

**В Е С Т Н И К
ТОМСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

TOMSK STATE UNIVERSITY
JOURNAL OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Научный журнал

2024

№ 89

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-30658 от 20 декабря 2007 г.
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи
и охраны культурного наследия

Национальный исследовательский
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Учредитель:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Томский государственный университет»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА «ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА»

А.М. Липанов, д-р техн. наук, проф., академик РАН; С.М. Пергаменщиков, д-р физ.-мат. наук, проф.; О.В. Сипачёва, д-р физ.-мат. наук, проф.; А.А. Туганбаев, д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Троянский, академик Болгарской академии наук, проф.; Д. Виегас, проф.; А. Симеони, проф.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

А.А. Глазунов (главный редактор), С.П. Гулько (зам. главного редактора), И.А. Колесников (отв. секретарь по разделу «Математика»), А.Д. Сидоров (отв. секретарь по разделу «Механика»), В.Н. Берцун, В.И. Биматов, А.М. Бубенчиков, В.Г. Бутов, А.Ю. Веснин, А.Н. Ищенко, А.Ю. Крайнов, П.А. Крылов, Е.Л. Лобода, Г.О. Рябова, В.А. Скрипняк, А.В. Старченко, Е. А. Тимошенко, М.А. Шеремет, Г.Р. Шрагер, Э.Р. Шрагер.

EDITORIAL COUNCIL

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Alexey M. Lipanov, Doctor of Technics, Professor, Academician Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; Sergey M. Pergamenshchikov, Professor, Rouen, France; Olga V. Sipacheva, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Askar A. Tuganbaev, Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Russia; Stanimir Troyanski, Academician Bulgarian Academy of Sciences, Professor, Murcia, Spain; Domingos X. Viegas, Professor, Coimbra, Portugal; Albert Simeoni, Professor, Edinburgh, Great Britain.

EDITORIAL BOARD

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Anatoliy A. Glazunov (Head of the Editorial Board), Sergey P. Gulko (Deputy Head of the Editorial Board), Ivan A. Kolesnikov (Executive Editor of the Mathematics Section), Aleksey D. Sidorov (Executive Editor of the Mechanics Section), Vladimir N. Bertsun, Vladimir I. Bimатов, Aleksey M. Bubenchikov, Vladimir G. Butov, Igor M. Vasenin, Andrei Yu. Vesnin, Aleksandr N. Ishchenko, Aleksey Yu. Krainov, Pyotr A. Krylov, Egor L. Loboda, Galina O. Ryabova, Vladimir A. Skripnyak, Aleksandr V. Starchenko, Egor A. Timoshenko, Mikhail A. Sheremet, Gennadiy R. Shrager, Ernst R. Shrager.

Журнал «Вестник Томского государственного университета. Математика и механика» входит в Перечень ВАК изданий для публикации основных результатов кандидатских и докторских диссертаций. Журнал выходит 6 раз в год и распространяется по подписке, подписной индекс 44064 в объединённом каталоге «Пресса России». Полные тексты всех вышедших статей и правила для авторов доступны на сайте журнала.

Внесен в Ulrich's Periodicals Directory. Индексируется: eLIBRARY.ru; Math-Net.ru; Scopus.com; ESCI (Web of Science). Реферируется в MatSciNet.

Адрес редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

Электронный адрес: <http://journals.tsu.ru/mathematics>

Контактный тел./факс: (3822) 529-740

E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Бозиев О.Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных волновых уравнений с интегральной нагрузкой в главной части	5
Бухтык М.С. Псевдориманова метрика на многообразии приложенных ковекторов	17
Жураев Т.Ф., Жувонов К.Р. Размерностные свойства подпространств, являющихся граничными множествами пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте X	32

МЕХАНИКА

Ахметшин Л.Р., Иохим К.В., Казанцева Е.А., Смолин И.Ю. Исследование механизмов деформации двумерного метаматериала	51
Батуев С.П., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Радченко П.А., Радченко А.В., Саммель А.Ю. Оценка влияния ведущих поясков на взаимодействие удлиненных ударников с легкосплавными преградами	66
Гимаева Н.Р., Миньков Л.Л. Моделирование совместных процессов зажигания поверхности таблетки-излучателя потоком двухфазных продуктов сгорания и вылета таблетки-излучателя из гильзы	77
Ледков А.С., Белов А.А. Демпфирование внеплоскостных колебаний сферического объекта при его бесконтактной транспортировке ионным потоком	89
Микишанина Е.А. Принципы реализации сервосвязей в неголономных механических системах	103
Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Поморцева Т.Н., Мерзляков А.Ф. Уравнения вязкоупругости не полностью отвержденного эпоксидного связующего при малых деформациях	119
Сидоров И.Н., Куклин В.А., Энская А.И., Данилаев М.П. Влияние параметров включений с оболочкой на напряженно-деформированное состояние полимерной матрицы в дисперсно-армированном композиционном материале	135
Скрипняк В.В., Скрипняк В.А. Механическое поведение титановых сплавов при динамическом продавливании	147
Чайковская Т.В. Эффективные механические параметры костных тканей для подбора индивидуальных остеоимплантатов	162

CONTENTS

MATHEMATICS

Boziev O.L. A priori estimates for derivative solutions of one-dimensional inhomogeneous wave equations with an integral load in the main part	5
Bukhtyak M.S. Pseudo-Riemannian metrics on a variety of applied covectors	17
Zhuraev T.F., Zhuvonov Q.R. Subspaces dimensional properties that are boundary sets of the probability measures space, defined in an infinite compactum X	32

MECHANICS

Akhmetshin L.R., Iokhim K.V., Kazantseva E.A., Smolin I.Yu. A study of deformation mechanisms for a two-dimensional metamaterial	51
Batuev S.P., Burkin V.V., D'yachkovskiy A.S., Ishchenko A.N., Radchenko P.A., Radchenko A.V., Sammel' A.Y. Analysis of the effect of driving belts on the interaction between elongated projectiles and light alloy barriers	66
Gimayeva N.R., Minkov L.L. Simulation of simultaneous tablet–emitter surface ignition by a flow of two-phase combustion products and tablet–emitter ejection from a cartridge case	77
Ledkov A.S., Belov A.A. Damping of out-of-plane oscillations of a spherical object during contactless transportation by an ion beam	89
Mikishanina E.A. Principles for implementing servo-constraints in nonholonomic mechanical systems	103
Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V., Pomortseva T.N., Merzlyakov A.F. Equations of viscoelasticity for an incompletely cured epoxy binder under small strains	119
Sidorov I.N., Kuklin V.A., Enskaya A.I., Danilaev M.P. Effect of the parameters of inclusions with shells on the stress-strain state of a polymer matrix in a composite material reinforced with a dispersed filler	135
Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. Mechanical behavior of titanium alloys in a dynamic punch test	147
Chaykovskaya T.V. Effective mechanical parameters of bone tissue samples for the selection of individual osteoimplants	162

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.956.35

doi: 10.17223/19988621/89/1

MSC: 35L20, 35L72, 35D30

**Априорные оценки производных решений
одномерных неоднородных волновых уравнений
с интегральной нагрузкой в главной части**

Олег Людинович Бозиев

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, bozиеv@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается вторая начально-краевая задача с однородными граничными условиями для одномерного модифицированного волнового уравнения, в котором коэффициент при второй пространственной производной заменен степенной функцией от интеграла квадрата модуля производной решения уравнения по x . Исследованы степенные функции трех видов. Установлены соответствующие им априорные неравенства, правая часть которых используется для линеаризации уравнений.

Ключевые слова: волновое уравнение, интегральная нагрузка, априорная оценка, линеаризация

Для цитирования: Бозиев О.Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных волновых уравнений с интегральной нагрузкой в главной части // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/89/1

Original article

**A priori estimates for derivative solutions
of one-dimensional inhomogeneous wave equations
with an integral load in the main part**

Oleg L. Bozиеv

*Kabardino-Balkarian State University,
Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian
Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation, bozиеv@yandex.ru*

Abstract. In this paper, the second initial-boundary value problem with homogeneous boundary conditions for a one-dimensional modified wave equation is considered.

The modification consists in replacing the coefficient at the second spatial derivative with an integral load. In our case, it is a power function of the integral of the squared modulus of the derivative of the equation solution with respect to the spatial variable. Equations with such a load are associated with some practically important hyperbolic equations with a power nonlinearity in the main part. This makes it possible to use previously found solutions of loaded problems to start the process of successive approximation to solutions of nonlinear problems reduced to them. In this case, with respect to the original nonlinear equation, the loaded equation contains a weakened nonlinearity. Linearization of the loaded equation makes it possible to find its approximate solution. The article considers three cases of the integral load. It is the squared norm of the derivative of the solution with respect to x in the space L_2 in natural, inverse to natural, and two integer negative powers. The corresponding a priori inequalities are established. Their right-hand side is used to pass to linearized equations. Examples of linearization by this method of wave equations with an integral load in the main part are given.

Keywords: hyperbolic equation, integral load, a priori estimation, linearization

For citation: Boziev, O.L. (2024) A priori estimates for derivative solutions of one-dimensional inhomogeneous wave equations with an integral load in the main part. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 5–16. doi: 10.17223/19988621/89/1

Введение

Заданное в области $Q = \{(x, t) : x \in \Omega \subseteq R^n, t \in (0, T)\}$ дифференциальное уравнение принято называть нагруженным, если оно содержит один или несколько следов операций от искомого решения на принадлежащих $\bar{\Omega}$ многообразиях размерности меньше n . В случае, когда дифференциальное уравнение в частных производных содержит какую-либо функцию от интеграла по пространственной переменной некоторой степени решения или его производной, будем говорить об интегральной нагрузке. На практике интегральная нагрузка может возникать, например, в случае, когда при невозможности определения точного значения какого-либо коэффициента уравнения используется его усредненное значение на некотором промежутке.

Впервые гиперболическое уравнение с интегральной нагрузкой в главной части рассматривалось в работе [1], в которой для уравнения

$$u_{tt} - a\left(\|u_x\|^2\right)u_{xx} = 0, \quad \|u_x\|^2 = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx, \Omega = [0, l].$$

приводился способ решения некоторых краевых задач при помощи бесконечных систем дифференциальных уравнений. К числу более поздних работ, связанных с данным уравнением, относятся [2, 3]. В статьях [4, 5] и других исследуются вопросы однозначной разрешимости начально краевых задач в многомерном случае, при этом в [5] уравнение дополнено младшими членами, один из которых является нелинейным.

Многомерное неоднородное уравнение

$$u_{tt} - a\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)u_{xx} = f, \Omega \subset R^n,$$

рассматривается в работах [6, 7]. В настоящее время подобное уравнение с младшими членами интенсивно исследуется. Среди большого количества работ можно указать [8–10]. К уравнениям, содержащим интегральную нагрузку, можно редуцировать гиперболические уравнения, содержащие степенную нелинейность как в главной части, так и в младших членах, путем замены нелинейного члена его интегралом по пространственной переменной [11, 12]. Во всех упомянутых случаях интегральная нагрузка представляет собой норму производной искомого решения в пространстве $L_2(\Omega)$ или некоторую функцию от этой нормы. Этот факт позволяет использовать правую часть априорного неравенства, оценивающего данную норму, для линеаризации нагруженного уравнения. Точное или приближенное решение линеаризованного уравнения можно впоследствии принять за исходное приближение к решению ассоциированного нелинейного уравнения.

В работе рассматривается вторая начально-краевая задача с однородными граничными условиями для модифицированного одномерного неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt} - a\left(\|u_x\|^2\right)u_{xx} = f(x, t), \quad a > 0.$$

Модификация уравнения состоит в замене константы a^2 интегральной нагрузкой $a\left(\|u_x\|^2\right)$, т.е. функцией, зависящей от квадрата нормы производной решения в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\|u_x\|^2 = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx, \quad \Omega = [0, l].$$

В указанной норме устанавливаются априорные неравенства для пространственной производной решения нагруженного гиперболического уравнения с краевыми условиями второго рода с интегральной нагрузкой, принимающей один из следующих видов:

$$\|u_x\|^p, \|u_x\|^{\frac{2}{p}}, \quad p \in N, \quad \|u_x\|^{-p}, \quad p = 1, 2.$$

Случай $p = 2$ был отдельно рассмотрен в [13]. Приводятся примеры, в которых с целью линеаризации первоначального уравнения интегральная нагрузка заменяется некоторой известной функцией от t , определяемой посредством правой части априорной оценки.

В приведенных ниже рассуждениях неоднократно используется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма [14. Теорема 1.4]. Если функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t \beta(\tau) u(\tau) d\tau + f(t), \quad t \geq t_0,$$

где функция $f(t)$ и неотрицательные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ интегрируемы, то справедливо неравенство

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t f(\tau) \beta(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^t \alpha(s) \beta(s) ds\right) d\tau + f(t).$$

Всюду в приводимых ниже рассуждениях скалярное произведение понимается в смысле пространства $L_2(\Omega)$.

1. Интегральная нагрузка $a(\|u_x\|^2) = \|u_x\|^p$, $p \in N$

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \|u_x\|^p u_{xx} = f(x, t) \quad (1)$$

при условиях

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x), 0 \leq x \leq l, u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (1), (2), $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|^{p+2}$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (1) и функции u_t :

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|^p (u_{xx}, u_t) = (f, u_t).$$

Легко убедиться, что в предположении $u \in H^1(\Omega)$ имеют место равенства

$$(u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{2,\Omega}^2, \quad -(u_{xx}, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2.$$

Заметим также, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^2 (u_{xx}, u_t) = \left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p+2}{2}} = \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^{p+2}.$$

Эти преобразования приводят к соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^{p+2} = \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое, получаем

$$(p+2) \|u_t\|^2 + 2 \|u_x\|^{p+2} = 2(p+2) \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + (p+2) \|u_t(x, 0)\|^2 + \|u_x(x, 0)\|^{p+2}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и перейдем к неравенству

$$\begin{aligned} (p+2) \|u_t\|^2 + 2 \|u_x\|^{p+2} &\leq \\ &\leq (p+2) \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + (p+2) \left(\int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2\|^2 \right) + 2 \|\varphi_{1x}\|^{p+2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2 &\leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t), \\ F(t) &= \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2\|^2 + \frac{2}{p+2} \|\varphi_{1x}\|^{p+2}. \end{aligned}$$

Применяя к последнему неравенству лемму, будем иметь

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2 &\leq K_0(t), \\ K_0(t) &= \int_0^t F(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F(t). \end{aligned}$$

Возвращаясь к (3), опустим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$. В результате получим оценку

$$\|u_x\|^{p+2} \leq K(t), \quad (4)$$

$$K(t) = \frac{p+2}{2} \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t),$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 1 доказана.

Выбирая равенство в (4), запишем

$$\|u_x\|^p \leq (K(t))^{\frac{p}{p+2}},$$

что при подстановке в (1) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{p}{p+2}} u_{xx} = f(x, t). \quad (5)$$

Пример 1. Пусть $p = 2$, а в условиях (2)

$$l = 1, \quad \varphi_1(x) = x(x-1), \quad \varphi_2(x) = x, \quad f(x, t) = xt. \quad (6)$$

Тогда

$$\|\varphi_{1x}\|^{p+2} = \|\varphi_{1x}\|^4 = \left(\int_0^1 (2x-1)^2 dx \right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \|\varphi_2\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad (7)$$

$$\int_0^t \|f\|^2 d\tau = \int_0^t \int_0^1 \tau^2 x^2 dx d\tau = \frac{1}{3} \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3}{9},$$

$$F(t) = \frac{1}{18} (2t^3 + 7), \quad K(t) = \frac{1}{9} (19e^t - 6t^2 - 12t - 12).$$

Отметим, что $K(t) > 0$ при $t \geq 0$. Подставляя в (7), переходим к линеаризованному уравнению

$$u_{tt} - \frac{1}{3} \sqrt{19e^t - 6t^2 - 12t - 12} u_{xx} = xt.$$

2. Интегральная нагрузка $a(\|u_x\|^2) = \|u_x\|^{\frac{2}{p}}, p \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \|u_x\|^{\frac{2}{p}} u_{xx} = f(x, t). \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (3), (4), $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|^{\frac{2(p+1)}{p}}$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (8) с u_t

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|^{\frac{2}{p}} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

и заметим, что

$$-\|u_x\|^{\frac{2}{p}} (u_{xx}, u_t) = \frac{1}{2} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{1}{p}} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{p+1} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

С помощью последнего запишем соотношение

$$\frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{p}{p+1} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}} = 2 \int_{\Omega} f u_t dx.$$

Его интегрирование приводит к равенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{p}{p+1} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}} = \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|^2 + \frac{p}{p+1} \left(\|u_x(x, 0)\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши с $\varepsilon = 0,5$:

$$\int_{\Omega} |f u_t| dx \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right) = \frac{1}{4} \|f\|^2 + \|u_t\|^2.$$

Это позволяет перейти к неравенству

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2 + \frac{p}{p+1} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}} \leq \\ & \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + 0,25 \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{p}{p+1} \left(\|\varphi_{1x}(x)\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Опуская в левой части второе слагаемое, получим

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t), \\ & F(t) = 0,25 \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2\|^2 + \frac{p}{p+1} \|\varphi_{1x}\|^{\frac{2(p+1)}{p}}. \end{aligned}$$

Очередное применение леммы приводит к оценке

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2 \leq K_0(t), \\ & K_0(t) = \int_0^t F(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F(t). \end{aligned}$$

Возвращаясь к (9), опустим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$:

$$\frac{p}{p+1} \|u_x\|^{\frac{2(p+1)}{p}} \leq \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t).$$

От данного неравенства перейдем к оценке

$$\begin{aligned} & \|u_x\|^{\frac{2(p+1)}{p}} \leq K(t), \\ & K(t) = \frac{p+1}{p} \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

выполняющейся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 2 доказана.

Выбирая в (10) верхнюю границу оценки, можем записать, что

$$\|u_x\|^{\frac{2}{p}} = K(t)^{\frac{1}{p+1}},$$

что позволяет перейти от (8) к линейному уравнению

$$u_{tt} - K(t)^{\frac{1}{p+1}} u_{xx} = f(x, t). \quad (11)$$

Пример 2. Пусть $p = 2$ и имеет место (6). С помощью (7) получаем

$$\|\varphi_{1x}(x)\|^{\frac{2(p+1)}{p}} = \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.19245,$$

$$F(t) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{4} t^3 + \frac{3\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}} \right) \approx 0.02778t^3 + 1.26581,$$

$$K(t) = 1.5(1.43249e^t - 0.08334t^2 - 0.16668t - 0.16668).$$

Заметим, что $K(t) > 0$ при $t \geq 0$. Подстановка в (8) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - 1.14471\sqrt{1.43249e^t - 0.08334t^2 - 0.16668t - 0.16668} u_{xx} = xt.$$

3. Интегральная нагрузка $a(\|u_x\|^2) = \|u_x\|^{-p}$, $p \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \|u_x\|^{-p} u_{xx} = f(x, t). \quad (12)$$

Заметим, что в скалярном произведении

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|^{-p} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t) \quad (13)$$

имеет место равенство

$$-\|u_x\|^{-p} (u_{xx}, u_t) = \frac{1}{2} \|u_x\|^{-p} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{1}{2} (\|u_x\|^2)^{-\frac{p}{2}} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2.$$

Продолжим его при $p = 1$ и $p = 2$.

Пусть $p = 1$. Тогда

$$-\|u_x\|^{-1} (u_{xx}, u_t) = \frac{1}{2} (\|u_x\|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{d}{dt} (\|u_x\|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} \|u_x\|. \quad (14)$$

Пусть $p = 2$. В этом случае

$$-\|u_x\|^{-2} (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|^{-2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{d}{dt} \ln(\|u_x\|^2). \quad (15)$$

Вернемся к случаю $p = 1$.

Теорема 3.1. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (12), (2) при $p = 1$. Пусть также $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Рассмотрим (13) при $p = 1$. С учетом (14) запишем

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + 2\|u_x\|) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

После интегрирования последнего перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + 2\|u_x\| \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t), \quad (16)$$

$$F(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2 + 2\|\varphi_{1x}(x)\|.$$

Опуская в (16) второе слагаемое левой части и применяя лемму, получаем

$$\|u_t\|^2 \leq K_0(t),$$

$$K_0(t) = \int_0^t F(\tau)e^{t-\tau} d\tau + F(t).$$

Подстановка в (16) дает оценку

$$\|u_x\| \leq K(t), \quad (17)$$

$$K(t) = 0,5 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t) \right),$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 3.1 доказана.

Считая, что (17) выполняется как равенство, можно записать

$$\|u_x\|^{-1} = (K(t))^{-1}.$$

Это позволяет перейти от (14) к линейному уравнению

$$u_{tt} - K(t)^{-1}u_{xx} = f(x, t).$$

Пример 3.1. Пусть имеет место (6). С помощью (7) получаем

$$\|\varphi_{1x}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \|\varphi_2\|^2 = \frac{1}{3}, \int_0^t \|f\|^2 d\tau = \frac{t^3}{9}, F(t) = 0.11111t^3 + 0.71823,$$

$$K(t) = 0.69245e^t - 0.16666t^2 - 0.33333t - 0.33333.$$

Отметим, что $K(t) > 0$ при $t \geq 0$. Подстановка в (15) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - (0.69245e^t - 0.16666t^2 - 0.33333t - 0.33333)^{-1}u_{xx} = xt.$$

Перейдем к случаю $p = 2$.

Теорема 3.2. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega)$, $\|u_x\|^2 > 0$, является решением задачи (12), (2) при $p = 2$. Пусть, кроме того, $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$, $\|\varphi_{1x}(x)\|^2 > 0$. Тогда функция $\|u_x\|^2$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. С помощью (15) перейдем от (13) к уравнению

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + 2 \ln \|u_x\|^2) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое, получим

$$\|u_t\|^2 + \ln \|u_x\|^4 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|^2 + \ln \|u_x(x, 0)\|^4.$$

Отсюда перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \ln \|u_x\|^4 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 dt + F(t), \quad (18)$$

$$F(t) = \int_0^t \|f\|^2 dt + \|\varphi_2(x)\|^2 + \ln \|\varphi_{1x}(x)\|^4.$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t).$$

Очередное применение леммы дает

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2 &\leq K_0(t), \\ K_0(t) &= \int_0^t F(\tau)e^{t-\tau} d\tau + F(t). \end{aligned}$$

Подстановка в (18) приводит к неравенству

$$\ln \|u_x\|^4 \leq \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t).$$

Из него следует оценка

$$\begin{aligned} \|u_x\|^2 &\leq K(t), \\ K(t) &= \exp \left(0,5 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t) \right) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

выполняющаяся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 3.2 доказана.

Считая, что (19) выполняется как равенство, запишем

$$\|u_x\|^{-2} = (K(t))^{-1}.$$

Линеаризуя уравнение (12) при $p = 2$ с помощью последнего равенства, получаем уравнение

$$u_{tt} - K(t)^{-1} u_{xx} = f(x, t).$$

Пример 3.2. Пусть имеет место (6). С помощью (7) имеем

$$\begin{aligned} \ln \|\varphi_{1x}\|^4 &= -2.19722, \quad F(t) = 0.11111t^3 - 1.86389, \\ K(t) &= \exp(-0.59862e^t - 0.16666t^2 - 0.33333t - 0.33333). \end{aligned}$$

При этом $K(t) > 0$ при $t \geq 0$. Подстановка в (15) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - \exp(0.59862e^t + 0.16666t^2 + 0.33333t + 0.33333) u_{xx} = xt.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки производных решений смешанной задачи (2) для одномерных неоднородных уравнений теплопроводности (1) с интегральной нагрузкой в главной части. Рассмотрено три случая, в которых интегральная нагрузка $a(\|u_x\|^2)$ последовательно принимает вид $\|u_x\|^p$, $\|u_x\|^{\frac{2}{p}}$, $p \in N$, $\|u_x\|^{-p}$, $p = 1, 2$. Первому случаю соответствует оценка (4), второму – оценка (10), третьему – оценки (17) и (20) при $p = 1$ и $p = 2$ соответственно. Правые части оценок используются для линеаризации нагруженных уравнений. Данный способ линеаризации в отличие от других позволяет переходить от нагруженного уравнения к линейному с сохранением в общих чертах физического (биологического, экологического) смысла процесса, моделируемого нагруженным уравнением. Точное

или приближенное решение линеаризованного уравнения, найденное при исходных начальном и граничных условиях, можно принять за приближенное решение нагруженного уравнения, которое может быть использовано для запуска итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нагруженной задачи.

Аналогичные результаты получены ранее для одномерных неоднородных уравнений теплопроводности, содержащих в главной части интегральную нагрузку рассмотренных видов [15]. Здесь в первых двух случаях вывод априорных оценок оказывается достаточно простым, так как их удается получить лишь с помощью преобразования скалярного произведения исходного уравнения с u_t .

Литература

1. Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1940. Т. 4, вып. 1. С. 17–26.
2. Woinowsky-Krieger S. The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. P. 35–36.
3. Dickey R.W. Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 23. P. 459–468.
4. Crippa H.R. On local solutions of some mildly degenerate Hyperbolic equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1993. V. 21 (8). P. 565–574.
5. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary // Differential and Integral Equations. 2011. V. 17. P. 1001–1020.
6. Похожаев С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Математический сборник. 1975. Т. 96 (138), № 1. С. 152–166.
7. Похожаев С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 101–108.
8. Nishihara K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984. V. 8 (6). P. 623–636.
9. Ngoc L.T.P., Long N.T. Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solutions in Many Small Parameters for a Nonlinear Kirchhoff Wave Equation with Mixed Nonhomogeneous Conditions // Acta Appl Math. 2010. V. 112. P. 137–169. doi: 10.1007/s10440-009-9555-9
10. Ono K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in Bounded Domains // J. Math. Tokushima Univ. 2021. V. 55. P. 11–18.
11. Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями // Вестник Южноуральского государственного университета. Сер. Математика, физика, механика. 2016. Т. 8, № 2. С. 14–18. doi: 10.14529/mmph160202
12. Бозиев О.Л. Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 5–14. doi: 10.17223/19988621/51/1.
13. Бозиев О.Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 16–25. doi: 10.17223/19988621/80/2
14. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 151 с.
15. Бозиев О.Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных уравнений теплопроводности с интегральной нагрузкой в главной части // Вестник

Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика, физика, механика. 2023. Т. 15, № 2. С. 5–13. doi: 10.14529/mmph230201.

References

1. Bernshtein S.N. (1940) Ob odnom klasse funktsional'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi [On a class of partial differential functional equations]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR*. 4(1). pp. 17–26.
2. Woinowsky-Krieger S. (1950) The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars. *Journal of Applied Mechanics*. 17. pp. 35–36.
3. Dickey R.W. (1969) Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 23. pp. 459–468.
4. Crippa H.R. (1993) On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 21(8). pp. 565–574.
5. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. (2011) Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary. *Differential and Integral Equations*. 17. pp. 1001–1020.
6. Pokhozhaev S.I. (1975) Ob odnom klasse kvazilineynykh giperbolicheskikh uravneniy [On a class of quasi-linear hyperbolic equations]. *Matematicheskii Sbornik*. 96(1). pp. 152–166.
7. Pokhozhaev S.I. (1985) Ob odnom kvazilineynom giperbolicheskom uravnenii Kirkhgofa [On a quasi-linear hyperbolic Kirchhoff equation]. *Differentsial'nyye uravneniya*. 21(1). pp. 101–108.
8. Nishihara K. (1984) Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 8(6). pp. 623–636.
9. Ngoc L.T.P., Long N.T. (2010) Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions. *Acta Applicandae Mathematicae*. 112. pp. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
10. Ono K. (2021) Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains. *Journal of Mathematics, Tokushima University*. 55. pp. 11–18.
11. Boziev O.L. (2016) Priblizhennoye resheniye nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya s odnorodnymi krayevymi usloviyami [Approximate solution of a loaded hyperbolic equation with homogeneous boundary conditions]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seriya matematika, mekhanika, fizika*. 8(2). pp. 14–18. DOI: 10.14529/mmph160202.
12. Boziev O.L. (2019) Resheniye nelineynogo giperbolicheskogo uravneniya priblizhenno-analiticheskim metodom [Solution of the nonlinear hyperbolic equation by an approximate-analytical method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/51/1.
13. Boziev O.L. (2022) O linearizatsii giperbolicheskikh uravneniy s integral'noy nagruzkoy v glavnoy chasti s pomoshch'yu apriornoy otsenki ikh resheniy [On linearization of hyperbolic equations with an integral load in the main part by an a priori estimation of their solutions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2.
14. Filatov A.N., Sharova L.V. (1976) *Integral'nyye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* [Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.
15. Boziev O.L. (2023) Apriornyye otsenki proizvodnykh resheniy odnomernykh neodnorodnykh uravneniy teploprovodnosti s integral'noy nagruzkoy v glavnoy chasti [A priori estimates of derivatives of solutions of one-dimensional inhomogeneous heat conduction equations with an integral load in the main part]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seriya matematika, mekhanika, fizika*. 15(2). pp. 5–13. DOI: 10.14529/mmph230201.

Сведения об авторе:

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности Института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова; старший научный сотрудник Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН (Нальчик, Россия). E-mail: boziev@yandex.ru

Information about the author:

Boziev Oleg L. (Candidate of in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Computer Technologies and Information Security Department, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University; Senior Staff Scientist of Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation). ORCID: 0000-0002-1228-7892. E-mail: boziev@yandex.ru

The article was submitted 18.06.2023; accepted for publication 03.06.2024

Статья поступила в редакцию 18.06.2023; принята к публикации 03.06.2024

Научная статья

УДК 514.764.2

MSC: 53B05

doi: 10.17223/19988621/89/2

Псевдориманова метрика на многообразии приложенных ковекторов

Михаил Степанович Бухтыак

Томский государственный университет, Томск, Россия, bukhtyakm@mail.ru

Аннотация. На основе трехмерного аффинного пространства A_3 строится шестимерное точечно-векторное пространство E_6 , точка которого – упорядоченная пара точки из A_3 и ковектора, а вектор – упорядоченная пара из вектора и ковектора. В E_6 имеется псевдоевклидова метрика сигнатуры (3,3). Решается задача об отыскании всех аффинно-полуинвариантных псевдоримановых метрик в касательном расслоении данного пространства. Показано, что отыскание полуинвариантных метрик приводит к нахождению инвариантных метрик, и таких метрик имеется однопараметрическое семейство, включающее как тривиальный случай и псевдоевклидову метрику. Для указанного семейства метрик построена связность Леви-Чивита и дано описание геодезических линий этой связности в общем случае.

Ключевые слова: аффинное пространство, точечно-векторное пространство, ковектор, псевдоевклидова метрика, псевдориманова метрика, связность Леви-Чивита, геодезические линии

Для цитирования: Бухтыак М.С. Псевдориманова метрика на многообразии приложенных ковекторов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 17–31. doi: 10.17223/19988621/89/2

Original article

Pseudo-Riemannian metrics on a variety of applied covectors

Mikhail S. Bukhtyak

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, bukhtyakm@mail.ru

Abstract. Based on the three-dimensional affine space A_3 , a six-dimensional point-vector space E_6 is constructed, where its point is an ordered pair consisting of a point from A_3 and a covector, and its vector is an ordered pair consisting of a vector and a covector. There is a pseudo-Euclidean metrics of signature in E_6 (3,3). The problem of finding all affine semi-invariant pseudo-Riemannian metrics in the tangent fibration of a given space is solved. It is shown that finding semi-invariant metrics leads to finding invariant metrics, and there is a one-parameter family of such metrics (including the pseudo-Euclidean metrics as the trivial case). For the given family of metrics, the Levi-Civita connection is constructed, and a description of geodesic lines of this connection in the general case is given.

Keywords: affine space, point-vector space, covector, pseudo-Euclidean metrics, pseudo-Riemannian metrics, Levi-Civita connection, geodesic lines

For citation: Bukhtyak, M.S. (2024) Pseudo-Riemannian metrics on a variety of applied covectors. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 17–31. doi: 10.17223/19988621/89/2

Вступительные замечания

Понятие инварианта – одно из центральных в различных разделах математики и физики. Отметим, что в разных контекстах проявляются смысловые отличия. Так, в [1] по существу определена геометрия как теория инвариантов некоторой группы преобразований пространства. В [2] помещено исследование (и обзор) инвариантов групп, приводящих к геометриям в смысле Клейна. Обзорное изложение классической (на 1960-е гг.) теории инвариантов – в [3]. Инвариантность как групповая симметрия существенно используется в [4].

Пусть в некотором пространстве задана геометрия некоторой группы Γ , то есть система S объектов и отношений, инвариантных относительно этой группы. Если задать некий геометрический образ, допускающий описание в рамках системы S , то его Γ -инвариантность не нуждается в отдельном подтверждении. Так, отношение P между фигурами точечно-векторного пространства, описываемое в терминах коллинеарности и простого отношения коллинеарной тройки точек, заведомо инвариантно относительно полной аффинной группы. Имея это в виду, говорят, что отношение P «имеет геометрический смысл». Пример построения геометрической теории на этой основе можно видеть в [5].

