

Научная статья

УДК 531.01

doi: 10.17223/19988621/87/11

Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции

Сергей Викторович Савелькаев

*Сибирский государственный университет геосистем и технологий,
Новосибирск, Россия, sergei.savelkaev@yandex.ru*

Аннотация. Проведен динамический анализ двухмассовой механической системы с разложением ее абсолютного импульса на переносный и относительный. При разложении показано, что в диссипативной среде относительные силы инерции оказывают существенное влияние на абсолютное движение этой механической системы. Выписано уравнение такого движения, в котором суммарная масса механической системы условно сосредоточена в одном из ее тел, выбранном за опорное. Полученные результаты и выводы обеспечивают решение задачи двух и трех тел для диссипативной среды, оказывающей сопротивление движению опорного тела, с учетом относительных сил инерции.

Ключевые слова: двухмассовая механическая система, импульс и силы инерции, инерционный домен, диссипативный параметр, угол диссипативных потерь

Для цитирования: Савелькаев С.В. Динамический анализ двухмассовой механической системы в диссипативной среде с учетом сил инерции // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 135–149. doi: 10.17223/19988621/87/11

Original article

Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium with allowance for inertial forces

Sergey V. Savel'kaev

*Siberian State University of Geosystems and Technologies,
Novosibirsk, Russia, sergei.savelkaev@yandex.ru*

Abstract. In this paper, a dynamic analysis of a two-mass mechanical system is performed. The aim of this work is to study the effect of the inertial forces of bodies in relative motion within the mechanical system on the motion of this system in a dissipative medium with linear viscous resistance to the motion of one of its bodies (a reference body). The analysis is based on the decomposition of the absolute impulse of the mechanical system into portable and relative components. The resolution shows that the

relative inertia forces significantly affect the absolute motion of the mechanical system in a dissipative medium. The equation for such motion is presented, where the total mass of the mechanical system is conditionally concentrated in the reference body. The obtained results and conclusions can be used to solve the problem of two gravitating bodies, one of which is located in a dissipative medium, with the center of mass of the bodies moving relative to the center of the inertial domain. The results are also applicable to three-mass mechanical systems of the inertioïd type.

Keywords: two-mass mechanical system, momentum and inertial forces, inertial domain, dissipative parameter, dissipative loss angle

For citation: Savel'kaev, S.V. (2024) Dynamic analysis of a two-mass mechanical system in a dissipative medium with allowance for inertial forces. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 135–149. doi: 10.17223/19988621/87/11

Введение

В настоящее время силы инерции $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_r + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_k$ (относительные $\vec{\Phi}_r$, переносные $\vec{\Phi}_e$, Кориолиса $\vec{\Phi}_k$ и др.) рассматривают с различных точек зрения [1].

Например, согласно одной из них, силы инерции $\vec{\Phi}$ взаимодействующих тел механических систем (МС) рассматриваются как фиктивные, условные, введенные для того, чтобы совместно с аксиомой связей придать уравнению Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ наиболее удобную форму равновесия в виде принципа Даламбера $\vec{\Phi} + \vec{F} + \vec{R} = 0$ в неинерциальной системе отсчета одного из тел МС, где $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ и $\vec{R} = \sum_{i \neq j} \vec{R}_{ij}$ – главный вектор внешних сил \vec{F}_i , приложенных к i -м телам МС, и реакций \vec{R}_{ij} связи ее i -го и j -го тел.

При этом уравнение движения механической МС в инерциальной системе отсчета записывают в виде:

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}_C = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{F}, \quad (1)$$

где $m = \sum_i m_i$ и m_i – суммарная масса МС и масса ее i -го тела; $\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i / m$ и \vec{v}_i – скорость ее центра масс (ЦМ) C и ее i -го тела.

Уравнение (1) описывает движение ЦМ C (центра инерции) МС в инерциальной системе отсчета K . Если главный вектор $\vec{F} = 0$, то ЦМ C покоится либо совершает равномерное прямолинейное движение. Исходя из этого в задаче двух тел [2] в качестве инерциальной системы отсчета выбирают систему отсчета K_C , связанную с ЦМ C , в которой главный вектор сил инерции равен нулю: $\vec{\Phi}_C = -d(\sum m_{iC} \vec{v}_{iC}) / dt = 0$. В диссипативной среде (например, с линейным вязким сопротивлением движению опорного тела m_1) внешняя сила $\vec{F}_1 \neq 0$, система отсчета K_C неинерциальна и решение задачи двух тел [2] некорректно. Поэтому для анализа движения тел m_1 и m_2 , а также их ЦМ C удобнее выбрать собственную систему отсчета K_1 опорного тела m_1 (тело m_2 выбирается за рабочее [3, 4]).

При анализе необходимо учитывать относительную силу инерции $\vec{\Phi}_r = \vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 , действующую в системе отсчета K_1 . Она в инерциальной системе K оказывает влияние на движение тел m_1 и m_2 и является реальной (другая точка зрения) [1, 3–6]. Такая точка зрения не согласуется с уравнением движения МС (1), так как в него относительные силы инерции $\vec{\Phi}_r$ в явном виде не входят.

Цель работы – исследование влияния относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 двухмассовой механической системы на движение ее опорного тела m_1 , находящегося в диссипативной среде. Результатом исследования является разработка описания, обеспечивающего анализ амплитудных и фазовых характеристик движения опорного m_1 и рабочего m_2 тел механической системы, а также движения ее центра C в инерциальной системе отсчета K .

