

Научная статья

УДК 534.112

doi: 10.17223/19988621/87/13

Нелинейные колебания токонесущей струны в магнитном поле

Александр Константинович Томилин¹, Иван Сергеевич Коноваленко²,
Игорь Сергеевич Коноваленко³

^{1, 2, 3} Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ aktomilin@tpu.ru

² ivkon@tpu.ru

³ iskonovalenko@tpu.ru

Аннотация. Теоретически и экспериментально исследованы колебания медной струны с учетом совокупности механических, тепловых и электромагнитных факторов воздействия. Предложен расчетно-экспериментальный метод, позволяющий достаточно точно определять кумулятивные факторы затухания при первой и второй формах колебаний. Экспериментально обнаружено явление термопараметрического резонанса, возникающее в результате периодического нагревания струны за счет джоулева тепла и охлаждения при достаточно больших амплитудах колебаний в воздушной среде.

Ключевые слова: струнные датчики, магнитная сила, параметрический резонанс

Благодарности: Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности ТПУ. Авторы выражают благодарность В.А. Томилину за помощь в выполнении расчетно-графических работ. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Для цитирования: Томилин А.К., Коноваленко Ив.С., Коноваленко Иг.С. Нелинейные колебания токонесущей струны в магнитном поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 87. С. 163–174. doi: 10.17223/19988621/87/13

Original article

Nonlinear oscillations of a current-carrying string in a magnetic field

Aleksandr K. Tomilin¹, Ivan S. Konovalenko², Igor' S. Konovalenko³

^{1, 2, 3} Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ aktomilin@tpu.ru

² ivkon@tpu.ru

³ iskonovalenko@tpu.ru

Abstract. The nonlinear properties of a string must be taken into account when creating string systems that are used in transducers and musical instruments. The forced oscillations

of an electrically conductive string in a magnetic field are described by a nonlinear integro-differential equation. The amplitude–frequency characteristics of nonlinear resonances of the first and second orders are obtained. The damping factor of the first-mode oscillations is determined from the optimal coincidence of the experimental and theoretical amplitude–frequency characteristic graphs. The experimental amplitude–frequency characteristics for the first-order resonance is obtained using a laboratory setup with a copper string 0.4 mm in diameter and 0.57 m long, having a certain initial tension. The cumulative damping factor of the first mode is obtained, which takes into account all the dissipative factors of a real string system.

Low-frequency thermoparametric oscillations of the second mode are observed in experiments with a string. It follows from the analysis of the Mathieu equation that parametric resonance arises even at very low amplitudes of the thermal tension of a string, and it must be taken into account in the frequency analysis of oscillations of string systems.

Keywords: vibrating string transducers, magnetic force, parametric resonance

Acknowledgments: This study was financially supported by the Program for improving the competitiveness of Tomsk Polytechnic University. The authors are grateful to Tomilin V.A. for his help in performing the calculations and graphic work. The authors declare that they have no conflict of interests.

For citation: Tomilin, A.K., Konovalenko, I.S., Konovalenko, Ig.S. (2024) Nonlinear oscillations of a current-carrying string in a magnetic field. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 87. pp. 163–174. doi: 10.17223/19988621/87/13

Введение

Для исследования статических и динамических деформаций, возникающих в сложных конструкциях, часто используются струнные датчики [1]. Принцип их действия основан на зависимости частоты колебаний струны от ее натяжения. Они с высокой точностью тестируют деформационные изменения конструкций. Однако струнные датчики очень чувствительны к температуре и обладают нелинейными свойствами, которые следует учитывать при составлении градировочных графиков [2–5].

Аналогичные проблемы, связанные с качеством струнных систем, возникают при разработке и совершенствовании электромузыкальных инструментов, где используются магнитные поля звукоусъемных датчиков или систем возбуждения колебаний. В связи с этим исследование воздействия электромагнитных сил на колебания струны является актуальной теоретической и экспериментальной задачей. Качество генерируемого струной звука в значительной мере зависит от ее упругих свойств, которые обычно имеют нелинейные характеристики.

