

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/87/5

Моделирование упругопластического разрушения компактного образца

Николай Степанович Астапов¹, Владимир Дмитриевич Кургузов²

^{1,2} *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

¹ *nika@hydro.nsc.ru*

² *kurguzov@hydro.nsc.ru*

Аннотация. Прочность компактного образца при нормальном отрыве исследована с помощью модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла, использующей дополнительный параметр – поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). Предложен двухпараметрический критерий разрушения для трещин I типа в упругопластическом материале, включающий в себя деформационный критерий, который сформулирован в вершине трещины, а также силовой критерий, сформулированный в вершине модельной трещины. Подробно проанализированы определяющие уравнения аналитической модели в зависимости от характерного линейного размера структуры материала. Получены простые формулы для критической разрушающей нагрузки и длины зоны предразрушения при квазихрупком и квазивязком разрушении. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения компактного образца в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

Ключевые слова: хрупкое, квазихрупкое и квазивязкое разрушение, двухпараметрический критерий разрушения, упругопластический материал, предельная деформация

Для цитирования: Астапов Н.С., Кургузов В.Д. Моделирование упругопластического разрушения компактного образца // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 44–58. doi: 10.17223/19988621/87/5

Original article

Modeling of elasto-plastic fracture of a compact specimen

Nikolay S. Astapov¹, Vladimir D. Kurguzov²

^{1,2} *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of RAS,
Novosibirsk, Russian Federation*

¹ nika@hydro.nsc.ru

² kurguzov@hydro.nsc.ru

Abstract. The strength of a compact specimen under normal fracture (fracture mode I) is studied within the framework of the Neuber–Novozhilov approach. A model of an ideal elasto-plastic material with limiting relative elongation is chosen as the model of the deformable solid. This class of materials includes low-alloy steels that are used in structures operating at temperatures below the cold brittleness threshold. The crack propagation criterion is formulated using the modified Leonov–Panasyuk–Dugdale model, which uses an additional parameter, i.e., the diameter of the plasticity zone (the width of the pre-fracture zone). In the case of stress field singularity occurring in the vicinity of the crack tip, a two-parameter (coupled) criterion for quasi-brittle fracture is developed for type I cracks in an elastoplastic material. The coupled fracture criterion includes the deformation criterion attributed to the crack tip and the force criterion attributed to the model crack tip. The lengths of the original and model cracks differ by the length of the pre-fracture zone. Diagrams of the quasi-brittle fracture of the specimen under plane strain and plane stress conditions are constructed. The constitutive equations of the analytical model are analyzed in terms of the characteristic linear dimension of the material structure. Simple formulas applicable to verification calculations of the critical fracture load and pre-fracture zone length for quasi-brittle and quasi-ductile fractures are obtained. The parameters in the presented model of quasi-brittle fracture are analyzed. It is proposed to select the parameters of the model according to the approximation of the uniaxial tension diagram and the critical stress intensity factor.

Keywords: brittle fracture, quasi-brittle fracture, quasi-ductile fracture, two-parameter fracture criterion, elasto-plastic material, ultimate strain

For citation: Astapov, N.S., Kurguzov, V.D. (2024) Modeling of elasto-plastic fracture of a compact specimen. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 44–58. doi: 10.17223/19988621/87/5

Введение

Неизбежное наличие трещин является одним из важных факторов, вызывающих разрушение в машиностроительных конструкциях. Поэтому проблемы построения простых, пригодных для инженерных расчетов аналитических моделей процесса разрушения материалов и конструкций являются актуальными [1–5]. Отметим, что при использовании когезионной модели [4] отсутствуют параметры, описывающие поперечник зоны предразрушения и структуру самой зоны предразрушения. Однако трещины часто оказываются межзеренными, и наличие периодической структуры существенно влияет на раскрытие трещин. В [5] показано, что критерии разрушения, учитывающие характерный размер структуры материала, позволяют расширить область применения по сравнению с традиционными критериями.

Настоящая публикация является естественным продолжением и обобщением работ [6–8] по исследованию распространения трещины. Представление зоны предразрушения в виде прямоугольника получено с использованием модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла (ЛПД) на основе подхода Нейбера–Новожилова для материалов со структурой. Учет характерного линейного размера материала позволил вывести простые, пригодные в инженерных приложениях соотношения для критической нагрузки и критической длины зоны

предразрушения, а также построить диаграммы разрушения. Предлагаемая модель использует неклассическую схему разрушения материала, когда кроме сплошного и разрушенного состояний рассматривается некоторое промежуточное состояние материала с накопленными повреждениями. Полученные в работе результаты дают возможность оценивать несущую способность конструкций с трещинами в более широком диапазоне условий нагружения, чем это позволяют однопараметрические критерии механики разрушения.

Постановка задачи

Рассмотрим компактный образец шириной w , высотой H с начальной трещиной длины l_0 , растягиваемый силами P (рис. 1). Размеры образца соответствуют рекомендациям в [9, 10]. Поверхность трещины свободна от нагрузок, реализуется I мода разрушения. Материал образца предполагается идеальным упругопластическим материалом с $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммой одноосного деформирования, показанной на рис. 2. Здесь σ_Y – предел текучести, ε_0 – максимальная упругая деформация, ε_1 – предельная деформация до разрушения. Введем параметр $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_0$, характеризующий отношение предельной неупругой деформации к максимальной упругой. Величину $\bar{\varepsilon}_1$ можно трактовать как относительную длину площадки текучести (коротко – показатель пластичности). Материал образца обладает определенной структурой, имеет квазихрупкий или квазивязкий тип разрушения, причем характерный линейный размер d структурного элемента (например, средний диаметр зерна, эффективный диаметр структур разрушения [6]) предполагается известным.