Тензорное исчисление располагает удобным аппаратом для построения инвариантов (относительно допустимых замен координат), например полная свертка.

Исчисление внешних дифференциальных форм (метод внешних форм Картана) [6] есть в значительной своей части теория совместности систем пфаффовых уравнений. В соединении с методом подвижного репера оно позволяет строить (как правило) канонический репер геометрического образа, а элементы такого репера выражаются через инварианты данного образа. Неканонизированный (не прошедший специализацию до конца) репер зависит от параметров, задающих исследуемый образ (т.е. главных параметров), и от тех, которые управляют смещением репера при фиксированных главных параметрах (так называемые вторичные параметры). Метод Картана позволяет оценить влияние вторичных параметров, что способствует отысканию инвариантных либо относительно инвариантных величин. Примеры имеются, например, в [6–8].

В данной работе строится точечно-векторное пространство [9] приложенных ковекторов. Это пространство естественным образом наделяется структурой дифференцируемого многообразия. Решается вопрос о нетривиальной псевдоевклидовой метрике. Строится связность Леви-Чивита и интегрируются уравнения геодезических. Указанное пространство построено подобно другим пространствам, рассмотренным автором [10–12].

Существенную роль в конструкциях данной статьи играют метод подвижного репера и метод внешних форм Картана. Все функции предполагаются достаточно гладкими.

1. Определение пространства E_6

Рассмотрим трехмерное аффинное пространство A_3 , U – его точечное множество, V – пространство векторов в A_3 с базисом $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ и V^* – сопряженное ему пространство ковекторов с базисом $e^* = (\underline{e}^1, \underline{e}^2, \underline{e}^3)$, дуальным для базиса e . Пусть R – репер в A_3 :

$$R = (\bar{M}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3).$$

$GA(3)$ – полная аффинная группа, действующая в пространстве A_3 . Если $g \in GA(3)$, то

$$g(\bar{M}) = \bar{M} + a^i \bar{e}_i, \quad g(\bar{e}_i) = \bar{e}_i' = A_i^j \bar{e}_j, \quad g(\underline{e}^i) = \underline{e}^{i'} = A_i^{j'} \underline{e}^{j'}.$$

Кроме того, рассмотрим следующие объекты:

$$U_6 = U \times V^*$$

(элементами множества U_6 являются, таким образом, упорядоченные пары вида $(M, \underline{v})$, где $M \in U$, $\underline{v} \in V^*$) и $V \oplus V^*$.

Рассмотрим далее отображение $\Psi: U_6 \times U_6 \rightarrow V \oplus V^*$, заданное следующим правилом: если $x = (A, \underline{v}) \in U_6$ и $y = (B, \underline{u}) \in U_6$, то

$$\Psi(x, y) = (\overline{AB}, \underline{u} - \underline{v}).$$

Примем для $\Psi(x, y)$ обозначение $\overline{xy}$. Без труда проверяется, что тройка $(U_6, V \oplus V^*, \Psi)$ удовлетворяет следующим двум аксиомам:

1. Для каждого элемента $x \in U_6$ и каждого вектора $\bar{\alpha} \in V \oplus V^*$ найдется единственный элемент $y \in U_6$ такой, что $\overline{xy} = \bar{\alpha}$.

2. Если x, y, z принадлежат U_6 , то $\overline{xy} + \overline{yz} = \overline{xz}$.

Следовательно, построенная нами структура $(U_6, V \oplus V^*, \Psi)$ является 6-мерным точно-векторным пространством [9].

Определим действие группы $GA(3)$ на U_6 и на $V \oplus V^*$ следующими правилами. Если $(A, \underline{v}) \in U_6$, $(\bar{a}, \underline{b}) \in (V \oplus V^*)$, то

$$g(A, \underline{v}) = (gA, g\underline{v}), \quad g(\bar{a}, \underline{b}) = (g\bar{a}, g\underline{b}). \quad (1)$$

Заметим, что действие g на U есть параллельный перенос, а действие g на $(V \oplus V^*)$ – невырожденное линейное преобразование. Это верно и для действия g на $\underline{v}$.

Обозначим π_i ($i=1, 2$) проекцию множества U_6 на его i -ю компоненту. Соответственно, π_i^* – проекция прямой суммы $V \oplus V^*$ на i -ю компоненту. Из (1) вытекает коммутативность следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccccc} U_6 & \xrightarrow{\pi_1} & U & U_6 & \xrightarrow{\pi_2} & V^* & V \oplus V^* & \xrightarrow{\pi_1^*} & V \\ g \downarrow & & \downarrow g, & g \downarrow & & \downarrow g, & g \downarrow & & \downarrow g, \\ U_6 & \xrightarrow{\pi_1} & U & U_6 & \xrightarrow{\pi_2} & V^* & V \oplus V^* & \xrightarrow{\pi_1^*} & V \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V \oplus V^* & \xrightarrow{\pi_2} & V^* \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ V \oplus V^* & \xrightarrow{\pi_2} & V^* \end{array}$$

Репер в этом пространстве зададим объектом

$$R = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^3), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{x} = (\bar{M}, \underline{e}^3), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = (\bar{e}_i, \bar{0}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^i = (\bar{0}, \underline{e}^i). \quad (3)$$

Определение. Построенное нами выше шестимерное точечно-векторное пространство, на котором определено действие группы G преобразований пространства A_3 (формулами (1)), называется пространством E_6 .

Заметим, что действие группы $GA(3)$ не порождает в пространстве E_6 действие подгруппы полной аффинной группы шестимерного точечно-векторного пространства, поскольку действие группы $GA(3)$ на начало репера не есть параллельный перенос. Это объясняет, почему E_6 названо точечно-векторным пространством (а не аффинным).

Запишем формулы преобразования репера.

$$\mathbf{x}' = (\bar{M}, \underline{e}^3)' = (\bar{M} + a^i \bar{e}_i, A_1^3 \underline{e}^1 + A_2^3 \underline{e}^2 + A_3^3 \underline{e}^3), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i' = A_i^j \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^i' = A_j^i \boldsymbol{\varepsilon}^j.$$

Матрица преобразования базиса имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ 0 & 0 & 0 & A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ 0 & 0 & 0 & A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{pmatrix}$$

Для вектора $\mathbf{a} = (\bar{a}, \underline{b}) \in (V \oplus V^*)$ определяем скалярный квадрат правилом

$$\mathbf{a}^2 = \langle \bar{a}, \underline{b} \rangle = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3. \quad (4)$$

Ясно, что тем самым мы фиксируем в E_6 псевдоевклидову метрику сигнатуры (3,3).

2. Подвижной репер в пространстве E_6

В пространстве A_3 подвижной репер $\{M, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ имеет деривационные формулы

$$d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где ω_j^i – формы Пфаффа [6], подчиненные уравнениям структуры

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (6)$$

в пространстве E_6 рассматриваем репер (2),

$$R = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^3), \quad (7)$$

элементы которого определены в (3).

Поскольку для векторов пространства E_6 операции определены покомпонентно, то деривационные формулы подвижного репера (7) имеют (в силу (5)) вид:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \omega^i \mathbf{e}_i - \omega_i^3 \mathbf{e}^i, \\ d\mathbf{e}_i &= \omega_i^j \mathbf{e}_j, \quad d\mathbf{e}^i = -\omega_j^i \mathbf{e}^j. \end{aligned}$$

Базовая форма пространства E_6 , рассматриваемого как дифференцируемое многообразие, есть матричнозначная форма

$$\mathfrak{g} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, -\omega_1^3, -\omega_2^3, -\omega_3^3) \equiv (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6). \quad (8)$$

Слоевая форма имеет вид:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & -\omega_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -\omega_3^3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Поскольку пространство E_6 точно-векторное, то базовая форма $\mathfrak{g}$ и слоевая форма Θ определяют на нашем пространстве локально плоскую аффинную связность [17], что, впрочем, подтверждается и непосредственным вычислением с использованием (6)–(9):

$$d\mathfrak{g} - \mathfrak{g} \wedge \Theta = 0, \quad d\Theta - \Theta \wedge \Theta = 0.$$

Псевдоевклидова метрика (4) индуцирует инфинитезимальную метрику

$$ds^2 \equiv \langle d\bar{M}, d\bar{e}^3 \rangle = -(\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 + \omega^3 \omega_3^3). \quad (10)$$

Матрица соответствующей квадратичной дифференциальной формы имеет вид:

$$g = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Метрика (10) – псевдоевклидова метрика кокасательного пространства, ее сигнатура (3,3). Без труда проверяется, что обнаруженная нами связность ∇ пространства E_6 является связностью Леви-Чивита для инфинитезимальной метрики (10). В самом деле, из (9) и (11) видно, что

$$\nabla g = dg - \theta g - (\theta g)^T = 0.$$

Пространство E_6 со связностью ∇ есть плоское пространство [14]. Ниже мы построим на E_6 1-семейство инфинитезимальных метрик псевдориманова типа (c – параметр семейства), для которых связность Леви-Чивита при $c \neq 0$ уже не плоская, а при $c = 0$ получаем метрику (10).

3. Нетривиальная псевдориманова метрика на E_6

Построенная выше инфинитезимальная квадратичная метрика является в очевидном смысле тривиальной, поскольку истолковывается как стандартная псевдоевклидова метрика (4), перенесенная в кокасательное пространство. В этой связи естественным выглядит вопрос о том, какие вообще квадратичные формы от базовых пфаффовых форм (8) инвариантны для группы, действующей в пространстве E_6 . Это задача аналогична задаче, поставленной и решенной в [15]. В указанной статье речь шла о полуинвариантных однородных полиномах второго порядка от базовых форм. Здесь мы ставим ту же самую задачу. Неожиданно окажется, что найденное семейство решений не исчерпывается (10), а несколько шире.

Вторичные формы [6] для подвижного репера определяются в нашем случае формулами

$$\pi_i^j = \omega_i^j \Big| \omega^i = 0, \omega_i^3 = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Таким образом, смещением репера при фиксированном элементе управляют формы

$$P = (\pi_1^1, \pi_2^1, \pi_3^1, \pi_1^2, \pi_2^2, \pi_3^2) \equiv (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5, \lambda^6). \quad (12)$$

Матрица вторичных форм

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \pi_2^1 & \pi_3^1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_2^1 & \pi_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_3^1 & \pi_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi_1^1 & -\pi_2^1 & -\pi_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\pi_1^2 & -\pi_2^2 & -\pi_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пространство E_6 допускает однопараметрическое семейство $GA(3)$ – полуинвариантных невырожденных квадратичных дифференциальных форм с постоянными коэффициентами.

Доказательство. Среди квадратичных форм

$$\Psi = a_{ij} \varphi^i \varphi^j, \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (13)$$

с постоянными коэффициентами найдем те, которые полуинвариантны для группы преобразований, определяемой формами (12) и имеют максимальный ранг. Используя матрицу коэффициентов

$$L = (a_{ij}), \quad (14)$$

запишем условие относительной инвариантности искомого полинома в виде:

$$\Psi_\delta(L) \equiv \delta L - \Pi L - (\Pi L)^T = \Xi L. \quad (15)$$

Множитель при L есть линейная комбинация вторичных форм:

$$\Xi = \chi_i \lambda^i, \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (16)$$

С учетом постоянства коэффициентов запишем условие (15)

$$\Pi L + (\Pi L)^T + \Xi L = 0. \quad (17)$$

Матричное уравнение (17), записанное покомпонентно, дает систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & 2\pi_1^1 a_{11} + 2\pi_2^1 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{11} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{12} + \pi_1^2 a_{22} + \pi_2^1 a_{11} + \pi_2^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{12} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{13} + \pi_1^2 a_{23} + \pi_3^1 a_{11} + \pi_3^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{13} = 0, \\
 & \pi_1^2 a_{24} - \pi_2^1 a_{15} - \pi_3^1 a_{16} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{14} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{15} + \pi_1^2 a_{25} - \pi_1^2 a_{14} - \pi_2^2 a_{15} - \pi_3^2 a_{16} + \\
 & + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{15} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{16} + \pi_1^2 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{16} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{12} + \pi_1^2 a_{22} + \pi_2^1 a_{11} + \pi_2^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{12} = 0, \\
 & 2\pi_2^1 a_{12} + 2\pi_2^2 a_{22} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{22} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{13} + \pi_2^2 a_{23} + \pi_3^1 a_{12} + \pi_3^2 a_{22} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{23} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{14} + \pi_2^2 a_{24} - \pi_1^1 a_{24} - \pi_2^1 a_{25} - \pi_3^1 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{24} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{15} - \pi_1^2 a_{24} - \pi_3^2 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{25} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{16} + \pi_2^2 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{26} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{13} + \pi_1^2 a_{23} + \pi_3^1 a_{11} + \pi_3^2 a_{12} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{13} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{13} + \pi_2^2 a_{23} + \pi_3^1 a_{12} + \pi_3^2 a_{22} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{23} = 0, \\
 & 2\pi_3^1 a_{13} + 2\pi_3^2 a_{23} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{33} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{14} + \pi_2^2 a_{24} - \pi_1^1 a_{34} - \pi_2^1 a_{35} - \pi_3^1 a_{36} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{34} = 0, \\
 & \pi_3^1 a_{15} + \pi_3^2 a_{25} - \pi_1^2 a_{34} - \pi_2^2 a_{35} - \pi_3^2 a_{36} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{35} = 0, \\
 & \pi_3^1 a_{16} + \pi_3^2 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{36} = 0, \\
 & \pi_1^2 a_{24} - \pi_2^1 a_{15} - \pi_3^1 a_{16} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{14} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{14} + \pi_2^2 a_{24} - \pi_1^1 a_{24} - \pi_2^1 a_{25} - \pi_3^1 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{24} = 0, \\
 & \pi_3^1 a_{14} + \pi_3^2 a_{24} - \pi_1^1 a_{34} - \pi_2^1 a_{35} - \pi_3^1 a_{36} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{34} = 0, \\
 & -2\pi_1^1 a_{44} - 2\pi_2^1 a_{45} - 2\pi_3^1 a_{46} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{44} = 0, \\
 & -\pi_1^1 a_{45} - \pi_2^1 a_{55} - \pi_3^1 a_{56} - \pi_1^2 a_{44} - \pi_2^2 a_{45} - \pi_3^2 a_{46} + \\
 & + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{45} = 0, \\
 & -\pi_1^1 a_{46} - \pi_2^1 a_{56} - \pi_3^1 a_{66} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{46} = 0, \\
 & \pi_1^1 a_{15} + \pi_1^2 a_{25} - \pi_1^1 a_{14} - \pi_2^2 a_{15} - \pi_3^2 a_{16} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{15} = 0, \\
 & \pi_2^1 a_{15} - \pi_1^2 a_{24} - \pi_3^2 a_{26} + (x_1 \pi_1^1 + x_2 \pi_2^1 + x_3 \pi_3^1 + x_4 \pi_1^2 + x_5 \pi_2^2 + x_6 \pi_3^2) a_{25} = 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 &\pi_{3,1}a_{1,5} + \pi_3^2a_{25} - \pi_1^2a_{34} - \pi_2^2a_{35} - \pi_3^2a_{36} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{35} = 0, \\
 &\quad -\pi_1^1a_{45} - \pi_2^1a_{55} - \pi_3^1a_{56} - \pi_1^2a_{44} - \pi_2^2a_{45} - \pi_3^2a_{46} + \\
 &\quad + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{45} = 0, \\
 &-2\pi_1^2a_{45} - 2\pi_2^2a_{55} - 2\pi_3^2a_{56} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{55} = 0, \\
 &\quad -\pi_1^2a_{46} - \pi_2^2a_{56} - \pi_3^2a_{66} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{56} = 0, \\
 &\quad \pi_1^1a_{16} + \pi_2^1a_{26} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{16} = 0, \\
 &\quad \pi_2^1a_{16} + \pi_2^2a_{26} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{26} = 0, \\
 &\quad \pi_3^1a_{16} + \pi_3^2a_{26} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{36} = 0, \\
 &\quad -\pi_1^1a_{46} - \pi_2^1a_{56} - \pi_3^1a_{66} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{46} = 0, \\
 &\quad -\pi_1^2a_{46} - \pi_2^2a_{56} - \pi_3^2a_{66} + (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{56} = 0, \\
 &\quad (x_1\pi_1^1 + x_2\pi_2^1 + x_3\pi_3^1 + x_4\pi_1^2 + x_5\pi_2^2 + x_6\pi_3^2)a_{66} = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения (18) не должны налагать ограничений на вторичные формы π_i^j . Следовательно, все (приведенные) коэффициенты при этих формах должны быть нулями. Это приводит к 216 уравнениям на x_i и a_{ij} . Выписывать их нет необходимости. Заметим, что допущение $x_i \neq 0$ имеет следствием

$$a_{14} = a_{22} = a_{23} = a_{25} = a_{26} = a_{33} = a_{35} = a_{36} = a_{55} = a_{56} = a_{66} = 0,$$

что противоречит невырожденности матрицы (14). Таким образом, $x_1 = 0$. Подставив в (18), заключаем, что

$$a_{12} = a_{13} = a_{15} = a_{16} = a_{24} = a_{34} = a_{45} = a_{46} = 0.$$

Продолжая этот анализ (для существенно упрощившейся системы (18)) мы приходим к результату

$$x_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

и матрица искомого полинома (определенного с точностью до постоянного коэффициента) имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где c – произвольная вещественная константа. ■

Сигнатура квадратичной формы (13) при любом c равна (3,3). Геометрический смысл (19) таков: если $\mathbf{x} = (\bar{M}, \underline{e}^3)$, то для инфинитезимальной метрики, заданной тензором (19), имеем

$$d\mathbf{x}^2 = -2\omega^i\omega_i^3 + (\omega^3)^2 = 2 < d\bar{M}, d\underline{e}^3 > + < d\bar{M}, \underline{e}^3 >^2. \quad (20)$$

Отметим и никак не очевидный факт, что в разложении (16) все коэффициенты x_i оказались (с необходимостью) нулями. Это означает, что полученное 1-семейство квадратичных форм не только полуинвариантно, но инвариантно. Полученный результат сильнее, нежели анонсированный в формулировке теоремы.

4. Связность Леви-Чивита в пространстве E_6

Действуя обычным путем [7, 16], для метрики (20) находим матрицу связности Леви-Чивита

$$\bar{\Theta} = \begin{pmatrix} \omega_1^1 + \frac{c}{2}\omega^3 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 + \frac{c}{2}\omega^3 & \omega_2^3 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\omega_2^3 \\ \omega_3^1 + \frac{c}{2}\omega^1 & \omega_3^2 + \frac{c}{2}\omega^2 & \omega_3^3 + c\omega^3 & \frac{c}{2}\omega_1^3 & \frac{c}{2}\omega_2^3 & c^2\omega^3 + c\omega_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^1 - \frac{c}{2}\omega^3 & -\omega_2^1 & -\omega_3^1 - \frac{c}{2}\omega^1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 & -\omega_2^2 - \frac{c}{2}\omega^3 & -\omega_3^2 - \frac{c}{2}\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & -c\omega^3 - \omega_3^3 \end{pmatrix}.$$

Разность матриц $\bar{\Theta} - \Theta$ есть матрица, отвечающая тензору аффинной деформации [17]:

$$\bar{\Theta} - \Theta = \begin{pmatrix} \frac{c}{2}\omega^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\omega_1^3 \\ 0 & \frac{c}{2}\omega^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2}\omega_2^3 \\ \frac{c}{2}\omega^1 & \frac{c}{2}\omega^2 & c\omega^3 & \frac{c}{2}\omega_1^3 & \frac{c}{2}\omega_2^3 & c^2\omega^3 + c\omega_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{2}\omega^3 & 0 & -\frac{c}{2}\omega^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{c}{2}\omega^3 & -\frac{c}{2}\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c\omega^3 \end{pmatrix}.$$

Тензор аффинной деформации нулевой при $c = 0$, что вполне ожидаемо. Отметим, что связность Леви-Чивита при $c \neq 0$ имеет ненулевую кривизну.

5. Геодезические линии связности Леви-Чивита

Теорема 2. Геодезическая линия связности Леви-Чивита в общем случае есть 1-семейство вида $(\bar{M}, \underline{v})$, где траектория точки $\bar{M}$ есть (локально) прямая, а 1-семейство ковекторов параллельно двумерному линейному подпространству в V^* .

Доказательство. Поскольку на дифференцируемом многообразии E_6 базовая форма ϑ и слоевая форма $\bar{\Theta}$ определяют аффинную связность, то уравнения геодезических имеют [7] вид:

$$d\varphi^I + \varphi^J \bar{\Theta}_J^I - \lambda \varphi^I = 0, \quad (I, J = \overline{1, 6}). \quad (21)$$

где λ – некоторая форма Пфаффа. Образующий элемент нашего многообразия – упорядоченная пара (вершина репера в A_3 и ковектор $\underline{e}^3$). Свернем (21) с базисом (2) и запишем эти уравнения для каждой из двух компонент пары в отдельности. Получаем систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} d^2 \bar{M} + c < d\bar{M}, \underline{e}^3 > d\bar{M} = \lambda d\bar{M}, \\ d^2 \underline{e}^3 - c < d\bar{M}, \underline{e}^3 > d\underline{e}^3 - c < d\bar{M}, d\underline{e}^3 > \underline{e}^3 + c^2 < d\bar{M}, \underline{e}^3 >^2 \underline{e}^3 = \lambda d\underline{e}^3. \end{aligned}$$

Пусть t – параметр геодезической линии

$$\bar{M} = \bar{r}(t), \quad \underline{e}^3 = \underline{v}(t).$$

Тогда, следуя [7] и полагая $\lambda = d \ln u(t)$, запишем уравнения, выполняющиеся вдоль геодезической, в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + c \left\langle \frac{d\bar{r}}{dt}, \underline{v} \right\rangle \frac{d\underline{v}}{dt} &= \frac{d \ln u(t)}{dt} \frac{d\bar{r}}{dt}, \\ \frac{d^2 \underline{v}}{dt^2} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{dt}, \underline{v} \right\rangle \frac{d\underline{v}}{dt} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d\underline{v}}{dt} \right\rangle \underline{v} + c^2 \left\langle \frac{d\bar{r}}{dt}, \underline{v} \right\rangle^2 \underline{v} &= \frac{d \ln u(t)}{dt} \frac{d\bar{r}}{dt}. \end{aligned} \quad (22)$$

Действуя, как обычно (например, [7]), переходим к параметру

$$s(t) = C_1 + C_2 \int_{t_0}^t u(t) dt,$$

и уравнения (22) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} + c \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \underline{v} \right\rangle \frac{d\bar{r}}{ds} &= \bar{0}, \\ \frac{d^2 \underline{v}}{ds^2} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \underline{v} \right\rangle \frac{d\underline{v}}{ds} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d\underline{v}}{ds} \right\rangle \underline{v} + c^2 \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \underline{v} \right\rangle^2 \underline{v} &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Введем в рассмотрение (достаточно гладкую) функцию

$$f(s) = \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \underline{v} \right\rangle. \quad (24)$$

Система (23) переписывается в виде:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} + cf(s) \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{0}, \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \underline{v}}{ds^2} - cf(s) \frac{d\underline{v}}{ds} - c \left\langle \frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d\underline{v}}{ds} \right\rangle \underline{v} + c^2 (f(s))^2 \underline{v} = \underline{0}. \quad (26)$$

Ясно, что линия $L: \bar{R} = \bar{r}(s)$ – прямая (локально). Из (26) видно, что

$$\underline{v} \wedge \frac{d\underline{v}}{ds} \wedge \frac{d^2 \underline{v}}{ds^2} = 0.$$

Следовательно, 1-семейство ковекторов параллельно двумерному линейному подпространству в V^* . ■

Уравнения (23) интегрируются в элементарных функциях. Именно, зададим в A_3 неподвижный репер $(O, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$ так, что $\bar{E}_3 \parallel L$. Относительно нашего репера (и взаимного репера $(O, \bar{E}^1, \bar{E}^2, \bar{E}^3)$) имеем

$$\bar{r} = (0, 0, x_3(s))^T, \quad \underline{v} = (y_1(s), y_2(s), y_3(s)).$$

Уравнение (25) принимает вид:

$$\frac{d^2}{ds^2} x_3(s) + cf(s) \frac{d}{ds} x_3(s) = 0,$$

и его решение

$$x_3(s) = C_1 + C_2 \int e^{\int -cf(s)ds} ds.$$

Из (24) определяем, что

$$y_3(s) = \frac{f(s)}{C_2 e^{\int -cf(s)ds}}. \quad (27)$$

Уравнение (26), записанное для трех его компонент, проводит к трем скалярным уравнениям, и в третьей компоненте имеем уравнение

$$\frac{d^2}{ds^2} f(s) + cf(s) \frac{d}{ds} f(s) = 0,$$

семейство решений которого состоит из двух множеств: первое – $f(s) \equiv \text{const}$ (мы исключаем его из рассмотрения), второе же содержит функции вида:

$$f(s) = \frac{2 \tanh(a_1(s + a_2)) a_1}{c}. \quad (28)$$

С учетом (27) находим, что

$$y_3(s) = \frac{-2 \tanh(a_1(s + a_2)) a_1}{c \left(1 - \left(\tanh(a_1(s + a_2))\right)^2\right) C_2}.$$

Для первых двух компонент уравнения (26) с учетом (28) получаем уравнения

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{d^2}{ds^2} y_1(s) \right) \left(\cosh(a_1(s + a_2)) \right)^2 + \\ & + 2 \sinh(a_1(s + a_2)) a_1 \left(\frac{d}{ds} y_1(s) \right) \cosh(a_1(s + a_2)) + 2 a_1^2 y_1(s) = 0, \\ & \left(\frac{d^2}{ds^2} y_2(s) \right) \left(\cosh(a_1(s + a_2)) \right)^2 - \\ & - 2 \sinh(a_1(s + a_2)) a_1 \left(\frac{d}{ds} y_2(s) \right) \cosh(a_1(s + a_2)) - 2 a_1^2 y_2(s) = 0. \end{aligned}$$

Их общие решения

$$\begin{aligned} y_1(s) &= a_3 \sqrt{\cosh(2a_1(s + a_2)) + 1} \sinh(a_1 s) + a_4 \sqrt{\cosh(2a_1(s + a_2)) + 1} \cosh(a_1 s), \\ y_2(s) &= a_5 \sqrt{\cosh(2a_1(s + a_2)) + 1} \sinh(a_1 s) + a_6 \sqrt{\cosh(2a_1(s + a_2)) + 1} \cosh(a_1 s). \end{aligned}$$

Для первой компоненты имеем

$$\bar{r} = \left(0, 0, C_1 - \frac{\tanh(a_1(s+a_2))C_2}{a_1} \right).$$

Для второй компоненты

$$\underline{v} = \left(y_1(s), y_2(s), \frac{-2 \tanh(a_1(s+a_2))a_1}{c(1-(\tanh(a_1(s+a_2)))^2)} C_2 \right).$$

Надлежащим выбором констант, переходом к новой переменной и переобозначениями приводим последние формулы к виду:

$$\bar{R} = [0, 0, \tanh(S) p_5],$$

$$\underline{V} = \left(y_1(S), y_1(S), 2 \frac{2 \tanh(S)}{(1-(\tanh(S))^2)} p_5 \right),$$

$$y_1(S) = p_1 \sqrt{\cosh(2S)+1} \sinh(S) + p_2 \sqrt{\cosh(2S)+1} \cosh(S),$$

$$y_2(S) = p_3 \sqrt{\cosh(2S)+1} \sinh(S) + p_4 \sqrt{\cosh(2S)+1} \cosh(S).$$

6. Векторная интерпретация геодезических линий связности Леви-Чивита

Геометрическим образом, сопоставляемым приложенному ковектору, принято, согласно [13], полагать упорядоченную пару гиперплоскостей аффинного пространства (в нашем случае – просто плоскостей), что неудобно для изображения на рисунках. Для преодоления затруднения мы будем ковектору $\underline{V}(S)$ сопоставлять вектор $\bar{V}$ с теми же компонентами¹.

Заметим, что определитель, составленный из $\underline{V}, \frac{d\underline{V}}{dS}, \frac{d^2\underline{V}}{dS^2}$, тождественно равен нулю. Это означает, что в рамках приведенного выше сопоставления все векторы $\bar{V}$ полученного 1-семейства окажутся компланарными, и прямые – носители этих векторов – образуют цилиндроид. Если векторы $\bar{V}$ откладывать из соответствующих точек отрезка, пробегаемого точкой $R(S)$, то получится картина, представление о которой дает рис. 1 (он составлен для $[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5] = [1, 2, -3, 4, 6]$ и $c=1$).

Направляющей плоскостью цилиндриоида служит плоскость

$$p_4 \sqrt{2} x_1 - p_2 \sqrt{2} x_2 + (p_2 p_3 - p_1 p_4) c p_5 x_3 = 0.$$

При условии

$$p_1 p_4 - p_2 p_3 = 0$$

цилиндроид вырождается в плоское семейство лучей, пересекающих прямую AB .

¹ Заметим, что построения этого раздела совершаются в некотором неподвижном репере. Следовательно, вопрос об инвариантности соответствия «ковектор–вектор» не возникает.

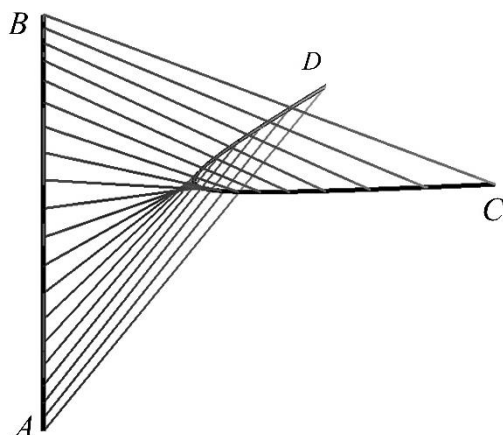


Рис. 1. AB – траектория точки R ; CD – линия концевых точек векторов, отложенных из текущей точки R

Fig. 1. AB is the trajectory of the point R ; CD is the line between the endpoints of the vectors, drawn from the current point R

Исключенный из рассмотрения случай $f(s) \equiv \text{const}$ приводит к тривиальным решениям системы (23).

Заключение

Точечно-векторное пространство E_6 рассматривалось как пространство представления полной аффинной группы трехмерного пространства $GA(3)$. Структура, индуцированная данной группой, не совпадает со структурой шестимерного аффинного пространства. Пространство E_6 естественным образом наделено скалярным квадратом псевдоевклидова типа. В касательном пространстве имеется 1-семейство псевдоримановых метрик (параметр – c), для которого псевдоевклидова метрика является вырожденным элементом семейства. Геодезические линии заданы дифференциальными уравнениями, содержащими этот параметр, эти уравнения проинтегрированы. Отметим, что замечен интерес к цилиндридам со стороны специалистов, работающих в машиностроении, архитектуре и строительстве [18].

Список источников

1. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа») // Об основаниях геометрии : сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей : к столетию со дня смерти Лобачевского / ред. и вступ. ст. А.П. Нордена. М. : Гостехиздат, 1956. С. 399–434.
2. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М. : ГИТТЛ, 1947. 404 с.
3. Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. М. : Мир, 1974. 280 с.
4. Михайличенко Г.Г. Простейшие полиметрические геометрии // Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 1. С. 22–24.
5. Щербаков Р.Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск : Изд-во ТГУ, 1960.

6. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М.–Л. : ГИТТЛ, 1948. 432 с.
7. Аквис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин : Калинин. гос. ун-т, 1977. 83 с.
8. Фиников С.П. Теория конгруэнций. М. : ГИТТЛ, 1950. 528 с.
9. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М. : Наука, 1968. 912 с.
10. Бухтыак М.С. Естественная связность на гиперповерхности пространства B_6 // Геометрический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1990. Вып. 31. С. 51–57.
11. Бухтыак М.С. Интерпретация нуль-пар трехмерного центроаффинного пространства // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск : Том. гос. ун-т, 2001. Вып. 3. С. 39–45.
12. Бухтыак М.С. Замечательные связности на четырехпараметрическом векторном поле // Геометрический сборник. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1988. Вып. 29. С. 84–90.
13. Схоутен И.А. Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М.–Л. : ГОНТИ, 1939. Т. 1. 181 с.
14. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М. : Наука, 1982. 480 с.
15. Бадяева З.П., Бухтыак М.С. Полуинвариантные полиномы второго порядка на многообразии лучей пространства A^3 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1 (21). С. 5–12.
16. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М. : Наука, 1981. Т. 1. 344 с.
17. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М. : Наука, 1976. 432 с.
18. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек. М. : Наука, 2006. 544 с.