Важно обратить внимание на способы возбуждения колебаний в струнных системах. Приоритетными считаются способы бесконтактного возбуждения колебаний. В частности, можно использовать распределенную силу Ампера, воздействующую на токонесущую неферромагнитную струну, расположенную во внешнем магнитном поле [6]. При пропускании по струне электрического тока могут заметно проявляться тепловые эффекты, связанные с ее нагреванием и последующим охлаждением при колебаниях во внешней среде. Теория и различные прикладные примеры параметрических колебаний в системах с распределенными параметрами приведены в работах [7–15]. Таким образом, возникает актуальная проблема теоретического описания

и экспериментального исследования колебаний электропроводной струны с учетом совокупности механических, тепловых и электромагнитных факторов.

Цель настоящего исследования заключается в сопоставлении теоретических и экспериментальных данных с учетом совокупности воздействия всех перечисленных факторов на колебания струны: проявление нелинейности и возникновение параметрической неустойчивости.

Постановка задачи

Рассматриваются плоские нелинейные колебания струны с закрепленными концами. Струна находится в распределенном магнитном поле, вектор индукции которого направлен ортогонально плоскости колебаний струны. При пропускании по струне переменного электрического тока возникает вынуждающая электромагнитная сила. Теоретически и экспериментально исследуются вынужденные колебания электропроводной струны с учетом совокупности механических, тепловых и электромагнитных факторов.

Теория

Элементарная теория плоских колебаний струны с закрепленными концами основана на гипотезе абсолютной гибкости [7], в соответствии с которой натяжение струны в процессе колебаний считается неизменным. Однако в экспериментах при колебаниях струнных систем часто наблюдаются «срывы» и «скачки» амплитуды при плавном изменении частоты вынуждающей силы [8], что свидетельствует о проявлении нелинейных свойств. Это связано со сложной зависимостью силы упругости от деформации струны в процессе колебаний. Резкое изменение амплитуды колебаний негативно отражается на точности измерений струнных датчиков, а также на качестве звука, воспроизводимого музыкальными инструментами. Возникает проблема устранения этого дефекта за счет правильного подбора диапазона рабочих частот, а также диссипативных сил, воздействующих на струну. При этом следует учитывать не только внешнее трение, возникающее за счет взаимодействия струны с окружающей средой, но и воздействие магнитных полей, которые часто используются в струнных системах.

Теория нелинейных колебаний электропроводной струны во внешнем магнитном поле содержится в монографии [6]. Пусть струна расположена вдоль оси z и вектор индукции распределенного магнитного поля $\mathbf{B}(z)$ направлен ортогонально плоскости колебаний струны. Вынужденные колебания нелинейной струны в магнитном поле описываются интегро-дифференциальным уравнением

$$m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[T_0 + \frac{EA}{2l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 dz \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma AB(z)}{l_0} \int_0^{l_0} B(z) \frac{\partial u}{\partial t} dz = B(z) J_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $u(z, t)$ – функция поперечных смещений струны, m_0 , l_0 , A , E , σ – соответственно погонная масса, длина, площадь

поперечного сечения, модуль упругости и электропроводность струны, T_0 – ее предварительное натяжение с учетом постоянного термического удлинения за счет действующего значения силы тока, β – коэффициент внешнего сопротивления среды, J_0 – амплитуда силы тока, созданного генератором электрических сигналов, ω – циклическая частота этого тока.

Второй член в левой части дифференциального уравнения (1) учитывает нелинейность упругой восстанавливающей силы, возникающей за счет изменения натяжения струны при прогибе. Третий и четвертый члены уравнения соответствуют линейному внешнему сопротивлению и электромагнитной демпфирующей силе. Член, стоящий в правой части уравнения (1) выражает периодическую вынуждающую электромагнитную силу с частотой ω .

Используя метод Фурье и учитывая, что собственные амплитудные функции струны имеют синусоидальную форму:

$$X_r = \sin \frac{r\pi}{l_0} z, \quad (r = 1, \infty),$$

уравнение в частных производных (1) можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта процедура подробно описана в монографии [6].

Рассмотрим два частных случая. Первый – имеется один активный участок шириной $\Delta z = z_2 - z_1$, который располагается симметрично посередине струны. На нем действует однородное и стационарное магнитное поле индукции \mathbf{B} (рис. 1).