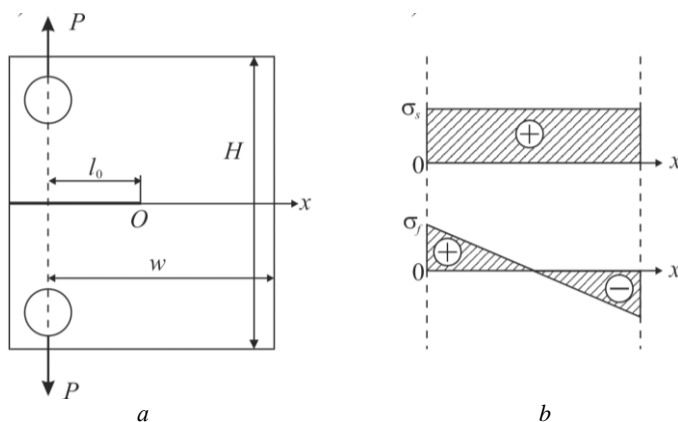


Рис. 1. Схема нагружения компактного образца (а); эпюры номинальных напряжений при растяжении σ_s и изгибе σ_f (b)

Fig. 1. (a) Loading scheme of a compact specimen and (b) diagrams of nominal stresses for a specimen under tension σ_s and bending σ_f

Примем простейшую аппроксимацию реальной $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы исследуемого материала двухзвенной ломаной. При такой аппроксимации исходный материал подменяется идеальным упругопластическим материалом, имеющим предельную деформацию. При достижении предельной деформации материал разрушается.

На рис. 2, *a* изображены исходная (σ - ϵ)-диаграмма (кривая 1) и ее двухзвенная аппроксимация (кривая 2). Параметры этой аппроксимации подбираются так, чтобы площади под кривыми 1 и 2 совпадали. Кривая 2 полностью определяется следующими параметрами: E – модуль Юнга, σ_Y – предел текучести при одноосном растяжении, ϵ_1 – предельная деформация. Максимальная упругая деформация ϵ_0 связана с пределом текучести соотношением $\sigma_Y = E\epsilon_0$.

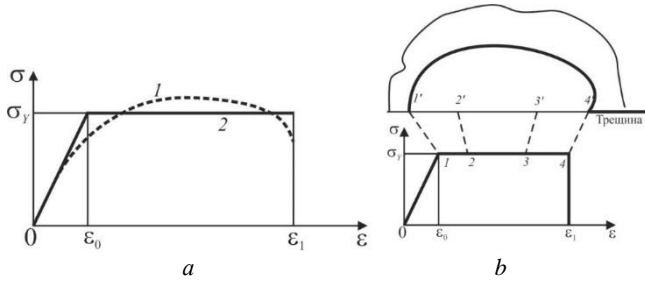


Рис. 2. Исходная (σ - ϵ)-диаграмма материала (кривая 1) и ее (кривая 2) двухзвенная аппроксимация (*a*); соответствие точек 1–4 диаграммы деформирования точкам 1'–4' зоны предразрушения в окрестности вершины трещины (*b*)

Fig. 2. (*a*) Initial (σ - ϵ) diagram of the material (curve 1) and its bilinear approximation (curve 2); (*b*) the correspondence of points 1–4 of the deformation diagram to points 1'–4' of the pre-fracture zone in the vicinity of the crack tip

Модифицированная модель Леонова–Панасюка–Дагдейла

Кроме реальной трещины длиной l_0 введем в рассмотрение модельную трещину, длина которой $l = l_0 + b$, причем зона предразрушения длиной b расположена на продолжении реальной трещины. Задача о разрушении имеет два линейных масштаба: 1) диаметр зерна d – постоянная величина, определяемая структурой материала; 2) длина зоны предразрушения b , которая зависит от длины реальной трещины, интенсивности нагружения и механических свойств материала.

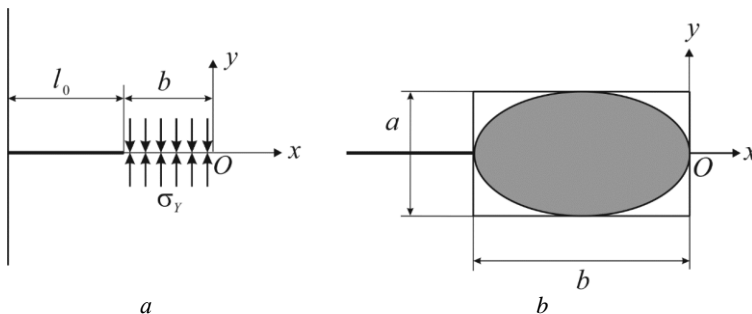


Рис. 3. Модифицированная модель ЛПД: нормальные напряжения, действующие на продолжении модельной трещины (*a*); аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (плоское напряженное состояние) (*b*)

Fig. 3. (*a*) Modified LPD model: normal stresses along the extension of the model crack and (*b*) the approximation of a plastic zone by a rectangular pre-fracture zone (plane stress)

Подчеркнем, что при однократном нагружении квазихрупких материалов критическая длина зоны предразрушения b_c – вполне определенный параметр ($l_c = l_0 + b_c$ – критическая длина макротрещины). На рис. 3 показаны нормальные напряжения $\sigma_y = \sigma_y$, действующие в модифицированной модели ЛПД [6–8] на продолжении трещины (a), и аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (b). Заметим, что в классической модели ЛПД [11] поперечник пластической зоны $a = 0$. Напряжения $\sigma_y = \sigma_y$, действующие на берегах модельной трещины в зоне предразрушения, препятствуют раскрытию трещины и тем самым устраняют сингулярность поля напряжений в окрестности ее вершины.