References

1. Klein F. A comparative review of recent researches in geometry (The Erlangen program) // *Foundations of geometry: classical works on Lobachevsky's geometry and the development of its ideas: on the centenary of Lobachevsky's death* / ed. and introduction by A.P. Norden. Moscow: Gostekhizdat, 1956. pp. 399–434.
2. Weil H. (1939) *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*. Princeton: Princeton University Press.
3. Dieudonné J., Carrell J., Mumford D. (1974) *Geometricheskaya teoriya invariantov* [Geometrical theory of invariants]. Moscow: Mir.
4. Mikhailichenko G.G. (1996) Prosteyshiye polimetricheskiye geometrii [The simplest polymetric geometries]. *Doklady Akademii Nauk*. 348(1). pp. 22–24.
5. Shcherbakov R.N. (1960) *Kurs affinnoy i proyektivnoy differentsial'noy geometrii* [A course of affine and projective differential geometry]. Tomsk: Tomsk State University.
6. Finikov S.P. (1948) *Metod vneshnikh form Kartana* [Cartan's method of exterior forms]. Moscow: GITTL.
7. Akivis M.A. (1977) *Mnogomernaya differentsial'naya geometriya* [Multidimensional differential geometry]. Kalinin: Kalinin State University.
8. Finikov S.P. (1950) *Teoriya kongruentsiy* [Theory of congruences]. Moscow: GITTL.
9. Aleksandrov P.S. (1968) *Leksii po analiticheskoy geometrii* [Lectures on analytical geometry]. Moscow: Nauka.
10. Bukhtyak M.S (1990) Estestvennaya svyaznost' na giperpoverkhnosti prostranstva B_6 [A natural connection on a hypersurface of the space B_6 . *Geometricheskii Sbornik*. 31. pp. 51–57.
11. Bukhtyak M.S. (2001) Interpretatsiya nul'-par trekhmernogo tsentroaffinnogo prostranstva [Interpretation of null pairs of the three-dimensional centro-affine space]. *Issledovaniya po matematicheskomu analizu i algebre*. 3. pp. 39–45.
12. Bukhtyak M.S. (1988) Zamechatel'nyye svyaznosti na chetyrekhparametricheskom vektornom pole [Remarkable connections on a four-parameter vector field]. *Geometricheskii Sbornik*. 29. pp. 84–90.

13. Schouten J.A. and Struik D.J. (1935) *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*. Bd. 1. Groningen – Batavia: Nordhoff.
14. Wolf J.A. (1972) *Spaces of Constant Curvature*. Berkeley, CA: University of California Press.
15. Badyaeva Z. P., Bukhtyak M. S. (2013) Poluinvariantnyye polinomy второго порядка na mnogoobrazii luchey prostranstva A^3 [Semi-invariant second-order polynomials on the manifold of rays of the A^3 space]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 21(1). pp. 5–12.
16. Kobayashi S, Nomizu K. (1963) *Foundations of Differential Geometry*. V. 1. New York: Interscience Publishers.
17. Norden A.P. (1976) *Prostranstva affinnoy svyaznosti* [Affine connection spaces]. Moscow: Nauka.
18. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N., Khalabi S.M. (2006) *Analiticheskiye poverkhnosti: materialy po geometrii 500 poverkhnostey i informatsiya k raschetu na prochnost' tonkikh obolochek* [Analytical surfaces: materials on geometry of 500 surfaces and information on thin shell strength calculation]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторе:

Бухтяк Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: bukhtyakm@mail.ru

Information about the author:

Bukhtyak Mikhail S. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, associate professor in the Department of Geometry, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University Tomsk, Russia). E-mail: bukhtyakm@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.10.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 24.10.2023; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 515.12

MSC: 54B15, 54B30, 54B35, 54C05, 54C15, 54C60, 54O30

doi: 10.17223/19988621/89/3

Размерностные свойства подпространств, являющихся граничными множествами пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте X

Турсунбай Файзиевич Жураев¹, Камариддин Ризокулович Жувонов²

¹ *Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан, tursunzhuraev@mail.ru*

² *Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства», Ташкент, Узбекистан, qamariddin.j@mail.ru*

Аннотация. Рассматриваются размерностные свойства подпространств пространства $P(X)$ вероятностных мер, для которых определены трансфинитные размерностные функции ind , Ind и $\dim$. Показано, что счетномерность компакта X эквивалентна существованию размерностей $indP_\omega(X)$, $IndP_\omega(X)$, $\dim P_\omega(X)$, $indP_f(X)$, $IndP_f(X)$ и $\dim P_f(X)$ для подпространств $P_\omega(X)$, $P_f(X)$, $P_n(X)$ соответственно. Также замечено, что для любого компактного C -пространства подпространств $P_n(X)$, $P_\omega(X)$, $P_f(X)$ пространства $P(X)$ являются компактными C -пространствами. Если для бесконечного компакта X подпространство $P_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q , то существует число $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, такое что $X^n \times \sigma^{n-1}$ содержит гильбертов куб Q . Далее для бесконечного компакта X выделен ряд подпространств Y компакта $P(X)$, которые являются Q -, ℓ_2 -, ℓ_2^f - и Σ -многообразиями. В частности, для собственного замкнутого подмножества $A \subset X$ подпространства $S_p(A)$ есть ℓ_2 -многообразия для любого $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), $P(X) \setminus P_n(X)$ есть Q -многообразия, для любого собственного всюду плотного счетного подпространства $A \subset X$ подпространство $P_\omega(A)$ является граничным множеством компакта $P(X)$. Если $P_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q , то подпространство $P_\omega(X)$ гомеоморфно пространству Σ .

Показано, в каких случаях всюду плотные подмножества A пространств $P(X)$, определенных в бесконечном компакте X , являются его граничным множеством, а также выделено, какие всюду плотные подмножества $A \subset P(X)$ и $B \subset P(Y)$ для бесконечных компактов X и Y соответственно пространств $P(X)$ и $P(Y)$ являются одновременно взаимно гомеоморфными.

Ключевые слова: вероятностные меры, размерности ind , Ind , $\dim$, граничные множества

Для цитирования: Жураев Т.Ф., Жувонов К.Р. Размерностные свойства подпространств, являющихся граничными множествами пространства вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте X // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 32–50. doi: 10.17223/19988621/89/3

Original article

Subspaces dimensional properties that are boundary sets of the probability measures space, defined in an infinite compactum X

Tursunbay F. Zhuraev¹, Qamariddin R. Zhuvonov²

¹ Tashkent State Pedagogical University named in Nizami,
Tashkent, Uzbekistan, tursunzhuraev@mail.ru

² National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers", Tashkent, Uzbekistan, qamariddin.j@mail.ru

Abstract. In this note, we consider dimensional properties of the subspace of probability measure spaces $P(X)$ for which transfinite dimensional functions ind , Ind and dim are defined. It is shown that countability of a compact set X is equivalent to the existence of dimensions $indP_\omega(x)$, $IndP_\omega(x)$, $dimP_\omega(x)$, $indP_f(x)$, $IndP_f(x)$ and $dimP_f(x)$ for the subspaces $P_\omega(x)$, $P_f(x)$, $P_n(x)$ respectively. It is also noted that for any compact C -space of the subspaces $P_n(x)$, $P_\omega(x)$, $P_f(x)$ the space $P(x)$ are compact C -spaces. If for an infinite compact set X the subspace $P_\omega(x)$ contains the Hilbert cube Q , then there exists a number $n \in N$, $n > 1$, such that $X^n \sigma^{n-1}$ contains the Hilbert cube Q . Further, for an infinite compact set X , a number of subspaces Y of the compact set $P(x)$ which are Q -, ℓ_2 -, ℓ_2^f - and Σ -manifolds are identified. In particular, for a proper closed subset $A \subset X$, the subspaces $S_P(A)$ are ℓ_2 -manifolds; for any $n \in N$, $n > 1$, $P(x) \setminus P_n(x)$ are Q -manifolds; for any proper everywhere dense countable subspace $A \subset X$, the subspace $P_\omega(A)$ is the boundary set of the compact set $P(x)$. If $P_\omega(x)$ contains the Hilbert cube Q , then the subspace $P_\omega(x)$ is homeomorphic to the space Σ .

It is considered in which cases everywhere dense subsets A of the spaces $P(X)$ defined in an infinite compactum X are its boundary set. It is also shown which everywhere dense subsets $A \subset P(X)$ and $B \subset P(Y)$ for infinite compact sets X and Y of the spaces $P(X)$ and $P(Y)$, respectively, are at the same time mutually homeomorphic.

Keywords: probability measures, dimensions ind , Ind , dim , boundary sets

For citation: Zhuraev, T.F., Zhuvonov, Q.R. (2024) Subspaces dimensional properties that are boundary sets of the probability measures space, defined in an infinite compactum X . *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 32–50. doi: 10.17223/19988621/89/3

Введение

Пространством $P(X)$ всех вероятностных мер компакта X называется множество всех регулярных борелевских вероятностных мер на X , снабженных слабойшей из топологий, для которых непрерывен каждый функционал $f_u : C(X) \rightarrow R$, переводящий меру μ в $\mu(U)$ (U – открытое в X множество). Известно, что пространство $P(X)$ вероятностных мер любого бесконечного метрического компакта X гомеоморфно гильбертовому кубу $Q = I^{\aleph_0}$. Известно также, что для любой $\aleph_1$ – степени неодноточечного компакта K , пространство вероятностных мер $P(K^{\aleph_1})$ гомеоморфно тихоновскому кубу $I^{\aleph_1}$, $P(K^{\aleph_1}) \cong I^{\aleph_1}$, I – отрезок $[0, 1]$. Отметим, в частности, что все эти пространства являются топологически однородными. А для пространств $P(K^{\aleph_1})$ при $\tau > \aleph_1$ ситуация иная [1–4].

Для произвольного компакта X и меры $\mu \in P(X)$ определен ее носитель $\text{supp}(\mu)$ – наименьшее из замкнутых множеств $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$, т.е. $\text{supp}(\mu) = \bigcap \{A : A \subset X, A = \bar{A}, \mu \in P(A)\}$.

$$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\text{supp } \mu| \leq n\},$$

$P_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)$ – множество всех вероятностных мер с конечными носителями.

Напомним, что пространство $P_f(X) \subset P(X)$ состоит из всех вероятностных мер

$$\mu = m_1 \delta(x_1) + m_2 \delta(x_2) + \dots + m_n \delta(x_n)$$

с конечными носителями, для каждой из которых $m_i \geq \frac{n}{n+1}$ при некотором i .

$$P_{f,n}(X) = \{\mu \in P_f(X) : |\text{supp } \mu| \leq n\}.$$

Очевидно, что для метрического компакта X и любого $n \in N$ множества $P_n(X)$ замкнуты в $P(X)$, $P_f(X)$ и $P_{f,n}(X)$ замкнуты в $P(X)$ [5–6].

Тогда подпространство $P_\omega(X) \subset P(X)$, и $P_\omega(X)$ всюду плотно в $P(X)$. Следовательно, компакт $P_f(X)$ есть объединение компактов $P_{f,n}(X)$ и $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$.

Очевидно, что $P_{f,n}(X) \subseteq P_n(X)$ и $P_f(X) \subseteq P_\omega(X)$ [7–9].

1. Значение трансфинитных размерностных функций ind , Ind и $\dim$ в подпространстве вида $P_n(X)$, $P_f(X)$ и $P_\omega(X)$ пространства вероятностных мер $P(X)$, определенных в бесконечном компакте X

С недостающими геометрическими и топологическими понятиями и общепринятыми обозначениями, относящимися к функтору $P : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ вероятностных мер его подфункторов, можно ознакомиться в работах [1, 3–9], с общими свойствами действующего в категории Comp – в [2], с размерностными свойствами топологических пространств и обозначениями – в работах [2, 3, 10–14].

Понятия и факты, относящихся к размерностным функциям ind , Ind и dim , можно найти в [15].

Пусть N – множество натуральных чисел. Через $FinN$ обозначим множество всех непустых конечных подмножеств N , снабженных следующим линейным порядком Брауэра–Клини $\prec$: $\sigma \prec \tau$, это означает существование такого $n \in \sigma \setminus \tau$, что

$$\sigma \cap \{1, 2, \dots, n-1\} = \tau \cap \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Пусть L – произвольное множество, и пусть $M \subset FinM$. Для $\sigma \in \{\emptyset\} \cup FinL$ положим

$$M^\sigma = \{\tau \in FinL : \sigma \cup \tau \in M, \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$

Для $\alpha \in L$ множество $M^{(\alpha)}$ будем обозначать M^α .

Если $\sigma, \tau \in FinL$ и $\sigma \cap \tau = \emptyset$, то

$$(M^\sigma)^\tau = M^{\sigma \cup \tau},$$

$$\sigma \in M^\tau \Leftrightarrow \tau \in M^\sigma.$$

Предковое число $Ord M$ определяют по индукции:

1. $Ord M = 0 \Leftrightarrow M = \emptyset$
 2. $Ord M \leq \alpha \Leftrightarrow Ord M^\alpha < \alpha$ для любого $\alpha \in L$.
 3. $Ord M = \alpha \Leftrightarrow Ord M^\alpha \leq \alpha$ и $Ord M < \alpha$ – не выполняется
 4. $Ord M = \infty$ (не существует) $\Leftrightarrow Ord M > \alpha$ для всякого порядкового числа α .
- Очевидно, что $N \subset M \Rightarrow Ord N \leq Ord M$.

Множество $M \subset FinL$ называется выключающим, если для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in FinL$ из $\sigma_1 \in M$ и $\sigma_2 \subset \sigma_1$ вытекает $\sigma_2 \in M$.

Последовательность k_i , $i \in \omega$, натуральных чисел ≥ 2 будем называть m -последовательностью, если все $k_i = m$ при конечном m .

Семейство открытых (замкнутых) подмножеств пространства X , состоящих не более чем из k элементов, будем называть открытым (замкнутым) k -семейством пространства X . Открытые k -семейства, являющиеся покрытиями, будем называть k -покрытиями пространства X и обозначать $cov_k X$.

Пусть $\Phi = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ – k -система пространства X (в записи k -семейства мы предполагаем, что оно состоит ровно из k множеств, некоторые из которых могут быть пустыми). Всякое дизъюнктное семейство $O\Phi = \{OF_1, OF_2, \dots, OF_k\}$ окрестностей элементов Φ называется окрестностью системы Φ . m -последовательность (k_i) всякой последовательности (Φ_i) k_i -систем пространства X называется несущественной, если существуют такие окрестности $O\Phi_i$, что семейство $\bigcup \{O\Phi_i : i \in \omega\}$ является покрытием пространства X .

Последовательность $R = \{U_i : i \in N\}$ попарно различных m -покрытий компакта X называется m -выписываемой, если для любого существенного покрытия $U \in cov_m(X)$ бесконечно множество

$$\{i \in N : U_i \succ \omega\},$$

где отношение $v \succ \omega$ означает, что m -покрытие v комбинаторно вписано в m -покрытие ω . Для произвольной m -выписываемой последовательности R компакта X положим

$M_R(X) = \{\sigma \in \text{Fin}N : \text{семейство } \{U_i : i \in \sigma, U_i \in R\} - \text{существенно}\}$

$M_m(X) = \{\sigma \in \text{Fin cov}_m(X) : \sigma - \text{существенно}\}$

Теорема 1.1 [3]. Для нормального пространства X имеем

$$\dim X \leq n \Leftrightarrow \text{Ord}M_m(X) \leq n.$$

Определение 1.2 [3]. Для нормального пространства X полагаем

$$\dim_m X = \text{Ord}M_m(X).$$

В случае $\dim_m X = \infty$ будем говорить, что размерность $\dim_m X$ не определена. Согласно теореме 1.1 инвариант $\dim_m X$ является трансфинитным продолжением лебеговой размерности $\dim$ на бесконечномерном пространстве [3].

Определение 1.3 [10]. Пусть A, B – замкнутые дизъюнктные подмножества пространства X . Подмножество E пространства X называется разгородкой между множествами A и B , если $X \setminus E = U \cup V$, где U и V – открытые дизъюнктные подмножества в X такие, что $A \subset U, B \subset V$.

Определение 1.4 [10]. Говорят, что на пространстве X определена малая индуктивная размерность ind , если выполнены следующие условия:

i) $\text{ind}X = -1$, если $X = \emptyset$;

ii) $\text{ind}X \leq \alpha$, если для каждого $x \in X$ и каждого замкнутого подмножества $F \subset X$, $x \notin F$, существует разгородка A между $\{x\}$ и F , что $\text{ind}A \leq \beta$ для $\beta < \alpha$.

Скажем, что $\text{ind}X = \alpha$, если $\text{ind}X \leq \alpha$, но $\text{ind}X \leq \beta$, для $\beta < \alpha$ не выполняется

Определение 1.5 [10]. Говорят, что на пространстве X определена большая индуктивная размерность $\text{Ind}X$, если верны следующие условия:

i) $\text{Ind}X = -1$, если $X = \emptyset$;

ii) $\text{Ind}X \leq \alpha$, если для каждой пары A, B дизъюнктных замкнутых подмножеств пространства X существует такая разгородка E между A и B , что $\text{Ind}E \leq \beta$ для $\beta < \alpha$.

A (конечная) последовательность $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, m, \infty\}$ пар замкнутых дизъюнктных подпространств пространства X называется несущественной, если для каждого $n \in N$ (соответственно, $n \leq m$) существует разгородка E_i между A_i и B_i

такая, что $\bigcap_{n=1}^{\infty(m)} E_i = \emptyset$. В ином случае она называется существенной.

Определение 1.6 [3]. Пространство X называется счетной размерности, если X представляется как счетное объединение подпространств конечной размерности.

Предложение 1.7 [10]. Пространство X счетной размерности, если оно представимо счетным объединением своих подпространств размерности ноль.

Определение 1.8 [10]. Пространство X называется сильно счетной размерности, если X представляется счетной суммой замкнутых подпространств конечной размерности.

Определение 1.9 [15]. Пространство X называется A -(S)-слабой бесконечной размерности, если каждая последовательность замкнутых пар дизъюнктных подпространств несущественна (для каждой последовательности $\{(A_i, B_i)\}_{i=1}^{\infty}$ дизъюнктных замкнутых пар пространства X существует $n \in N$ такое, что семейство

$\{(A, B_i)\}_{i=1}^n$ несущественно). Если пространство не является A -(S)-слабой бесконечной размерности, оно называется сильной бесконечной размерности.

В классе метрических компактов определения A -слабой бесконечной размерности и S -слабой бесконечной размерности совпадают [10].

Нормальное пространство X называется бесконечномерным, если для любой последовательности $(F_1^i, F_2^i), i \in \omega$ дизъюнктных пар замкнутых в X множеств существуют перегородки P_i между F_1^i и F_2^i с пустым пересечением.

Пространство, не являющееся слабо бесконечномерным, называется сильно бесконечномерным. Формальное определение счетномерного, т.е. пространства, являющегося суммой счетного числа конечномерных, а значит, нульмерных (в классе сепарабельных метрических пространств) множеств, было дано В. Гуревичем [13], который доказал несчетномерность гильбертова куба Q .

В работе [12] В. Гуревичем и Г. Волмэном показано, что сепарабельное полное метрическое пространство счетномерно тогда и только тогда, когда для него определена малая трансфинитная размерность. Формальное определение малой трансфинитной размерности ind было определено в [13] Гуревичем, а большая трансфинитная размерность Ind была определена В. Смирновым [14].

Скажем, что пространство σ конечномерно, если оно является объединением счетного числа своих замкнутых конечномерных подпространств (в русской литературе такие пространства называются слабо счетномерными, в западной – сильно счетномерными).

Определение [3]. Пусть d – размерностный инвариант ($F = ind, Ind, dim$), принимающий конечные или трансфинитные значения. Для пространства X полагаем

$$d - sc(X) = \{\alpha : \exists \text{ замкнутое } F \subset X \text{ размерности } d(F) = \alpha\}.$$

Множество $d - sc(X)$ называется d -шкалой пространства X .

Если

$$d - sc(X) = \{\alpha : \alpha \leq d(X)\},$$

то d -шкала $d - sc(X)$ называется элементарной. d -шкала $d - sc(X)$ называется сложной, если она не элементарна и $1 \in d - sc(F)$ для всякого замкнутого множества $F \subset X$ размерности $d(F) \geq 1$. Условившись, что $\dim X = \omega_0$, если $\dim X = \infty$, отнесем к числу функций d лебеговой размерности. Шкалой пространства X называется его $\dim$ -шкала $\dim - sc(X) \equiv sc(X)$.

Назовем нормальное пространство нуль-счетномерным, если его можно представить в виде объединения счетного числа нульмерных подпространств. Известно, что всякое счетномерное метризуемое пространство нуль-счетномерно.

Гильбертов кирпич не является счетномерным [13].

T_1 -пространство X называется счетнонормальным пространством, если для любой конечной или счетной системы замкнутых множеств F_i , имеющих пустое

пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$, найдется система открытых множеств $O_i \supseteq F_i$, также

имеющих пустое пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i = \emptyset$. Очевидно, всякое счетнонормальное

пространство нормально и любой паракомпакт счетнонормален. Следовательно, класс счетнонормальных пространств совпадает с классом нормальных счетно-паракомпактных пространств

Теорема 1. Пусть X – слабосчетномерное компактное пространство. Тогда для любого локально выпуклого нормального подфунктора F функтора P_n , в частности функтора P_n , пространство $F(X)$ слабосчетномерно.

Доказательство. Пусть X – слабосчетномерный компакт, т.е. X есть счетное объединение своих замкнутых подмножеств X_i конечной размерности $\dim X_i < \infty$ для каждого $i \in N$.

Значит, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, X – компакт, X_i – замкнут, и $\dim X_i < \infty$. В данном случае $F(X)$ компактно, так как $F : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ – нормальный подфунктор функтора P_n . В силу работы [11] пространство $F(X_i)$ конечномерно, если X конечномерно, т.е. $\dim F(X) < \infty$, если $\dim X_i < \infty$. Тогда $F(X) = F(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F(X_i)$. Для каждого $i \in N$ подпространство $F(X_i)$ конечномерно, так как X_i конечномерно. Значит, компакт $F(X)$ есть счетное объединение конечномерных пространств, т.е. $F(X)$ слабосчетномерно. Если же $F = P_n$, то $P_n(X) = P_n(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_n(X_i)$. В этом случае для каждого $n \in N$ для подпространства $P_n(X_i)$ имеет место $\dim P_n(X_i) \leq n \dim X_i + n - 1$. Теорема 1 доказана.

Известно, что, как мы отметили, для бесконечного компакта X пространство $P(X) \simeq Q$, т.е. компакт $P(X)$ несчетномерен. Если X – конечный компакт, то $\dim P(X) = |X| - 1$, т.е. $P(X)$ конечномерен.

Для любого компакта X подпространство $P_{\omega}(X)$ есть счетное объединение $P_n(X)$. В данном случае в силу теоремы 1 имеет место следующее

Следствие 2. Если X – слабосчетномерный σ -компакт, то $F(X)$ – тоже слабосчетномерный σ -компакт, где F локально выпуклый подфунктор функтора P_n .

Следствие 3. Для любого слабосчетномерного компакта X пространство $P_{\omega}(X)$ слабосчетномерно.

Известно, что для компакта X пространство $P_f(X)$ является счетным объединением подпространств $P_{f,n}(X)$, т.е. $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$ [9], где $P_{n,f}$ есть подфунктор функтора P_n . В этом случае в силу теоремы 1 имеем

Следствие 4. Для любого слабосчетномерного компакта X пространство $P_f(X)$ есть слабосчетномерный компакт.

В работе [10] имеется следующее

Предложение 2.2.31 [10]. Если X представляется как счетное объединение своих нульмерных ($0 - \dim$) подпространств, то X счетномерно.

Теорема 2.2.34 [10]. Если пространство X S -слабо бесконечномерно, то в X размерность $\dim X$ определена.

Также в работе [10] имеется следующее

Следствие 2.2.33 [10]. Для компакта X следующие условия эквивалентны:

- а) X счетномерно;
- б) существует $indX$;
- с) существует $IndX$.

Суммируя теорему 1, следствия 1–4 и приведенные результаты можем утверждать

Теорема 2. Для компакта X следующие условия эквивалентны:

- а) X счетномерно;
- б) $indX$ существует;
- в) $IndX$ существует;
- г) $indP_{\omega}(X)$ существует;
- д) $IndP_{\omega}(X)$ существует;
- е) $\dim P_{\omega}(X)$ существует.

Следствие 5. Для компакта X следующие условия эквивалентны:

- а) X счетномерно;
- б) $indX$ существует;
- в) $IndX$ существует;
- г) $indP_f(X)$ существует;
- д) $IndP_f(X)$ существует;
- е) $\dim P_f(X)$ существует.

Определение [3]. Нормальное пространство X называется C -пространством ($X \in C$), если для любой последовательности (U_i) , $i \in \omega$, его открытых покрытий существует последовательность (V_i) дизъюнктивных открытых семейств пространства X , C -вписанная в последовательность (U_i) . Последнее означает, что каждое семейство V_i вписано в покрытие U_i , а совокупность семейств V_i является покрытием пространства X , т.е.

$$X = \bigcup \{ \bigcup V_i : i \in \omega \} \quad (1)$$

В этом случае говорят также, что последовательность (U_i) (бесконечная или конечная) несущественна.

1. Всякое C -пространство (счетное пространство) слабо счетномерно [3].
2. Если наследственно коллективно нормальное пространство X может быть представлено в виде объединения счетного числа подпространств $C_i \in C_i$, то $X \in C$ [3].
3. Любое наследственно паракомпактное конечномерное пространство является C -пространством [3].
4. Любое метрическое пространство, представимое в виде объединения счетного числа компактов со свойством C , является C -пространством [3].

Из определения C -пространств, приведенных фактов из работы [3], следствий 1–5, и теорем 1, 2 вытекает

Следствие 6. Для любого компактного C -пространства X имеет место:

- а) пространство $P_{\omega}(X)$ есть C -пространство;

- б) пространство $P_f(X)$ есть C -пространство;
 в) пространство $P_{f,n}(X)$ есть C -пространство.

2. Размерности граничных множеств пространства $P(X)$ вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте X

Пусть X – произвольный компакт. Для функтора P_n пространство $P_n(X)$ состоит из всех мер вида: $m_1\delta_{x_1} + \dots + m_n\delta_{x_n}$, т.е.

$$P_n(X) = \{\mu = m_1\delta_{x_1} + \dots + m_n\delta_{x_n} : m_i \geq 0, m_i \leq 1, \sum_{i=1}^n m_i = 1\},$$

δ_{x_i} – мера Дирака в точке $x_i \in X$.

С другой стороны, компакт $P_n(X)$ является непрерывным образом компакта $X^n \times \sigma^{n-1}$ при отображении

$$\pi_{P_n(X),n}((x_1, \dots, x_n), (m_1, \dots, m_n)) : X^n \times \sigma^{n-1} \rightarrow P_n(X),$$

где σ^{n-1} – симплекс размерности $n-1$.

Покажем, что для любого $n \in N$ компакт X^n вложен в компакт $P_n(X)$. При $n=1$ компакт $P_1(X) = \delta(X)$ – пространство мер Дирака.

Фиксируем $\mu_0 = m_1^0 + m_2^0 + \dots + m_n^0$, где $m_i > 0$, $m_i < 1$, $m_1 < m_2 < \dots < m_n$. Каждой точке $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ компакта X^n ставим в соответствие точку $\mu_0(x)$ компакта $P_n(X)$, определенную следующим образом:

$$\mu_0(x) = m_1^0\delta_{x_1} + m_2^0\delta_{x_2} + \dots + m_n^0\delta_{x_n}.$$

Очевидно, что $\mu_0(x) \in P_n(X)$, т.е. определено отображение $\mu_0(x) : X^n \rightarrow P_n(X)$.

Заметим, если $x \neq y$, то $\mu_0(x) \neq \mu_0(y)$. Это означает, что отображение $\mu_0(x)$ взаимно однозначно. По точечной непрерывности отображения $\mu_0(x) : X^n \rightarrow P_n(X)$ легко установить, что это отображение $\mu_0(x)$ есть вложение. Значит, имеет место следующая

Теорема 3. Для любого компакта X и для любого $n \in N$ пространство X^n вложено в $P_n(X)$.

В данном случае в силу определения пространства $P_n(X)$, непрерывности отображений $\pi_{P_n(X),n}$ и $\mu_0(x)$.

Таким же образом можно доказать

Теорема 4. Для любого компакта X и для любого $n \in N$ компактное пространство $X^n \times \sigma^{n-1}$ вложено в $P_n(X)$.

Следствие 7. Пусть X – компакт, и $n \in N$. Если X содержит множество $A \subset X$, то $P(X)$ содержит множество $P(A)$. В частности A вложено в $P(X)$.

Это тоже следует из определения пространства $P_n(X)$ и отображений $\pi_{P_n(X),n}$ и $\mu_0(x)$.

Имеет место следующая

Теорема 5. Для компакта X , если пространство $P_n(X)$ содержит множество $A \subseteq X$, то $X^n \times \sigma^{n-1}$ содержит множество A' , гомеоморфное множеству A .

Теорема 6. Если для бесконечного компакта X пространство $P_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q , то существует число $n \in N$ такое, что $P_n(X)$ содержит гильбертов куб Q .

Доказательство. Пусть X – такой бесконечный компакт, что пространство $P_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q . Из результатов работ [4, 10] вытекает, что

- 1) $P_\omega(X)$ является граничным подмножеством для пространства $P(X) \simeq Q$;
- 2) $P_\omega(X)$ обладает сильным компактным Z -свойством, т.е. любое компактное подмножество пространства $P_\omega(X)$ является сильным Z -множеством;
- 3) $P_\omega(X) \in AR$ и $P_\omega(X)$ есть всюду плотное подмножество в $P(X)$;
- 4) $P_\omega(X)$ является σ - Z -множеством, т.е. $P_\omega(X)$ является счетным объединением Z -множеств;
- 5) $P_\omega(X)$ гомеоморфно пространству Σ ;
- 6) $P_\omega(X)$ является скелетоидом для произвольных компактов [4].

Итак, по определению скелетоидов для произвольных компактов имеется такое отображение $f: A \rightarrow P_\omega(X)$, что $f|_B: B \rightarrow P_m(X)$ – вложение, где B замкнуто в A , A – произвольный компакт. В силу произвольности компакта A в определении скелетоида для произвольных компактов, можно считать, что A гомеоморфно Q . В этом случае множество B вложено в A и B замкнуто в A .

В силу того что $P_\omega(X)$ является скелетоидом для произвольных компактов, для $\varepsilon > 0$ существует вложение $h: A \rightarrow P_n(X)$ для некоторого $m \leq n$ такое, что $h|_B = f|_B$ и $d(f(a), h(a)) < \varepsilon$. Значит, подпространство $P_m(X)$ содержит гильбертов куб Q , так как множество A содержало подмножество? гомеоморфное Q , или A было бы гомеоморфным Q . Что и требовалось доказать.

Теорема 7. Для любого бесконечного компакта X и любого его всюду плотного счетного подмножества Φ подпространства $P(A)$ и $P_\omega(A)$ пространства $P(X)$ слабо счетномерны.

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт, и $A \subset X$, $A \neq X$, $|A| = \omega$, $\bar{A} = X$. Тогда $P(X) \simeq Q$, $P(A) \subset P(X)$ и $P(A)$ всюду плотно в $P(X)$. Пусть $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Для натурального числа $k \geq 2$ положим $A_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Очевидно, что $A_k \subset X$, $A_k \subset A_{k+1}$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. В этом случае

$$P_\omega(A) = P_\omega\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_\omega(A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A_k).$$

В силу результата работы [7] для каждого $n \in N$ и $k \in N$ подпространство $P_n(A_k)$ конечномерно, т.е. $\dim P_n(A_k) < \infty$. Значит, $P_\omega(A)$ является счетным объединением конечномерных подпространств т.е. $P_\omega(A)$ слабо счетномерно.

С другой стороны, для A имеем $P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P(A_k)$. Для каждого $k \in N$ пространство $P(A_k)$ гомеоморфно симплексу σ^{n-1} размерности $n-1$, т.е.

$\dim P(A_k) = \sigma^{n-1}$. Значит, пространство $P(A)$ является счетным объединением своих конечномерных подпространств, т.е. $P(A)$ также слабосчетномерно. Можно заметить, что в данном случае, для множества A пространства $P_\omega(A)$ и $P(A)$ гомеоморфны. Теорема 7 доказана.

В силу теоремы 7 и результата работы [10] имеют место следующие

Теорема 8. Для любого бесконечного компакта X и любого его собственного счетного всюду плотного подмножества U имеет место

$$(P(X), P(U)) \simeq (Q, B(Q)),$$

$$(P(X), P_\omega(U)) \simeq (Q, B(Q)).$$

Теорема 9. Пусть X – бесконечный компакт, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ – замкнутые подмножества компакта X такие, что $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ всюду плотно в X и $X \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Тогда:

а) $P_\omega(A)$ слабосчетномерно, если A слабосчетномерно;

б) $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ сильно бесконечномерно, если существует такое $i \in N$, что A_i бесконечно.