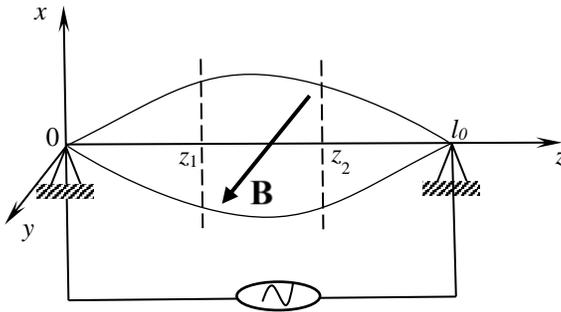


Рис. 1. Вынужденные колебания струны первой формы
Fig. 1. Forced oscillations of a first-mode string

В этом случае возбуждается стоячая волна первой амплитудной формы ($r = 1$), и колебания описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{q}_1 + 2h_1\dot{q}_1 + p_1^2 q_1 + Nq_1^3 = F_0\gamma_1 \cos \omega t, \quad (2)$$

где q_1 – обобщенная координата при первой форме колебаний, циклическая частота незатухающих линейных колебаний

$$p_1 = \frac{\pi}{l_0} \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}, \quad (3)$$

фактор затухания

$$h_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{8\sigma B^2 \gamma_1^2 A}{m_0 \pi^2} \right) \quad (4)$$

и введены обозначения

$$N = \frac{EA\pi^4}{4m_0J_0^4}, \quad F_0 = \frac{4BJ_0}{\pi m_0}, \quad (5)$$

$$\gamma_1 = \sin \frac{\pi(z_1 + z_2)}{2l_0} \sin \frac{\pi(z_2 - z_1)}{2l_0}. \quad (6)$$

Во втором случае имеется два одинаковых активных участка со взаимно противоположным направлением векторов магнитной индукции. Середины этих участков располагаются в точках $l_0/4$ и $3l_0/4$ (рис. 2). Линейные размеры участков обозначим $\Delta_1 = z_2 - z_1$ и $\Delta_2 = z_4 - z_3$, причем $\Delta_1 = \Delta_2$.

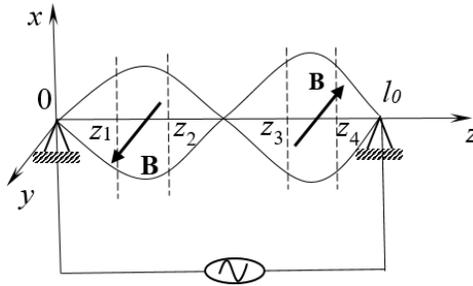


Рис. 2. Вынужденные колебания струны второй формы

Fig. 2. Forced oscillations of a second-mode string

В этом случае возбуждается стоячая волна второй амплитудной формы ($r = 2$). Колебания струны при этом описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{q}_2 + 2h_2\dot{q}_2 + p_2^2q_2 + 16Nq_2^3 = F_0\gamma_2 \cos \omega t, \quad (7)$$

где q_2 – обобщенная координата при второй форме колебаний, циклическая частота незатухающих линейных колебаний

$$p_2 = \frac{2\pi}{l_0} \sqrt{\frac{T_0}{m_0}}, \quad (8)$$

фактор затухания

$$h_2 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{4\sigma B^2 \gamma_2^2 A}{m_0 \pi^2} \right) \quad (9)$$

и использовано обозначение

$$\gamma_2 = \sin \frac{\pi(z_1 + z_2)}{l_0} \sin \frac{\pi(z_2 - z_1)}{l_0} = \sin \frac{\pi(z_3 + z_4)}{l_0} \sin \frac{\pi(z_4 - z_3)}{l_0}. \quad (10)$$

Неоднородные уравнения Дюффинга (2) и (7) содержат нелинейные члены, которые возникают за счет растяжения струны при колебаниях. Воспользуемся методом гармонического баланса [9–10] для построения графика амплитудно-частотной характеристики уравнения (2). Представим решение этого уравнения в виде:

$$q_1 = q_{01} \sin(\omega t + \theta_1), \quad (11)$$

где θ_1 – произвольно заданная начальная фаза.