Сдвоенный критерий разрушения

В соответствии с предлагаемой модификацией модели ЛПД надо различать вершины реальной и модельной трещин. На рис. 2, b приведена схема, качественно поясняющая взаимосвязь между точками 1, 2, 3, 4 на $(\sigma$ – ϵ)-диаграмме и точками 1', 2', 3', 4' в зоне предразрушения, расположенными на продолжении реальной трещины слева от нее. Вне зоны предразрушения материал деформируется упруго, на границе этой зоны он начинает деформироваться неупруго, при этом точки зоны предразрушения находятся в области неупругого деформирования материала. В модели ЛПД предполагается, что на продолжении модельной трещины реализуется одноосное растяжение [11], поскольку к берегам трещины-разреза приложены постоянные напряжения σ_y , которые притягивают берега друг к другу и, следовательно, действуют на материал растягивающим образом. В докритическом состоянии материал в вершине реальной трещины претерпевает удлинение $\epsilon < \epsilon_1$, которое в критическом состоянии совпадает с критическим удлинением $\epsilon = \epsilon_1$ (см. в точке 4 на рис. 2, b). Пластическая зона в окрестности вершины трещины приближенно показана на рис. 3, b для случая плоского напряженного состояния.

Для построения модели разрушения компактного образца воспользуемся интегральным критерием разрушения Нейбера–Новожилова [7]:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = \sigma_y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$v(-b_c) = \delta_c, \quad x < 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_y(x, 0)$ – нормальные напряжения на продолжении модельной трещины; Oxy – прямоугольная система координат с началом в вершине модельной трещины, ось Ox направлена вдоль трещины (см. рис. 3, a); $v(x) = 2v(x, 0)$ – раскрытие модельной трещины ($x < 0$); δ_c – критическое раскрытие модельной трещины; при величине раскрытия, равной критическому значению, разрушается структура материала в вершине реальной трещины, b_c – критическая длина зоны предразрушения. По терминологии Новожилова критерий разрушения (1) называется необходимым, а совокупность условий (1), (2) – достаточным критерием разрушения; критические величины, полученные по достаточному и необходимому критериям разрушения, помечены нижними индексами c и 0 соответственно. Критерий (1) называется необходимым, потому что он контролирует начало про-

процесса разрушения, критерий (1), (2) называется достаточным, поскольку при выполнении обоих условий (1) и (2) происходит окончательное разрушение образца. Предлагаемый критерий (1), (2) является сдвоенным: деформационный критерий разрушения (2) сформулирован в вершине исходной трещины, а силовой критерий (1) для нормальных напряжений с учетом осреднения сформулирован в вершине модельной трещины.

Построение диаграмм квазихрупкого разрушения

Поле нормальных напряжений $\sigma_y(x)$ на продолжении модельной трещины $x > 0$ можно представить в виде суммы двух слагаемых [12]:

$$\sigma_y(x) = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi x}} + \sigma_{ном}, \quad (3)$$

где $\sigma_{ном} = \sigma_s + \sigma_f$ – номинальные напряжения, иначе оценка регулярной части поля напряжений в окрестности вершины модельной трещины; σ_s и σ_f – номинальные напряжения при растяжении и изгибе соответственно (см. рис. 1, *b*); $K_1 = K_{lp} + K_{lb} > 0$ – суммарный КИН; $K_{lp} > 0$ – КИН, порождаемый приложенными к компактному образцу силами P ; $K_{lb} < 0$ – КИН, порождаемый постоянными напряжениями σ_y , действующими в зоне предразрушения. Первое и второе слагаемые в соотношении (3) – сингулярная и регулярная части решения соответственно. Первое равенство (1) сдвоенного критерия контролирует достижение осредненными напряжениями на продолжении модельной трещины предела текучести σ_y , а второе равенство (2) сдвоенного критерия описывает нормальный отрыв в вершине реальной трещины.