Теорема 10. Пусть X – бесконечный компакт, A – его непустое замкнутое подмножество такое, что $X \setminus A$ всюду плотно в X . Тогда:

а) $P(X \setminus A)$ сильно счетномерно, если $X \setminus A$ содержит бесконечное компактное подмножество;

б) $P(X \setminus A)$ слабосчетномерно, если $X \setminus A$ есть счетное множество;

в) $P_\omega(X \setminus A)$ слабосчетномерно, если $X \setminus A$ слабосчетномерно;

г) $P_\omega(X \setminus A)$ сильно счетномерно, если $X \setminus A$ содержит гильбертов куб Q .

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт, тогда $P(X)$ гомеоморфно Q . В работах [4, 7] показано, что во всех таких случаях эти подпространства являются граничными множествами, т.е. имеет место

$$(P(X), P(X \setminus A)) \simeq (Q, B(Q))$$

$$(P(X), P_\omega(X \setminus A)) \simeq (Q, B(Q)).$$

Следовательно, $P(X) \setminus P(X \setminus A) \simeq \ell_2$ и $P(X) \setminus P_\omega(X \setminus A) \simeq \ell_2$.

В случае а) если $X \setminus A$ содержит компактное бесконечное подмножество, то пространство вероятностных мер этого подмножества гомеоморфно Q , т.е. $P(X \setminus A)$ содержит гильбертов куб. Следовательно, $P(X \setminus A) \simeq \sum$. Это означает, что $P(X \setminus A)$ сильно счетномерно.

Случай б) вытекает из теоремы 7.

в) в теореме 2 пространство $P_\omega(X)$ слабосчетномерно для слабосчетномерного пространства X ;

г) выпуклое множество $P_\omega(X \setminus A)$ содержит гильбертов куб Q , тогда $P_\omega(X \setminus A)$ гомеоморфно $\sum$, т.е. $P_\omega(X \setminus A)$ сильно счетномерно. Теорема 10 доказана.

О гомеоморфности подпространств $A \subset P(X)$ и $B \subset P(Y)$ соответственно пространств $P(X)$ и $P(Y)$

Напомним, что топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y , или Y -многообразием [10], если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y .

$Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ – гильбертов куб, $W_i^{\pm} = \{(g_j) \in Q : g_i = \pm 1\}$ – i -я грань куба Q , $BdQ = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$ – псевдограница куба Q , а $S = Q \setminus BdQ$ – псевдовнутренность куба Q .

Известно, что $S = \prod_{i=1}^{\infty} (-1, 1)_i$ и $S \simeq R^{\aleph_0}$ [10]. Следовательно, l_2 -гильбертово пространство гомеоморфно S и $R^{\aleph_0}$, Σ – линейная оболочка стандартного кирпича $Q' = \prod_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{2^n}]$ в гильбертовом пространстве l_2 ; через l_2^f или σ обозначается линейное подпространство пространства l_2 , состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля, а Q^f – подпространство гильбертова куба Q , состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля. Через $rintQ$ обозначается радиальная внутренность гильбертова куба Q , состоящая из точек $\{x = (x_n) \in Q; |x_n| < t < 1, \text{ для всех } n \in N\}$.

Известно, что $\sigma \simeq l_2^f \simeq Q^f$, а Σ гомеоморфно $rintQ$. Очевидно, что $rintQ \simeq BdQ$ и $BdQ \simeq \Sigma$. Известно, что пространства Q , Σ и l_2 сильно бесконечномерны, а пространства l_2^f , σ и Q^f слабо бесконечномерны, и все эти пространства однородны.

Следуя по [10], σ - Z -множество в гильбертова куба Q называют граничным множеством в Q (обозначается через $B(Q)$), если $Q \setminus B \simeq l_2$.

Более общим образом граничным множеством в Q -многообразии называют σ - Z -множество, дополнение до которого является l_2 -многообразием.

Из вышеприведенного следует, что псевдограница BdQ гильбертова куба Q является его граничным множеством.

Пусть X – бесконечный компакт, и $A_i \subset X$ – такие замкнутые подмножества компакта X , что $X \setminus A_i$ всюду плотно в X и отлично от X для каждого $i \in N$.

В силу компактности X и замкнутости множества A_i для каждого $i \in N$ имеет место $A_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k^i$, где $G_{k+1}^i \subseteq G_k^i$ и G_k^i открыто для каждого $k \in N$.

Тогда $X \setminus G_k^i \subseteq X \setminus G_{k+1}^i$ для каждого $k \in N$ и $P(X \setminus G_k^i) \subset P(X \setminus G_{k+1}^i)$. Из всюду плотности множества $X \setminus A_i$ в X вытекает, что $P(X \setminus X_i)$ всюду плотны в $P(X)$.

Рассмотрим объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus A_i)$. Для него имеем

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus X_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k^i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus G_k^i))$$

Обозначим $X \setminus G_k^i = B_k^i$, т.е. $P(X \setminus G_k^i) = P(B_k^i)$

Известно, что $P(B_k^i) \subset P(B_{k+1}^i)$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(B_k^i)$ выпукло, всюду плотно, σ -компактно и $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(B_k^i) \in AR$. Было показано, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(B_k^i)$ является граничным множеством в $P(X)$ для каждого $i \in N$ (Теорема 3).

Значит, имеет место следующая

Теорема 11. Пусть X – бесконечный компакт, и $A_i \subset X$ – его такие замкнутые подмножества, что $X \setminus A_i$ всюду плотны и отличны от X для каждого $i \in N$. Тогда пространство $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus A_i)$ является граничным множеством в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus A_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

Следствие 8. Пусть X – бесконечный компакт, и $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – последовательность точек компакта X такое, что множество $\{x_i : i \in N\}$ счетно и $X \setminus \{x_i\}$ всюду плотно в X для каждого $i \in N$. Тогда пространство $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus x_i)$ является граничным множеством в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus x_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

В случае когда X – бесконечный компакт, пространство $P_{\omega}(X \setminus A_i)$ является граничным множеством для любого замкнутого подмножества A_i такого, что $X \setminus A_i$ всюду плотно и отлично от X для каждого $i \in N$.

Поэтому имеет место следующая

Теорема 12. Пусть X – бесконечный компакт, и $A_i \subset X$ – его такие замкнутые подмножества, что $X \setminus A_i$ всюду плотны и отличны от X для каждого $i \in N$. Тогда пространство $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\omega}(X \setminus A_i)$ является граничным множеством в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\omega}(X \setminus A_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

Следствие 9. Пусть X – бесконечный компакт, и $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – последовательность различных точек компакта X такая, что $X \setminus \{x_i\}$ всюду плотно в X для каждого $i \in N$. Тогда пространство $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\omega}(X \setminus x_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{\omega}(X \setminus x_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

Теорема 13. Пусть X – бесконечный компакт, $A_1, A_2, \dots, A_n$ – такие замкнутые подмножества компакта X , что $X \setminus A_i$ всюду плотны и отличны от X для каждого

$i = \overline{1, n}$. Тогда $\bigcap_{i=1}^n P(X \setminus A_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P(X \setminus A_i)$ гомеоморфно ℓ_2 .

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт, и эту теорему докажем для $n = 2$. A_1 и A_2 – такие замкнутые подмножества компакта X , что $X \setminus A_1$ и $X \setminus A_2$ всюду плотны в X и отличны от X . Тогда каждое $P(X \setminus A_i)$ всюду плотно в $P(X)$ и отличны от $P(X)$. В этом случае, по теореме 8, эти подпространства $P(X \setminus A_1)$ и $P(X \setminus A_2)$ являются граничными множествами в $P(X)$. Пересечение $P(X \setminus A_1) \cap P(X \setminus A_2)$ выпукло и всюду плотно в $P(X)$. Следовательно, $P(X \setminus A_1) \cap P(X \setminus A_2)$ является AR -пространством.

В силу замкнутости множеств A_1 и A_2 в компакте X имеем

$$P(X \setminus A_1) = P(X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus U_i)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus U_i),$$

$$P(X \setminus A_2) = P(X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus V_i)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus V_i).$$

Заметим, что $P(X \setminus U_i) \subset P(X \setminus U_{i+1})$ и $P(X \setminus V_i) \subset P(X \setminus V_{i+1})$, и $P(X \setminus U_i)$ и $P(X \setminus V_i)$ – выпуклые компакты. Значит, $P(X \setminus A_1)$ и $P(X \setminus A_2)$ σ -компактны.

Теперь

$$P(X \setminus A_1) \cap P(X \setminus A_2) = (P(X \setminus U_1) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus V_i))) \cup,$$

$$(P(X \setminus U_2) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus V_i))) \cap \dots \cap (P(X \setminus U_n) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus V_i))) \dots =$$

$$= (P(X \setminus U_1) \cap P(X \setminus V_1)) \cup (P(X \setminus U_2) \cap P(X \setminus V_2)) \cup \dots$$

$$\dots \cup (P(X \setminus U_n) \cap P(X \setminus V_n)) \cup \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} (P(X \setminus U_i) \cap P(X \setminus V_i)).$$

Очевидно, что пространство $P(X \setminus A_1) \cap P(X \setminus A_2)$ – растущая последовательность компактных выпуклых подмножеств компакта $P(X)$, так как

$$P(X \setminus U_1) \subset P(X \setminus U_2) \subset \dots,$$

$$P(X \setminus V_1) \subset P(X \setminus V_2) \subset \dots$$

есть растущие последовательности компактных выпуклых подмножеств в $P(X)$.

Обозначим $C_i = P(X \setminus U_i) \cap P(X \setminus V_i)$. Получим, что $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in AR$. Для каждого $i \in N$ показывается, C_i есть Z -множество в C . Следовательно, C есть σ - Z -множество и C есть граничное множество в $P(X)$ [8, 9], т.е. $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \simeq \ell_2$.

Теорема 13 доказана.

Для функтора P_{ω} , переводящего компакты в σ -компактные пространства, доказывается следующая

Теорема 14. Пусть X – бесконечный компакт, $A_1, A_2, \dots, A_n$ – такие замкнутые подмножества компакта X , что $X \setminus A_i$ всюду плотны в X и отличны от X для каждого $i \in \overline{1, n}$.

Тогда $\bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus A_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus A_i) \simeq \ell_2$.

Следствие 10. Пусть X – бесконечный компакт, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – различные точки компакта X такие, что $X \setminus \{x_i\}$ всюду плотны в X для каждого $i \in \overline{1, n}$. Тогда пространство $\bigcap_{i=1}^n P(X \setminus x_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus x_i) \simeq \ell_2$.

Следствие 11. Пусть X – бесконечный компакт, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – различные точки этого компакта X такие, что $X \setminus \{x_i\}$ всюду плотно в X для каждого $i \in \overline{1, n}$. Тогда $\bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus x_i)$ есть граничное множество в $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P_\omega(X \setminus x_i) \simeq \ell_2$.

Теорема 15. Для любого бесконечного компакта X пространство $P_\omega(X) \setminus P_f(X)$ является граничным множеством компакта $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus (P_\omega(X) \setminus P_f(X)) \simeq \ell_2$.

Доказательство. Пусть X – бесконечный компакт, тогда $P(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q . В работах [5, 6] было показано, что $P_\omega(X)$ образует граничное множество компакта $P(X)$, т.е. $P(X) \setminus P_\omega(X) \simeq \ell_2$. Было показано, что $P_\omega(X)$ обладает компактным Z -свойством, т.е. каждое компактное подмножество пространства $P_\omega(X)$ есть Z -множество. Значит, компакт $P_f(X)$ является Z -множеством в $P_\omega(X)$.

а) Теперь покажем, что подпространство $P_\omega(X) \setminus P_f(X)$ гомотопически плотно в $P_\omega(X)$. Фиксируем точку $\mu_0 \in P_\omega(X) \setminus P_f(X)$. Положим $\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_{x_1} + \frac{1}{2}\delta_{x_2}$, где δ_{x_1} и δ_{x_2} – произвольные точки компакта $\delta(X) \subset P_\omega(X)$. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P_\omega(X) \times [0, 1] \rightarrow P_\omega(X)$ построим, полагая $h(\mu, t) = t\mu_0 + (1-t)\mu$.

При $t = 0$ гомотопия $h(\mu, 0) = 0 \cdot \mu_0 + (1-0)\mu = \mu$, т.е. $h(\mu, 0) = id_{P_\omega(X)}$.

При $t > 0$ $h(\mu, t) = t\mu_0 + (1-t)\mu$. Легко проверить, что для любого $\mu \in P_\omega(X)$ и $t \in (0, 1]$ мера $h(\mu, t) \notin P_f(X)$, так как $\mu_0 \notin P_f(X)$ и при любом значении μ мера $h(\mu, t) \notin P_f(X)$.

Значит, пространство $P_\omega(X) \setminus P_f(X)$ гомотопически плотно в $P_\omega(X)$.

б) Известно, что для любого компакта X компакт $P_f(X)$ является счетным объединением компактов $P_{f,n}(X)$, где $P_{f,n}(X)$ есть подмножество компакта $P_n(X)$.

Значит, $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$ здесь $P_f(X)$ принимает вид:

$$P_{f,1}(X) = \delta(X) \subseteq P_{f,2}(X) \subseteq \dots \subseteq P_{f,n}(X) \subseteq \dots$$

В этом случае имеем

$$P_{\omega}(X) \setminus P_f(X) = P_{\omega}(X) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P_{\omega}(X) \setminus P_{f,n}(X)).$$

Для каждого $n \in N$ подпространство $P_{\omega}(X) \setminus P_{f,n}(X)$ выпукло и локально выпукло. Тогда пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} (P_{\omega}(X) \setminus P_{f,n}(X))$ выпукло. Следовательно, пространство $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ выпукло, и $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ есть AR-пространство. С другой стороны, подпространство $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ всюду плотно в $P(X)$ и $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ является Z_{σ} -множеством. В этом случае из результата 1.5.4 [10] подпространство $P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)$ сильно C -универсально, где C – класс метрических компактов. В данном случае из результата вытекает, что пара $(P(X), P_{\omega}(X) \setminus P_f(X))$ гомеоморфна паре $(Q, B(Q))$. Значит, имеем $P(X) \setminus (P_{\omega}(X) \setminus P_f(X)) \simeq \ell_2$. Теорема 15 доказана.

В условиях теорем 9–15, следствий 9–10 и в силу равенства

$$P(X \setminus A) = P(X) \setminus S_p(A)$$

получаем:

$$\text{а) } P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus A_i) = P(X) \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} (P(X) \setminus S_p(A_i))) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_p(A_i) \simeq \ell_2; \text{ так, } S_p(A)$$

гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2 для любого замкнутого подмножества A компакта X [6, 7];

$$\text{б) } P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(X \setminus x_i) = P(X) \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} (P(X) \setminus S_p(x_i))) = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_p(x_i) \simeq \ell_2;$$

$$\text{в) } P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n P(X \setminus A_i) = P(X) \setminus \bigcap_{i=1}^n (P(X) \setminus S_p(A_i)) = \bigcup_{i=1}^n S_p(A_i) \simeq \ell_2.$$

Известно, что для любых бесконечных компактов X и Y пространства $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны Q , т.е. $P(X) \simeq P(Y) \simeq Q$.

Вопрос. Для таких компактов X и Y пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны?

Из результатов работ [1–8] и теорем 2–15 следует:

а) для конечномерных компактов X и Y пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны;

б) для счетных компактов X и Y пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны;

в) для компактов X и Y , содержащих Q , пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны;

г) для компактов X и Y таких, что $X^n \times \sigma^n$ и $Y^n \times \sigma^n$ содержат Q , пространства $P_{\omega}(X)$ и $P_{\omega}(Y)$ гомеоморфны.

Пусть X и Y – бесконечные метрические компакты. Тогда имеют место следующие равенства:

$$1. P(X) \simeq P(Y) \text{ и } P(X) \setminus P_{\omega}(X) \simeq P(Y) \setminus P(Y).$$

2. $P(X) \setminus P(X \setminus A) = S_p(A)$, где $A \neq X$, и $P(Y) \setminus P(X \setminus B) = S_p(B)$, где $B \neq Y$.
3. $U(X)$ и $U(Y)$ открыты и всюду плотны соответственно в X и Y , тогда $P(X) \setminus P(U(X)) \simeq P(Y) \setminus P(U(Y))$ и $P(X) \setminus P_\omega(U(X)) \simeq P(Y) \setminus P_\omega(U(Y))$, где $U(X) \neq X$ и $U(Y) \neq Y$.
4. $P(X) \setminus P(X \setminus x_0) = P(Y) \setminus P(Y \setminus y_0)$, где $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.
5. $P(X) \setminus P(A) = P(Y) \setminus P(B)$, где $A \subset X, A \neq X, \bar{A} = X, \bar{A} \neq A$ и $B \subset Y, B \neq Y, \bar{B} = Y$.
6. $P(X) \setminus P(A) = P(Y) \setminus P(B)$ тогда и только тогда, когда $S_p(X \setminus A) \simeq S_p(Y \setminus B)$, где $A \neq X$, $B \neq Y$.
7. а. $P(X \setminus A) \simeq P(Y \setminus B)$ тогда и только тогда, когда $S_p(A) \simeq S_p(B)$, где A замкнуто в X и $A \neq X$, B замкнуто в Y и $B \neq Y$.
7. б. $S_p(X \setminus A) \simeq S_p(Y \setminus B)$ тогда и только тогда, когда $P(X) \setminus P(A) \simeq P(X) \setminus P(B)$, $S_p(A) \simeq S_p(B)$, где A замкнуто в X и $A \neq X$, B замкнуто в Y и $B \neq Y$.
8. Для любых σ -компактных всюду плотных подмножеств A и B соответственно X и Y , отличных от X и Y , верно $P(X) \setminus P(A) \simeq P(Y) \setminus P(B)$.
9. Если $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ плотно в X , и $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ плотно в Y , $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, A_i замкнуто в X , $A \neq X$, $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$, B_i замкнуто в Y , $B \neq Y$, тогда $P(X) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i) \simeq P(Y) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P(B_i)$.
10. Для любых счетных всюду плотных собственных подпространств $A \subset X$ и $B \subset Y$ компактов X и Y имеют место $P(X) \setminus P(A) \simeq P(Y) \setminus P(B)$ и $P(X) \setminus P_\omega(A) \simeq P(Y) \setminus P_\omega(B)$.

Список источников

1. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии // Успехи математических наук. 1991. Т. 46, вып. 1 (277). С. 41–80.
2. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.
3. Федорчук В.В. Слабо бесконечномерные пространства // Успехи математических наук. 2007. Т. 62, вып. 2 (374). С. 109–164.
4. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1989. 90 с.
5. Жураев Т.Ф. Некоторые основные свойства функтора P_f // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 6. С. 29–33.
6. Жураев Т.Ф. Пространство всех вероятностных мер с конечными носителями гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству // Общая топология. Пространства и отображения. М. : Из-во Моск. ун-та, 1989. С. 66–70.
7. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства подфункторов функтора P вероятностных мер. М. : МГУ, 1989. 60 с. Деп. в ВИНТИ АН СССР 05.07.1989. № 4471-B89.
8. Жураев Т.Ф. О функторе P вероятностных мер // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика, механика. 1990. № 1. С. 26–30.

9. Жураев Т.Ф., Турсунова З.О. Некоторые геометрические и топологические свойства пространства вероятностных мер, определенные в бесконечном компакте // *Узбекский математический журнал*. 2016. № 1. С. 39–48.
10. Banach T., Radul T., Zarichnyi M. Absorbing Sets in Infinite-dimensional Manifolds. VNTL Publishers, 1996. (Math Studies Monogh; Ser. V.1).
11. Басманов В.Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271, № 5. С. 1033–1036.
12. Гуревич В., Волман Г. Теория размерности / под ред. и с предисл. П.С. Александрова. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 232 с.
13. Hurewicz W. Über unendlich-dimensionale punktmengen // *Proc.Akad. Amsterdam*. 1928. V. 31. P. 916–922.
14. Смирнов Ю.М. Об универсальных пространствах для некоторых классов бесконечномерных пространств // *Известия АН СССР. Сер. математическая*. 1959. Т. 23. С. 185–196.
15. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М. : Наука, 1973. 575 с.

References

1. Fedorchuk V.V. (1991) Probability measures in topology. *Russian Mathematical Surveys*. 46(1). pp. 45–93.
2. Shchepin E.V. (1981) Functors and uncountable powers of compacta. *Russian Mathematical Surveys*. 36(3). pp. 1–71.
3. Fedorchuk V.V. (2007) Weakly infinite-dimensional spaces. *Russian Mathematical Surveys*. 62(2). pp. 323–374.
4. Zhuraev T.F. (1989) *Nekotoryye geometricheskiye svoystva funkтора veroyatnostnykh mer i ego podfunkторов* [Some geometric properties of the functor of probability measures and its subfunctors]. Dissertation. Moscow State University.
5. Zhuraev T.F. (1988) Nekotoryye osnovnyye svoystva funkтора P_f [Some fundamental properties of the functor P_f]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 6. pp. 29–33.
6. Zhuraev T.F. (1989) Prostranstvo vseh veroyatnostnykh mer s konechnymi nositeliymi go-meomorfno beskonечnomernomu lineynomu prostranstvu [The space of all probability measures with finite supports is homeomorphic to an infinite-dimensional linear space], in *Obshchaya topologiya. Prostranstva i otobrazheniya* [General topology. Space and maps]. Moscow: Moscow State University. pp. 66–70.
7. Zhuraev T.F. (1989) Nekotoryye geometricheskiye svoystva podfunkторов funkтора P veroyatnostnykh mer. [Some geometric properties of subfunctors of functor P of probability measures]. Deposited in VINITI AN USSR July 5, 1989. No. 4471-B89.
8. Zhuraev T.F. (1990) O funkторе P veroyatnostnykh mer [On the functor P of probability measures]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 9. pp. 26–30.
9. Jurayev T.F., Tursunova Z.O. (2016) Nekotoryye geometricheskiye i topologicheskkiye svoystva prostranstva veroyatnostnykh mer, opredelennyye v beskonечnom kompakte [Some geometric and topological properties of the space of probability measures defined in an infinite compact]. *Uzbek Mathematical Journal*. 1. pp. 39–48.
10. Banach T., Radul T., Zarichnyi M. (1996) *Absorbing Sets in Infinite-dimensional Manifolds*. VNTL Publishers.
11. Basmanov V.N. (1983) Covariant functors, retracts, and dimension. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 271(5). pp. 1033–1036.
12. Hurewicz W., Wallman H. (1941) *Dimension Theory*. Princeton: Princeton University Press.
13. Hurewicz W. (1928) Über unendlich-dimensionale Punktmengen. *Proceedings of the Section of Science, Koninklijke (Nederlandse) Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*. 31. pp. 916–922.

14. Smirnov Yu.M. (1959) Ob universal'nykh prostranstvakh dlya nekotorykh klassov beskonechnomernykh prostranstv [On universal spaces for certain classes of infinite-dimensional spaces]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*. 23. pp. 185–196.
15. Aleksandrov P.S., Pasyukov B.A. (1973) *Vvedeniye v teoriyu razmernosti* [Introduction to dimension theory]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторах:

Жураев Турсунбай Файзиевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики Ташкентского государственного педагогического университета им. Низами (Ташкент, Узбекистан). E-mail: tursunzhuraev@mail.ru

Жувонов Камариддин Ризокулович – преподаватель кафедры высшей математики Национального исследовательского университета «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства» (Ташкент, Узбекистан). E-mail: qamariddin.j@mail.ru

Information about the authors:

Zhuraev Tursunbay F. (Tashkent State Pedagogical University named in Nizami, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: tursunzhuraev@mail.ru

Zhuvonov Qamariddin R. (National Research University “Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers”). E-mail: qamariddin.j@mail.ru

Статья поступила в редакцию 01.07.2020; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 01.07.2020; accepted for publication 03.06.2024

МЕХАНИКА

MECHANICS

Научная статья

УДК 539.3+514.851

doi: 10.17223/19988621/89/4

**Исследование механизмов деформации
двумерного метаматериала****Линар Ришатович Ахметшин¹, Кристина Владимировна Иохим²,
Екатерина Александровна Казанцева³, Игорь Юрьевич Смолин⁴**^{1, 2, 3, 4} *Томский государственный университет, Томск, Россия*^{1, 2, 3, 4} *Институт физики прочности и материаловедения**Сибирского отделения РАН, Томск, Россия*¹ *akhmetshin.lr@gmail.com*² *iokhim.k@mail.ru*³ *kazantseva.ea@ispms.ru*⁴ *smolin@ispms.ru*

Аннотация. Численно исследуются двумерный тетрахиральный метаматериал и влияние его структуры на механическое поведение. Изучено влияние изменения параметров хиральной структуры образца на его деформацию, напряжения и эффективные упругие свойства. Показано, что уменьшение объема базового материала в образце влечет уменьшение эффективного модуля Юнга. Выявлены параметры структуры метаматериала, обеспечивающие ауксетические свойства. Наибольшее значение интегральной деформации, оцениваемой по отклонению образца из метаматериала от его исходного положения, замечено при рациональном соотношении длин элементов структуры.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных элементов, соотношение структура–свойства, хиральная структура, одноосная деформация, механический метаматериал

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00402, <https://rscf.ru/project/23-29-00402/>

Для цитирования: Ахметшин Л.Р., Иохим К., Казанцева Е.А., Смолин И.Ю. Исследование механизмов деформации двумерного метаматериала // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 51–65. doi: 10.17223/19988621/89/4

A study of deformation mechanisms for a two-dimensional metamaterial

Linar R. Akhmetshin¹, Kristina V. Iokhim²,
Ekaterina A. Kazantseva³, Igor' Yu. Smolin⁴

^{1, 2, 3, 4} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

^{1, 2, 3, 4} Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch
of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation

¹ akhmetshin.lr@gmail.com

² iokhim.k@mail.ru

³ kazantseva.ea@ispms.ru

⁴ smolin@ispms.ru

Abstract. This paper presents a numerical study of a two-dimensional tetrachiral metamaterial and the effect of unit cell parameters on its mechanical behavior. Finite element simulations are performed using independently varied geometric parameters of the chiral unit cell. Chiral structures can induce the compression–torsion effect and the deflection in mechanical metamaterials. The sample deflection is affected by the following factors: ring deformation, ligament deformation, and structure twisting. The highest strain estimated by the deflection of the metamaterial sample from the initial position is observed at an optimal ratio of ligament length to ring size. The effect of structural parameters on the deformation, stress distribution, and effective elastic properties of a two-dimensional metamaterial sample under uniaxial compression is studied and analyzed. For all variable parameters, a qualitatively similar nature of the equivalent stress distribution is revealed. It is found that a decrease in the volume of the main material in the metamaterial sample entails a decrease in effective Young's modulus. The parameters accounting for the auxetic properties of the metamaterial are obtained. Effective Poisson's ratio is determined in the range from –0.1 to 0.95.

Keywords: numerical simulation, finite element method, structure–property relationship, chiral structure, uniaxial deformation, mechanical metamaterial

Acknowledgements: This study was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00402), <https://rscf.ru/en/project/23-29-00402/>

For citation: Akhmetshin, L.R., Iokhim, K.V., Kazantseva, E.A., Smolin, I.Yu. (2024) A study of deformation mechanisms for a two-dimensional metamaterial. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 51–65. doi: 10.17223/19988621/89/4

Введение

Механические метаматериалы представляют собой упорядоченные мелко-масштабные архитектуры из обычных материалов, подстраивая структуру которых можно добиться достижения ими требуемых механических или физических характеристик [1]. В настоящее время метаматериалы активно разрабатываются, исследуются и уже продемонстрировали потенциал для широкого спектра применений, в частности для теплоизоляции, электродов аккумуляторов, носителей

катализаторов и гашения акустической, вибрационной или ударной энергии [2]. Вызывает интерес их применение для преобразования или демпфирования механических волн. В метаматериалах энергия может быть сконцентрирована в элементах структуры и эффективно поглощена [3]. Усовершенствованные производственные процессы сделали эти уникальные композитные материалы более доступными и жизнеспособными для других отраслей промышленности.

Среди прочих видов метаматериалов более эффективными являются ячеистые структуры благодаря хорошей комбинации удельных характеристик [4]. Персонализированная трехмерная печать образцов позволяет создавать подобные структуры, которые практически не производятся традиционными методами [5]. Готовые образцы могли бы использоваться в качестве защитных конструкций, как того требует модернизация традиционных материалов [6]. Ячеистые твердые тела широко используются в различных инженерных приложениях [7]. Среди них преобладают структуры в форме пчелиных сот [8], так как они обладают рядом преимуществ, среди которых можно выделить синкластическую кривизну и отрицательное значение эффективного коэффициента Пуассона. По сообщениям авторов [9–11], подобными нетривиальными свойствами обладают хиральные структуры. Хотя до сих пор можно найти учебники, в которых категорически утверждается, что коэффициент Пуассона не может принимать отрицательные значения, на самом деле существует ряд примеров твердых тел, особенно анизотропных, с отрицательным коэффициентом Пуассона [12, 13].

Заметим, что хиральность в геометрии может не только наделять механические метаструктуры отрицательным коэффициентом Пуассона, но также приводить к эффекту «нагружение–скручивание» [14–17]. Это свойство может также быть использовано в практических приложениях изделий из метаматериалов.

Механическое поведение трехмерных метаматериалов зависит от их структуры [18], которая часто состоит из элементов, построенных на плоскости. Однако исследований, посвященных детальному изучению двумерных метаматериалов, мало. В данной работе пристальное внимание обращено на плоский тетрахиральный метаматериал и проведено его комплексное исследование. Детальное исследование особенности структурной организации механических метаматериалов на мезоуровне (масштабном уровне элементарной ячейки структуры) позволяет нам определить эффективные упругие свойства метаматериала на макроуровне в результате процедуры численного усреднения.

Количество связей в хиральной структуре будет определять ее название: к примеру, четыре связи – это тетрахиральная структура. В работе выбрана именно такая структура, потому что она реализует наперед заданное механическое поведение. Степень проявления отклика зависит от параметров тетрахиральной структуры. Именно этот вопрос рассматривается в представленной работе.

Статья имеет следующую структуру. Вначале мы приводим описание геометрических особенностей плоских образцов с различными характерными размерами элементов тетрахиральной структуры. Потом рассматриваем механизмы формоизменения тетрахиральной структуры при одноосном нагружении образцов с помощью моделирования методом конечных элементов и рассчитываем эффективные характеристики двумерных метаматериалов, такие как модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Завершает статью анализ полученных результатов.

Особенности математического моделирования

Геометрическая модель тетрахиральной структуры

Рассмотрим двумерный (планарный) тетрахиральный механический метаматериал, представленный на рис. 1. Элементарная (единичная) ячейка хиральной структуры состоит из кольца и прилегающих к нему по касательной связей. Она может иметь несколько связей и называться в соответствии с их количеством. Структура с четырьмя связками, которая исследуется в данной работе, называется тетрахиральной (см. рис. 1). Исходные геометрические параметры принимали значения: $L_1 = 50$ мм – размер элементарной ячейки, $r_1 = 12.5$ мм – внутренний радиус кольца, $r_2 = 17.5$ мм – внешний радиус кольца, $t = 5$ мм – толщина связки, $h = 5$ мм – ширина связки. Последний параметр характеризует не двумерную тетрахиральную структуру, а толщину пластины из двумерного тетрахирального метаматериала. Его введение обусловлено тем, что моделирование механического поведения двумерных структур предполагается в полноразмерной трехмерной постановке.

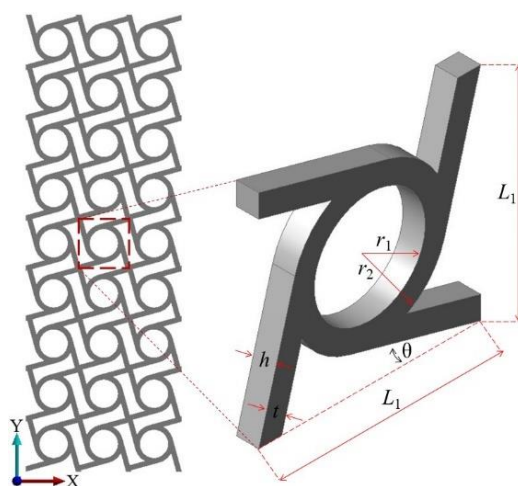


Рис. 1. Геометрическая модель: структура образца из тетрахирального метаматериала и элементарная ячейка

Fig. 1. Geometric model: a structure of the tetrachiral metamaterial sample and a unit cell

Варьируя исходные геометрические параметры тетрахиральной структуры, мы получаем разные варианты метаматериала. Заметим, что эти параметры можно выбирать либо независимо друг от друга, либо с учетом влияния на остальные характеристики элементарной ячейки. В данном исследовании рассматривается первый способ варьирования параметров: например, при изменении ширины связки толщина и другие параметры оставались исходными. Таким же образом варьировали и другие параметры, за исключением параметра r_2 , для которого принималось условие $r_2 - r_1 = 5$ мм. Это было сделано для того, чтобы исследовать влияние не толщины кольца (что обеспечило изменение r_1), а среднего радиуса кольца. Также если принять в качестве необходимого условия соединение

ребра с кольцом по касательной, то появится геометрическая связь между средним радиусом кольцевого элемента, длиной ребра и углом наклона ребра θ .