Динамический анализ

Рассмотрим МС2, которая показана на рис. 1. МС2 содержит рабочее (ускоряемое) тело с массой m_2 , которое с помощью жесткого идеального стержня с длиной R шарнирно закреплено на опорном (ускоряющемся) теле с массой m_1 , с возможностью вращения рабочего тела m_2 относительно опорного тела m_1 внутренним активным моментом M , действующим на оси шарнира опорного тела m_1 . Движение опорного m_1 и рабочего m_2 тел может совершаться в общей плоскости, перпендикулярной оси шарнира опорного тела m_1 .

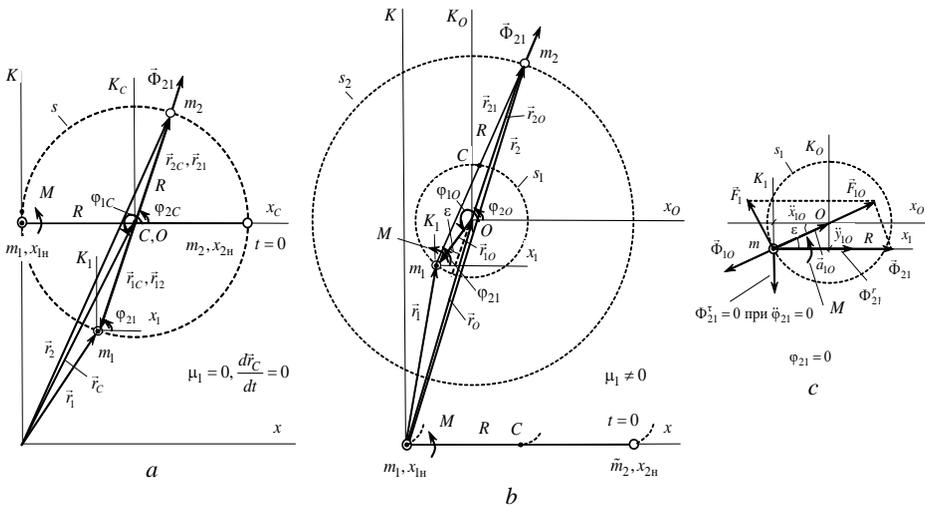


Рис. 1. Двухмассовая механическая система в среде без потерь ($\mu_1 = 0$) – *a*; в среде с потерями ($\mu_1 \neq 0$) – *b*; действующая на нее система сил – *c*
Fig. 1. Two-mass mechanical system in the (a) lossless medium ($\mu_1 = 0$) and (b) lossy medium ($\mu_1 \neq 0$); (c) a system of acting forces

Коэффициент сопротивления диссипативной среды μ_1 движению опорного тела m_1 МС2 составляет $\mu_1 = 0$ на рис. 1, *a* и $\mu_1 \neq 0$ на рис. 1, *b*. Для рабочего тела m_2 он всегда составляет $\mu_2 = 0$.

Для проведения динамического анализа МС2 введем неподвижную систему отсчета K , начало координат которой для случая $\mu_1 = 0$ (см. рис. 1, *a*) выберем произвольно, а для случая $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, *b*) свяжем с начальным положением $x_{1н}$ опорного тела m_1 в момент времени $t = 0$. При $t = 0$ рабочее тело m_2 находится в начальном положении $x_{2н}$, как показано на рис. 1, *a, b*. Начальные скорости опорного m_1 и рабочего m_2 тел при $t = 0$ нулевые: $\dot{x}_{1н} = 0, \dot{x}_{2н} = 0$.

Кроме того, введем собственную систему K_1 опорного тела m_1 , которая вместе с ним может двигаться в системе отсчета K только поступательно. Эту систему отсчета в дальнейшем будем рассматривать как опорную.

Пусть в момент времени $t = 0$ рабочее тело m_2 приводится в движение активным моментом M , который за малый интервал времени $dt \rightarrow 0$ достигает стационарного значения. Исходя из мгновенной передачи взаимодействий в механике, одновременно достигает своего стационарного значения и угловая скорость ω_{21} вращательного движения рабочего тела m_2 . При этом опорное тело m_1 при $\mu_1 = 0$ вместе с системой отсчета K_1 будет совершать движение в системе отсчета K по окружности s (см. рис. 1, *a*) и при $\mu_1 \neq 0$ по окружности s_1 (см. рис. 1, *b*). Рабочее тело m_2 в системе отсчета K_1 будет совершать вращательное движение по траектории s (см. рис. 1, *a*) или s_2 (см. рис. 1, *b*).

Траекторией движения опорного m_1 и рабочего m_2 тел в системе отсчета K при $\mu_1 = 0$, когда $\vec{v}_c = d\vec{r}_c / dt = 0$ (см. рис. 1, *a*), также является окружность s , но при $\mu_1 = 0$, когда скорость $\vec{v}_o = d\vec{r}_o / dt$ убывает экспоненциально от некоторого начального значения, зависящего от μ_1 , до нуля, эти тела будут двигаться по спиральным траекториям [4], переходящим в траектории s_1 и s_2 (см. рис. 1, *b*, где спиральные траектории показаны частично). Зависимость изменения скорости $\vec{v}_o = d\vec{r}_o / dt$ от μ_1 подробно будет показана при дальнейшем анализе.