Выражение КИН K_{lp} , обусловленного заданными условиями испытаний компактных образцов, можно представить в виде [9. С. 35; 13. С. 363]:

$$K_{lp} = \frac{P}{tw} \sqrt{\pi l} Y_s(\xi), \quad (4)$$

где $Y_s(\xi) = 16,7 - 104,375\xi + 369,544\xi^2 - 573,781\xi^3 + 360,517\xi^4$, $\xi = l/w$. КИН K_{lb} вычисляется следующим образом [9. С. 117; 13. С. 114]:

$$K_{lb} = -\sigma_y \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{b}{l}\right). \quad (5)$$

Интегрируя в (1) с учетом (3), находим

$$\frac{1}{d} \int_0^d \sigma_y(x, 0) dx = K_1 \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + \sigma_s + \sigma_f \left(1 - \frac{d}{w-l}\right). \quad (6)$$

В приближении сопротивления материалов номинальные напряжения σ_s и σ_f представим так:

$$\sigma_s = \frac{P}{l(w-l)} = \frac{\sigma}{1-l/w}, \quad \sigma_f = \frac{3P(w+l)}{l(w-l)^2} = 3\sigma \frac{1+l/w}{(1-l/w)^2}, \quad \sigma = \frac{P}{tw}. \quad (7)$$

Тогда критерий (1) с учетом (6), (7) запишется в виде:

$$K_1 \sqrt{\frac{2}{\pi d}} + Y_s \sigma_c = \sigma_y, \quad (8)$$

$$Y_r = \frac{w}{w-l_c} + 3 \frac{wl_c}{(w-l_c)^2} \left(1 - \frac{d}{w-l_c} \right), \quad (9)$$

где $\sigma_c = P_c / (tw)$ – критическое напряжение, P_c – критическая нагрузка, l_c – критическая длина трещины.

Преобразуем (8), используя для КИН $K_I = K_{I\sigma} + K_{Ib}$ соотношения (4), (5):

$$\sqrt{\pi l_c} \left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{2}{\pi d}} = (1 - Y_r \bar{\sigma}_c). \quad (10)$$

Здесь $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_Y$ – безразмерное критическое напряжение, b_c – критическая длина зоны предразрушения.

Величину раскрытия трещины $2\nu(x)$ в уравнении (2) представим в виде [11]:

$$\nu(x) = \frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{-2x}{\pi}}, \quad x \leq 0, \quad (11)$$

где κ – параметр вида напряженного состояния: $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния. Модуль сдвига материала G дается формулой $G = E / (2(1 + \nu)) = \sigma_Y / (2\varepsilon_0(1 + \nu))$, так как для идеального упругопластического материала $E = \sigma_Y / \varepsilon_0$. Критическое раскрытие модельной трещины δ_c в соотношении (2) зависит от запаса пластичности $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ исследуемого материала и ширины зоны предразрушения a в вершине реальной трещины. Будем вычислять раскрытие по формуле

$$\delta_c = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)a, \quad (12)$$

где m – поправочный коэффициент.

Конечно, границы реальных пластических зон в окрестности вершины трещины лишь приближенно похожи на конфигурации, изображенные в [11]. При плоском напряженном состоянии с увеличением нагрузки узкая область пластических деформаций распространяется прямолинейно от вершины трещины по ее оси, принимая форму, похожую на узкий вытянутый прямоугольник. Такую форму пластической зоны, особенно при поперечном сдвиге, и преимущественное направление распространения трещины вдоль ее оси можно наблюдать как в численных, так и в лабораторных экспериментах. В связи с этим в работе [8] для уточнения выражения поперечника зоны предразрушения в соотношение (12) введен поправочный коэффициент m . Для определения величины этого коэффициента необходимо использовать непосредственно данные численного либо лабораторного эксперимента.

Поперечник a зоны предразрушения в (12) полагаем пропорциональным удвоенному максимальному размеру пластической зоны для трещины нормального отрыва в идеально пластических телах [14. С. 290]:

$$a = \frac{9(1 - \nu)}{2\sqrt{2}(2 + \pi)} \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2 = q(\nu) \left(\frac{K_{I\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (13)$$

Это оценка для плоской деформации. Для плоского напряженного состояния $q = \pi / 4$ [14. С. 282]. Например, при $\nu = 0.33$ получим $q = 0.415$ для плоской

деформации и $q = 0.785$ для плоского напряженного состояния. Критическая величина раскрытия модельной трещины δ_c в соотношении (12) соответствует переходу материала в вершине реальной трещины в критическое состояние и его разрушению.

Подставляя выражения (11)–(13) в уравнение (2), получим уравнение

$$\frac{\kappa+1}{2G} K_{Ic} \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) q \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_Y} \right)^2. \quad (14)$$

Учитывая выражение $G = \sigma_Y / (2\varepsilon_0(1+\nu))$ и используя для $K_I = K_{Ic} + K_{Ib}$ соотношения (4), (5), запишем уравнение (14) в виде:

$$\sqrt{\pi l_c} \left(Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right) \sqrt{\frac{2b_c}{\pi}} = \frac{mq \bar{\varepsilon}_1}{(\kappa+1)(1+\nu)} (\sqrt{\pi l_c} Y_s \bar{\sigma}_c)^2, \quad (15)$$

где $\bar{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_0$ – параметр, характеризующий запас пластичности при одноосном растяжении.