Математическая постановка численного эксперимента

Чтобы не ограничиваться идеальными структурами, геометрическая модель образца двумерного метаматериала строится как трехмерный объект. И задача описания его механического поведения рассматривается как трехмерная.

Для интересующих нас полей перемещений u_i и напряжений σ_{ij} ставится краевая задача, определяемая системой уравнений теории упругости. Система включает уравнения равновесия, соотношения Коши и закон Гука в качестве определяющих соотношений:

$$\nabla_j \cdot \sigma_{ij} = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, x_i – пространственные координаты, u_i – компоненты вектора перемещений,

$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)}$, $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$, μ – коэффициенты Ламе, связанные с модулем Юнга (E) и коэффициентом Пуассона (ν), δ_{ij} – символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$.

В работе рассмотрена задача одноосного сжатия образца из механического метаматериала. Граничные условия для такой задачи имеют следующий вид:

$u_i = 0$ для $x_i \in S_1$, $u_2 = -0.03L$ и $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ для $x_i \in S_2$, $\sigma_{ij}n_j = 0$ для $x_i \in S_3$, $i, j = 1, 2, 3$, где S_1 – нижняя грань (жесткая заделка), S_2 – верхняя грань (перемещение по оси Y , соответствующее деформации в 3%), S_3 – оставшиеся грани образца (свободные граничные условия), $L = 410$ мм – начальная длина образца вдоль оси Y , n_j – компоненты вектора нормали к поверхности S_3 .

Численное моделирование проводилось методом конечных элементов. Образец из метаматериала при расчете методом конечных элементов моделируется, как совокупность трехмерных твердотельных элементов. Деформирование образца происходит без контактных взаимодействий составляющих его элементов.

В данной работе для упругих постоянных были приняты следующие значения: $E = 2.6$ ГПа, $\nu = 0.4$. Эти значения упругих констант соответствуют ABS-пластику. Заметим, что деформационное поведение метаматериалов в большей степени зависит не от значений упругих модулей, а от геометрии макроструктуры метаматериала.

Результаты и обсуждение

Нетривиальный отклик – скручивание структуры

Тетрахиральная структура обладает уникальной конструкционной особенностью – наличием кольца со связками, что позволяет ей скручиваться при одноосном нагружении. Коллективное скручивание колец приводит к тому, что образец

начинает отклоняться от исходного положения (рис. 2, а). Отклонения происходят как по оси X , так и по оси Y .

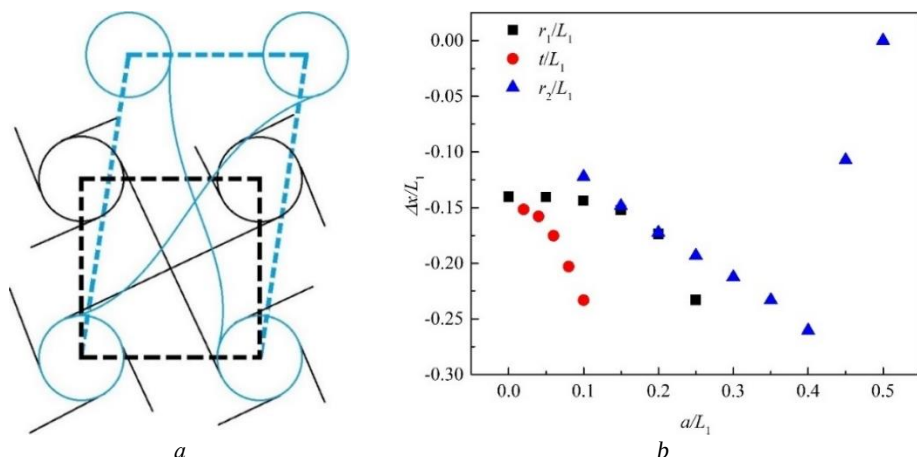


Рис. 2. Схема деформирования структуры (а) и зависимости отклонения образца из двумерного метаматериала от переменных параметров хиральной структуры (b)

Fig. 2. (a) Scheme of the structure deformation and (b) dependences of the deflection on the variable parameters of the chiral structure for a two-dimensional metamaterial sample

Моделирование деформирования образцов проводилось при изменении параметров структуры. Результат влияния переменных параметров на значение отклонения двумерного метаматериала представлен на рис. 2, b. Рассмотрим влияние каждого из параметров на механический отклик метаматериала подробнее. Эти параметры и само значение отклонения приводятся в безразмерном виде, как отношение переменного параметра к размеру одной элементарной ячейки.

Значения внутреннего радиуса кольца r_1 уменьшались от исходного значения 12.5 до 0 мм с равным шагом 2.5 мм (см. рис. 2, b, квадратные маркеры). Заметим, что при уменьшении внутреннего радиуса кольца хиральной структуры увеличивается объем базового материала. Из рис. 2, b видно, что при уменьшении внутреннего радиуса в этом диапазоне отклонение образца уменьшается практически в два раза. Когда $r_1 = 0$ мм, в тетрахиальной структуре вместо кольца появляется диск, который увеличивает жесткость структуры, что приводит к уменьшению отклонения образца.

При изменении толщины связки t тетрахиальной структуры от 5 до 1 мм с шагом 1 мм поведение аналогично предыдущему (см. рис. 2, b, круглые маркеры). Уменьшение толщины связки приводит к уменьшению отклонения образца. Это связано с уменьшением объема базового материала в образце.

Внешний радиус кольца r_2 изменялся от максимального до минимального значения, т.е. от 25 до 5 мм (см. рис. 2, b, треугольные маркеры). График разделен на две части по промежуткам 25–20 мм и 20–5 мм. В первом случае (промежутке) нарушается тетрахиальная структура, это вызвано срастанием смежных ячеек и кольца с прилегающими связками. Очевидно, что когда кольцо соразмерно элементарной ячейке ($r_2 = 25$ мм), отклонение не будет реализовываться. Во втором случае (промежутке) нарушения тетрахиальной структуры нет и коль-

цо с радиусом 20 мм позволяет образцу отклониться на максимальное значение. Дальнейшее уменьшение внешнего радиуса уменьшает отклонение образца. Из этого становится ясно, что отклонение образца достигает максимального значения, когда связки имеют длину, соразмерную радиусу кольца.

Из полученных результатов следует, что в отклонении образца участвуют следующие факторы:

- 1) деформирование кольца – $r_1 = 16.5$ мм; $r_2 = 17.5$ мм; $t = h = 5$ мм (рис. 3, а);
- 2) деформирование связки – $r_2 = 17.5$ мм; $r_1 = 12.5$ мм; $t = 1$ мм, $h = 5$ мм (рис. 3, б);
- 3) скручивание структуры – конструкционный фактор и, вероятно, зависит от параметра r_2 .

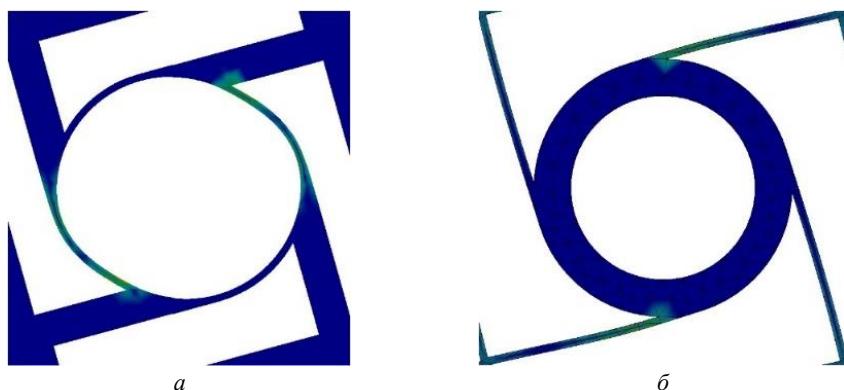


Рис. 3. Деформирование одной из элементарных ячеек при сжатии образцов из метаматериала с переменными параметрами структуры: $r_1 = 16.5$ мм; $r_2 = 17.5$ мм; $t = h = 5$ мм (а); $r_2 = 17.5$ мм; $r_1 = 12.5$ мм; $t = 1$ мм; $h = 5$ мм (б)

Fig. 3. Deformation of a unit cell during compression of metamaterial samples with variable parameters of the structure: (a) $r_1 = 16.5$ мм; $r_2 = 17.5$ мм; $t = h = 5$ мм and (b) $r_2 = 17.5$ мм; $r_1 = 12.5$ мм; $t = 1$ мм; $h = 5$ мм

Распределение эквивалентных напряжений

Рассмотрим, как влияет изменение изучаемых параметров на распределения напряжений на примере внутреннего радиуса кольца (рис. 4). Очевидно, что метаматериал деформируется неравномерно, что отражается в распределении напряжений. Наибольшие значения эквивалентных напряжений наблюдаются в связках, а также в областях соединения кольца со связками. Если рассматривать структуру с исходными значениями параметров, то максимальные эквивалентные напряжения в 50 МПа можно обнаружить на внешней стороне связок ближе к кольцу. Это связано с тем, что при сжатии и скручивании элементов хиральной структуры связки испытывают неравномерный изгиб. На внутренней стороне связок ближе к кольцу значение максимальных напряжений в полтора раза меньше. На оставшихся двух связках эквивалентные напряжения на аналогичных участках меньше на 40% с внешней стороны и на 10% с внутренней стороны. Эти максимальные напряжения, в свою очередь, наблюдаются недалеко от зоны соединения элементарных ячеек. То есть симметрия хиральной структуры и вы-

бранное вертикальное направление приложения сжимающей нагрузки на образец приводят к таким противоположным тенденциям в распределениях эквивалентных напряжений в разных связках.

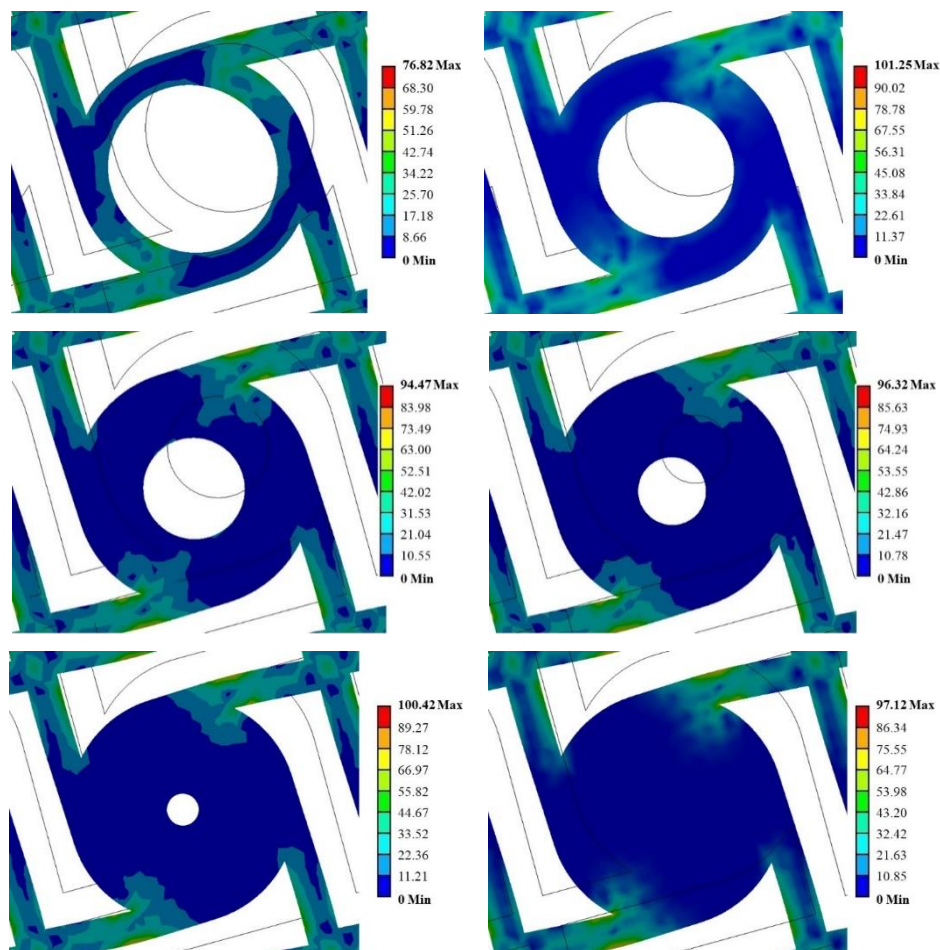


Рис. 4. Распределения эквивалентных напряжений при общей деформации одноосного сжатия образца 3% для разных значений параметра внутреннего радиуса кольца (r_1) хиральной структуры

Fig. 4. Distributions of equivalent stresses at 3% total deformation of the uniaxial sample compression for different inner radii of the ring (r_1) in a chiral structure

Когда разница между внешним и внутренним радиусами кольца невелика, на внутренней части кольца также отмечаются достаточно высокие значения эквивалентных напряжений. Они возникают из-за механического воздействия связок, максимальные значения – 43 МПа. Две другие связки (вертикальные) воздействуют с меньшим усилием, и напряжения на внутренней стороне достигают 18.7 МПа в своем максимуме. При уменьшении r_1 уменьшаются и значения эквивалентных напряжений в аналогичных областях. Стоит также отметить, что при

значениях $r_1 = 12.5, 10, 7.5$ мм наибольшие значения напряжений на внешней стороне кольца обнаруживаются вблизи соединения связок и кольца – области концентрации напряжений.

Для остальных переменных параметров можно отметить качественно похожий характер распределения эквивалентных напряжений, а количественно максимальные значения эквивалентных напряжений имеют меньшие значения.

Эффективный модуль Юнга

При изменении параметров структуры метаматериала изменялась пористость образца, что влечет за собой изменение силовых характеристик образца. Наиболее интересна способность образца сопротивляться одноосной нагрузке, поэтому в качестве такой характеристики рассмотрим модуль Юнга. Поскольку метаматериал можно рассматривать как эффективную среду, то усредненной характеристикой такого псевдоматериала будет эффективный модуль Юнга

$$E_{\text{eff}} = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{u_2}{L}}$$

где F – силовая реакция закрепленной части образца, S – площадь основания образца, u_2 – смещение верхней части образца, L – длина образца.

Аналогично анализу отклонения образца влияние каждого параметра тетрахиальной структуры на значение эффективного модуля Юнга рассмотрим в отдельности (рис. 5).

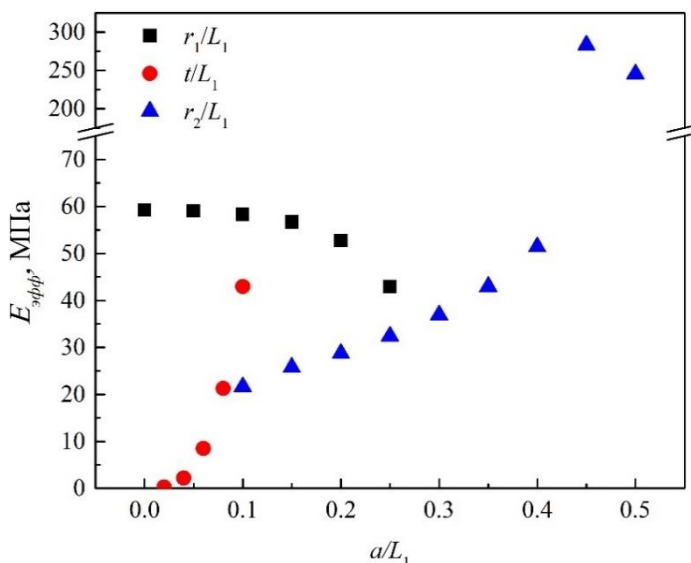


Рис. 5. Зависимости эффективного модуля Юнга двумерного метаматериала от переменных параметров хиральной структуры

Fig. 5. Dependences of effective Young's modulus of a two-dimensional metamaterial on the variable parameters of the chiral structure

При уменьшении внутреннего радиуса происходит увеличение удельного объема базового материала. Следовательно, в этом случае необходимо затратить больше усилий для деформирования образца из метаматериала (см. рис. 5). В исходном образце метаматериала значение реакции опоры было 901.78 Н, это значит, что значение эффективного модуля Юнга будет равно 42.9 МПа. При уменьшении внутреннего радиуса кольца до нуля объем базового материала увеличился на 58%, а значение E_{eff} увеличилось на 38%, до 59.3 МПа (см. рис. 5, квадратные маркеры).

В случае с переменным параметром t видно, что значение эффективного модуля Юнга убывает с уменьшением толщины связки. Минимальное значение эффективного модуля Юнга составляет 0.22 МПа, при $t = 1$. Наибольшее значение достигается при $t = 5$, $E_{eff} = 42.9$ МПа (см. рис. 5, круглые маркеры).

При рассмотрении влияния параметра r_2 было обнаружено, что способность сопротивляться одноосному сжатию существенно возрастает, когда нарушается тетрахиальность структуры. При уменьшении r_2 с 20 по 5 идет линейное уменьшение E_{eff} (рис. 5, треугольные маркеры).

Эффективный коэффициент Пуассона

Для вычисления значения эффективного коэффициента Пуассона при изменении параметров тетрахиальной структуры рассмотрим элементарную ячейку, располагающуюся в центре двумерного образца, т.е. в пятом ряду второго столбца. В этой ячейке были выбраны четыре реперные точки в вершинах элементарной ячейки. Зная координаты и перемещения этих точек, можно рассчитать деформации, по отношению которых можно определить значения эффективного коэффициента Пуассона. В предположении, что первоначальные точки принадлежат квадрату, стороны которого расположены вдоль осей координат, имеем следующие соотношения для разностей координат точек: $y_1 - y_4 = y_2 - y_3 = x_2 - x_1 = x_3 - x_4 = -50$ мм. Для вычисления значения эффективного коэффициента Пуассона используем выражение

$$\begin{aligned} \nu_{eff} = \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}} &= \frac{\frac{\partial u_x}{\partial x}}{\frac{\partial u_y}{\partial y}} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(\Delta x_2 - \Delta x_1) \cdot (x_3 - x_4) - (\Delta x_4 - \Delta x_3) \cdot (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_4)} \right]}{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(\Delta y_1 - \Delta y_4) \cdot (y_2 - y_3) - (\Delta y_2 - \Delta y_3) \cdot (y_1 - y_4)}{(y_1 - y_4) \cdot (y_2 - y_3)} \right]} = \\ &= \frac{-\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_4}{\Delta y_1 + \Delta y_2 - \Delta y_3 - \Delta y_4}. \end{aligned}$$

Вычисление значения эффективного коэффициента Пуассона при варьировании параметров хиральной структуры дало результаты, изображенные на рис. 6.

При увеличении объема метаматериала (при уменьшении r_1) в рассматриваемой ячейке уменьшается значение эффективного коэффициента Пуассона, но незначительно, и колеблется в районе нуля (см. рис. 6, квадратные маркеры).

Наиболее интересное влияние на эффективный коэффициент Пуассона оказывает параметр t (см. рис. 6, круглые маркеры). Толстые связки плохо изгибаются, поэтому ауксетического поведения нет, и коэффициент Пуассона имеет положительное значение. С уменьшением толщины связок значение эффективного коэффициента Пуассона уменьшается, достигает нуля и при дальнейшем утонении

связок становится отрицательным, продолжая уменьшаться, т.е. метаматериал проявляет ауксетические свойства. Однако имеется некоторое критическое значение толщины связок, после которого коэффициент Пуассона опять начинает расти. Вероятно, это является следствием того, что связки становятся слишком слабыми для поддержания тетрахиральной структуры.

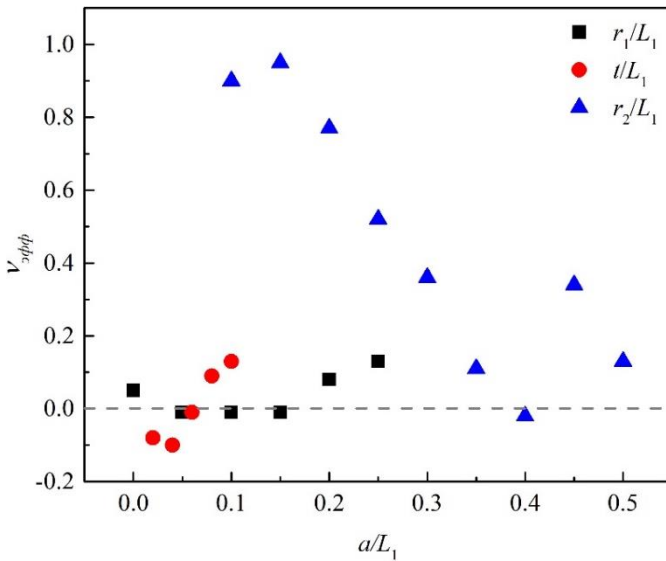


Рис. 6. Зависимости значения эффективного коэффициента Пуассона двумерного метаматериала от переменных параметров хиральной структуры
Fig. 6. Dependences of effective Poisson's ratio of a two-dimensional metamaterial on the variable parameters of the chiral structure

Рассматривая изменение эффективного коэффициента Пуассона в зависимости от параметра r_2 , не стоит брать во внимание значения при 25 и 22.5 мм, так как очевидно, что в этом случае хиральная структура отсутствует, а без скручивания образец ведет себя, как обычный материал, а не метаматериал. Когда структура приобретает способность скручиваться, эффективный коэффициент Пуассона становится отрицательным, хотя и близким к нулю. Дальнейшее изменение приводит к увеличению исследуемой характеристики (см. рис. 6, треугольные маркеры).

Заключение

В результате численного моделирования изучено влияние изменения параметров хиральной структуры двумерного образца метаматериала на его деформацию, напряжения и эффективные упругие свойства. Из полученных результатов в ходе математического моделирования выявлено, что каждый из переменных параметров проявляет различную эффективность, воздействуя на отклик образца из метаматериала. Это свидетельствует о том, что варьированием параметров можно достигнуть требуемого механического поведения метаматериала, а также контролировать его эффективные упругие характеристики. Наибольшее значение отклонения (−13.024 мм) зафиксировано при $r_2 = 20$ мм несмотря на то,

что в данном случае объем базового материала наибольший для всех образцов, реализующих беспрепятственное скручивание структуры. Если провести ранжирование по вкладу в нетривиальный отклик, то можно параметры расположить следующим образом (от большего влияния к меньшему): внешний радиус кольца, внутренний радиус кольца, толщина связки.

В отношении эффективного модуля Юнга образцы подчиняются следующему правилу: при уменьшении объема базового материала необходимо затрачивать меньшие усилия для деформирования и модуль Юнга уменьшается. Наибольшим эффектом обладает параметр t .

Относительно эффективного коэффициента Пуассона стоит отметить, что тетрахиральная структура обладает свойством ауксетичности лишь при некоторых вариациях переменных параметров. При варьировании параметров r_1 и t коэффициент Пуассона имеет значения вблизи нуля. Наибольшее влияние оказывает параметр r_2 , вызывая изменение значения коэффициента Пуассона в диапазоне от -0.04 до 0.95 . Это связано с отношением длины связки к кольцу: чем меньше кольцо, тем больше связка тетрахиральной структуры. Самое большое отрицательное значение коэффициента Пуассона (-0.1) проявила структура с толщиной связок 2 мм.

Указанные закономерности получены при независимом варьировании параметров хиральной структуры. Однако надо иметь в виду, что переменные параметры можно выбирать и с учетом их влияния на остальные характеристики элементарной ячейки, когда заданы определенные ограничения на построение хиральной структуры [19]. Принятие такого условия может оказать влияние на отклик тетрахиральных структур, степень этого влияния необходимо исследовать дополнительно.

Список источников

1. Akhmetshin L.R., Iokhim K., Kazantseva E., Smolin I.Yu. Response evolution of a tetrachiral metamaterial unit cell under architectural transformations // *Symmetry*. 2022. V. 15, is. 1. 14 p. doi: 10.3390/sym15010014
2. Schaedler T., Jacobsen A., Torrents A., Sorensen A., Lian J., Greer J., Valdevit L., Carter W.B. Ultralight metallic microlattices // *Science*. 2011. V. 334 (6058). P. 962–965. doi: 10.1126/science.1211649
3. Tan T., Yan Zh., Zou H., Ma K., Liu F., Zhao L., Peng Zh., Zhang W. Renewable energy harvesting and absorbing via multi-scale metamaterial systems for Internet of things // *Applied Energy*. 2019. V. 254. Art. 113717. doi: 10.1016/j.apenergy.2019.113717
4. Cummer S.A., Christensen J., Alù A. Controlling sound with acoustic metamaterials // *Nature Reviews Materials*. 2016. V. 1. Art. 16001. doi: 10.1038/natrevmats.2016.1
5. Колубаев Е.А., Рубцов В.Е., Чумаевский А.В., Астафурова Е.Г. Научные подходы к микро-, мезо- и макроструктурному дизайну объемных металлических и полиметаллических материалов с использованием метода электронно-лучевого аддитивного производства // *Физическая мезомеханика*. 2022. Т. 25, № 4. С. 5–18. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_4_5
6. Зеленугин С.А., Толкачев В.Ф., Тырышкин И.М. Анализ эффективности противоударной стойкости двух групп керамических и композитных материалов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 80. С. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
7. Sangsefidi A.R., Kadkhodapour J., Anaraki A.P., Dibajian S.H., Schmauder S. Повышение эффективности сбора энергии приборами на основе метаматериалов // *Физическая мезомеханика*. 2022. Т. 25, № 4. С. 106–121. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_4_106

8. Prall D., Lakes R.S. Properties of a chiral honeycomb with a poisson's ratio of -1 // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1997. V. 39 (3). P. 305–314.
9. Eidini M. Zigzag-base folded sheet cellular mechanical metamaterials // *Extreme Mechanics Letters*. 2016. V. 6. P. 96–102. doi: 10.1016/j.eml.2015.12.006
10. Zheng X., Lee H., Weisgraber T.H., Shusteff M., DeOtte J., Duoss E.B., Kuntz J.D., Biener M.M., Ge Q., Jackson J.A., Kucheyev S.O., Fang N.X., Spadaccini C.M. Ultralight, ultrastiff mechanical metamaterials // *Science*. 2014. V. 344. P. 1373–1377. doi: 10.1126/science.1252291
11. Gold V. Compendium of chemical terminology. International Union of Pure and Applied Chemistry, 2014. V. 528.
12. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M.A. Negative Poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes // *Physical Mesomechanics*. 2014. V. 17 (2). P. 97–115. doi: 10.1134/S102995991402002
13. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M.A. Thin Homogeneous Two-Layered Plates of Cubic Crystals with Different Layer Orientation // *Physical Mesomechanics*. 2019. V. 22 (4). P. 261–268. doi: 10.1134/S1029959919040015
14. Zhong R., Fu M., Chen X., Zheng B., Hu L. A novel three-dimensional mechanical metamaterial with compression-torsion properties // *Composite Structures*. 2019. V. 226. Art. 111232. doi: 10.1016/j.compstruct.2019.111232
15. Zheng B.-B., Zhong R.-C., Chen X., Fu M.-H., Hu L.-L. A novel metamaterial with tension-torsion coupling effect // *Materials & Design*. 2019. V. 171. Art. 107700. doi: 10.1016/j.matdes.2019.107700
16. Frenzel T., Kadic M., Wegener M. Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist // *Science*. 2017. V. 358. P. 1072–1074. doi:10.1126/science.aao4640
17. Spadoni A., Ruzzene M. Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2012. V. 60. P. 156–171. doi: 10.1016/j.jmps.2011.09.012
18. Ахметшин Л.Р., Смолин И.Ю. Анализ некоторых методов соединения ячеек в механическом тетрахиальном метаматериале // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 77. С. 27–37. doi: 10.17223/19988621/77/3
19. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. Influence of unit cell parameters of tetrachiral mechanical metamaterial on its effective properties // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2020. V. 11 (3). P. 265–273. doi: 10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020033737

References

1. Akhmetshin L.R., Iokhim K., Kazantseva E., Smolin I.Yu. (2022) Response evolution of a tetrachiral metamaterial unit cell under architectural transformations. *Symmetry*. 15(1). pp. 1–14. doi: 10.3390/sym15010014
2. Schaedler T., Jacobsen A., Torrents A., Sorensen A., Lian J., Greer J., Valdevit L., Carter W.B. (2011) Ultralight metallic microlattices. *Science*. 334(6058). pp. 962–965. doi: 10.1126/science.1211649
3. Tan T., Yan Zh., Zou H., Ma K., Liu F., Zhao L., Peng Zh., Zhang W. (2019) Renewable energy harvesting and absorbing via multi-scale metamaterial systems for Internet of things. *Applied Energy*. 254. Article 113717. doi: 10.1016/j.apenergy.2019.113717
4. Cummer S. A., Christensen J., Alù A. (2016) Controlling sound with acoustic metamaterials. *Nature Reviews Materials*. 1. Article 16001. doi: 10.1038/natrevmats.2016.1
5. Kolubaev E.A., Rubtsov V.E., Chumaevsky A.V., Astafurova E.G. (2022) Micro-, meso- and macrostructural design of bulk metallic and polycrystalline materials by wire-feed electron-beam additive manufacturing. *Physical Mesomechanics*. 25. pp. 479–491. doi: 10.1134/S1029959922060017
6. Zelepugin S.A., Tolkachev V.F., Ty'ry'shkin I.M. (2022) Analiz effektivnosti protivoudarnoy stoykosti dvukh grupp keramicheskikh i kompozitnykh materialov [Analysis of the impact resistance efficiency of two groups of ceramic and composite materials]. *Vestnik Tomskogo*

- gosudarstvennogo universiteta. *Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
7. Sangsefidi A.R., Kadhodapour J., Anaraki A.P., Dibajian S.H., Schmauder S. (2022) Enhanced energy harvesting by devices with the metamaterial substrate. *Physical Mesomechanics*. 25(6). pp. 568–582. doi: 10.1134/S1029959922060091
 8. Prall D., Lakes R.S. (1997) Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio of -1 . *International Journal of Mechanical Sciences*. 39(3). pp. 305–314.
 9. Eidini M. (2016) Zigzag-base folded sheet cellular mechanical metamaterials. *Extreme Mechanics Letters*. 6. pp. 96–102. doi: 10.1016/j.eml.2015.12.006
 10. Zheng X., Lee H., Weisgraber T.H., Shusteff M., DeOtte J., Duoss E.B., Kuntz J.D., Biener M.M., Ge Q., Jackson J.A., Kucheyev S.O., Fang N.X., Spadaccini C.M. (2014) Ultralight, ultrastiff mechanical metamaterials. *Science*. 344. pp. 1373–1377. doi: 10.1126/science.1252291
 11. Gold V. (2014) *Compendium of Chemical Terminology*. Volume 528. International Union of Pure and Applied Chemistry.
 12. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M.A. (2014) Negative Poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes. *Physical Mesomechanics*. 17(2). pp. 97–115. doi: 10.1134/S102995991402002
 13. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M.A. (2019) Thin homogeneous two-layered plates of cubic crystals with different layer orientation. *Physical Mesomechanics*. 22(4). pp. 261–268. doi: 10.1134/S1029959919040015
 14. Zhong R., Fu M., Chen X., Zheng B., Hu L. (2019) A novel three-dimensional mechanical metamaterial with compression-torsion properties. *Composite Structures*. 226. Article 111232. doi: 10.1016/j.compstruct.2019.111232
 15. Zheng B.-B., Zhong R.-C., Chen X., Fu M.-H., Hu L.-L. (2019) A novel metamaterial with tension–torsion coupling effect. *Materials & Design*. 171. Article 107700. doi: 10.1016/j.matdes.2019.107700
 16. Frenzel T., Kadic M., Wegener M. (2017) Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist. *Science*. 358. pp. 1072–1074. doi: 10.1126/science.aao4640
 17. Spadoni A., Ruzzene M. (2012) Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 60. pp. 156–171. doi: 10.1016/j.jmps.2011.09.012
 18. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. (2022) Analiz nekotorykh metodov soedineniya yacheek v mekhanicheskom tetrakhiral'nom metamateriale [Analysis of some cell connection methods in a mechanical tetrachiral metamaterial]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 27–37. doi: 10.17223/19988621/77/3
 19. Akhmetshin L.R., Smolin I.Yu. (2020) Influence of unit cell parameters of tetrachiral mechanical metamaterial on its effective properties. *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 11(3). pp. 265–273. doi: 10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020033737

Сведения об авторах:

Ахметшин Линар Ришатович – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета; младший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН (Томск, Россия). E-mail: akhmetshin.lr@gmail.com

Иохим Кристина Владимировна – аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета; младший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН (Томск, Россия). E-mail: iokhim.k@mail.ru

Казанцева Екатерина Александровна – аспирант кафедры прочности и проектирования Томского государственного университета; младший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН (Томск, Россия). E-mail: kazantseva.ea@ispms.ru

Смолин Игорь Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН; профессор кафедры прочности и проектирования Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: smolin@ispms.ru

Information about the authors:

Akhmetshin Linar R. (Tomsk State University, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: akhmetshin.lr@gmail.com

Iokhim Kristina V. (Tomsk State University, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iokhim.k@mail.ru

Kazantseva Ekaterina A. (Tomsk State University, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kazantseva.ea@ispms.ru

Smolin Igor' Yu. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: smolin@ispms.ru

Статья поступила в редакцию 26.04.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 26.04.2023; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/89/5

Оценка влияния ведущих поясков на взаимодействие удлинённых ударников с легкосплавными преградами

Станислав Павлович Батуев¹, Виктор Владимирович Буркин²,
Алексей Сергеевич Дьячковский³, Александр Николаевич Ищенко⁴,
Павел Андреевич Радченко⁵, Андрей Васильевич Радченко⁶,
Антон Юрьевич Саммель⁷

^{1, 5, 6} *Институт физики прочности и материаловедения*

Сибирского отделения РАН, Томск, Россия

^{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *spbatauev@gmail.com*

² *v.v.burkin@mail.ru*

³ *lex_okha@mail.ru*

⁴ *ichan@niipmm.tsu.ru*

⁵ *pavel@radchenko.site*

⁶ *andrey@radchenko.site*

⁷ *anton_sammel@mail.ru*

Аннотация. Исследовано влияние ведущего пояска на процесс внедрения удлинённого ударника в алюминиевые преграды. Получены экспериментальные данные высокоскоростного взаимодействия удлинённых ударников с алюминиевыми преградами в диапазоне скоростей 200–450 м/с. С использованием модифицированного расчетного комплекса EFES проведены параметрические расчеты взаимодействия удлинённых ударников различных конструкций с алюминиевыми преградами.