Момент M (см. рис. 1) возникает в результате приложения к стержню R пары сил. Эту пару можно представить как совокупность сил, действующих на рабочее тело m_2 : силы

$$F = M / R, \tag{2}$$

перпендикулярной к стержню R , и силы, равной

$$F = -M / R, \tag{3}$$

которая приложена к шарниру, соединяющему стержень и опорное тело m_1 . Момент $-M$ силы F (3) вызовет вращение (откат) $dK_z^- / dt = -M$ опорного тела m_1 в направлении, противоположном вращению рабочего тела m_2 , где $K_z^- = -I_z \dot{\phi}_{11}$ и I_z – кинетический момент и момент инерции опорного тела m_1 ; $\dot{\phi}_{11}$ – угловая скорость вращения опорного тела m_1 в системе отсчета K_1 по оси z его шарнира. Результирующий кинетический момент МС2 $K_z = K_z^- + K_z^+$, являющийся суммой ее кинетического момента K_z^+ и кинетического момента K_z^- опорного тела m_1 (см. рис. 1, *a*), сохраняется: $K_z = \text{const}$ при $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, а при $\mu_1 \neq 0$ поддерживается постоянным в стационарном состоянии МС2 (когда угловая скорость вращательного движения рабочего тела m_2 достигает своего стационарного значения $\dot{\phi}_{21} = \text{const}$ за счет источника активного момента M) [4]. Величина стационарного значения $\dot{\phi}_{21} = \text{const}$ определяется мощностью источника активного момента M .

Подробный анализ результирующего кинетического момента \vec{K}_z МС2 при $\mu_1 \neq 0$ будет проведен при выводе полной системы уравнений ее движения.

В общем случае радиусы-векторы, определяющие положение опорного m_1 и рабочего m_2 тел МС2 и ее ЦМ C (см. рис. 1) в системе отсчета K , можно представить в виде:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{C,O} + \vec{r}_{1C,O}; \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{21}; \vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

где $\vec{r}_{C,O}$ – радиусы-векторы, которые при $\mu_1 = 0$ имеют индекс \vec{r}_C и определяют положение начала координат собственной системы отсчета K_C ЦМ C МС2 (см. рис. 1, *a*), исходя из закона сохранения импульса, $\vec{r}_C = \overline{const}$, а при $\mu_1 \neq 0$ имеют индекс \vec{r}_O и определяют положение начала координат собственной системы отсчета K_O (см. рис. 1, *b*) центра O ИД, образованного взаимодействующими телами m_1 и m_2 [4], физический смысл которого будет более подробно раскрыт при дальнейшем анализе; $\vec{r}_{1C,O}$ и $\vec{r}_{2C,O}$ – радиусы-векторы, которые при $\mu_1 = 0$ (см. рис. 1, *a*) имеют индекс \vec{r}_{1C} , \vec{r}_{2C} и определяют положение опорного m_1 и рабочего m_2 тел в системе отсчета K_C :

$$\vec{r}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21}; \vec{r}_{2C} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{21} \quad (5)$$

(получены из уравнений $m_1 \vec{r}_{1C} + m_2 \vec{r}_{2C} = 0$ и $\vec{r}_{21} = \vec{r}_{2C} - \vec{r}_{1C}$, где \vec{r}_{21} – радиус-вектор рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1) и аналогичные радиусы-векторы с индексами \vec{r}_{1O} и \vec{r}_{2O} , определяющие положение этих тел в системе отсчета K_O при $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, *b*), подлежащие дальнейшему определению.

Импульс тел m_1 и m_2 МС2 в системе отсчета K , выраженный непосредственно через радиус-вектор \vec{r}_1 и радиус-вектор \vec{r}_2 (4), равен

$$\vec{p}_1 = m_1 \frac{d}{dt} \vec{r}_1; \vec{p}_2 = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (6)$$

Суммарный (абсолютный) импульс МС2 запишем в виде:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_e + \vec{p}_r = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \vec{r}_1 + m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (7)$$

Он складывается из ее переносного и относительного импульсов

$$\vec{p}_e = (m_1 + m_2) \frac{d}{dt} \vec{r}_1, \vec{p}_r = m_2 \frac{d}{dt} \vec{r}_{21}. \quad (8)$$

С учетом импульсов (6) запишем второй закон Ньютона отдельно для каждого из взаимодействующих тел m_1 и m_2 с учетом аксиомы связей и диссипативной силы

$$\vec{F}_1 = -\mu_1 \vec{v}_1, \quad (9)$$

действующей на опорное тело m_1 МС2 (см. рис. 1, *b*):

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_1; \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{R}_{21}, \quad (10)$$

где \vec{v}_1 – скорость опорного тела m_1 в системе отсчета K ; \vec{R}_{12} и \vec{R}_{21} – реакции связи R .

Суммируя левые и правые части уравнений (10) с учетом того, что по третьему закону Ньютона $\sum_{i,j=1,2; i \neq j} \vec{R}_{ij} = 0$, и того, что $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_e + \vec{p}_r$ (7), получим уравнение

$$\frac{d\vec{p}_e}{dt} + \frac{d\vec{p}_r}{dt} = \vec{F}_1, \quad (11)$$

которое записано для системы отсчета K в терминах переносного \vec{p}_e и относительного \vec{p}_r импульсов (8).

Первые два члена уравнения (11) можно обозначить переносной $\vec{\Phi}_1$ и относительной $\vec{\Phi}_{21}$ силами инерции:

$$\vec{\Phi}_1 = -\frac{d\vec{p}_e}{dt} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}; \quad \vec{\Phi}_{21} = -\frac{d\vec{p}_r}{dt} = -m_2 \frac{d^2 \vec{r}_{21}}{dt^2}. \quad (12)$$

Для систем отсчета K_1 и K с параллельными осями $x_1 \parallel x$ и $y_1 \parallel y$ проекции $r_{21x} = R \cos \varphi_{21}$ и $r_{21y} = R \sin \varphi_{21}$ радиуса-вектора \vec{r}_{21} в системе отсчета K_1 инвариантны этим же проекциям в системе отсчета K $r_{21x} = x_{21}$ и $r_{21y} = y_{21}$. Тогда уравнение (11) посредством раздельного или одновременного переноса сил инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_{21}$ (12) в его правую часть можно свести как к форме второго закона Ньютона, так и к форме принципа Даламбера:

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1; \quad \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0. \quad (13)$$

Для удобства последующего анализа представим первое уравнение (13) в проекциях на оси координат x и y системы отсчета K :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = m_2 \omega_{21}^2 R \cos \varphi_{21} + F_{1x}; \quad (m_1 + m_2) \ddot{y}_1 = m_2 \omega_{21}^2 R \sin \varphi_{21} + F_{1y}, \quad (14)$$

где $R = r_{12} = r_{21}$; $x_1 = r_{1x}$, $y_1 = r_{1y}$; $F_{1x} = -\mu_1 \dot{x}_1$ и $F_{1y} = -\mu_1 \dot{y}_1$ – проекции диссипативной силы \vec{F}_1 (9) на оси x и y системы отсчета K .