Теперь систему уравнений (10), (15), равносильную исходной системе уравнений (1), (2) при указанном выборе выражений для нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$, раскрытия трещины $2v = 2v(x)$ и $K_I = K_{Ic} + K_{Ib}$, можно записать в виде:

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] = (1 - Y_r \bar{\sigma}_c) \sqrt{\frac{d}{2l_c}}, \quad (16)$$

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \arccos \left(1 - \frac{b_c}{l_c} \right) \right] \sqrt{\frac{b_c}{l_c}} = \frac{\pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2}{2\sqrt{2}}, \quad (17)$$

где $p = 2q / [(\kappa+1)(1+\nu)]$. В частности, при плоском напряженном состоянии $p = q / 2 = \pi / 8$, при плоской деформации $p = q / [2(1-\nu^2)] = 9 / [4\sqrt{2}(2+\pi)(1+\nu)]$. Таким образом, получена система двух уравнений (16), (17) с двумя неизвестными $\sqrt{b_c / l_c}$ и $\bar{\sigma}_c$. Исключая выражение в квадратных скобках из системы уравнений (16), (17), находим точное выражение для безразмерной критической длины зоны предразрушения $\bar{b}_c = b_c / l_c$

$$\sqrt{\bar{b}_c} = \pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2 \sqrt{\bar{l}_c} / (2(1 - Y_r \bar{\sigma}_c)), \quad (18)$$

где $\bar{l}_c = l_c / d$ – безразмерная критическая длина трещины.

Используя приближение $\arccos(1 - b_c / l_c) \approx \sqrt{2b_c / l_c}$, погрешность которого не превышает 5% при $0 \leq b_c / l_c \leq 0.55$, запишем систему уравнений (16), (17) в виде:

$$Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{2\bar{b}_c} = (1 - Y_r \bar{\sigma}_c) / \sqrt{2\bar{l}_c}, \quad (19)$$

$$\left[Y_s \bar{\sigma}_c - \frac{2}{\pi} \sqrt{2\bar{b}_c} \right] \sqrt{\bar{b}_c} = \pi m p \bar{\varepsilon}_1 (Y_s \bar{\sigma}_c)^2 / 2\sqrt{2}. \quad (20)$$

Заменяя в (19) $\sqrt{\bar{b}_c}$ выражением (18), получим квадратное уравнение относительно $\bar{\sigma}_c$

$$\left(Y_r^2 + hY_s^2 + \sqrt{2\bar{l}_c}Y_sY_r\right)\bar{\sigma}_c^2 - \left(2Y_r + \sqrt{2\bar{l}_c}Y_s\right)\bar{\sigma}_c + 1 = 0,$$

где $h = 2\bar{l}_c mp \bar{\epsilon}_1$, из которого найдем два приближенных значения критической разрушающей нагрузки $\bar{\sigma}_c$

$$\bar{\sigma}_{c\pm} = \left[Y_r + Y_s \sqrt{\frac{\bar{l}_c}{2}} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4mp \bar{\epsilon}_1} \right) \right]^{-1}. \quad (21)$$

Величина $\bar{\sigma}_{c+}$, когда перед корнем выбирается знак «+», соответствует квазихрупкому разрушению ($b/l \ll 1$), величина $\bar{\sigma}_{c-}$ соответствует квазивязкому типу разрушения [8]. Формула (21) предлагаемой модели имеет смысл, если $\bar{\epsilon}_1 \leq 1/(4mp)$ для однородного материала.

Из приближенного уравнения (19) получим выражение для $\sqrt{\bar{b}_c}$:

$$\sqrt{\bar{b}_c} = \pi \left((Y_r + Y_s \sqrt{2\bar{l}_c}) \bar{\sigma}_c - 1 \right) / \left(4\sqrt{\bar{l}_c} \right), \quad (22)$$

а из уравнения (20) получим два значения критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{\bar{b}_{c\pm}} = \pi mp \bar{\epsilon}_1 Y_s \bar{\sigma}_c / \left(\sqrt{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4mp \bar{\epsilon}_1} \right) \right), \quad (23)$$

причем квазихрупкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\bar{b}_{c+}}$, когда в равенстве (23) перед корнем выбирается знак «+», квазивязкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\bar{b}_{c-}}$. Интересно отметить, что, выбирая любое из приближенных выражений (22) или (23), получим из системы уравнений (19), (20) точно такое же выражение для критической разрушающей нагрузки, какое дается формулой (21). А исключая выражение в квадратных скобках из приближенной системы уравнений (19), (20), получим для критической длины \bar{b}_c зоны предразрушения такое же выражение (18), какое получено из точной системы уравнений (16), (17). Напомним, что уравнения (16), (19) так же, как исходное уравнение (1), выполняются для любых нагрузок σ_∞ вблизи граничных точек зоны пластичности (точка I' на рис. 2, b). Поэтому для любых нагрузок σ_∞ , при которых возникает зона пластичности в окрестности вершины трещины, справедлива и формула (22), которая является следствием равенства (19). Однако уравнения (17) и (20) так же, как и уравнение (2), выполняются только для критических разрушающих нагрузок $\bar{\sigma}_c$. Кроме того, приближенные выражения (11) и (12) для раскрытия трещины $2\nu(x)$ и критического раскрытия δ_c вносят дополнительную погрешность в уравнения (17), (20), которые используются при выводе формул (18) и (23). Таким образом, получены формула (21) для критической разрушающей нагрузки и три различные формулы (18), (22), (23), выражающие критическую длину зоны предразрушения через критическую нагрузку. Результаты численного моделирования подтверждают применимость формулы (22) во всем диапазоне нагрузок.