Нелинейную функцию

$$f(q_1, \dot{q}_1) = 2h_1 \dot{q}_1 + p_1^2 q_1 + Nq_1^3$$

разложим в ряд Фурье

$$f(q_1, \dot{q}_1) = \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t \quad (12)$$

с коэффициентами

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(q_1, \dot{q}_1) \cos(\omega t + \theta_1) \cdot d(\omega t + \theta_1) = 2h_1 \omega q_{01},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} f(q_1, \dot{q}_1) \sin(\omega t + \theta_1) \cdot d(\omega t + \theta_1) = p_1^2 q_{01} + \frac{3}{4} Nq_{01}^3.$$

После подстановки (11) и (12) в (2), приравняв коэффициенты при одинаковых временных функциях, получим систему двух уравнений. Из них определяем начальную фазу

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\left(p_1^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} Nq_{01}^2 \right)^2 + 4h_1^2 \omega^2}{2h_1 \omega}. \quad (13)$$

Для струн из металла параметр N имеет большое значение (порядка 10^9). Знаменатель дроби (13) в сравнении с N относительно мал, следовательно $\operatorname{tg} \theta_1 \rightarrow \infty$, поэтому можно принять $\theta_1 \approx \pi/2$. С учетом этого получаем уравнение амплитудно-частотной характеристики при резонансе первого порядка:

$$\left[\left(p_1^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} Nq_{01}^2 \right)^2 + 4h_1^2 \omega^2 \right] q_{01}^2 = F_0^2 \gamma_1^2. \quad (14)$$

Для построения амплитудно-частотной характеристики конкретной струнной системы требуется измерить или вычислить все входящие в (14) параметры. При этом возникает проблема с адекватным определением фактора затухания колебаний h_1 в каждом конкретном случае. Предлагается принять значение h_1 , при котором экспериментальный и теоретический графики амплитудно-частотной характеристики совпадают наилучшим образом. Методика измерений амплитуды колебаний струны в лабораторном эксперименте описана ниже.

При резонансе второго порядка амплитудно-частотная характеристика представляется уравнением

$$\left[\left(p_2^2 - \omega^2 + 12Nq_{02}^2 \right)^2 + 4h_2^2 \omega^2 \right] q_{02}^2 = F_0^2 \gamma_2^2, \quad (15)$$

которое также применимо при больших N и малых значениях фактора затухания h_2 .

Заметим, что внутреннее трение, связанное со структурой материала струны, в рассмотренной теории, а следовательно, и в уравнениях (14), (15) не учтено. В отличие от теории поперечных колебаний стержней считается, что в струнных системах внутреннее трение заметно не проявляется. Однако тепловые и электромагнитные воздействия могут существенно влиять на кристаллическую структуру материала струны и отражаться на внутренних диссипативных процессах. Следовательно, в реальных струнных системах при наличии внешних воздействий различной физической природы требуется экспериментально определять кумулятивный фактор затухания колебаний, учитывающий в совокупности все диссипативные процессы.

Эксперименты

Эксперименты с целью построения амплитудно-частотной характеристики произведены на специальной лабораторной установке со струнами из меди и латуни различных длин и размеров поперечного сечения. В качестве примера приведем результаты экспериментов с медной струной (плотность $\rho = 8\,960 \text{ кг/м}^3$) диаметром $d = 0.4 \text{ мм}$, без изоляционного покрытия. Расстояние между закрепленными концами струны $l_0 = 0.57 \text{ м}$. Погонная масса струны $m_0 = 1.127 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}$, натяжение с учетом нагревания при действующем значении пропускаемого тока составляет $T_0 = 0.981 \text{ Н}$. Амплитуда переменного тока, пропускаемого по струне, — $J_0 \approx 0.56 \text{ А}$. При этом действующее значение силы тока $J_d = J_0/\sqrt{2} = 0.4 \text{ А}$. Магнитное поле создано постоянными магнитами на участке шириной $\Delta z = 25 \text{ мм}$, расположенном посередине струны: $z_1 = 0.2725 \text{ м}$, $z_2 = 0.2975 \text{ м}$. Индукция магнитного поля $B \approx 0.4 \text{ Тл}$.