Согласно принципу Даламбера, на МС2 как на целую с массой $m = m_1 + m_2$ в системе отсчета K_1 действует уравновешенная система сил $\vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_{21} + \vec{F}_1 = 0$. При этом переносная сила инерции $\vec{\Phi}_1$ определена абсолютным ускорением $\vec{a}_1 = -d^2 \vec{r}_1 / dt^2$ (13), взятым с обратным знаком. Согласно (4), абсолютное ускорение \vec{a}_1 при $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, *b*) есть сумма $d^2 \vec{r}_1 / dt^2 = d^2 \vec{r}_o / dt^2 + d^2 \vec{r}_{1o} / dt^2$ переносного ускорения $d^2 \vec{r}_o / dt^2$ центра O ИД и относительного ускорения $d^2 \vec{r}_{1o} / dt^2$ рабочего тела m_2 в системе отсчета K_o , связанной с центром O .

Проанализируем систему сил, действующих в МС2 в системе отсчета K_o , показанную на рис. 1, *c*, где для наглядности принято $\varphi_{21} = 0$, когда связь R направлена по оси x_1 системы отсчета K_1 . В этой системе отсчета на тело $m = m_1 + m_2$ также действуют относительная $\vec{\Phi}_{21}$ сила инерции (12) и диссипативная сила \vec{F}_1 (9). Результирующая сила $\vec{F}_{10} = \vec{F}_1 + \vec{\Phi}_{21}$ вызывает ускорение \vec{a}_{10}

тела m , направленное в системе отсчета K_O к центру O ИД и, следовательно, силу инерции

$$\vec{\Phi}_{10} = -(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{r}_{10}}{dt^2} \quad (15)$$

этого тела в этой же системе отсчета K_O , направленную в противоположном направлении, что будет подтверждено частным решением уравнений (14) относительно ускорений \ddot{x}_{10} и \ddot{y}_{10} , определяющих вектор ускорения \vec{a}_{10} (см. рис. 1, с).

Диссипативная сила \vec{F}_1 (9) задает угол диссипативных потерь ε , который определяет угол запаздывания $\varphi = \pi + \varepsilon$ вектора переносной силы инерции $\vec{\Phi}_{10}$ по отношению к вектору относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$, который в системах отсчета K_1 и K_O инвариантен, так как их оси x_1 и x_O параллельны $x_1 \parallel x_O$. Методика определения угла ε будет предложена в соответствующем разделе статьи.

При $\vec{F}_1 = 0$ ($\mu_1 = 0$) значение $\varepsilon = 0$, и движение тела m будет совершаться относительно ЦМ C МС2 (см. рис. 1, а), с которым в данном случае совпадает центр O ИД.

Таким образом, уравнения (13) и (14) сводят МС2 к материальной точке с суммарной массой ее тел $m = m_1 + m_2$, условно сосредоточенной в ее опорном теле m_1 , которое движется под действием силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 и диссипативной силы \vec{F}_1 , оказывающей сопротивление движению опорного тела m_1 .

Эти уравнения по своему виду аналогичны уравнению вибратора (1.1), используемому в робототехнике, которое без вывода приведено в работе [6].

Определим вид частного решения уравнений (14). Согласно рис. 1, а, фаза φ_{1C} вращательного движения опорного тела m_1 в системе отсчета K_C ЦМ C связана с фазой φ_{21} вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1 преобразованием

$$\varphi_{1C} = \varphi_{21} + \varphi, \quad (16)$$

где $\varphi = \varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \pi$ – угол запаздывания фазы φ_{1C} вращательного движения опорного тела m_1 относительно фазы φ_{2C} вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_C при $\mu_1 = 0$ (см. рис. 1, а).

Для случая $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, б) опорное m_1 и рабочее m_2 тела будут совершать вращательное движение в системе отсчета K_O центра O ИД по окружностям s_1 и s_2 , как показано на рис. 1, б. В этом случае фаза φ_{1O} вращательного движения рабочего тела m_1 в системе отсчета K_O связана с фазой вращательного движения рабочего тела m_2 в системе отсчета K_1 подобным (16) преобразованием

$$\varphi_{1O} = \varphi_{21} + \varphi, \quad (17)$$

где теперь $\varphi = \pi + \varepsilon$, а ε – угол диссипативных потерь [3, 4], учитывающий влияние действия на опорное тело m_1 диссипативной силы \vec{F}_1 (9).

С учетом преобразования (17) частное решение уравнений (14) для МС2 при $\mu_1 \neq 0$ (см. рис. 1, *b*), когда $\varepsilon \neq 0$, в системе отсчета K_O можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_{1O} &= A_1 \cos \varphi_{1O} = A_1 \cos(\varphi_{21} + \varphi) = A_1 \cos(\varphi_{21} + \pi + \varepsilon) = -A_1 \cos(\varphi_{21} + \varepsilon); \\ y_{1O} &= A_1 \sin \varphi_{1O} = A_1 \sin(\varphi_{21} + \varphi) = A_1 \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) = -A_1 \sin(\varphi_{21} + \varepsilon), \end{aligned} \quad (18)$$

где A_1 – амплитуда, подлежащая дальнейшему определению.