В выражении критической нагрузки (21) возможен предельный переход при $\bar{\epsilon}_1 \rightarrow 0$, что позволяет рассматривать разрушение хрупких материалов (в таких

материалах зона предразрушения отсутствует: $b = 0$). С использованием необходимого критерия разрушения (1) в случае хрупкого разрушения критические напряжения вычисляются по формуле

$$\bar{\sigma}_{c0} = \left(Y_r + Y_s \sqrt{\frac{2l_0}{d}} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Проанализируем выражение критической нагрузки (21) более подробно. Коэффициенты Y_s и Y_r даются формулами (5) и (9), характеризуют геометрию образца и полностью определяются шириной образца w и длиной трещины l . Параметр $\bar{\epsilon}_1$ определяется по $(\sigma-\epsilon)$ -диаграмме материала образца. Параметр p определяется коэффициентом Пуассона. Поэтому исследуем зависимость критической нагрузки от оставшихся двух параметров: характерного линейного размера структуры материала d и поправочного коэффициента m . Для любой длины трещины выполняется неравенство $\bar{\sigma}_{c0} \leq \bar{\sigma}_{c+} \leq \bar{\sigma}_{c-} \leq 1$, причем равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется лишь в том случае, когда подкоренное выражение в (21) равно нулю, т.е. $4mp\bar{\epsilon}_1 = 1$. А равенство $\bar{\sigma}_{c0} = \bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-} = 1$ выполняется лишь для трещины нулевой длины.

При возрастании параметра d возрастают и $\bar{\sigma}_{c+}$ (квасихрупкий сценарий) и $\bar{\sigma}_{c-}$ (квасивязкий сценарий). Оказывается, для любого $d = d_+ > 0$ можно так выбрать $d = d_-$, что для трещины любой длины критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ и $\bar{\sigma}_{c-}$ совпадут, т.е. $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) \equiv \bar{\sigma}_{c-}(d_-)$. В этом случае d_+ и d_- связаны соотношением

$$d_- = \left(\frac{(1 - \sqrt{1-t})^2}{t} \right)^2 d_+, \quad t = 4mp\bar{\epsilon}_1. \quad (25)$$

Наибольшее значение множителя $\left(\frac{(1 - \sqrt{1-t})^2}{t} \right)^2$ равно 1 и достигается при $t = 1$,

тогда выполняются равенства $d = d_- = d_+$ и $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) = \bar{\sigma}_{c-}(d_-) = \left[Y_r + Y_s \sqrt{2l/d} / 2 \right]^{-1}$, что легко видеть из выражения (21).

При возрастании параметра m возрастает и $\bar{\sigma}_{c+}$ (квасихрупкий сценарий), а $\bar{\sigma}_{c-}$ убывает. И равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется только тогда, когда $m = 1/(4p\bar{\epsilon}_1)$.

Рассмотрим процесс деформирования при постепенном нагружении $0 < \sigma_\infty < 1$. Если необходимый критерий (1) не выполняется ($\sigma_\infty < \bar{\sigma}_{c0}$), то нелинейные эффекты не проявляются, исходная длина трещины $2l_0$ не меняется. В случае если в достаточном критерии (1), (2) условие (1) выполнено, а условие (2) – нет, имеет место докритическое состояние системы, при котором наблюдается устойчивое увеличение длины модельной трещины $l = l_0 + b$. Первое соотношение в достаточном критерии (1), (2) определяет движение вершины модельной трещины. Если условия (1), (2) выполнены, то система переходит в критическое состояние. Ближайшая к вершине трещины структура разрушается, поскольку длина зоны предразрушения достигает критического значения (18), (23). При $\sigma_\infty = \bar{\sigma}_{c\pm}$ неустойчивость критического состояния нелинейной системы очевидна. Соотноше-

ние (2) определяют обрыв силовых связей в ближайшей к вершине реальной трещины структуре зоны предразрушения. Таким образом, критические нагрузки, вычисленные по необходимому (24) и достаточному (21) критериям разрушения, являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы.

По трем параметрам d , σ_Y и $\bar{\epsilon}_1$ можно построить в широком диапазоне изменения длин трещин две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$, $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_{c+}(\bar{l}_c)$. Совместим плоскости $(\bar{l}_0, \bar{\sigma}_0)$ и $(\bar{l}_c, \bar{\sigma}_{c+})$. На совмещенной плоскости «длина трещины–напряжения» $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ построим диаграммы квазихрупкого разрушения образца (рис. 4).

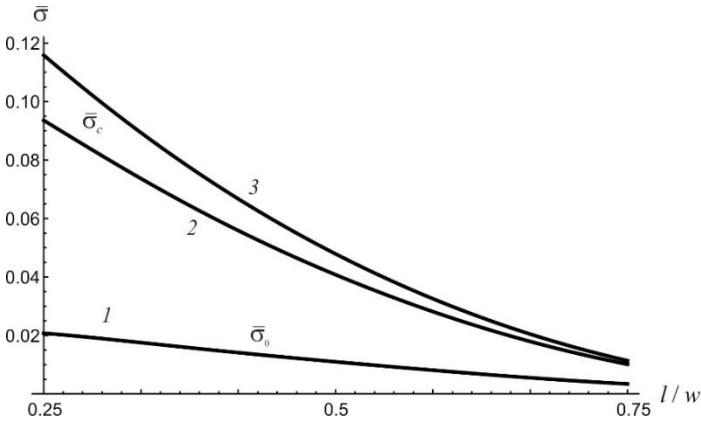


Рис. 4. Диаграммы квазихрупкого разрушения: кривая 1 – необходимый критерий $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$, кривая 2 – достаточный критерий $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (плоская деформация), кривая 3 – достаточный критерий $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (плоское напряженное состояние)