Ключевые слова: ведущие пояски, высокоскоростное взаимодействие, удлинённый ударник, математическая модель

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет-2030).

Для цитирования: Батуев С.П., Буркин В.В., Дьячковский А.С., Ищенко А.Н., Радченко П.А., Радченко А.В., Саммель А.Ю. Оценка влияния ведущих поясков на взаимодействие удлинённых ударников с легкосплавными преградами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 66–76. doi: 10.17223/19988621/89/5

Original article

Analysis of the effect of driving belts on the interaction between elongated projectiles and light alloy barriers

Stanislav P. Batuev¹, Viktor V. Burkin², Aleksey S. D'yachkovskiy³,
Aleksandr N. Ishchenko⁴, Pavel A. Radchenko⁵, Andrey V. Radchenko⁶,
Anton Yu. Sammel⁷

^{1, 5, 6} *Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation*

^{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *spbatuev@gmail.com*

² *v.v.burkin@mail.ru*

³ *lex_okha@mail.ru*

⁴ *ichan@niipmm.tsu.ru*

⁵ *pavel@radchenko.site*

⁶ *andrey@radchenko.site*

⁷ *anton_sammel@mail.ru*

Abstract. To assess the effect of a driving belt on the elongated projectile penetration into a barrier, it is necessary to perform mathematical modeling considering all the physical and mechanical properties of the projectile and barrier. Using the modified EFES software package, the high-speed interaction of elongated steel projectiles with aluminum barriers is calculated in the speed range of 200 – 450 m/s. Two configurations of the projectile, namely, the projectiles with and without belts, are studied numerically. The developed mathematical model is validated using experimental results for the high-speed interaction of elongated projectiles with aluminum barriers. A comparison of the calculated and experimental results yields a discrepancy in the behind-the-barrier speed, which does not exceed 9.5%. The obtained data show an insignificant influence of the driving belts on the behind-the-barrier speed; the difference in the values is less than 4%.

Keywords: driving belts, high-speed interaction, elongated projectile, mathematical model

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030).

For citation: Batuev, S.P., Burkin, V.V., D'yachkovskiy, A.S., Ishchenko, A.N., Radchenko, P.A., Radchenko, A.V., Sammel', A.Y. (2024) Analysis of the effect of driving belts on the interaction between elongated projectiles and light alloy barriers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 66–76. doi: 10.17223/19988621/89/5

Введение

При создании однослойных защит применяют оценочные расчеты по инженерным формулам, которые позволяют без учета сложного напряженно-деформированного состояния преграды и ударника оценить ее свойства по величине предела сквозного пробития. В этом случае точность полученных результатов будет напрямую зависеть от знания скорости ударника после пробития преграды.

Запреградная скорость зависит от многих факторов взаимодействия элементов ударника с конструкцией. Одним из таких факторов является ведущий пояс, используемый для ведения ударников по каналу метательной установки. Очевидно, что для предотвращения контакта ударника с каналом метательной установки диаметр пояса должен быть больше диаметра самого ударника. Поясок должен обеспечивать центрирование ударника и обладать определенными механическими прочностными свойствами. При взаимодействии ударника с преградой в зависимости от материала пояса и его геометрических характеристик он может повлиять на динамику взаимодействия ударника с преградой.

При высокоскоростном взаимодействии ударника сложной конструкции с преградой для получения полной расчетной картины необходима математическая постановка задачи в полной мере, учитывающая все физико-механические свойства исследуемых материалов ударника и преграды, а также понимание физических процессов и явлений, происходящих в материалах. Все эти факторы приводят к формированию сложной нелинейной системы дифференциальных уравнений, для решения которой требуется применение современных вычислительных серверов с высокой частотой обработки информации и большим объемом оперативной памяти. Высокоскоростное взаимодействие ударника с преградой описывается задачами динамического деформирования неупругих тел. Для решения задач подобного типа разработаны эффективные алгоритмы численного решения [1–5]. Оценка погрешности численного решения таких задач является затруднительной.

Для оценки влияния ведущего пояса на процесс внедрения удлиненного ударника проведено экспериментально-теоретическое исследование. С применением модифицированного расчетного комплекса EFES получены расчетные результаты высокоскоростного взаимодействия удлиненных ударников с преградами из алюминия. Расчеты проводились в диапазоне скоростей 200–450 м/с для двух типов ударников: с поясками и без.

Экспериментальные результаты

Для исследования высокоскоростного взаимодействия с алюминиевой преградой использовался удлиненный ударник, внешний вид которого представлен на рис. 1. Результаты высокоскоростного взаимодействия получены на экспериментальном стенде [6].



Рис. 1. Внешний вид удлиненного ударника
Fig. 1. Design of an elongated projectile

В экспериментах использовался ударник, изготовленный из стали. Для ведения по каналу метательной установки применялись медные пояски. В кормовой части ударник имеет диаметр 8 мм, а диаметр медных поясков равен 8.1 мм.

Проведено три эксперимента в диапазоне скоростей 200–450 м/с. На рис. 2 представлен один из процессов высокоскоростного взаимодействия данного ударника с алюминиевой преградой. Ударник взаимодействовал с алюминиевой преградой толщиной 8 мм со скоростью 395 м/с.

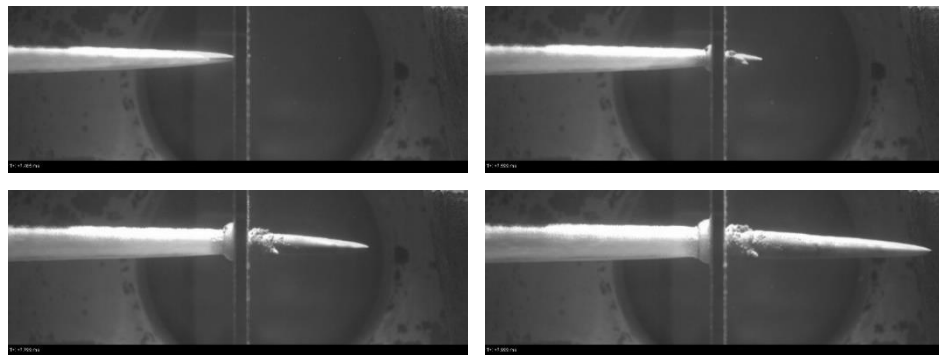


Рис. 2. Видеокадры процесса высокоскоростного взаимодействия ударника с алюминиевой преградой толщиной 8 мм

Fig. 2. Video frames of the high-speed interaction between a projectile and an 8-mm-thick aluminum barrier

Ударник к преграде подходит ровно. В процессе взаимодействия с преградой он образует круглое сквозное отверстие с небольшим выносом материала преграды на тыльной стороне. Пробив преграду насквозь, ударник продолжает свое движение со скоростью 345 м/с, затратив на пробитие преграды всего 50 м/с. На рис. 3 показано отверстие в преграде с лицевой и тыльной сторон, образованное ударником.

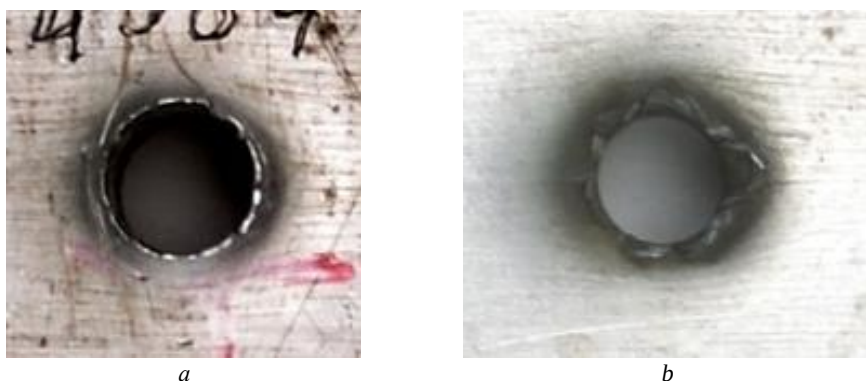


Рис. 3. Внешний вид отверстия в преграде с лицевой (a) и тыльной (b) сторон

Fig. 3. Physical form of the hole in a barrier from the (a) front and (b) back sides

Диаметр получившегося отверстия равен 8.24 мм. На рис. 3, b можно заметить участки отверстия, где имеется вынос материала. Результаты проведенных экспериментов использовались для тестирования математической модели (см. ниже). Определить влияние изменения диаметра медных поясков на процесс взаимодей-

ствия с преградой только экспериментальным путем очень трудозатратно и сложно, поэтому для дальнейшего анализа применялся аппарат математического моделирования.

Результаты численного моделирования

Анализ высокоскоростного взаимодействия ударников с преградами и параметрические исследования проводились на модифицированном расчетном комплексе EFES [7–9]. Для оценки влияния ведущего пояска на процесс внедрения ударника проведена серия параметрических расчетов. В данной работе исследовалось взаимодействие ударников с преградами в рамках схемы, показанной на рис. 4. Стальной ударник занимает область D_1 , медные пояски – D_2 , преграда D_3 . Взаимодействие происходит в нормаль со скоростью v_0 . На контактной границе между ударником и преградой реализованы условия скольжения без трения, на границе между ударником и поясками – условие «слипания».

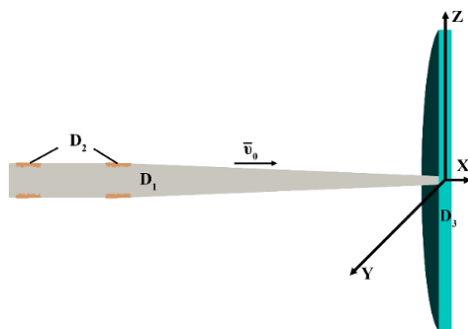


Рис. 4. Расчетная схема взаимодействия
Fig. 4. Computational model of the interaction

В таблице приведены значения запреградных скоростей ударника с поясками, полученные в эксперименте (v_{rb}^e) и расчете (v_{rb}^c), относительное расхождение между экспериментом и расчетом (δ_1), запреградная скорость ударника без поясков (v_r^c), относительное расхождение расчетных запреградных скоростей ударника с пояском и без пояска (δ_2) для различных начальных скоростей ударника (v_0) и толщин преграды (h).

Сравнение запреградных скоростей ударника.

v_0 , М/с	h , мм	v_{rb}^e , М/с	v_{rb}^c , М/с	δ_1 , %	v_r^c , М/с	δ_2 , %
216	3	147	161	9,5	167	3,7
395	8	345	320	7,2	318	0,6
411	3	384	386	0,5	386	0

Представленные результаты свидетельствуют об удовлетворительном согласии экспериментальных и численных результатов: расхождение не превышает 9.5%. Также результаты свидетельствуют о незначительном влиянии ведущих поясков на запреградную скорость ударника – менее 4%.

Расчетные конфигурации ударников и преграды для рассмотренных условий взаимодействия представлены на рис. 5–10.

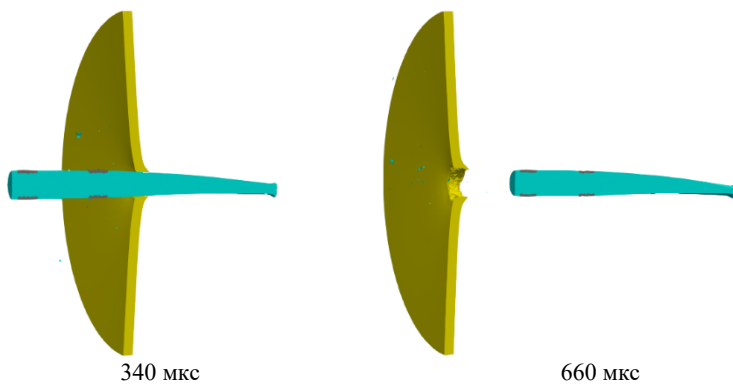


Рис. 5. Конфигурация ударника с поясками и преграды: $v_0 = 216$ м/с, $h = 3$ мм
Fig. 5. Configuration of the projectile with belts and barriers at $v_0 = 216$ m/s, $h = 3$ mm

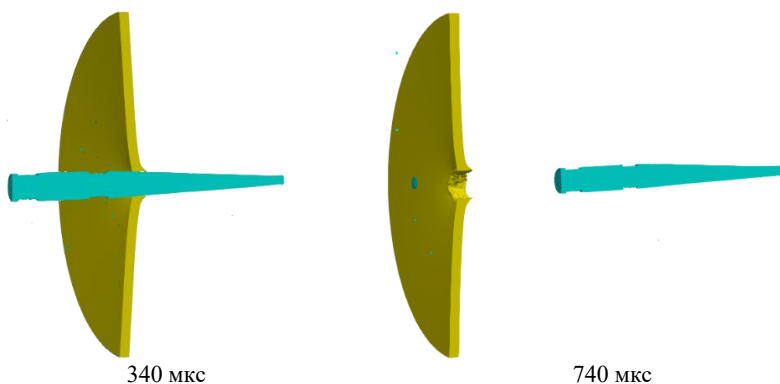


Рис. 6. Конфигурация ударника без поясков и преграды: $v_0 = 216$ м/с, $h = 3$ мм
Fig. 6. Configuration of the projectile without belts and barriers at $v_0 = 216$ m/s, $h = 3$ mm

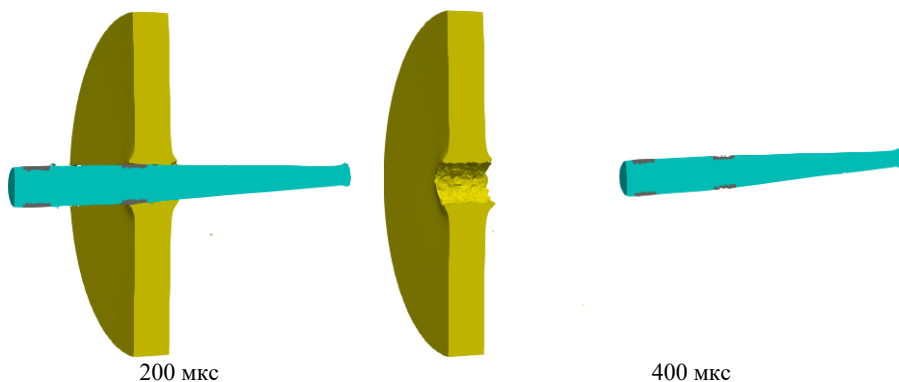


Рис. 7. Конфигурация ударника с поясками и преграды. $v_0 = 395$ м/с, $h = 8$ мм
Fig. 7. Configuration of the projectile with belts and barriers at $v_0 = 395$ m/s, $h = 8$ mm

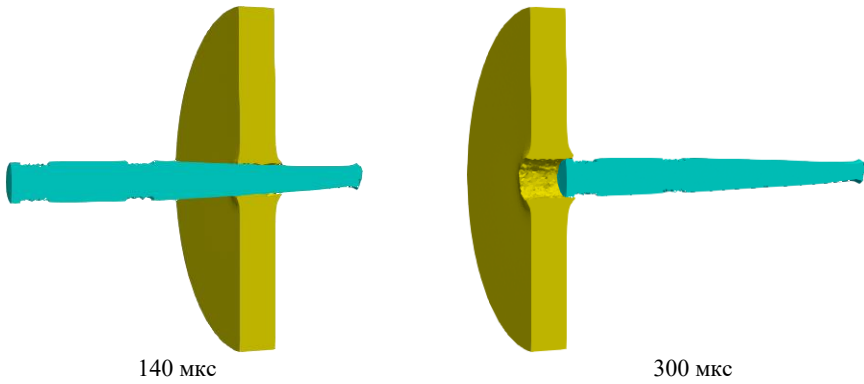


Рис. 8. Конфигурация ударника без поясков и преграды: $v_0 = 395$ м/с, $h = 8$ мм
Fig. 8. Configuration of the projectile without belts and barriers at $v_0 = 395$ m/s, $h = 8$ mm

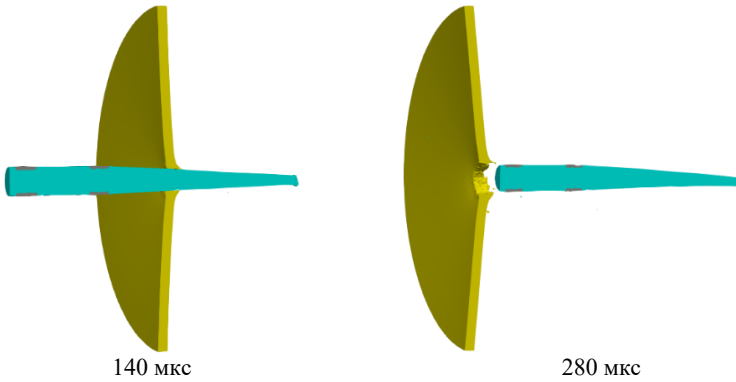


Рис. 9. Конфигурация ударника с поясками и преграды: $v_0 = 411$ м/с, $h = 3$ мм
Fig. 9. Configuration of the projectile with belts and barriers at $v_0 = 411$ m/s, $h = 3$ mm

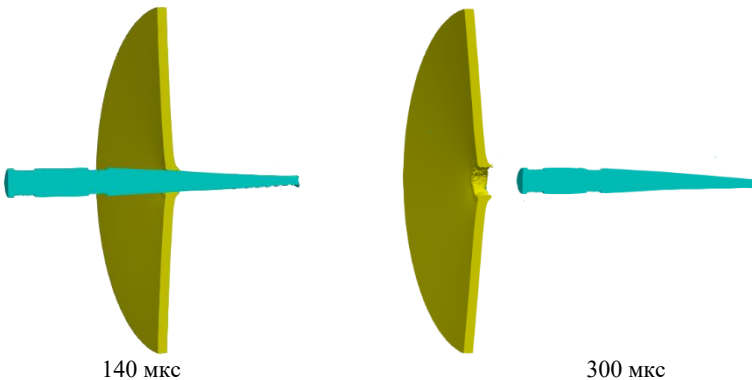


Рис. 10. Конфигурация ударника без поясков и преграды. $v_0 = 411$ м/с, $h = 3$ мм
Fig. 10. Configuration of the projectile without belts and barriers at $v_0 = 411$ m/s, $h = 3$ mm

В процессе внедрения в преграду происходит частичное разрушение медных поясков в результате их взаимодействия с боковой поверхностью образованного

цилиндрического отверстия в преграде (см. рис. 5, 7, 9). Это может приводить к незначительному торможению ударника. Степень подобного воздействия на скорость ударника будет зависеть от свойств материала преграды и времени контакта поясков с боковой поверхностью отверстия в преграде, определяемого толщиной преграды и начальной скоростью ударника. С одной стороны, наличие поясков увеличивает массу ударника и, как следствие, его кинетическую энергию, с другой стороны, взаимодействие поясков с преградой способствует снижению его скорости на заключительном этапе внедрения в преграду.

Заключение

Проведена серия экспериментов высокоскоростного взаимодействия удлиненных ударников с алюминиевыми преградами в диапазоне скоростей 200–450 м/с. Полученные экспериментальные результаты сравнивались с расчетными, расхождение по запреградной скорости не превышает 9.5%. Используя математическую модель на основе модифицированного расчетного комплекса EFES, проведены расчеты высокоскоростного взаимодействия ударников без поясков с начальными данными, повторяющими эксперименты. Полученные результаты показали незначительное влияние ведущих поясков на запреградную скорость, разница составила менее 4%.

Список источников

1. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Численная реализация граничных условий в динамических контактных задачах. Новосибирск, 1987. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 12).
2. Гулидов А.И., Шабалин И.И. Расчет контактных границ с учетом трения при динамическом взаимодействии деформируемых тел в пространственном случае // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности : материалы X Всесоюз. конф., Красноярск, 23–27 февраля 1987 г. Новосибирск : Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1988. С. 70–75.
3. Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Аппроксимация уравнений упругопластического деформирования в задачах динамики // Динамика сплошной среды : сб. науч. тр. Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984. Вып. 66. С. 60–68.
4. Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Схема численного решения динамических задач с условиями трения Кулона на поверхностях контакта // Теория распространения волн в упругих и упругопластических средах : сб. науч. тр. Новосибирск : Ин-т горного дела СО АН СССР, 1987. С. 80–83.
5. Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Об аппроксимации уравнений упругопластического деформирования // Неклассические задачи механики твердого тела : сб. науч. тр. Новосибирск : Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1989. Вып. 92. С. 45–54.
6. Буркин В.В., Ищенко А.Н., Майстренко И.В., Фуфачев В.М., Дьячковский А.С., Бураков В.А., Корольков Л.В., Степанов Е.Ю., Чупашев А.В., Рогаев К.С., Саммель А.Ю., Сидоров А.Д. Патент № 2683148 С1 Российская Федерация, МПК G01M 10/00, F41F 3/07. Гидробаллистический стенд: № 2017135871: заявл. 09.10.2017; опубл. 26.03.2019; заявитель Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» (ТГУ).
7. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. Numerical analysis of concrete fracture under shock wave loading // Physical Mesomechanics. 2021. V. 24 (1). P. 40–45.

8. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. Effect of Projectile Rotation on High-Velocity Impact Fracture // *Physical Mesomechanics*. 2022. V. 25 (2). P. 119–128.
9. Радченко П.А., Батуев С.П., Радченко А.В. Трёхмерное моделирование деформации и разрушения гетерогенных материалов и конструкций при динамических нагрузках (EFES 2.0) / Федеральная служба по интеллектуальной собственности. Государственная регистрация программы для ЭВМ. № 2019664836 от 14.11.2019.

References

1. Gulidov A.I., Shabalin I.I. (1987) *Chislennaya realizatsiya granichnykh usloviy v dinamicheskikh kontaktnykh zadachakh* [Numerical implementation of boundary conditions in dynamic contact problems]. Novosibirsk: Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of USSR Academy of Sciences.
2. Gulidov A.I., Shabalin I.I. (1988) Raschet kontaktnykh granits s uchetom treniya pri dinamicheskom vzaimodeystvii deformiruemykh tel v prostranstvennom sluchae [Calculation of contact boundaries with account for friction during dynamic interaction of deformable bodies in a three-dimensional case]. *Proceedings of the X All-Union Conference "Numerical Methods for Solving Problems in the Theory of Elasticity and Plasticity"*, Krasnoyarsk. Novosibirsk: Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. pp. 70–75.
3. Volchkov Yu.M., Ivanov G.V., Kurguzov V.D. (1984) Approksimatsiya uravneniy uprugoplasticheskogo deformirovaniya v zadachakh dinamiki [Approximation of elastoplastic deformation equations in dynamic problems]. In: *Collection of Scientific Papers "Continuum Dynamics"*. Novosibirsk: Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. 66. pp. 60–68.
4. Volchkov Yu.M., Ivanov G.V., Kurguzov V.D. (1987) Skhema chislennogo resheniya dinamicheskikh zadach s usloviyami treniya Kulona na poverkhnostyakh kontakta [Numerical algorithm for dynamic problems with Coulomb friction conditions on contact surfaces]. In: *Collection of Scientific Papers "Theory of Wave Propagation in Elastic and Elastoplastic Media"*. Novosibirsk: Institute of Mining of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. pp. 80–83.
5. Volchkov Yu.M., Ivanov G.V., Kurguzov V.D. (1989) Ob approksimatsii uravneniy uprugoplasticheskogo deformirovaniya [On the approximation of elastoplastic deformation equations]. In: *Collection of Scientific Papers "Non-classical Problems of Solid Mechanics"*. Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. 92. pp. 45–54.
6. Burkin V.V., Ishchenko A.N., Maystrenko I.V., Fufachev V.M., D'yachkovskiy A.S., Burakov V.A., Korol'kov L.V., Stepanov E.Yu., Chupashev A.V., Rogaev K.S., Sammel' A.Yu., Sidorov A.D. (2019) *Gidroballysticheskiy stend: № 2017135871* [Hydroballistic testing unit No. 2017135871]. RF Patent 2683148.
7. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. (2021) Numerical analysis of concrete fracture under shock wave loading. *Physical Mesomechanics*. 24(1). pp. 40–45. doi: 10.1134/S1029959921010069
8. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. (2022) Effect of projectile rotation on high-velocity impact fracture. *Physical Mesomechanics*. 25(2). pp. 119–128. doi: 10.1134/S1029959922020035
9. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. (2019) *Trekhmernoe modelirovanie deformatsii i razrusheniya geterogennykh materialov i konstruktsiy pri dinamicheskikh nagruzkakh (EFES 2.0)* [Three-dimensional modeling of deformation and destruction of heterogeneous materials and structures under dynamic loads (EFES 2.0)]. Certificate of State Registration of a Computer Program No. 2019664836. Moscow: Federal Service for Intellectual Property.

Сведения об авторах:

Батуев Станислав Павлович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН; старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: spbatuev@gmail.com

Буркин Виктор Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором 71 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

Дьячковский Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела быстропротекающих процессов Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lex_okha@mail.ru

Ищенко Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, директор Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Радченко Павел Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН; старший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: pavel@radchenko.site

Радченко Андрей Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН; ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: andrey@radchenko.site

Саммель Антон Юрьевич – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Information about the authors:

Batuev Stanislav P. (Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Laboratory of Mechanics of Heterogeneous Media, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Senior Researcher, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: spbatuev@gmail.com

Burkin Viktor V. (Candidate of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: v.v.burkin@mail.ru

D'yachkovskiy Aleksey S. (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of High-Speed Processes, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lex_okha@mail.ru

Ishchenko Aleksandr N. (Doctor of Physics and Mathematics, Director, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ichan@niipmm.tsu.ru

Radchenko Pavel A. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Researcher, Laboratory of Mechanics of Heterogeneous Media, Institute of Strength Physics and Materials Science of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Senior Researcher, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: pavel@radchenko.site

Radchenko Andrey V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Senior Official, Laboratory of Mechanics of Heterogeneous Media, Institute of Strength Physics and Materials Science

of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences; Leading Researcher, Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University Tomsk, Russian Federation). E-mail: andrey@radchenko.site

Sammel' Anton Yu. (Junior Researcher, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anton_sammel@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.12.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 19.12.2023; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 533.697, 519.63

doi: 10.17223/19988621/89/6

Моделирование совместных процессов зажигания поверхности таблетки-излучателя потоком двухфазных продуктов сгорания и вылета таблетки-излучателя из гильзы

Наталья Радиковна Гимаева¹, Леонид Леонидович Миньков²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ natalia.gimaeva@inbox.ru

² lminkov@ftf.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты математического моделирования процесса зажигания и вылета таблетки-излучателя из гильзы. Получены зависимости средне-объемного давления в гильзе от времени для двух радиусов частиц: 1 и 25 мкм. Оценены времена зажигания торцевой поверхности таблетки-излучателя. Высота зазора между цилиндрическими поверхностями таблетки и гильзы варьировала в пределах от 0.5 до 2 мм. Получены скорости вылета таблетки-излучателя из гильзы для разной высоты зазора между цилиндрическими поверхностями таблетки и гильзы.

Ключевые слова: ложные тепловые цели, горение, продукты сгорания, математическое моделирование, дульная скорость, внутренняя баллистика

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSMN -2020-0028

Для цитирования: Гимаева Н.Р., Миньков Л.Л. Моделирование совместных процессов зажигания поверхности таблетки-излучателя потоком двухфазных продуктов сгорания и вылета таблетки-излучателя из гильзы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 77–88. doi: 10.17223/19988621/89/6

Original article

Simulation of simultaneous tablet–emitter surface ignition by a flow of two-phase combustion products and tablet–emitter ejection from a cartridge case

Nataliya R. Gimaeva¹, Leonid L. Min'kov²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ natalia.gimaeva@inbox.ru² lminkov@ftf.tsu.ru

Abstract. This article presents the results of mathematical modeling of the ignition and ejection of a tablet–emitter from a cartridge case. Heat exchange between the tablet–emitter surface and combustion products is a result of the thermal conductivity of the particles, gas convection, and radiation. When the tablet surface temperature reaches the ignition temperature, the combustion products begin to move from the tablet–emitter into the free volume of the cartridge case. When the burst pressure is reached, the membrane opens and the combustion products flow out of the cartridge case. Affected by the pressure of the ejected combustion products, the tablet comes into motion and leaves the cartridge case. Time dependences of the average volume pressure in the cartridge case are obtained for two particle radii (1 and 25 μm). The ignition time for the end surface of the tablet–emitter is estimated. The gap size between the cylindrical surfaces of the tablet and the cartridge case varies from 0.5 to 2 mm. The velocity of the tablet–emitter discharge from the cartridge case is obtained. It is revealed that gap size has a significant impact on the ignition process.

Keywords: false heat targets, combustion, combustion products, mathematical modeling, muzzle velocity, internal ballistics

Acknowledgments: This work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (state assignment No. FSMN-2020-0028).

For citation: Gimayeva, N.R., Minkov, L.L. (2024) Simulation of simultaneous tablet–emitter surface ignition by a flow of two-phase combustion products and tablet–emitter ejection from a cartridge case. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 77–88. doi: 10.17223/19988621/89/6

Введение

Системы, известные как отстреливаемые ложные тепловые цели, играют важную роль в обеспечении безопасности полетов вертолетов и самолетов при выполнении различных миссий [1]. Ложные тепловые цели представляют собой устройства, способные выделять большое количество тепла при сгорании горючего состава, что препятствует обнаружению точного местоположения летательного аппарата, температура двигателя которого высока [2].

Ложные тепловые цели подобны боеприпасам сигнальных или осветительных пусковых устройств [3] и состоят из гильзы, заполненной твердым горючим составом. Для их успешного применения необходимо обеспечить устойчивое зажигание пиротехнического состава таблетки-излучателя ложной тепловой цели [4] до ее вылета из гильзы.

Для достижения полного зажигания торцевой части таблетки-излучателя во время ее нахождения в гильзе необходимо выявить влияние различных параметров на процесс зажигания и вылета таблетки-излучателя из гильзы. В рамках этой задачи нужно определить оптимальные параметры конструкции, такие как величина зазора между цилиндрическими поверхностями гильзы и таблетки, а также размер частиц, поступающих от инициирующего устройства и пиротехнического состава таблетки. Информация о влиянии данных параметров на процесс зажигания важна для минимизации возможности неудачных запусков ложных тепловых целей.

Цель данной статьи заключается в разработке физико-математической модели процесса зажигания и вылета таблетки-излучателя из гильзы, а также в изучении влияния размера частиц, поступающих от инициирующего устройства и пиротехнического состава таблетки, и величины зазора между цилиндрическими поверхностями гильзы и таблетки на время зажигания торцевой поверхности таблетки.

Физическая постановка задачи

Таблетка-излучатель 3, расположенная в гильзе 2, показана на рис.1. Гильза с одного конца закрыта мембраной 4, которая открывается при достижении давления форсирования. В начальный момент времени с поверхности инициатора 1 поступают продукты сгорания, состоящие из газа-инициатора и инертных частиц. Между поверхностью таблетки и продуктами сгорания происходит теплообмен за счет радиации, кондукции от частиц и конвекции продуктов сгорания. При достижении поверхностью таблетки температуры зажигания в свободный объем начинают поступать продукты сгорания, состоящие из газа таблетки и частиц. После достижения на мембране давления форсирования мембрана вскрывается. При этом под действием динамического напора продуктов сгорания, вытекающих из свободного объема, таблетка начинает двигаться вдоль оси x и покидает гильзу.