В среде без потерь при $\mu_1 = 0$, когда $\varepsilon = 0$ (см. рис. 1, *a*), решения (18) определяют положение рабочего тела m_1 в системе отсчета K_C [1, 2]:

$$\begin{aligned} x_{1C} &= A_1 \cos \varphi_{1C} = A_1 \cos(\varphi_{21} + \pi) = -A_1 \cos \varphi_{21}; \\ y_{1C} &= A_1 \sin \varphi_{1C} = A_1 \sin(\varphi_{21} + \pi) = -A_1 \sin \varphi_{21}, \end{aligned} \quad (19)$$

начало координат которой связано с ЦМ C МС2, где $A_1 = a$ и $a = m_2 R / (m_1 + m_2)$.

Подстановка скоростей $\dot{x}_1 = dx_{1C} / dt$ и $\dot{y}_1 = dy_{1C} / dt$, полученных из (19) при $x_C = const$ и $y_C = const$ (4) в импульс \vec{p} (7), выраженный в проекциях на оси x и y неподвижной системы отсчета K

$$\begin{aligned} p_x &= p_{ex} + p_{rx} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 - m_2 \omega_{21} R \sin(\varphi_{21}); \\ p_y &= p_{ey} + p_{ry} = (m_1 + m_2)\dot{y}_1 + m_2 \omega_{21} R \cos(\varphi_{21}) \end{aligned} \quad (20)$$

показывает, что $p_x = 0$ и $p_y = 0$, и, следовательно, при $\mu_1 = 0$ он сохраняется

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \overline{\text{const}}. \quad (21)$$

Из (21) и (7) следует

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_e = -\frac{d}{dt} \vec{p}_r. \quad (22)$$

Таким образом, при любом характере изменения угловой скорости $d\omega_{21}/dt$ относительного движения рабочего тела m_2 (любом изменении относительного импульса \vec{p}_r) абсолютный импульс $\vec{p} = \vec{p}_e + \vec{p}_r$ (7) замкнутой МС2 при $\mu_1 = 0$ сохраняется (21). Следствием равенства (22) является то, что угол запаздывания φ (16) замкнутой МС2 равен $\varphi = \varphi_{1C} - \varphi_{2C} = \pi$.

Методика определения угла ε и координат x_O, y_O центра O ИД

Общее решение неоднородных дифференциальных уравнений вида (14) есть сумма его частного и общего решений [2]. Частное решение в системе отсчета K_C (при $\varepsilon = 0$) или в системе отсчета K_O (при $\varepsilon \neq 0$) будем искать в общем для этих случаев виде (18).

Для определения входящих в (18) амплитудного коэффициента A_1 и угла ε представим уравнения (14) в комплексной форме

$$\ddot{q}_1 + 2\gamma_1 \dot{q}_1 = a\omega_{21}^2 \exp j\omega_{21}t, \quad (23)$$

где q_1 – обобщенная координата; $\gamma_1 = \mu_1 / [2(m_1 + m_2)]$ – коэффициент затухания движения опорного тела m_1 .

Решение комплексного уравнения (23) будем искать в виде:

$$q_1 = B_1 \exp j\omega_{21}t, \quad (24)$$

где B_1 – комплексная амплитуда, подлежащая определению.

Дифференцирование (24) по времени t дает

$$\dot{q}_1 = jB_1\omega_{21} \exp j\omega_{21}t; \quad \ddot{q}_1 = -B_1\omega_{21}^2 \exp j\omega_{21}t. \quad (25)$$

Подстановка (25) в уравнение (23) сводит его к виду:

$$-B_1\omega_{21}^2 + 2j\gamma_1 B_1\omega_{21} = a\omega_{21}^2. \quad (26)$$

Из (26) комплексную амплитуду B_1 можно выразить в виде:

$$B_1 = \frac{a\omega_{21}^2}{\omega_{21}^4 + 4\gamma_1^2\omega_{21}^2} (-\omega_{21}^2 - j2\gamma_1\omega_{21}) = A_1 \exp(j\varphi), \quad (27)$$

которая находится в III четверти ее комплексной плоскости, где $A_1 = |B_1|$.

С учетом того, что амплитуда B_1 (27) находится в III четверти ее комплексной плоскости, ее модуль $A_1 = |B_1|$ и фазу φ можно определить следующим образом:

$$A_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad \varphi = \pm\pi + \varepsilon; \quad \varepsilon = \arctg\xi, \quad (28)$$

где $\xi = \text{Im } B_1 / \text{Re } B_1 = 2\gamma_1 / \omega_{21}$ – диссипативный параметр, зависящий как от коэффициента сопротивления μ_1 внешней среды, так и от собственных параметров МС2 m_1, m_2 и ω_{21} ; знак «+» или «-» соответствует равноценным по результату положительному и отрицательному отсчетам угла φ .

Подстановка (27) в (24) для положительного отсчета угла $\varphi = \varphi_{10} = \pi + \varepsilon$ при $\varphi_{21} = 0$ (см. рис. 1, *b*) дает

$$q_1 = A_1 \exp j\omega_{21}t \exp(j\varphi) = -A_1 [\cos(\omega_{21}t + \varepsilon) + j \sin(\omega_{21}t + \varepsilon)]. \quad (29)$$

Действительная часть $\text{Re } q$ (29) является частным решением дифференциальных уравнений (14) в виде (18) для $\varepsilon \neq 0$ или в виде (19) для $\varepsilon = 0$.

Согласно (28) угол ε зависит как от коэффициента сопротивления μ_1 , входящего в коэффициент затухания γ_1 (23), так и от собственных параметров (m_1, m_2 и ω_{21}) МС2.

