3$  с целевыми функциями соответственно  $f_1(x, y, z) = (x - 10)^2 + y^2 + (z - 3)^2$  и  $f_2(x, y, z) = \sin 6x + x^2 \cos e^y - z \arctg(x + y - z)^2$ . Их градиенты удовлетворяют условию Липшица в любом замкнутом шаре  $B_r$  радиуса  $r > 0$  с центром в нуле. Нетрудно заметить, что алгоритм применим для данных функций при достаточно больших  $r > R$ . В обоих примерах рассматривались сфера с радиусом 3, эллиптический конус, задаваемый уравнением  $14(x - 1.7)^2 + y^2 - 0.3(z - 5)^2 = 0$ , начальная точка  $(1.577; 1.571; 2.011)$ . В качестве критерия останова выбиралось выполнение неравенства  $\|s_k - x_k\| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность.

#### Результаты численного эксперимента

Пример	Количество итераций для заданной точности			
	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
1	9	10	11	12
2	8	9	10	12

Результаты расчетов приведены в таблице. В ней в зависимости от примера и точности указано количество итераций, произведенных до достижения заданной точности.

## 5. Заключение

При доказательстве леммы было получено не зависящее от  $k$  выражение (3.29), оценивающее сверху величину шага  $\alpha_k$  и тем самым обеспечивающее релаксационную сходимость алгоритма. Однако вместо выбора постоянного  $\alpha_k$ , которое требует вычисления величины  $T$ , можно пользоваться процедурой последовательного уменьшения  $\alpha_k$  начиная с некоторого  $\alpha_k = \hat{\alpha}$  вплоть до выполнения условия (3.1) и условий для  $t_k$ , соответствующих случаю 2 или 3 из доказательства леммы. Также заметим, что выбор параметров  $N$ ,  $C$ ,  $\gamma$ ,  $\zeta$ ,  $\varepsilon$  до некоторой степени произволен и определяется условиями (2.3).

Очевидно, что основные вычислительные затраты алгоритма приходятся на решение вспомогательной задачи проектирования точки на выпуклый конус. Нетрудно показать, что в определенных случаях эту задачу можно решать достаточно эффективно. В частности, когда конус  $K$  является конусом второго порядка в  $\mathbb{R}^n$  при  $n \leq 3$  или круговым конусом, проекция определяется в явном виде; если  $K$  – конус второго порядка в  $\mathbb{R}^n$  при  $n \geq 4$ , то для нахождения проекции можно воспользоваться методами внутренней точки [5].

## Список источников

1. Дуллиев А.М. Релаксационный метод минимизации гладкой функции на обобщенном сегменте сферы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 2. С. 208–223. doi: 10.7868/S0044466914020045
2. Заботин В.И., Черняев Ю.А. Обобщение метода проекции градиента на экстремальные задачи с предвыпуклыми ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41, № 3. С. 367–373.
3. Черняев Ю.А. Итерационный алгоритм минимизации выпуклой функции на пересечении сферической поверхности и выпуклого компактного множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 10. С. 1631–1640. doi: 10.7868/S0044466917100064
4. Черняев Ю.А. Метод проекции градиента для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения гладкой поверхности и выпуклого замкнутого множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 1. С. 37–49. doi: 10.1134/S0044466919010058
5. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М. : Изд-во МЦНМО, 2010. 279 с.

## References

1. Dulliev A.M. (2014) A relaxation method for minimizing a smooth function on a generalized spherical segment. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 54(2). pp. 219–234. DOI: 10.1134/S0965542514020043.
2. Zabotin V.I., Chernyaev Yu.A. (2001) A generalization of the gradient projection method to extremal problems with preconvex constraints. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 41(3). pp. 340–346.

3. Chernyaev Yu.A. (2017) Iterative algorithm for minimizing a convex function at the intersection of a spherical surface and a convex compact set. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 57(10). pp. 1607–1615. DOI: 10.1134/S0965542517100062.
4. Chernyaev Yu.A. (2019) Gradient projection method for optimization problems with a constraint in the form of the intersection of a smooth surface and a convex closed set. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 59(1). pp. 34–45. DOI: 10.1134/S0965542519010056.
5. Nesterov Yu.E. (2004) *Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course*. Springer. DOI: 10.1007/978-1-4419-8853-9.

**Сведения об авторе:**

Дуллеев Айдар Мансурович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия. E-mail: dulliev@yandex.ru

**Information about the author:**

**Dulliev Aidar M.** (Department of Applied Mathematics and Informatics, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation). E-mail: dulliev@yandex.ru

*Статья поступила в редакцию 02.10.2022; принята к публикации 12.02.2024*

*The article was submitted 02.10.2022; accepted for publication 12.02.2024*