В первом эксперименте исследован нелинейный резонанс первого порядка. Струна совершает плоские вынужденные колебания по схеме, представленной на рис. 1. При этом коэффициенты (5) и (6) имеют следующие значения:

$$F_0 = \frac{4BJ_0}{\pi m_0} = 260 \text{ м/с}^2, \quad \gamma_1 = \sin \frac{\pi(z_1 + z_2)}{2l_0} \sin \frac{\pi(z_2 - z_1)}{2l_0} = 0.0688,$$

$$N = \frac{EA\pi^4}{4m_0 l_0^4} = 2.59 \cdot 10^9 \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-2}.$$

Здесь учтено, что модуль упругости меди $E = 10^{11} \text{ Па}$.

Линейным незатухающим колебаниям струны с указанными параметрами соответствует частота, определенная по формуле (3): $p_1 = 163.3 \text{ с}^{-1}$, или $\nu_1 \approx 26 \text{ Гц}$.

На рис. 3 произведено наложение двух графиков амплитудно-частотной характеристики: экспериментального и теоретически рассчитанного в соответствии с уравнением (14). Наилучшее их совпадение происходит при $h_1 = 6.5 \text{ с}^{-1}$. Это значение учитывает все диссипативные факторы, присутствующие в реальной струнной системе. Его можно назвать кумулятивным.

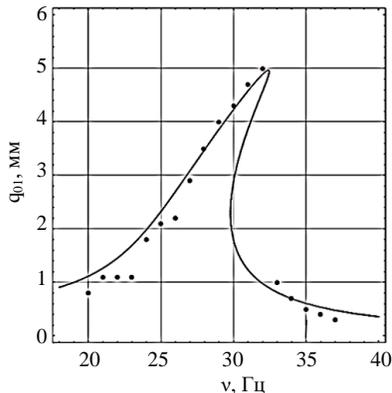


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика струны при $r = 1$
 Fig. 3. Amplitude–frequency characteristic of a string at $r = 1$

Используя формулу (4), вычислим коэффициент электромагнитного демпфирования

$$\beta_{эм} = \frac{8\sigma B^2 \gamma_1^2 A}{m_0 \pi^2} = 4\text{с}^{-1}. \quad (16)$$

Пренебрегать фактором электромагнитной диссипации в данном случае недопустимо, поскольку его значение сравнимо с коэффициентом $\beta = 2h_1 - \beta_{эм} = 9\text{с}^{-1}$, характеризующем все прочие диссипативные факторы. Предложенный расчетно-экспериментальный метод определения кумулятивного фактора затухания колебаний струны можно использовать при лабораторном исследовании свойств струнных систем, а также при решении инженерных задач в процессе проектирования конкретной аппаратуры.

Термопараметрический резонанс

При пропускании тока по струне происходит ее нагрев за счет джоулева тепла. Следовательно, натяжение струны изменяется в зависимости от действующего значения пропускаемого по ней тока. При возрастании амплитуды колебаний и скорости движения струны усиливается ее теплообмен с окружающей средой, что также влияет на натяжение. Таким образом, натяжение струны является функцией силы тока и обобщенных скоростей: $T(J_0, \dot{q}_r)$. Это явление получило название «термопараметрическое возбуждение» колебаний [6, 16, 17].

В экспериментах с описанной выше струной наблюдается периодическое изменение (биение) амплитуды стоячих волн. Имеет место суперпозиция двух колебаний с различными частотами: резонансных электромеханических с частотой пропускаемого тока ω и термопараметрических, возникающих за счет изменения натяжения струны с частотой Ω .

Перед началом эксперимента к струне с одним закрепленным концом прикладывается растягивающая сила величиной G_0 . Одновременно по струне пропускается переменный электрический ток $J = J_0 \cos \omega t$, за счет которого происходит ее тепловое удлинение. Затем закрепляется второй конец струны. Если отключить ток, то натяжение струны с закрепленными концами составит

$$T_0 = G_0 + T_{J_0},$$

где T_{J_0} – постоянное термическое натяжение.