Далее были записаны общие решения

$$x_o(t) = C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t); \quad y_o(t) = C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) \quad (30)$$

однородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_o + 2\gamma_1 \dot{x}_o = 0; \quad \ddot{y}_o + 2\gamma_1 \dot{y}_o = 0, \quad (31)$$

характеризующих переносную часть движения МС2 вместе с центром O ИД как $\vec{v}_o = d\vec{r}_o / dt$ в системе отсчета K (см. рис. 1, *b*).

Сумма решений (18) и (30) дает решения дифференциальных уравнений (14) в системе отсчета K в виде:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_{1x} + C_{2x} \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \cos(\omega_{21}t + \varepsilon); \\ \dot{x}_1(t) &= -2C_{2x}\gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) + A_1\omega_{21} \sin(\omega_{21}t + \varepsilon); \\ y_1(t) &= C_{1y} + C_{2y} \exp(-2\gamma_1 t) - A_1 \sin(\omega_{21}t + \varepsilon); \\ \dot{y}_1(t) &= -2C_{2y}\gamma_1 \exp(-2\gamma_1 t) - A_1\omega_{21} \cos(\omega_{21}t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (32)$$

Для нулевых начальных условий опорного тела m_1 примем $x_1(t=0) = 0$, $\dot{x}_1(t=0) = 0$ и $y_1(t=0) = 0$, $\dot{y}_1(t=0) = 0$. Тогда из (32) найдем

$$\begin{aligned} C_{1x} &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \sin \varepsilon \right); C_{2x} = A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \sin \varepsilon; \\ C_{1y} &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon \right); C_{2y} = -A_1 \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставив (33) в (32), получим общее решение дифференциальных уравнений (14):

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{x}_1(\varphi_{21}) &= -A_1 \omega_{21} \left(\exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \sin \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ y_1(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \cos \varepsilon - \sin(\varphi_{21} + \varepsilon) \right); \\ \dot{y}_1(\varphi_{21}) &= A_1 \omega_{21} \left(\exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21}) \cos \varepsilon - \cos(\varphi_{21} + \varepsilon) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Координаты и скорость ЦМ C МС2 в системе отсчета K можно определить по формулам

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}; \dot{x}_C = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2}; \dot{y}_C = \frac{m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2}{m_1 + m_2}, \quad (35)$$

где координаты $x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}$, $y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}$ и определенные по ним скорости $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \omega_{21} R \sin \varphi_{21}$, $\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \omega_{21} R \cos \varphi_{21}$.

Траектории движения s_1 , s_2 и s_C опорного m_1 , рабочего m_2 тел и ЦМ C МС2 в системе отсчета K , рассчитанные по решениям (34) и формулам (35) при $\mu_1 = 3.77; \infty$ Н·с/см, показаны на рис. 2.

Координаты центра O ИД можно определить из решений (34) в виде:

$$\begin{aligned} x_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\cos \varepsilon - \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \sin \varepsilon \right); \\ y_O(\varphi_{21}) &= A_1 \left(\sin \varepsilon + \frac{\omega_{21}}{2\gamma_1} (1 - \exp(-\frac{2\gamma_1}{\omega_{21}} \varphi_{21})) \cos \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Образование ИД за малый интервал времени $dt \rightarrow 0$ при $\mu_1 = 3.77$ Н·с/см соответствует представлению о мгновенной передаче взаимодействий в классической механике. Координаты центра O ИД в системе отсчета K , определенные из (36) при $t \rightarrow \infty$, составляют $x_O = \cos \varepsilon = 0.707$ см и $y_O = \sin \varepsilon = 0.707$ см, где угол ε равен 45° (см. рис. 2).

Согласно выражениям (36), центр O ИД при $\mu_1 \neq 0$ и $\varphi_{21} < \pi$ дрейфует по затухающему закону из положения O_0 в положение O (см. рис. 2) со скоростью

$v_O = \sqrt{\dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2}$, где скорости \dot{x}_O и \dot{y}_O можно определить дифференцированием этих выражений по времени t .

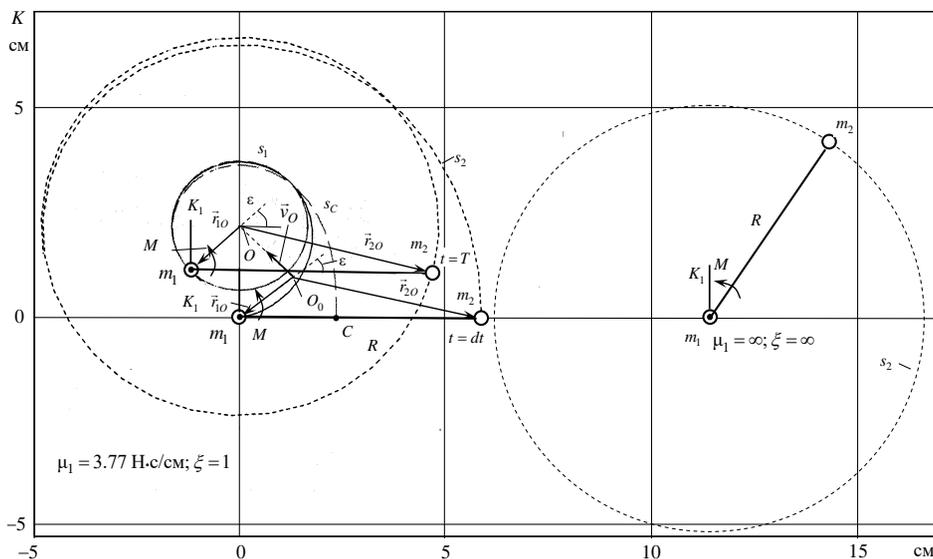


Рис. 2. Движение МС2 в системе отсчета K для различных значений μ_1
Fig. 2. The motion of MS2 (mechanical system 2) in the frame of reference of K at various μ_1

Таким образом, в системе отсчета K опорное m_1 и рабочее m_2 тела, а также их ЦМ C будут двигаться по спиральным траекториям s_1, s_2 и s_C в стационарное состояние [4]. При этом постоянное значение угловой скорости $\omega_{21} = const$ поддерживается активным моментом M .