Fig. 4. Diagrams of quasi-brittle fracture: (1) necessary criterion $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$, (2) sufficient criterion $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (plane strain), and (3) sufficient criterion $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(\bar{l}_c)$ (plane stress)

Пусть задана интенсивность нагружения $\bar{\sigma}_\infty = \sigma_\infty / \sigma_Y$. Тогда диаграмма квазихрупкого разрушения позволяет оценить состояние тела с трещиной. Две критические кривые $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}_0(\bar{l}_0)$ и $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c+}(\bar{l}_c)$ (достаточный критерий представлен двумя кривыми: при плоской деформации и плоском напряженном состоянии) разделяют плоскость $(\bar{l}, \bar{\sigma})$ на три подобласти: область $\bar{\sigma} < \bar{\sigma}_0$, где отсутствуют повреждения; область $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma} < \bar{\sigma}_{c+}$, где имеет место накопление повреждений в материале зоны предразрушения; область $\bar{\sigma} > \bar{\sigma}_{c+}$, где образец разрушается при монотонном нагружении. Для удобства практического приложения длина трещины l на рис. 4 отнесена к ширине образца w . Вычисления были проведены при следующих значениях параметров: $d = 0.7$ мм, $\nu = 0.33$, $\bar{\epsilon}_1 = 2.5$ при плоском напряженном состоянии, $\bar{\epsilon}_1 = 4$ при плоской деформации.

3. Обсуждение результатов

Выбор параметра осреднения d необходимого критерия (1) в определенной мере субъективен [15]. Зона радиуса d , где напряженное состояние определяет момент инициации трещины, больше сингулярной, поэтому только значения коэффициента интенсивности напряжений K_I как характеристики напряженно-деформированного состояния теперь уже недостаточно. Будем рассматривать эту зону не как область, где реализуется процесс микроповреждений, пластических деформаций, микроразрушений, а как область, где напряженное состояние по известным решениям теории упругости за счет перераспределения внутренних усилий определяет момент разрушения. Размер осреднения d считается характеристикой материала и зависит от других характеристик материала: разрушающих напряжений для образца без трещины и характеристики трещиностойкости. Для относительно длинных трещин, принимая во внимание асимптотику поля напряжений в окрестности вершины трещины, можно получить оценку параметра d в виде:

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2,$$

где K_{Ic} – критический коэффициент интенсивности напряжений, σ_c – предел прочности материала на растяжение. Необходимость осреднения напряжений связывают с образованием зоны предразрушения, в которой происходят перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Размер этой зоны d сопоставим с размерами структурных составляющих материала и намного меньше размеров образца, длины трещины и т.п. [5]. Интегральный критерий Нейбера–Новожилова (1) относится к структурным критериям разрушения. Присутствие в критерии параметра осреднения d означает, что процесс разрушения обладает собственной структурой, которая в общем случае не обязательно связана со структурой материала.

Заключение

Полученные простые структурные формулы (18), (21)–(23) можно применять для прогнозирования критической разрушающей нагрузки $\bar{\sigma}_c = \sigma_c / \sigma_Y$ и оценки длины зоны предразрушения \bar{b}_c при нагружении по первой моде (нормальный отрыв) в структурированных материалах при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации. Указанные формулы выражают величины нагрузки $\bar{\sigma}_c$ и длины \bar{b}_c через длину трещины l с использованием следующих четырех параметров: d – характерного линейного размера структуры материала, ε_0 и ε_1 – параметров (σ – ε)-диаграммы деформирования, m – поправочного коэффициента. Эти четыре параметра подбираются по результатам лабораторного эксперимента или численного моделирования.

Подробный анализ выражения (21) критической нагрузки $\bar{\sigma}_{c\pm}$ показал следующее. Для двух образцов, отличающихся лишь характерным линейным размером d структуры материала так, что выполняется равенство (25), критические нагрузки $\bar{\sigma}_{c+}$ (квасихрупкое разрушение) и $\bar{\sigma}_{c-}$ (квасивязкое разрушение) совпадают,

т.е. $\bar{\sigma}_{c+}(d_+) \equiv \bar{\sigma}_{c-}(d_-)$ во всем диапазоне длин трещины. Для двух одинаковых образцов равенство $\bar{\sigma}_{c+} = \bar{\sigma}_{c-}$ выполняется тождественно лишь тогда, когда $4\pi r \bar{\epsilon}_1 = 1$.

В целом рассматриваемую аналитическую модель можно использовать при исследовании разрушения конструкций из структурированных материалов с различными упругими свойствами. Это позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