В процессе колебаний токонесущей струны ее натяжение с учетом термического эффекта ослабляется по закону

$$\Delta T = -T_{J_0} - T^* \cos \Omega t.$$

где T^* – амплитудное изменение натяжения струны за счет периодического нагревания и охлаждения. Тогда полное натяжение токонесущей струны в процессе колебаний можно выразить законом

$$T = G_0 - T^* \cos \Omega t. \quad (17)$$

При этом в эксперименте наблюдаются биения амплитуды стоячих волн при $r = 2$ с частотой $f = 6$ Гц. Следовательно, циклическая частота термопараметрического возбуждения составляет

$$\Omega = 2\pi f = 12\pi\text{с}^{-1} = 37.6\text{с}^{-1}. \quad (18)$$

Учитывая вышесказанное, дифференциальное уравнение термопараметрических колебаний можно записать в виде:

$$\ddot{\chi}_2 + 2h_2\dot{\chi}_2 + \left[\Omega_0^2 - \frac{T_2^*}{m_0} \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^2 \cos \Omega t \right] \chi_2 = 0, \quad (19)$$

где $\chi_2(t)$ – закон параметрических колебаний второй моды, Ω_0 – циклическая частота параметрических колебаний струны при отсутствии сопротивления внешней среды.

При помощи подстановки Хилла [9]

$$\chi_2 = \xi_2 \exp \left[-\int_0^t h_2 dt \right] = \xi_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{8\sigma B^2 \gamma_2^2 A}{m_0 \pi^2} \right) t \right]$$

приводим (19) к параметрическому уравнению

$$\ddot{\xi}_2 + (\Omega_0^2 - h_2^2) \left[1 - \frac{T_2^*}{m_0 (\Omega_0^2 - h_2^2)} \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^2 \cos \Omega t \right] \xi_2 = 0. \quad (20)$$

С использованием обозначений

$$\Omega t = 2\tau; \quad a = (\Omega_0^2 - h_2^2) \frac{4}{\Omega^2}; \quad \varepsilon = \frac{2T_2^*}{m_0 \Omega^2} \left(\frac{2\pi}{l_0} \right)^2 \quad (21)$$

приходим к уравнению Матье

$$\frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2} + (a - 2\varepsilon \cos 2\tau) \xi_2 = 0. \quad (22)$$

Амплитуда параметрического возбуждения определяется параметром ε в уравнении (22). При невысокой температуре нагрева струны параметр $\varepsilon < 1$, т.е. является малым. При этом параметр a на диаграмме Айнса–Стретта [9] принимает значения, близкие к квадратам целочисленного ряда: 1, 4, 9... Точного совпадения с этими значениями не происходит, поскольку $\varepsilon \neq 0$. Например, при $\Omega \approx \sqrt{\Omega_0^2 - h_2^2}$ значение $a = 4$. Периодическому процессу биений, наблюдаемому в эксперименте, в диаграмме соответствует точка на линии, разграничивающей устойчивую и неустойчивую области. Из третьего соотношения (21) следует, что параметрический резонанс возникает даже при очень малых амплитудах термического натяжения струны T_2^* , и его необходимо учитывать в частотном анализе колебаний струнных систем, разделяя высокочастотные и низкочастотные сигналы.

Заключение

В результате исследования предложен расчетно-экспериментальный метод определения кумулятивного фактора затухания нелинейной струнной системы, основанный на сравнении графиков амплитудно-частотных характеристик: экспериментального и теоретического. Эту методику можно применять для определения свойств материала струны и внешних условий, в которых совершаются колебания конкретной струнной системы.

Теоретически описан термопараметрический резонанс струны, наблюдаемый в эксперименте в виде низкочастотных биений при колебаниях токонесущей

струны во внешнем магнитном поле. Это явление возникает даже при малых изменениях натяжения струны, возникающих за счет периодического изменения ее температуры.