При $\mu_1 = 0$ центр O ИД совпадает с ЦМ C МС2 и опорное m_1 и рабочее m_2 тела будут двигаться относительно ЦМ C (см. рис. 1, а).

При $\mu_1 = \infty$ рабочее тело m_2 будет совершать движение по окружности s_2 относительно неподвижного опорного тела m_1 (см. рис. 2).

Полная система уравнений

Координаты и скорости тел m_1 и m_2 МС2 в системе отсчета K выразим в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1; x_2 = x_1 + R \cos \varphi_{21}; \dot{x}_1 = \dot{x}_1; \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - R\dot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}; \\ y_1 &= y_1; y_2 = y_1 + R \sin \varphi_{21}; \dot{y}_1 = \dot{y}_1; \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + R\dot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}. \end{aligned} \quad (37)$$

Кинетическую энергию МС2 в этой системе отсчета K определим как

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}_{11}^2. \quad (38)$$

Подстановка в скорости (37) в (38) определяет лагранжиан МС2

$$L = T - U(R) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R^2 - m_2\dot{\varphi}_{21}R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}_{11}^2 - U(R), \quad (39)$$

где $U(R)$ – неизвестная потенциальная энергия рабочего тела m_1 , зависящая от длины стержня R .

Составляя уравнения Лагранжа по координатам x_1, y_1, φ_{21} и углу отката φ_{11} тела m_1 в системе отсчета K_1 , получим следующую систему уравнений движения МС2 для ее нестационарного (40, а) и стационарного (40, б) состояний [4]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a(\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21} + \ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}); \ddot{y}_1 + 2\gamma_1\dot{y}_1 = a(\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21} - \ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}); \\ \frac{dK_z^+}{dt} = 2m_2\gamma_1R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) = M^+; \frac{dK_z^-}{dt} = -I\ddot{\varphi}_{11} = M^-, \end{cases} \quad (40, a)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\gamma_1\dot{x}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}; \ddot{y}_1 + 2\gamma_1\dot{y}_1 = a\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21}; \\ \frac{dK_z^+}{dt} = 2m_2\gamma_1R(\dot{x}_1 \sin \varphi_{21} - \dot{y}_1 \cos \varphi_{21}) = M^+; \frac{dK_z^-}{dt} = M^-, \end{cases} \quad (40, b)$$

где члены, содержащие угловые ускорения $\ddot{\varphi}_{21}$ и $\ddot{\varphi}_{11}$, в стационарном состоянии упущены (40, б); $\chi_1 = \mu_{1b}S$ и $\mu_{1b} = \pi\eta r$ – обобщенный коэффициент сопротивления внешней среды вращению (откату) тела m_1 в виде сферы с радиусом сферы r и коэффициент сопротивления его вращению (формула Стокса); $S = 4\pi r^2$ – площадь сферической поверхности тела m_1 ; η – вязкость внешней среды; M^+ – активный момент M , действующий на оси шарнира тела m_1 ; $M^- = -M + \chi_1\dot{\varphi}_{11}$ – момент отката.

Согласно рис. 1, с первые слагаемые $a\dot{\varphi}_{21}^2 \cos \varphi_{21}$ и $a\dot{\varphi}_{21}^2 \sin \varphi_{21}$ правой части первых двух уравнений (40, а) образованы проекциями радиальной компоненты $\Phi_{21} = m_2\dot{\varphi}_{21}^2 R$, а вторые $a\ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21}$ и $a\ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21}$ – проекциями тангенциальной компоненты $\Phi_{21}^r = m_2\ddot{\varphi}_{21} R$ силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ на оси x_1, x_O и y_1, y_O параллельных систем отсчета K_1 и K_O , при делении этих проекций на $m_1 + m_2$. В стационарном состоянии $\ddot{\varphi}_{21} = 0$ и влияние компонент $a\ddot{\varphi}_{21} \sin \varphi_{21} = 0$ и $-a\ddot{\varphi}_{21} \cos \varphi_{21} = 0$ в (40, а) равно нулю ($\Phi_{21}^r = 0$) и (40, а) переходит (40, б). Если $\vec{F}_1 = 0$, то согласно принципу наименьшего действия МС2 будет совершать движение относительно ее ЦМ C (см. рис 1, а) при $\Phi_{21}^r = 0$, когда ее кинетический момент $K_z = const$.

Силы инерции $\vec{\Phi}_{1к}$ и $\vec{\Phi}_{2к}$ Кориолиса опорного m_1 и рабочего m_2 тел в системе уравнений (40) не входят, так как по правилу Жуковского они направлены вдоль связи R и образуют равновесную систему сил $\vec{\Phi}_{1к} + \vec{\Phi}_{2к} = 0$.

Третье уравнение (40, а) записано с учетом двух первых.

Четвертое уравнение (40, *a*) записано с учетом теоремы о кинетическом моменте тела m_1 в неинерциальной системе K_1 , ось z которой скреплена с ЦМ этого тела, движущейся в неподвижной системе отсчета K поступательно.

Первые два уравнения (40, *b*) МС2 для ее стационарного состояния при $\mu_1 = 0$ имеют решения (19), а при $\mu_1 \neq 0$ – (18).