Рис. 1. Внешний вид изделия: 1 – инициирующее устройство, 2 – корпус, 3 – таблетка-излучатель, 4 – мембрана

Fig. 1. Product design: 1, initiator; 2, cartridge case; 3, tablet-emitter; and 4, membrane

Будем рассматривать исследуемый процесс в рамках следующих допущений. Течение продуктов сгорания двумерное осесимметричное, продукты сгорания представляют собой вязкую сжимаемую многотемпературную и многоскоростную среду [5], состоящую из многокомпонентного газа (воздух, газ инициирующего устройства и газ от таблетки), частиц от инициирующего устройства и частиц от таблетки. Приход массы и энергии газа и частиц от горящей поверхности таблетки моделируется через источниковые члены в уравнениях сохранения [6].

Для оценки времени зажигания таблетки решается задача по подключению к горению поверхности таблетки-излучателя. Предполагается, что зажигание поверхности, т.е. включение ее в процесс горения, происходит постепенно после достижения температурой в данной точке некоторого критического значения. Температура поверхности обычно находится либо путем численного решения нестационарного уравнения теплопроводности [7, 8] либо путем решения обыкновенного дифференциального уравнения [9], полученного одним из интегральных методов [10, 11]. В данной работе используется второй способ как менее ресурсозатратный.

Процесс движения таблетки-излучателя в гильзе моделируется с помощью уравнения движения и с использованием технологии динамических сеток.

Определяющая система уравнений

Движение таблетки-излучателя моделируется следующей системой уравнений:

$$\frac{dV_t}{dt} = \frac{1}{m_t} \left(2\pi \int_0^{y_1} y p_t dy - \pi y_1^2 p_n \right), \quad \frac{dX_t}{dt} = V_t, \quad (1)$$

с начальными условиями $t = 0$, $V_t = 0$, $X_t = x_1$, где m_t – масса таблетки; p_t – давление на левом торце таблетки; p_n – давление снаружи гильзы.

Система уравнений, описывающая газодинамические процессы, происходящие внутри гильзы, за исключением области, занятой таблеткой, с соответствующими начальными условиями имеет вид:

– уравнение неразрывности для газа

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{V}_g) = S_{m,g}, \quad (2)$$

– уравнение сохранения для i -й компоненты газа

$$\frac{\partial \rho_g Y_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g Y_i \mathbf{V}_g) = \nabla \cdot (\rho_g D_{i,m} \nabla Y_i) + S_{i,g}, \quad (3)$$

где Y_i – массовая доля i -й компоненты газа: $i = 1$ – газ, поступающий от воспламенительного устройства, $i = 2$ – газ, поступающий с поверхности горящей таблетки,

$$p = \rho_g R T_g, \quad R = \sum_{i=1}^2 R_i Y_i + \left(1 - \sum_{i=1}^2 Y_i \right) R_3,$$

– уравнение неразрывности для частиц

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{V}_s) = S_{m,s}, \quad (4)$$

где $s = 1$ – частицы, поступающие от воспламенительного устройства, $s = 2$ – частицы, поступающие с поверхности горящей таблетки.

Объемная доля частиц и газа определяется из соотношений

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{10}}, \quad \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{20}}, \quad \alpha_g + \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

где ρ_{s0} – плотность материала частиц.

Уравнение сохранения импульса для газа:

$$\frac{\partial \rho_g \mathbf{V}_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{V}_g \mathbf{V}_g) + \alpha_g \nabla p = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_g + \sum_{s=1}^2 \mathbf{R}_{sg}, \quad (5)$$

где $\bar{\boldsymbol{\tau}}_g = \alpha_g \mu_g (\nabla \mathbf{V}_g + \nabla \mathbf{V}_g^T) - \alpha_g \frac{2}{3} \mu_g \nabla \cdot \mathbf{V}_g \cdot \bar{\mathbf{I}}$, α_g – объемная доля газа в смеси газа и частиц, μ_g – сдвиговая вязкость газа, $\bar{\boldsymbol{\tau}}_g$ – тензор вязких напряжений, $\bar{\mathbf{I}}$ – единичный тензор, p – давление газа.

Уравнение сохранения импульса для частиц:

$$\frac{\partial \rho_s \mathbf{V}_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{V}_s \mathbf{V}_s) + \alpha_s \nabla p = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_s - \mathbf{R}_{sg}, \quad (6)$$

где $\bar{\boldsymbol{\tau}}_s = \alpha_s \mu_s (\nabla \mathbf{V}_s + \nabla \mathbf{V}_s^T) - \alpha_s \frac{2}{3} \mu_s \nabla \cdot \mathbf{V}_s \cdot \bar{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{R}_{sg} = K_{sg} (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_g), \quad K_{sg} = \frac{\alpha_s \rho_s}{\tau_s} f,$

$$f = \frac{\text{Re}_{sg}}{24} C_D, \quad \tau_s = \frac{\rho_s d_s^2}{18 \mu_g}, \quad C_D = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_{sg}} (1 + 0.15 \text{Re}_{sg}^{0.687}), & \text{Re}_{sg} \leq 1000, \\ 0.44, & \text{Re}_{sg} > 1000. \end{cases}$$

Уравнение сохранения энергии для газа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g E_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{V}_g H_g) = \nabla \cdot (\alpha_g \lambda_g \nabla T_g) - p \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}_g \cdot \mathbf{V}_g) + \\ + \sum_{i=1}^3 h_{i,g} \rho_g D_{i,m} \nabla Y_i + \sum_{s=1}^2 (Q_{sg} + R_{sg} \mathbf{V}_g) + S_{h,g}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $H_g = \sum_{i=1}^3 h_{i,g} Y_i + \frac{\mathbf{V}_g^2}{2}, \quad h_{i,g} = h_{i,g}^0(T_{ref}) + \int_{T_{ref}}^T c_{p,i} dT, \quad E_g = H_g - \frac{\alpha_g p}{\rho_g}, \quad Q_{sg} = h_{sg} A_s (T_s - T_g)$

, $h_{sg} = \frac{\lambda_g}{d_s} \text{Nu}_{sg}, \quad A_s = \frac{6\alpha_p}{d_s}, \quad \text{Nu}_{sg} = 2 + 0.6 \text{Re}_{sg}^{1/2} \text{Pr}_g^{1/3}, \quad \text{Pr}_g = \frac{c_{p,g} \mu_g}{\lambda_g}, \quad D_{i,m} - \text{коэффициент диффузии } i\text{-й компоненты газа в смеси.}$

Уравнение сохранения энергии для частиц:

$$\frac{\partial \rho_s H_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{V}_s H_s) = \nabla \cdot (\alpha_s \lambda_s \nabla T_s) - p \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}_s \cdot \mathbf{V}_s) - Q_{sg} - \mathbf{R}_{sg} \cdot \mathbf{V}_s + S_{h,s} \quad (7)$$

где $H_s = h_s + \frac{\mathbf{V}_s^2}{2}, \quad h_s = h_s^0(T_{ref}) + \int_{T_{ref}}^T c_s dT, \quad S_{m,g} = (1 - z_2) \cdot \rho_{T2} u_{02} p^{\nu_2} \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \cdot \eta(T - T_*),$

z_2 – массовая доля частиц в таблетке, ρ_{T2} – плотность состава таблетки, u_{02} – коэффициент в законе горения состава таблетки, ν_2 – показатель степени в законе горения состава таблетки, $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$ – дельта функция Дирака, $\mathbf{x}_p$ – вектор положения горячей поверхности таблетки, $\eta(T - T_*)$ – единичная функция, T_* – температура зажигания поверхности таблетки.

Источниковые слагаемые имеют вид: $S_{1,g} = 0, \quad S_{2,g} = S_{m,g}, \quad S_{m,1} = 0, \quad S_{m,2} = \frac{z_2}{1 - z_2} \cdot S_{m,g},$

$S_{h,g} = S_{m,g} T_{p2} c_{p,g}, \quad S_{h,1} = 0, \quad S_{h,2} = S_{m,2} T_{p2} c_2, \quad \mathbf{V} = U \cdot \mathbf{i} + V \cdot \mathbf{j}.$

Граничные условия

Стенка: $\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_s = 0, \quad \nabla Y_i = 0, \quad \nabla T = 0.$

Выходная граница: $p = p_{out}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$ где $\varphi = \{\rho_s, \mathbf{V}_s, H_s\}.$

$$\text{Ось симметрии: } V_s = V_g = 0, \quad \frac{\partial U_g}{\partial y} = \frac{\partial U_s}{\partial y} = \frac{\partial H_g}{\partial y} = \frac{\partial H_s}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \rho_g}{\partial y} = \frac{\partial \rho_s}{\partial y} = \frac{\partial Y_i}{\partial y}.$$

Граница между инициирующим устройством и свободным объемом гильзы:

$$\rho_g U_g = (1 - z_1) \cdot \rho_{T1} u_{01} p^{v_1}, \quad V_g = 0, \quad \rho_1 = \frac{z_1}{1 - z_1} \cdot \rho_g, \quad V_1 = 0, \quad U_1 = U_g, \quad T_g = T_1 = T_{всп},$$

$$Y_1 = 1, \quad Y_2 = 0.$$

Температура поверхности топлива определяется из решения обыкновенного дифференциального уравнения, полученного методом интегральных соотношений с помощью аппроксимации профиля температуры внутри топлива экспоненциальной функцией

$$\frac{dT_w}{dt} = \frac{q_w^2}{\lambda_T \rho_T c_T (T_w - T_{wn})}, \quad (8)$$

с начальным условием: $T_w|_{t=0} = T_{wn}$, где $q_w = q_{conv} + q_{rad} + q_{cond}$, $q_{conv} = \alpha_{conv} (T - T_w)$, $q_{rad} = \varepsilon \sigma_0 (T^4 - T_w^4)$, $q_{cond} = \rho_{s0} V_s c_s (T_1 - T_w)$, ε – степень черноты газа, σ_0 – постоянная Стефана–Больцмана, c_s – теплоемкость вещества частицы, $\alpha_{conv} = 0.021 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}_g^{0.43} \lambda_g / D_{ef}$, $\text{Re} = \rho_g V_{m,g} D_{ef} / \mu_g$, $D_{ef} = 4S/\Pi$ – эффективный диаметр канала, S – площадь поперечного сечения канала, Π – омываемый периметр поперечного сечения канала.

Метод решения

Для моделирования поступательного движения таблетки излучателя в гильзе был использован метод Layering (генерация слоев), который достраивает расчетную сетку слоями в соответствии с движением таблетки. В результате получается расчетная сетка, состоящая из слоев прямоугольных ячеек заданного размера с постоянно меняющимся количеством ячеек [12]. Такой вид динамической сетки достаточно просто реализуется посредством пользовательских функций в ANSYS Fluent, применение которых позволяет перестраивать сетку на основе изменения геометрии модели (в результате решения уравнения движения для таблетки) в процессе расчета [13].

Для решения системы определяющих уравнений применялся SIMPLE-подобный метод, основанный на раздельном решении уравнений количества движения для каждой фазы (Phase Coupled SIMPLE) [14]. Для аппроксимации конвективных членов уравнения использовалась неявная противопоточная схема первого порядка точности. Для нахождения давления на гранях ячеек использовался метод PRESTO!

Обсуждение результатов

Длина таблетки принималась равной 72 мм, диаметр инициирующего устройства 10 мм, ширина зазора между торцом таблетки и гильзой 2 мм, диаметр гильзы 30 мм. Высота зазора между цилиндрическими поверхностями таблетки и гильзы варьировала в пределах от 0.5 до 2 мм, размеры частиц варьировали от $r = 1$ мкм до $r = 25$ мкм. Давление срыва мембраны принималось равным 8 атм.

Расчеты проводились при следующих данных для воспламенительного состава инициирующего устройства: $\rho_{T1} = 3220 \text{ кг/м}^3$, $v_1 = 0.408$, $u_{01} = 3.74 \cdot 10^{-4} \text{ м/(с} \cdot \text{Па}^{v_1})$, $z_1 = 0.499$, $T_{p1} = 3430 \text{ К}$; для газовой фазы: $k = 1.25$, $R_1 = 156.3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$; для пиротехнического состава таблетки: $\rho_{T2} = 1800 \text{ кг/м}^3$, $v_2 = 0.4$, $u_{02} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м/(с} \cdot \text{Па}^{v_2})$, $z_2 = 0.681$, $T_{p2} = 2035 \text{ К}$, $T_* = 1100 \text{ К}$, $\lambda_T = 1.77 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $c_T = 1030 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$; для газовой фазы: $k = 1.48$, $R_2 = 343 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

Для исследования численного решения на сеточную сходимость в качестве критерия было выбрано время зажигания t_{ig} части торцевой поверхности таблетки-излучателя, расположенной напротив инициирующего устройства. Расчеты проводились на последовательности сеток с шагом 1 мм (сетка 1), 0.5 мм (сетка 2) и 0.25 мм (сетка 3). Шаг по времени равнялся 10^{-5} с. Высота зазора между цилиндрическими поверхностями таблетки и гильзы равнялась 2 мм, размеры частиц были выбраны радиусом 1 мкм. На сетке 1 время зажигания t_{ig} составило 1.3 мс, на сетке 2 – 1.5 мс, на сетке 3 – 1.6 мс. Конечно-разностная сетка 2 была выбрана для дальнейших расчетов.

На рис. 2 представлены линии тока газа для различных положений таблетки, полученных для радиуса частиц 1 мкм и ширины цилиндрического зазора 2 мм. Видно, что начиная с момента времени $t = 5$ мс между торцами гильзы и таблетки формируется вихревая зона, отсесняемая от торца таблетки продуктами сгорания таблетки. По мере движения таблетки-излучателя к выходу из гильзы происходит перемещение в том же направлении вихревой зоны, левее которой образуется застойная зона. В центральной приосевой зоне свободного объема формируется струйное течение за счет продуктов сгорания, поступающих от инициатора.

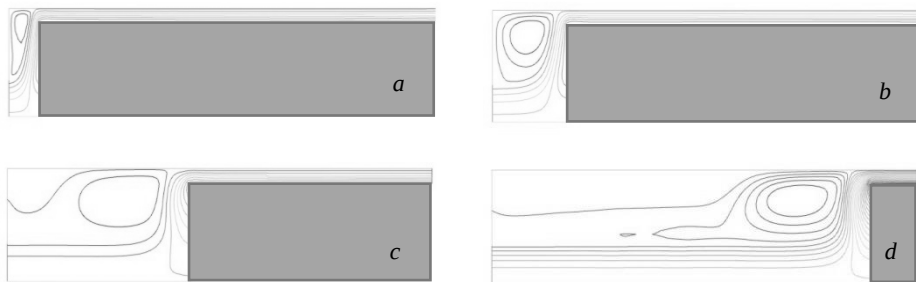


Рис. 2. Линии тока $d = 2 \text{ мм}$: $t = 5 \text{ мс}$ (a), $t = 10 \text{ мс}$ (b), $t = 22 \text{ мс}$ (c), $t = 40 \text{ мс}$ (d)

Fig. 2. Streamlines for $d = 2 \text{ mm}$ at $t = (a) 5$, (b) 10, (c) 22, and (d) 40 ms

Как видно из рис. 3, частицы радиусом 1 мкм увлекаются потоком газа и не оседают на торцевую поверхность таблетки-излучателя, что и затрудняет процесс прогрева таблетки. Для частиц радиусом 25 мкм характерны оседание и накопление частиц от инициатора на торце таблетки, а также более интенсивный по сравнению с мелкими частицами процесс прогрева торцевой части таблетки.

На рис. 4, а представлено влияние ширины зазора на время зажигания торцевой части таблетки-излучателя для радиуса частиц $r = 1 \text{ мкм}$. Время зажигания части таблетки, которая расположена напротив инициирующего устройства, практически не зависит от ширины зазора между цилиндрическими поверхно-

стями гильзы и таблетки. Для оставшейся части торцевой поверхности таблетки-излучателя уменьшение ширины зазора ведет к увеличению времени зажигания. При увеличении радиуса частиц до $r = 25$ мкм (рис.4, *b*) ширина зазора незначительно влияет на время зажигания торца, при этом время зажигания с более узким зазором является минимальным.



Рис. 3. Траектории частиц, исходящих от инициатора в момент времени 8 мс:
 $r = 1$ мкм (*a*), $r = 25$ мкм (*b*)

Fig. 3. Trajectories of the particles emitted from the initiator
at a time of 8 ms for $r = (a)$ 1 and (*b*) 25 μm

Расчеты показывают, что увеличение ширины зазора между гильзой и цилиндрической частью таблетки и увеличение размера частиц ведут к снижению времени зажигания торцевой поверхности таблетки, что связано с более благоприятными условиями теплообмена между продуктами сгорания и таблеткой.

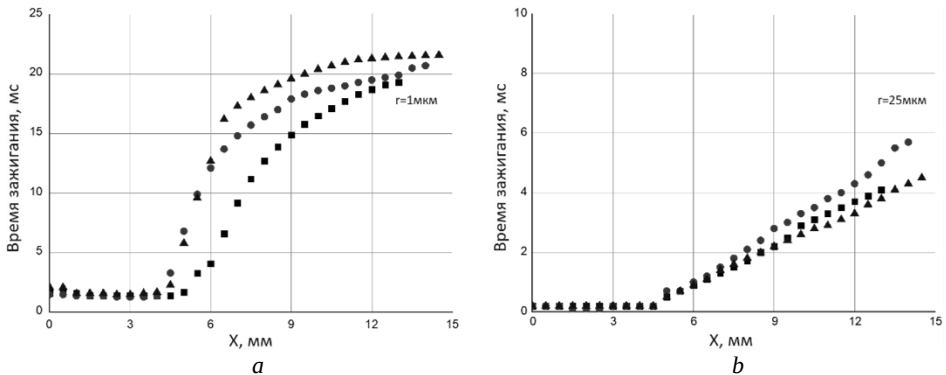


Рис. 4. Траектории частиц, исходящих от инициатора в момент времени 8 мс:
■ – $d = 2$ мм, ● – $d = 1$ мм, ▲ – $d = 0.5$ мм; $r = 1$ мкм (*a*), $r = 25$ мкм (*b*)

Fig. 4. Trajectories of the particles emitted from the initiator at a time of 8 ms:
 $d = 2$ mm (■), $d = 1$ mm (●), and $d = 0.5$ mm (▲) for $r = (a)$ 1 and (*b*) 25 μm

Размер частиц ($r = 1, 1.5, 5, 25$ мкм) оказывает существенное влияние на время зажигания торцевой поверхности таблетки-излучателя (рис. 5). Та приосевая часть торцевой поверхности, которая находится напротив иницирующего устройства, зажигается быстрее по сравнению с периферийной частью, что можно объяснить

существенным влиянием кондуктивного потока тепла от частиц инициатора. Уменьшение размера частиц ведет к увеличению времени зажигания периферийной части торцевой поверхности таблетки, что, по-видимому, связано с тем, что более мелкие частицы, как менее инертные, увлекаются потоком газа и не выпадают на периферийную часть торцевой поверхности таблетки.

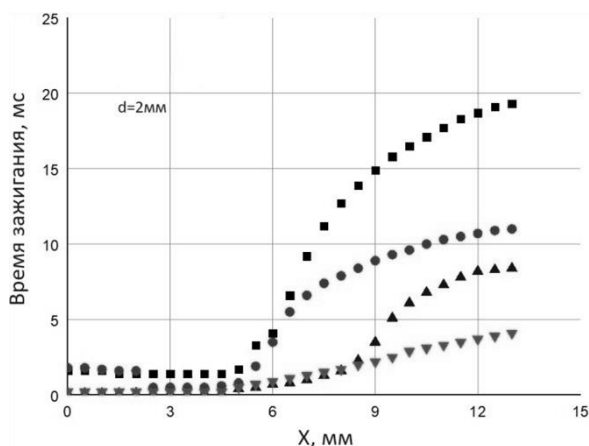


Рис. 5. Влияние размера частиц таблетки и инициатора на время зажигания торцевой части таблетки-излучателя: ■ – $r = 1$ мкм, ● – $r = 1.5$ мкм, ▲ – $r = 5$ мкм, ▼ – $r = 25$ мкм

Fig. 5. Effect of particle sizes of the tablet and initiator on the ignition time for the end part of the tablet–emitter: $r = 1$ μm (■), $r = 1.5$ μm (●), $r = 5$ μm (▲), and $r = 25$ μm (▼)

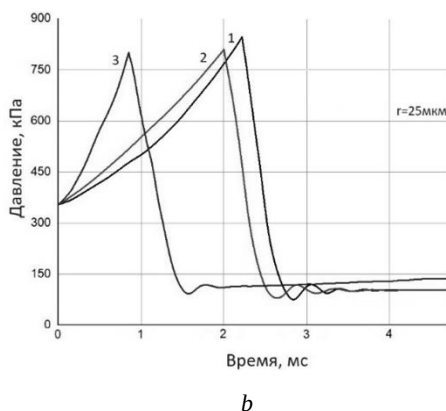
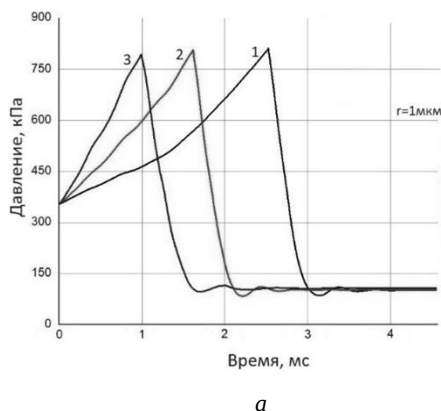


Рис. 6. Зависимость среднеобъемного давления в гильзе от времени:

1 – $d = 2$ мм, 2 – $d = 1$ мм, 3 – $d = 0.5$ мм; $r = 1$ мкм (a), $r = 25$ мкм (b)

Fig. 6. Time dependence of the average volume pressure in a cartridge case:

$d = (1) 2, (2) 1, \text{ and } (3) 0.5$ mm for $r = (a) 1$ and $(b) 25$ μm

Скорость подключения участков торцевой поверхности таблетки-излучателя к горению, а также свободный объем в гильзе влияют на скорость нарастания давления в гильзе. На рис. 6 приведены зависимости среднеобъемного давления в гильзе от времени для разных величин ширины цилиндрического зазора и разных

размеров частиц. После достижения давления срыва мембраны (8 атм) давление падает и устанавливается равным квазистационарному давлению. Уменьшение ширины цилиндрического зазора и увеличение размера частиц ведет к более быстрому нарастанию давления и, следовательно, к более раннему срыву мембраны. В то же время более узкий цилиндрический зазор затягивает время спада давления в гильзе после срыва мембраны, что ведет к увеличению скорости вылета таблетки из гильзы (рис. 7).

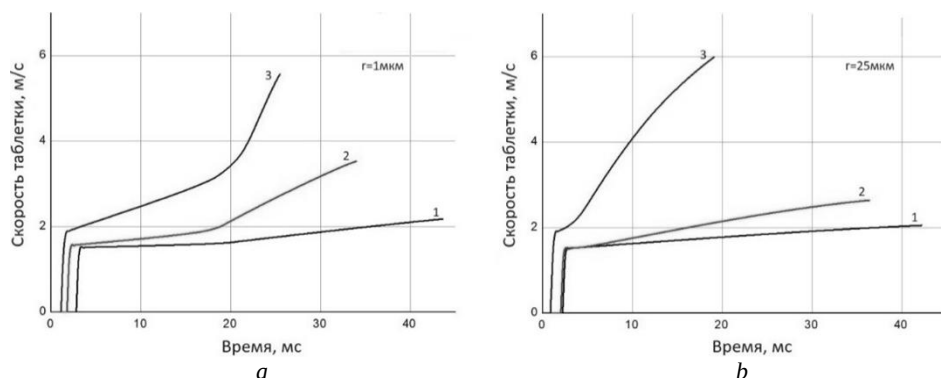


Рис. 7. Влияние ширины зазора на скорость движения таблетки:
1 – $d = 2$ мм, 2 – $d = 1$ мм, 3 – $d = 0.5$ мм; $r = 1$ мкм (a), $r = 25$ мкм (b)

Fig. 7. Effect of the gap size on the tablet velocity: $d = (1) 2$, (2) 1, and (3) 0.5 mm for $r = (a) 1$ and (b) 25 μm

Увеличение размера частиц в случае цилиндрического зазора 0.5 мм также ведет к росту скорости вылета таблетки из гильзы и не влияет на скорость вылета для зазора в 2 мм. Однако для зазора 1 мм увеличение размера частиц снижает скорость вылета таблетки.

Заключение

В рамках выполнения данного исследования установлено, что ширина зазора между цилиндрическими поверхностями гильзы и таблетки оказывает значительное влияние на процесс зажигания торцевой поверхности таблетки, проявляющееся в том, что увеличение ширины зазора способствует росту температуры торцевой поверхности таблетки и, следовательно, ведет к уменьшению времени зажигания.

Уменьшение размера частиц приводит к увеличению времени зажигания торцевой части таблетки. Данная зависимость важна при проектировании и создании систем зажигания, например для достижения определенных временных характеристик зажигания разных участков поверхности таблетки.

Уменьшение размера зазора между цилиндрическими поверхностями таблетки-излучателя и гильзы, а следовательно, и свободного объема в гильзе, ведет к увеличению скорости вылета таблетки-излучателя из гильзы.

Полученные результаты открывают перспективы для дальнейших исследований и разработок в области создания более эффективных систем зажигания. Улучшение временных характеристик зажигания и контроль над процессом зажигания могут привести к повышению надежности и эффективности этих систем.

Список источников

1. Вернидуб И.И., Пузырев Н.Г. Специалисты по взрывчатым веществам, пиротехнике и боеприпасам : биограф. энцикл. М. : АвиаРус-XXI, 2006. 702 с.
2. Шидловский А.А. Основы пиротехники. 4-е изд. М. : Машиностроение, 1973. 292 с.
3. Данилин Ю.Г., Назаров Н.А., Новикова Н.И. Взрывчатые вещества, пиротехника, средства инициирования в послевоенный период: Люди. Наука. Производство. М.–СПб : Гуманистика, 2001. 928 с.
4. Мельников В.Э. Современная пиротехника. М. : Наука, 2014. 480 с.
5. Qiang Li, Peijin Liu, Guoqiang He. Fluid–solid coupled simulation of the ignition transient of solid rocket motor // *Acta Astronautica*. 2015. V. 110. P. 180–190. doi: 10.1016/j.actaastro.2015.01.017
6. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics // *Key Engineering Materials*. 2016. V. 685. P. 114–118. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685. 114
7. Нугматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М. : Наука, 1987. Ч. I. 464 с.
8. Yingkun Li, Xiong Chen, Jinsheng Xu, Changsheng Zhou, Omer Musa. Three-dimensional multi-physics coupled simulation of ignition transient in a dual pulse solid rocket motor // *Acta Astronautica*. 2018. V. 146. P. 46–65. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.01.058
9. Архипов В.А., Бондарчук С.С., Бондарчук И.С., Золоторёв Н.Н., Козлов Е.А., Орлова М.П. Математическое моделирование утилизации головного обтекателя ракеты-носителя после его отработки // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 84. С. 52–67. doi: 10.17223/19988621/84/5
10. Goodman T.R Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer // *Advances in Heat Transfer* / T. Irvine, J. Hartnett (eds). New-York : Academic Press, 1964. V. 1. P. 51–122.
11. Соркин Р.Е. Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе. Внутренняя баллистика. М. : Наука, 1983. 288 с.
12. Yongtao Wang, Xiao-bing Zhang. Numerical investigation on muzzle flow characteristics for small combustion chamber with embedded propelled body // *Structures*. 2023. V. 50. P. 1783–1793. doi: 10.1016/j.istruc.2023.03.001
13. Yongtao Wang, Shukui Ding, Xiaobing Zhang. A novel structure to inhibit barrel erosion induced by thermal effects in a propulsion system // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2023. V. 147. Art. 106991. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2023.106991
14. Vasquez S.A., Ivanov V.A. A phase coupled method for solving multiphase problems on unstructured meshes // *Proceedings of the ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting (FEDSM2000)*, American Society of Mechanical Engineers. 2000. V. 251. P. 659–664.

References

1. Vernidub I.I., Puzyrev N.G. (2006) *Spetsialisty po vzryvchatym veshchestvam, pirotekhnike i boeprapasam. Biograficheskaya entsiklopediya* [Specialists in explosives, pyrotechnics, and ammunition. Biographical encyclopedia]. Moscow: AviaRus-XXI.
2. Shidlovskiy A.A. (1973) *Osnovy pirotekhniki* [Fundamentals of pyrotechnics]. Moscow: Mashinostroenie.
3. Danilin Yu.G., Nazarov N.A., Novikova N.I. (2001) *Vzryvchatye veshchestva, pirotekhnika, sredstva initsirovaniya v poslevoenny period: Lyudi. Nauka. Proizvodstvo* [Explosives, pyrotechnics, means of initiation in the post-war period: People. Science. Production]. Moscow – Saint Petersburg: Gumanistika.
4. Mel'nikov V.E. (2014) *Sovremennaya pirotekhnika* [Modern pyrotechnics]. Moscow: Nauka.
5. Li Q., Liu P., He G. (2015) Fluid–solid coupled simulation of the ignition transient of solid rocket motor. *Acta Astronautica*. 110. pp. 180–190. doi: 10.1016/j.actaastro.2015.01.017

6. Minkov L.L., Shrager E.R., Kiryushkin A.E. (2016) Two approaches for simulating the burning surface in gas dynamics. *Key Engineering Materials*. 685. pp. 114–118. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.114
7. Nigmatulin R.I. (1987) *Dinamika mnogofaznykh sred. Chast I*. [Dynamics of multiphase media. Part I]. Moscow: Nauka.
8. Li Y., Chen X., Xu J., Zhou C., Musa O. (2018) Three-dimensional multi-physics coupled simulation of ignition transient in a dual pulse solid rocket motor. *Acta Astronautica*. 146. pp. 46–65. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.01.058
9. Arkhipov V.A., Zolotarev E.A., Orlova M.P., Kozlov N.N., Bondarchuk I.S., Bondarchuk S.S. (2023) Matematicheskoe modelirovanie utilizatsii golovnogo obtekatelya rakety-nositelya posle ego otrabotki [Mathematical modeling of disposal of the payload fairing of a launch vehicle after completion]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 52–67. doi: 10.17223/19988621/84/5
10. Goodman T.R. (1964) Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer. *Advances in Heat Transfer*. 1. pp. 51–122. doi: 10.1016/S0065-2717(08)70097-2
11. Sorkin R.E. (1983) *Teoriya vnutrikamernykh protsessov v raketnykh tekhnologiyakh na tverdom toplive. Vnutrennyaya ballistika* [Theory of intra-chamber processes in solid fuel rocket systems. Internal ballistics]. Moscow: Nauka.
12. Wang Y., Zhang X. (2023) Numerical investigation on muzzle flow characteristics for small combustion chamber with embedded propelled body. *Structures*. 50. pp. 1783–1793. doi: 10.1016/j.istruc.2023.03.001
13. Wang Y., Ding S., Zhang X. (2023) A novel structure to inhibit barrel erosion induced by thermal effects in a propulsion system. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 147. Article 106991. doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2023.106991
14. Vasquez S.A., Ivanov V.A. (2000) A phase coupled method for solving multiphase problems on unstructured meshes. *Proceedings of the ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting (FEDSM2000)*, American Society of Mechanical Engineers. 251. pp. 659–664.

Сведения об авторах:

Гимаева Наталья Радиковна – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: natalia.gimaeva@inbox.ru

Миньков Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Information about the authors:

Gimaeva Nataliya R. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: natalia.gimaeva@inbox.ru

Min'kov Leonid L. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 08.12.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 08.12.2023; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 531.36

doi: 10.17223/19988621/89/7

Демпфирование внеплоскостных колебаний сферического объекта при его бесконтактной транспортировке ионным потоком

Александр Сергеевич Ледков¹, Алексей Александрович Белов²

^{1,2} Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева,
Самара, Россия

¹ ledkov@inbox.ru

² belov-developer@mail.ru

Аннотация. Исследуется процесс бесконтактной транспортировки объекта космического мусора сферической формы под воздействием ионного потока, генерируемого двигателем активного космического аппарата. Найден закон оптимального управления тягой двигателя активного космического аппарата, позволяющий демпфировать колебания центра масс космического мусора в направлении, перпендикулярном плоскости орбитального движения. Проведено численное моделирование спуска, подтверждающее корректность найденного закона.