Список источников

1. Аш Ж., Андре П., Бофрон Ж., Дезут П., Жувено К., Зельбштейн У., Кретинон Б., Ливрозе П., Мазеран А., Меригу Ж., Пейро П., Пике А., Прижан Ж.-К., Сюньяш М., Такюсель Ж., Фулетье Ж., Шарне Ж., Шон Ж.-П. Датчики измерительных систем : пер. с фр. М. : Мир, 1992. Кн. 1. 280 с.
2. Крупенин В.Л. К описанию динамических эффектов, сопровождающих колебания струн вблизи однотавровых ограничителей // Доклады академии наук. 2003. № 388(3). С. 31–38.
3. Крупенин В.Л. К расчету резонансных колебаний гибкой нити, взаимодействующей с точечным ограничителем хода // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. № 2. С. 29–35.
4. Крупенин В.Л. Вибрация струны, расположенной между протяженным и точечным ограничителями // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 13–22.
5. Томилин А.К., Курильская Н.Ф. Колебания электропроводящей струны в нестационарном магнитном поле с учетом двух нелинейных факторов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 4(72). С. 61–66. Doi 0.17377/sibjim.2017.20.408
6. Томилин А.К. Колебания электромеханических систем с распределенными параметрами. Усть-Каменогорск : ВКГТУ, 2004. 272 с.
7. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. М. : Наука, 1988. 336 с.
8. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных механических колебаний. М. : Высш. школа, 1989. 383 с.
9. Магнус К. Колебания : введение в исследование колебательных систем. М. : Мир, 1982. 304 с.
10. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М. : Высш. школа, 1980. 408 с.
11. Уваров Д.К., Петров А.А. Параметрические колебания струны // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 2010. Т. 52 (336), № 2. С. 187–192.
12. Алифов А.А. Автопараметрические колебания при запаздываниях в силах упругости и трения // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 2. С. 9–16. doi: 10.31857/S0235711921020024
13. Зейликович И.С., Никитин А.В., Василевич А.Е. Возбуждение и регистрация нелинейного резонанса колебаний пружинного маятника с использованием электромагнитной индукции // Журнал технической физики. 2020. Т. 90, № 1. С. 5–10. doi: 10.21883/JTF.2020.01.48653.48-19
14. Алюшин Ю.А. Энергетическая основа резонанса в упругих телах // Физическая мезомеханика. 2019. Т. 22, № 5. С. 42–53. doi: 10.24411/1683-805X-2019-15006
15. Штукин Л.В., Беринский И.Е., Индейцев Д.А., Морозов Н.Ф., Скубов Д.Ю. Электромеханические модели нанорезонаторов // Физическая мезомеханика 2016. Т. 19, № 1. С. 24–30.
16. Потапов А.И., Ступенин В.В. Термопараметрическое возбуждение нелинейных колебаний струны // Прикладная механика и техническая физика. 1985. № 5. С. 142–146.
17. Потапов А.И., Ступенин В.В. Термопараметрическая дестабилизация токнесущего стержня // Прикладная механика. 1988. Т. 24, № 12. С. 100–104.
18. Грабовский М.А., Млодзеевский А.Б., Телеснин Р.В., Шаскольская М.П., Яковлев И.А. Лекционные демонстрации по физике. М. : Наука, 1972. 639 с.