Список источников

1. *Himmiche S., Malki M., Newman Jr. J.C.* Validation of the two-parameter fracture criterion for various crack configurations made of 2014-T6 aluminum alloy using finite-element fracture simulations – Part 1 LT-Orientation // *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. V. 205. P. 253–267.
2. *Wang Y., Wang G., Tu S., Xuan F.* Validation and application of a two-parameter J-Ad approach for fracture behaviour prediction // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2020. V. 43, is. 12. P. 2998–3011.
3. *Хамидуллин Р.М., Федотова Д.В.* Анализ полей напряжений в вершине трещины и параметры сопротивления разрушению в условиях градиентной пластичности // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. № 4. С. 136–148. doi: 10.15593/pern.mech/2021.4.13
4. *Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Инченко О.В., Маркин А.А.* Об одном подходе к оценке прочности адгезионного слоя в слоистом композите // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 2 (64). С. 63–77.
5. *Сукнев С.В.* Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // *Физическая мезомеханика*. 2018. Т. 21, № 4. С. 22–32.
6. *Корнев В.М.* Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов // *Физическая мезомеханика*. 2013. Т. 16, № 5. С. 25–34.
7. *Kornev V.M., Kurguzov V.D.* Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2001. V. 42, № 2. P. 328–336.
8. *Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S.* Fracture model for structured quasibrittle materials // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. V. 55, № 6. P. 1055–1065.
9. *Ковчик С.Е., Морозов Е.М.* Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. Киев : Наукова думка, 1988. 435 с. (Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие : в 4 т.; т. 3).
10. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений : в 2 т. / под ред. Ю. Мураками. М. : Мир, 1990. Т. 1. 448 с.*
11. *Матвиенко Ю.Г.* Модели и критерии механики разрушения. М. : Физматлит, 2006. 328 с.
12. *Gross D., Seelig T.* *Fracture Mechanics*. Berlin : Springer, 2006. 321 p.
13. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев : Наукова думка, 1988. 619 с. (Механика разрушения и прочность материалов : справ. пособие : в 4 т.; т. 2).
14. *Паис Дж.* Математические методы в механике разрушений // *Разрушение : в 7 т. / ред. Г. Либовиц. М. : Мир, 1975. Т. 2. С. 204–335.*
15. *Пестриков В.М., Морозов Е.М.* Механика разрушения. СПб. : Профессия. 2012. 552 с.

References

1. *Himmiche S., Malki M., Newman Jr.J.C.* (2019) Validation of the two-parameter fracture criterion for various crack configurations made of 2014-T6 aluminum alloy using finite-

- element fracture simulations – Part 1 LT-Orientation. *Engineering Fracture Mechanics*. 205. pp. 253–267. doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.11.005
2. Wang Y., Wang G., Tu S., Xuan F. (2020) Validation and application of a two-parameter J-Ad approach for fracture behaviour prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 43(12). pp. 2998–3011. doi: 10.1111/ffe.13360
 3. Khamidullin R.M., Fedotova D.V. (2021) Analiz poley napryazheniy v vershine treshchiny i parametry soprotivleniya razrusheniyu v usloviyakh gradientnoy plastichnosti [Analysis of stress fields at the crack tip and fracture resistance parameters under conditions of gradient-plasticity]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 136–148. doi: 10.15593/perm.mech/2021.4.13
 4. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Inchenko O.V., Markin A.A. (2020) Ob odnom podkhode k otsenke prochnosti adgezionnogo sloya v sloistom kompozite [On one approach to the assessing of the adhesive layer strength in a layered composite]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 64(2). pp. 63–77. doi: 10.17223/19988621/64/5
 5. Suknev S.V. (2018) Nelokal'nye i gradientnye kriterii razrusheniya kvazikhрупких materialov pri szhatii [Nonlocal and gradient fracture criteria for quasi-brittle materials under compression]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 21(4). pp. 22–32. doi: 10.24411/1683-805X-2018-14003
 6. Kornev V.M. (2013) Kriticheskie krivye razrusheniya i effektivnyy diametr struktury khрупких i kvazikhрупких materialov [Critical fracture curves and effective structure diameter of brittle and quasi-brittle materials]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 16(5). pp. 25–34. doi: 10.24411/1683-805X-2013-00050
 7. Kornev V.M., Kurguzov V.D. (2001) Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 42(2). pp. 328–336. doi: 10.1023/a:1018896407455
 8. Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S. (2014) Fracture model for structured quasibrittle materials. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 55(6). pp. 1055–1065. doi: 10.1134/S0021894414060182
 9. Kovchik S.E. (1988) *Kharakteristiki kratkovremennoy treshchinostoykosti materialov i metody ikh opredeleniya* [Characteristics of short-term crack resistance of materials and methods for their determination]. Kyiv: Naukova dumka.
 10. Murakami Y. (1986) *Stress Intensity Factors Handbook*. Oxford: Pergamon.
 11. Matvienko Yu.G. (2006) *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya* [Models and criteria of fracture mechanics]. Moscow: FIZMATLIT.
 12. Gross D., Seelig T. (2006) *Fracture Mechanics*. Berlin: Springer.
 13. Savruk M.P. (1988) *Koeffitsienty intensivnosti napryazheniy v telakh s treshchinami. Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov* [Stress intensity factor in bodies with cracks. Fracture mechanics and strength of materials]. Volume 2. Kyiv: Naukova dumka.
 14. Rice J.R. (1968) *Mathematical Methods in Fracture Mechanics. Fracture*. Volume 2. New York.
 15. Pestrikov V.M., Morozov E.M. (2012) *Mekhanika razrusheniya* [Mechanics of fracture]. Saint Petersburg: Professiya.

Сведения об авторах:

Астапов Николай Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Кургузов Владимир Дмитриевич – доктор физико-математических наук, доцент Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия. E-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Information about the authors:

Astapov Nikolay S. (Candidate of Physics and Mathematics, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Kurguzov Vladimir D. (Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 09.06.2022; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 09.06.2022; accepted for publication 12.02.2024