Суммируя последние два уравнения (40, *b*), почленно найдем

$$\frac{d}{dt} K_z = \frac{d}{dt} K_z^+ + \frac{d}{dt} K_z^- = M^+ - M^- . \quad (41)$$

Так как стационарному значению $\omega_{21} = const$ соответствует $\dot{\phi}_{11} = const$, то из (41) получим

$$\frac{d}{dt} K_z = 0 . \quad (42)$$

Таким образом, исходя из мгновенной передачи взаимодействий в механике, любому изменению угловой скорости ω_{21} (кинетического момента dK_z^+ / dt МС2) относительно оси z_C системы отсчета K_C при $\mu_1 = 0$, вызванному действием активного момента M , соответствует равное по величине и обратное по знаку изменение откатного кинетического момента $-dK_z^- / dt$ опорного тела m_1 . При этом результирующий кинетический момент МС2 сохраняется, $K_z = const$ при $\mu_1 = 0$, а при $\mu_1 \neq 0$ поддерживается постоянным за счет источника активного момента M , обеспечивающего $\omega_{21} = const$.

При $\mu_1 = \infty$ рабочее тело m_2 будет совершать вращательное движение вокруг неподвижной оси z системы отсчета K при $K_z \neq const$ до перехода в стационарный режим $\omega_{21} = const$, когда $K_z = const$. При этом источник активного момента M компенсирует потери кинетической энергии МС2 в диссипативной среде, поддерживая стационарное значение угловой скорости $\omega_{21} = const$, величина которого зависит от мощности этого источника.

Заключение

В результате динамического анализа получено уравнение движения МС2 в диссипативной среде (13), оказывающей линейное вязкое сопротивление ($\mu_1 \neq 0$) движению ее опорного тела m_1 с учетом относительной силы инерции $\vec{\Phi}_{21}$ рабочего тела m_2 , влияющей на ее абсолютное движение. Это уравнение обеспечивает решение задачи двух тел для диссипативной среды. По физическому смыслу оно аналогично второму закону Ньютона для МС в инерциальной системе отсчета K . Если в качестве опорной выбрать систему отсчета K_C ЦМ C , то уравнение (13) переходит в классическое (1).

Полученные теоретические выводы и результаты, в отличие от выводов работы [7], позволяют в представлениях современной механики записать уравнение движения трехмассовой механической системы [3, 4], типа инерциод Толчина [5],

а также построить его математическую модель [4] и обосновать независимость величины смещения ЦМ трехмассовой МСЗ от диссипативного параметра МСЗ ξ (28), лежащего в пределах $0 < \xi \leq \infty$ [3, 4, 8].

Список источников

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М. : Высш. школа, 1990. 607 с.
2. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Механика и электродинамика. М. : Наука, 1991. Т. 1. 496 с.
3. Савелькаев С.В. Эффект независимости величины смещения центра масс механической системы от диссипативности внешней среды // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 4 (17). С. 42–48.
4. Савелькаев С.В. Механика. Корреляционная механика механических систем : препринт. Новосибирск : СГГА, 2013. 67 с.
5. Толчин В.Н. Инерциоид. Силы инерции как источник поступательного движения. Пермь : Кн. изд-во, 1977. С. 100 с.
6. Егоров А.Г., Захарова О.С. Энергетически оптимальное движение вибратора в среде с наследственным законом сопротивления // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 168–176.
7. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. М. : НТ-Центр, 1993. 362 с.
8. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 2. С. 202–215.

References

1. Nikitin N.N. (1990) *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [A course of theoretical mechanics]. Moscow: Vysshaya shkola.
2. Savel'ev I.V. (1991) *Osnovy teoreticheskoy fiziki. Mekhanika i elektrodinamika* [Fundamentals of theoretical physics. Mechanics and electrodynamics]. Moscow: Nauka.
3. Savel'kaev S.V. (2011) Effekt nezavisimosti velichiny smeshcheniya tsentra mass mekhanicheskoy sistemy ot dissipativnosti vneshney sredy [Independence of the displacement of the center of mass of a mechanical system from the dissipativity of the external medium]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov – Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 4(17). pp. 42–48.
4. Savel'kaev S.V. (2013) *Mekhanika. Korelyatsionnaya mekhanika mekhanicheskikh sistem: preprint* [Mechanics. Correlation mechanics of mechanical systems: preprint]. Novosibirsk: SGGGA.
5. Tolchin V.N. (1977) *Inertsioid. Sily inertsi kak istochnik postupatel'nogo dvizheniya* [Inertioid. Inertial forces as a source of translational motion]. Perm: Permskoe knizhnoe izdatel'stvo.
6. Egorov A.G., Zakharova O.S. (2015) Energeticheski optimal'noe dvizhenie vibratora v srede s nasledstvennym zakonom soprotivleniya [Energetically optimal movement of a vibrator in a medium with a hereditary law of resistance]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*. 3. pp. 168–176.
7. Shipov G.I. (1993) *Teoriya fizicheskogo vakuuma* [Theory of physical vacuum]. Moscow: NT-Tsentr.
8. Chernous'ko F.L. (2008) Optimal'nye periodicheskie dvizheniya dvukhmassovoy sistemy v soprotivlyayushcheyse sredy [Optimal periodic motions of a two-mass system in a resisting medium]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 72(2). pp. 202–215.

Сведения об авторе:

Савелькаев Сергей Викторович – доктор технических наук, доцент ВАК, профессор кафедры специальных устройств, инноватики и метрологии Сибирского государственного университета геосистем и технологий, Новосибирск, Россия. E-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

Information about the author:

Savel'kaev Sergey V. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: sergei.savelkaev@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 06.07.2022; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 06.07.2022; accepted for publication 12.02.2024