References

1. Ash Zh., Andre P., Bofron Zh., Degut P., Zhuvenco K., Zel'bshteyn U., Kretinon B., Livroze P., Mazeran A., Merigu Zh., Peyro P., Pike A., Prizhan Zh.-K., Syun'yash M., Takyusel' Zh., Fulet'e Zh., Sharne Zh., Shon Zh.-P. (1992) *Datchiki izmeritel'nykh sistem*. [Sensors of measuring systems]. Book 1. Moscow: Mir.
2. Krupenin V.L. (2003) K opisaniyu dinamicheskikh effektov, soprovozhdayushchikh kolebaniya strun vblizi odnotavrovyykh ogranichiteley [On the description of dynamic effects accompanying string vibrations near single-T limiters]. *Doklady Akademii Nauk – Proceedings of the Academy of Sciences*. 388(3). pp. 31–38.
3. Krupenin V.L. (1992) K raschetu rezonansnykh kolebaniy gibkoy niti, vzaimodeystvuyushchey s tochechnym ogranichitelem khoda [On the calculation of resonant oscillations of a flexible thread interacting with a point travel limiter]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin – Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2. pp. 29–35.
4. Krupenin V.L. (2017) Vibration of string placed between extended and point limiters. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 46(2). pp. 96–104. doi: 10.3103/S105261881702008X
5. Tomilin A.K., Kuril'skaya N.F. (2017) Vibrations of a conductive string in a nonstationary magnetic field under presence of two nonlinear factors. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 11(4). pp. 600–604. doi: 10.1134/S1990478917040184
6. Tomilin A.K. (2004) *Kolebaniya elektromekhanicheskikh sistem s raspredelennymi parametrami* [Oscillations of electromechanical systems with distributed parameters]. Ust'-Kamenogorsk: VKGTU.
7. Levitskiy N.I. (1988) *Kolebaniya v mekhanizmaxh* [Vibrations in machines]. Moscow: Nauka.
8. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Popov S.L. (1989) *Prikladnye zadachi teorii nelineynykh mekhanicheskikh kolebaniy* [Applied problems of the theory of nonlinear mechanical oscillations]. Moscow: Vysshaya shkola.
9. Magnus K. (1982) *Kolebaniya. Vvedenie v issledovanie kolebatel'nykh sistem* [Oscillations. Introduction to the study of oscillatory systems]. Moscow: Mir.
10. Biderman V.L. (1980) *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical oscillations]. Moscow: Vysshaya shkola.
11. Uvarov D.K., Petrov A.A. (2010) Parametricheskie kolebaniya struny [Parametric string vibrations]. *Trudy CNII im. akad. A.N. Krylova*. 52(2). pp. 187–192.
12. Alifov A.A. (2021) Autoparametric oscillations with delays in elastic and frictional forces. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 50(2). pp. 98–104. doi: 10.3103/S1052618821020023
13. Zeylikovich I.S., Nikitin A.V., Vasilevich A.E. (2020) Excitation and detection of a nonlinear resonance of oscillations of a spring-mass system using electromagnetic induction. *Technical Physics*. 65(1). pp. 1–6. doi: 10.1134/S1063784220010284
14. Alyushin Yu.A. (2019) Energeticheskaya osnova rezonansa v uprugikh telakh [Energy basis of resonance in elastic bodies]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 22(5). pp. 42–53. doi: 10.24411/1683-805X-2019-15006
15. Shtukin L.V., Berinskiy I.E., Indeytsev D.A., Morozov N.F., Skubov D.Yu. (2016) Elektromekhanicheskie modeli nanorezonatorov [Electromechanical models of nanoresonators]. *Fizicheskaya mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 19(1). pp. 24–30.
16. Potapov A.I., Stupenin V.V. (1985) Termoparametricheskoe vzbuzhdenie nelineynykh kolebaniy struny [Thermoparametric excitation of nonlinear vibrations of a string]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 5. pp. 142–146.
17. Potapov A.I., Stupenin V.V. (1988) Termoparametricheskaya destabilizatsiya tokonesushchego sterzhnya [Thermoparametric destabilization of a current-carrying rod]. *Prikladnaya mekhanika*. 24(12). pp. 100–104.
18. Grabovskiy M.A., Mlodzeevskiy A.B., Telesnin R.V., Shaskol'skaya M.P., Yakovlev I.A. (1972) *Lektsionnye demonstratsii po fizike* [Lecture demonstrations in physics]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Томилин Александр Константинович – доктор физико-математических наук, профессор Отделения машиностроения Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: aktomilin@tpu.ru

Коноваленко Иван Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент Отделения машиностроения Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: ivkon@tpu.ru

Коноваленко Игорь Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент Отделения машиностроения Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: iskonovalenko@tpu.ru

Information about the authors:

Tomilin Aleksandr K. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: aktomilin@tpu.ru

Konovalenko Ivan S. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ivkon@tpu.ru

Konovalenko Igor' S. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iskonovalenko@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 17.03.2023; принята к публикации 12.02.2024

The article was submitted 17.03.2023; accepted for publication 12.02.2024