Ключевые слова: космический мусор, бесконтактная транспортировка, ионный поток, закон управления, метод Беллмана

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00160, <https://rscf.ru/project/22-19-00160/>

Для цитирования: Ледков А.С., Белов А.А. Демпфирование внеплоскостных колебаний сферического объекта при его бесконтактной транспортировке ионным потоком // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 89–102. doi: 10.17223/19988621/89/7

Original article

Damping of out-of-plane oscillations of a spherical object during contactless transportation by an ion beam

Aleksandr S. Ledkov¹, Aleksey A. Belov²

^{1,2} Samara National Research University, Samara, Russian Federation

¹ ledkov@inbox.ru

² belov-developer@mail.ru

Abstract. This paper is devoted to the problem of space debris removal from near-Earth orbits. The ion-beam shepherd concept is used as the basis for this study. A spherical

space debris object is transported by an ion beam generated by an active spacecraft engine. The relative motion of space debris with respect to an active spacecraft is studied. The active spacecraft is supposed to be a material point moving in a circular orbit. The center of mass of space debris can oscillate with respect to the orbit plane during transportation. The purpose of this study is to derive the optimal control law for the thrust force of an active spacecraft engine that provides the fastest damping of out-of-plane oscillations. The Bellman equation is used to develop the optimal control law. The numerical simulation of space debris deorbiting reveals the accuracy of the proposed control law. It is shown that periodic engine shutdown does not significantly increase the deorbiting time.

Keywords: space debris, contactless transportation, ion beam, control law, Bellman equation

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-19-00160, <https://rscf.ru/en/project/22-19-00160/>).

For citation: Ledkov, A.S., Belov, A.A. (2024) Damping of out-of-plane oscillations of a spherical object during contactless transportation by an ion beam. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 89–102. doi: 10.17223/19988621/89/7

Введение

Космический мусор – это искусственно созданные объекты, находящиеся в околоземном космическом пространстве. К ним относятся нефункционирующие спутники, ступени ракет, куски обшивки космических аппаратов [1]. Особую опасность представляет крупногабаритный космический мусор, размер которого превышает в диаметре 10 см. Попадание такого объекта в космический аппарат может вывести его из строя и при неблагоприятном стечении обстоятельств запустить цепь столкновений с другими орбитальными объектами. Это может привести к резкому росту числа объектов космического мусора, что поставит под угрозу использование космического пространства в практических целях [2]. Данную проблему предлагается решать уводом космического мусора в низкие слои атмосферы либо на специальные орбиты захоронения.

В настоящее время в научной литературе обсуждается несколько способов увода космического мусора. Они делятся на контактные и бесконтактные [3]. Первые подразумевают прямой механический контакт с объектом космического мусора и требуют применения специальных роботов-манипуляторов [4], гарпунов [5] или сетей [6]. Однако захват неуправляемого объекта в космосе является довольно сложной и небезопасной задачей. Бесконтактная транспортировка осуществляется за счет оказания дистанционного силового воздействия на космический мусор и не требует стыковки с ним. На низких околоземных орбитах возможно использование ионного потока [7] и лазера [8]. На геостационарной орбите применимы способы увода с помощью электростатического [9] и гравитационного воздействия [10].

В данной работе моделируется процесс транспортировки космического мусора с помощью воздействия на него ионным потоком. Суть метода заключается в следующем: активный космический аппарат движется на некотором безопасном расстоянии от космического мусора и «обдувает» его потоком частиц, генерируемых электрореактивным двигателем. Врезаясь в поверхность объекта, частицы

оказывают на него силовое воздействие, которое тормозит космический мусор и позволяет уменьшить высоту его орбиты. Проблемы, возникающие в процессе транспортировки, исследуются в статье [11].

Задаче управления активным космическим аппаратом в процессе бесконтактной ионной транспортировки посвящены работы [12, 13]. В статье [14] описана проблема возникновения колебаний в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, в процессе операции увода космического мусора. Был предложен способ их демпфирования за счет изменения направления оси ионного потока. Для этого требуется переориентация активного космического аппарата в процессе транспортировки, что является довольно энергозатратной задачей [15], либо установка, генерирующая поток двигателя на поворотную платформу, что приведет к усложнению конструкции активного космического аппарата.

В настоящей работе предлагается демпфировать внеплоскостные колебания космического мусора за счет изменения силы тяги генерирующего ионный поток двигателя активного космического аппарата без изменения его направления. Цель работы заключается в поиске оптимального по быстродействию закона управления силой тяги двигателя, обеспечивающего демпфирование этих колебаний. Предполагается, что активный космический аппарат является материальной точкой и движется по круговой орбите. Объект космического мусора имеет сферическую форму, и его центр масс находится в геометрическом центре. Смещение сферы из плоскости орбиты мало. Для описания силы, действующей на космический мусор, используются приближенные формулы, полученные в работе [16]. Для достижения поставленной цели будет исследована математическая модель движения системы, состоящей из активного космического аппарата и объекта космического мусора. На основе линеаризованного уравнения, описывающего движение в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, с помощью метода Беллмана будет найдено оптимальное по быстродействию управление и проведено моделирование процесса транспортировки объекта космического мусора.

Математическая модель

Для описания движения космического мусора относительно активного космического аппарата введем орбитальную систему координат $Axyz$ с началом в центре масс активного космического аппарата (рис. 1). Ось Ax направлена вдоль вектора положения активного космического аппарата. В рассматриваемом случае для круговой орбиты ось Ay направлена перпендикулярно оси Ax в сторону, противоположную орбитальному движению так, что вектор скорости и ось Ay составляют угол более 90° . Ось Az дополняет систему координат $Axyz$ до правой.

Движение космического мусора относительно активного космического аппарата описывается следующими уравнениями [16]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = \frac{F_{Bx}}{m_B} - \frac{F_{Ax}}{m_A}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{F_{By}}{m_B} - \frac{F_{Ay}}{m_A}, \\ \ddot{z} + n^2z = \frac{F_{Bz}}{m_B} - \frac{F_{Az}}{m_A}, \end{cases} \quad (1)$$

где x, y и z – координаты центра масс объекта космического мусора в орбитальной системе координат; m_A и m_B – массы активного космического аппарата и космического мусора соответственно; F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az} – силы, действующие на активный космический аппарат, F_{Bx}, F_{By}, F_{Bz} – силы, действующие на объект космического мусора вдоль осей Ox, Oy и Oz соответственно; $n = \sqrt{\mu r^{-3}}$ – средняя угловая скорость вращения активного космического аппарата вокруг Земли; r – модуль вектора положения активного космического аппарата.

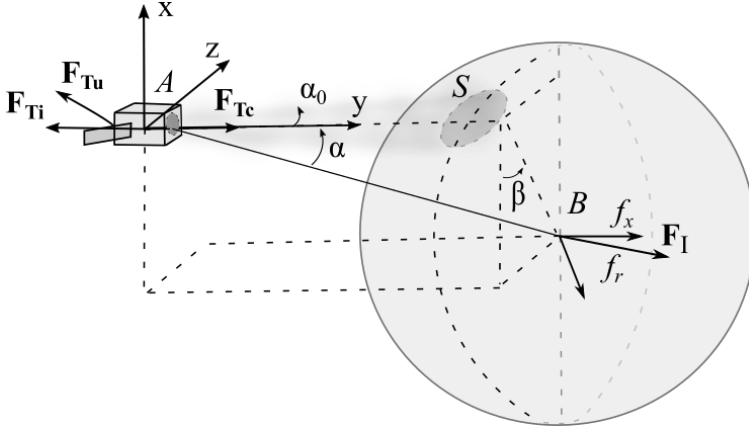


Рис. 1. Механическая система: A – активный космический аппарат; B – объект космического мусора; S – область воздействия ионного потока; F_{Ti}, F_{Tu}, F_{Tc} – силы, действующие на активный космический аппарат; F_I – вектор силы ионного потока, действующей на космический мусор; f_x, f_r – компоненты вектора F_I ; α_0 – угол полураствора ионного потока
Fig. 1. Mechanical system: A is the active spacecraft; B are the space debris; S is the area under ion beam effect; F_{Ti}, F_{Tu} , and F_{Tc} are the forces acting on the spacecraft; F_I is the vector of the ion beam force acting on the space debris; f_x and f_r are the components of F_I vector; and α_0 is the ion beam divergence angle

Вектор силы ионного потока на космический мусор имеет вид:

$$\mathbf{F}_I = [-F_{Ti} f_r \cos \beta, F_{Ti} f_x, F_{Ti} f_r \sin \beta]^T, \quad (2)$$

где F_{Ti} – сила тяги электрореактивного двигателя, f_r, f_x – радиальные и касательные проекции нормированных сил воздействия ионного потока, определяемые выражениями [16]

$$f_r = (1 - \eta_B) \left(\frac{3\chi^2}{1 - \chi^2 \tan^2 \alpha_0} \alpha + O(\alpha^4) \right), \quad (3)$$

$$f_x = \eta_B \left(1 - \frac{9\chi^2 (\chi^2 \tan^4 \alpha_0 - \tan^2 \alpha_0 + 2)}{2 \tan^2 \alpha_0 (1 - \chi^2 \tan^2 \alpha_0)} \alpha^2 + O(\alpha^3) \right), \quad (4)$$

где η_B – коэффициент, определяемый выражением

$$\eta_B = 1 - \exp \left(-\frac{3\chi^2}{1 - \chi^2 \tan^2 \alpha_0} \right), \quad (5)$$

где α_0 – угол полураствора конуса, внутри которого сосредоточено 95% ионов потока [17], $\chi = R_{sp} (\rho \tan \alpha_0)^{-1}$, R_{sp} – радиус сферы. Предполагается, что угол α_0 достаточно мал и все частицы достигают поверхности сферического космического мусора. Углы α и β определяются следующими соотношениями:

$$\cos \alpha = \frac{y}{\rho}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{\rho}, \quad \cos \beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \sin \beta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad (6)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Предполагается, что активный космический аппарат сохраняет свою ориентацию в процессе транспортировки, и ось ионного потока остается все время параллельной оси Oy . Двигатель, генерирующий ионный поток, создает тягу F_{Ti} . Для того чтобы активный космический аппарат оставался около объекта космического мусора, эта тяга должна быть компенсирована противоположно направленным двигателем F_{TC} . Результирующая сила, создаваемая этими двумя двигателями, имеет в орбитальной системе координат проекции

$$F_x^A = 0, \quad F_y^A = F_{TC} - F_{Ti} = \frac{m_A}{m_B} F_{Ti} n_{B0}, \quad F_z^A = 0, \quad (7)$$

где $\eta_{B0} = 1 - \exp\left(-\frac{3R_{sp}^2}{(y^* - R_{sp}^2) \tan^2 \alpha_0}\right)$ – коэффициент, характеризующий эффек-

тивность передачи силового импульса для положения космического мусора, заданного координатами $x = 0$, $y = y^*$, $z = 0$. Это положение космического мусора является неустойчивым, и для его поддержания требуется корректировка положения активного космического аппарата в процессе транспортировки. При наличии датчиков, определяющих положение и скорость активного космического аппарата относительно космического мусора, эту задачу можно решить с помощью подруливающих двигателей, создающих тягу $F_{Tu} = [F_x^u, F_y^u]^T$ во взаимно перпендикулярных направлениях в плоскости орбиты. В работе [18] показано, что для стабилизации движения по координатам x и y достаточно использовать двигатель, генерирующий тягу в направлении оси Oy :

$$\begin{cases} F_x^u = 0, \\ F_y^u = m_A n^2 k_{px} x + m_A n k_{vx} \dot{x} + m_A n^2 k_{py} (y - y^*) + m_A n k_{vy} \dot{y}, \end{cases} \quad (8)$$

где y^* – требуемое расстояние между активным космическим аппаратом и космическим мусором; k_{px} , k_{vx} , k_{py} , k_{vy} – коэффициенты управления тягой.

Силы, входящие в правую часть уравнений (1), будут определяться следующим образом:

$$F_{Ax} = F_x^u, \quad F_{Ay} = F_y^u + F_y^A, \quad F_{Az} = 0, \quad (9)$$

$$F_{Bx} = F_x^I, \quad F_{By} = F_y^I, \quad F_{Bz} = F_z^I. \quad (10)$$

Подставляя правые части (9), (10) в уравнения (1), получим систему уравнений движения механической системы

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = -\frac{F_{Ti} f_r \cos \beta}{m_B}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = n^2k_{px}x + nk_{vx}\dot{x} + n^2k_{py}(y - y^*) + nk_{vy}\dot{y} + \frac{F_{Ti} f_x}{m_B} - \frac{F_{Ti} n_{B0}}{m_B}, \\ \ddot{z} + n^2z = \frac{F_{Ti} f_r \sin \beta}{m_B}. \end{cases} \quad (11)$$

Для поиска коэффициентов управления тягой подруливающих двигателей k_{px} , k_{vx} , k_{py} , k_{vy} , входящих в (8), можно воспользоваться теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению. Подставим (3), (4), (6) в уравнения (11) и линеаризуем правые части первых двух уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = bx, \\ \ddot{y}_1 + 2n\dot{x} = nk_{vx}\dot{x} + n^2k_{px}x + nk_{vy}\dot{y}_1 + (n^2k_{py} + c)y_1, \end{cases} \quad (12)$$

где $y_1 = y - y^*$, $b = -\frac{3R_{sp}^2 \cot^2 \alpha_0}{(y^{*2} - R_{sp}^2)m_B y^*} \exp\left(\frac{3R_{sp}^2 \cot^2 \alpha_0}{(R_{sp}^2 - y^{*2})}\right)$, $c = 2b \frac{y^{*2}}{y^{*2} - R_{sp}^2}$.

Запишем систему (12) в матричной форме $q' = Aq$, где $q = [x, y_1, \dot{x}, \dot{y}_1]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 + b & 0 & 0 & 2n \\ n^2k_{px} & n^2k_{py} + c & nk_{vx} - 2n & nk_{vy} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Для асимптотической устойчивости положения $x = 0$, $y_1 = 0$ нужно подобрать коэффициенты управления двигателями таким образом, чтобы корни характеристического многочлена

$$\begin{aligned} \lambda^4 - \lambda^3 k_{vy} n - \lambda^2 (b + c + (2k_{vx} + k_{py} - 1)n^2) + \lambda n (bk_{vy} + (3k_{vy} - 2k_{px})n^2) + \\ + (b + 3n^2)(c + k_{py}n^2) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

имели отрицательные вещественные части. Эта задача может быть решена численно.

Поиск закона оптимального управления силой тяги

Рассмотрим последнее уравнение системы (11). Будем решать задачу о нахождении оптимального по быстродействию управления силой тяги двигателя, генерирующего ионный поток, которое позволит перевести изображающую точку из некоторого начального положения $(z_0, \dot{z}_0)$ в точку $(0, 0)$. Используем принцип Беллмана [19]. Зафиксируем координаты $x = x^* = 0$, $y = y^*$ и разложим третье уравнение системы (11) в ряд Маклорена по z :

$$\ddot{z} = -\frac{3e^{\left(\frac{3R_{sp}^2 \cot^2 \alpha_0}{R_{sp}^2 - x_*^2 - y_*^2}\right)} F_{Ti} R_{sp}^2 \arccos\left(\frac{y_*}{\sqrt{x_*^2 + y_*^2}}\right) \cot^2 \alpha_0}{m_B x_* (x_*^2 + y_*^2 - R_{sp}^2)} z - n^2 z + O(z)^2. \quad (15)$$

Обозначим коэффициент

$$a = \frac{3e^{\left(\frac{3R_{sp}^2 \cot^2 \alpha_0}{x_*^2 + y_*^2 - R_{sp}^2}\right)} R_{sp}^2 \arccos\left(\frac{y_*}{\sqrt{x_*^2 + y_*^2}}\right) \cot^2 \alpha_0}{m_B x_* (x_*^2 + y_*^2 - R_{sp}^2)}. \quad (16)$$

Отбрасывая нелинейные члены, перепишем (15) с учетом (16) в виде:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -n^2 z_1 - u a z_1, \end{cases} \quad (17)$$

где $z_1 = z$, $z_2 = \dot{z}$ – компоненты вектора состояния $\mathbf{z}$; $F_T = u(z_1, z_2, t) F_{\max}$ – управление, $u(z_1, z_2, t) \in [0, 1]$, $F_{\max}$ – максимальная сила тяги двигателя, $t \in [0, T]$. С учетом введенных замен конечное положение системы определяется вектором $\mathbf{z}_T = (0, 0)$. Функционал качества управления имеет вид:

$$J = \int_0^T dt, \quad \forall \mathbf{z}_0 \in R. \quad (18)$$

Составим уравнение Беллмана и граничное условие:

$$\min_{u \in [0, 1]} \left\{ \frac{\partial \phi^B}{\partial t} + \frac{\partial \phi^B}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial \phi^B}{\partial z_2} (-n^2 - u a) z_1 + 1 \right\} = 0, \quad \phi^B(T, \mathbf{z}_T) = 0. \quad (19)$$

Так как все траектории системы должны попасть в точку $z = (0, 0)$ при $t = T$, то граничное условие определено только в этой точке. Найдем структуру оптимального управления из условия минимума выражения в фигурных скобках в (19):

$$u(z_1, z_2, t) = -\text{sign}\left(\frac{\partial \phi^B}{\partial z_2} z_1\right). \quad (20)$$

Выражение (20) говорит о том, что управление будет релейным, т.е. будет обеспечиваться периодическим включением ($u = 1$) и выключением ($u = 0$) двигателя. При $u = 1$ найдем решение уравнения (19):

$$\phi^B = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{a}{n^2} \right)^2 z_1^2 + z_2^2 \right) - t. \quad (21)$$

Функция (21) удовлетворяет уравнению Беллмана (19) при

$$\frac{\partial \phi^B}{\partial z_2} z_1 = -z_1 z_2 > 0. \quad (22)$$

Это условие выполняется для точек $(z_1, z_2) \in M_1$, где область M_1 определяется как $M_1 = ((z_1 > 0 \cap z_2 > 0) \cup (z_1 < 0 \cap z_2 < 0))$. В области $M_2 = ((z_1 \geq 0 \cap z_2 \leq 0) \cup (z_1 \leq 0 \cap z_2 \geq 0))$ выполняется условие $\frac{\partial \phi^B}{\partial z_2} = 0$, соответствующее случаю $u = 0$.

Искомое оптимальное управление имеет вид:

$$u = \begin{cases} 1, & (z_1, z_2) \in M_1, \\ 0, & (z_1, z_2) \in M_2. \end{cases} \quad (23)$$

На рис. 2 показаны области M_1, M_2 и пример фазовых траекторий, полученных при $u = 1$ и $u = 0$.

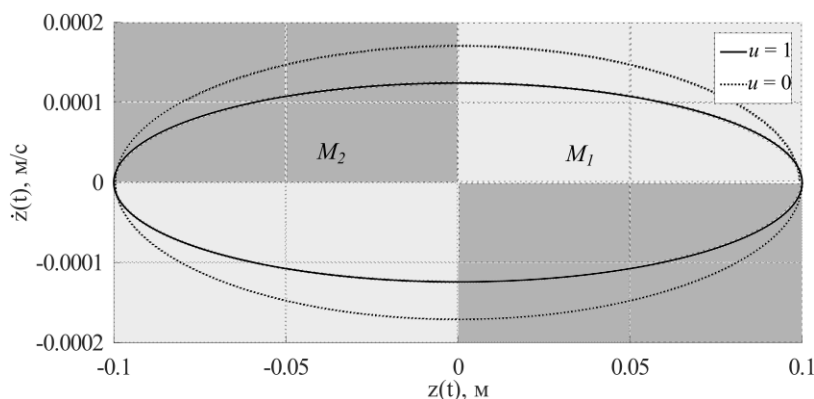


Рис. 2. Фазовые траектории при $u = 1$ и $u = 0$. В области M_1 двигатель включен, в области M_2 – выключен

Fig. 2. Phase trajectories for $u = 1$ and $u = 0$. The ion engine is turned on in area M_1 and off in area M_2

Полученное управление является оптимальным для случая фиксированных координат x и y . В следующем разделе с помощью численного моделирования будет показано, что предлагаемое управление (23) обеспечивает демпфирование внеплоскостных колебаний объекта и в случае использования исходной системы уравнений (11).

Численное моделирование

Рассмотрим систему, представленную на рис. 1 с параметрами из таблицы. Проведем численное моделирование спуска объекта космического мусора с высоты $h_0 = 500$ км до $h_k = 100$ км.

Параметры механической системы

Параметры	Значение
Радиус сферы R_{sp} , м	2
Масса космического аппарата m_A , кг	500
Масса космического мусора m_b , кг	5 000
Угол полураствора ионного потока α_0 , °	10
Требуемое расстояние y^* , м	10
Максимальная сила тяги двигателя F_{max} , Н	0.1
Эффективная скорость истечения рабочего тела (ксенон) двигателей V_{eff} , м/с	71 580

Для этого проинтегрируем систему уравнений (11) при начальных условиях $x(0) = 0.001$ м, $y(0) = 10.01$ м, $z(0) = 0.05$ м, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$. (24)

В качестве коэффициентов управления выберем $k_{px} = 3$, $k_{vx} = -4$, $k_{py} = 1$, $k_{vy} = -1$. В этом случае корни многочлена (14) имеют отрицательные вещественные части $\lambda_{1,2} = -0.000351 \pm 0.003i$, $\lambda_{3,4} = -0.000203 \pm 0.005i$, а значит, положение $x = 0$, $y = y^*$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Для оценки затрат топлива, необходимых для транспортировки, воспользуемся формулой, полученной в [20]:

$$\dot{m}_T = \dot{m}_{Ti} + \dot{m}_{Tc} + \dot{m}_{Tu} = \frac{|\mathbf{F}_{Ti}| + |\mathbf{F}_{Tc}| + |\mathbf{F}_{Tu}|}{V_{eff}}, \quad (25)$$

где m_{Ti} – масса топлива, затраченного двигателем, генерирующим ионный поток, m_{Tc} – масса топлива, затраченного компенсирующим двигателем, m_{Tu} – масса топлива, затраченного подруливающим двигателем, m_T – суммарная масса топлива, затраченного в процессе транспортировки.

Сравним два случая. В первом случае транспортировка будет осуществлена с постоянной по величине силой тяги $F_{Ti} = F_{\max}$ двигателя. Во втором случае будем использовать закон управления (23). Результаты моделирования представлены на рис. 3–5.

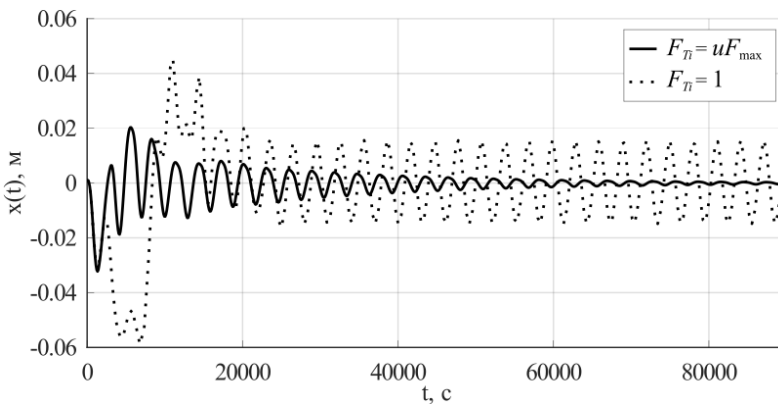


Рис. 3. Зависимость координаты $x(t)$ от времени при управляемом движении (сплошная линия) и неуправляемом движении (точечная линия)
Fig. 3. Relative position of time dependences $x(t)$ for the controlled (solid line) and uncontrolled (dotted line) motion

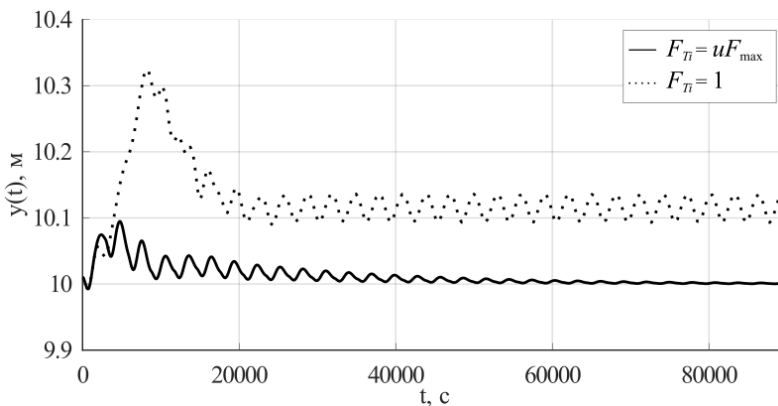


Рис. 4. Зависимость координаты $y(t)$ от времени при управляемом движении (сплошная линия) и неуправляемом движении (точечная линия)
Fig. 4. Relative position of time dependences $y(t)$ for the controlled (solid line) and uncontrolled (dotted line) motion

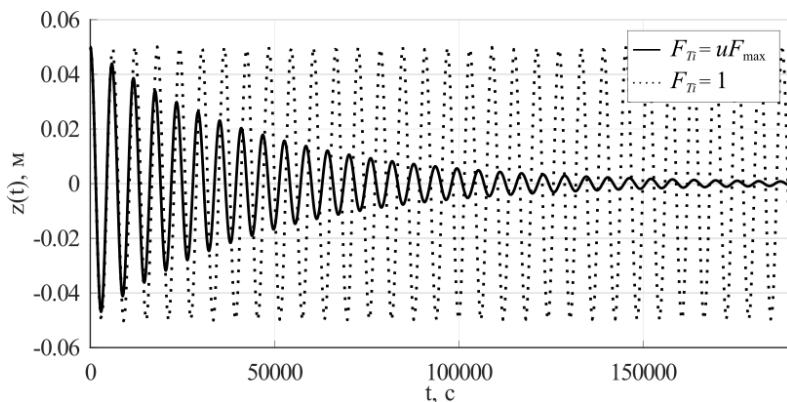


Рис. 5. Зависимость координаты $z(t)$ от времени при управляемом движении (сплошная линия) и неуправляемом движении (точечная линия)
Fig. 5. Relative position of time dependences $z(t)$ for the controlled (solid line) and uncontrolled (dotted line) motion

Из рис. 3, 4 видно, что при транспортировке без управления тягой $F_{Ti} = F_{\max}$ наблюдаются колебания вдоль координаты z . Наличие этих колебаний приводит к тому, что управление (8) неспособно перевести объект космического мусора в требуемое положение $x = 0$, $y = y^*$. При использовании управления (23) совместно с (8) наблюдается демпфирование колебаний по всем направлениям.

Задача демпфирования колебаний космического мусора была сведена к довольно простой математической модели, которая позволила с помощью известных математических методов получить закон оптимального управления. При приближении к реальной ситуации неизбежно возникают ошибки, связанные с неточными показаниями датчиков, измеряющих положение и скорость активного космического аппарата относительно космического мусора.

Построим численно область в пространстве начального положения и скорости $(z_0, \dot{z}_0)$, для которой управление (23) позволяет перевести изображающую точку в начало координат (рис. 6). Равномерно разобьем диапазоны $z_0 \in [-0.15, 0.15]$ с шагом 0.002 и $\dot{z}_0 \in [-0.00015, 0.00015]$ с шагом 0.000001. Взяв полученные точки в качестве начальных условий, будем численно интегрировать систему уравнений (11), используя закон управления (23). Если в ходе управляемого движения точка (x, y, z) последовательно приближается к положению равновесия $(0, y^*, 0)$, т.е. максимумы функции $\sqrt{x^2 + (y - y^*)^2 + z^2}$ уменьшаются с течением времени, то предлагаемое управление позволяет решить рассматриваемую задачу. Такая точка $(z_0, \dot{z}_0)$ показана на диаграмме (см. рис. 6) серым цветом (область М). Если с течением времени максимумы функции $\sqrt{x^2 + (y - y^*)^2 + z^2}$ увеличиваются, то управление неэффективно. Такие точки показаны на диаграмме белым цветом.

Поскольку при спуске с управлением u двигатель, генерирующий ионный поток, периодически выключается, то изменится время транспортировки. В рассматриваемом примере время спуска с высоты 500 км до 100 км без использова-

ния управления при силе тяги $F_{Ti} = 0.1 \text{ Н}$ составляет 138 дней [20]. Всего за время транспортировки будет израсходовано приблизительно 33.56 кг топлива.

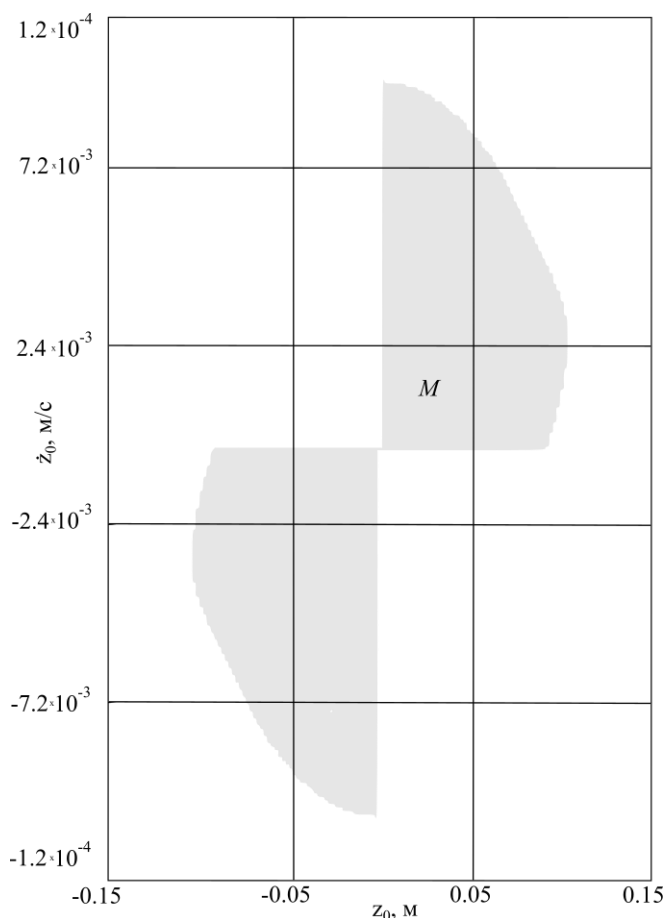


Рис. 6. Область M устойчивого управления

Fig. 6. Stable control area M

При спуске с использованием управления (23) $F_{Ti} = F_{\max}$ и процесс транспортировки потребует 32.75 кг топлива и займет 139 дней.

Заключение

В работе рассмотрен процесс транспортировки объекта космического мусора сферической формы с помощью ионного потока. Исследовано движение центра масс космического мусора относительно активного космического аппарата. С помощью метода Беллмана найдено оптимальное по быстродействию управление, обеспечивающее демпфирование колебаний активного космического аппарата в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты. Проведено численное моделирование спуска объекта космического мусора с орбиты, результаты которого

показали корректность работы закона управления. Выявлено, что периодическое выключение двигателя, генерирующего ионный поток, незначительно влияет на время транспортировки. Полученные результаты дают очень грубую оценку по затратам топлива и предназначены для иллюстрации перспективности предлагаемого закона управления при транспортировке космического мусора ионным потоком. При подготовке конкретных миссий требуются разработка более точных математических моделей и проведение экспериментальных исследований с целью верификации и валидации полученных результатов.

Список источников

1. Вениаминов С.С., Червонов А.М. Космический мусор – угроза человечеству // Механика, управление и информатика. 2012. № 4. С. 2–191.
2. Kessler D.J., Cour-Palais B.G. Collision frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt // Journal of Geophysical Research: Space Physics. 1978. V. 83 (A6). P. 2637–2646. doi: 10.1029/JA083iA06p02637
3. Ledkov A., Aslanov V. Review of contact and contactless active space debris removal approaches // Progress in Aerospace Sciences. 2022. V. 134. Art. 100858. doi: 10.1016/j.paerosci.2022.100858
4. Zhang W., Li F., Li J., Cheng Q. Review of On-Orbit Robotic Arm Active Debris Capture Removal Methods // Aerospace. 2023. V. 10 (1). Art. 13. doi: 10.3390/aerospace10010013
5. Sizov D.A., Aslanov V.S. Optimal thrust control during tether deployment after harpoon capture of space debris // AIP Conference Proceedings. AIP Publishing LLC. 2021. V. 2318 (1). Art. 050005. doi: 10.1063/5.0035876
6. Huang W., He D., Li Y., Zhang D., Zou H., Liu H., Yang W., Qin L., Fei Q. Nonlinear dynamic modeling of a tether-net system for space debris capture // Nonlinear Dynamics. 2022. V. 110 (3). P. 2297–2315. doi: 10.1007/s11071-022-07718-7
7. Bombardelli C., Pelaez J. Ion beam shepherd for contactless space debris removal // Journal of guidance, control, and dynamics. 2011. V. 34 (3). P. 916–920. doi: 10.2514/1.51832
8. Fang Y. Dynamic deorbit of small-sized space debris in near-Earth orbit in view of space-based pulse laser // Journal of Laser Applications. 2022. V. 34 (2). Art. 022018. doi: 10.2351/7.0000662
9. Aslanov V.S. Exact solutions and adiabatic invariants for equations of satellite attitude motion under Coulomb torque // Nonlinear Dynamics. 2017. V. 90. P. 2545–2556. doi: 10.1007/s11071-017-3822-5
10. Aslanov V.S. Gravitational trap for space debris in geosynchronous orbit // Journal of Spacecraft and Rocket. 2019. V. 56 (4). P. 1277–1281. doi: 10.2514/1.A34384
11. Colpari R., Sajjad N., Kiran A., Chakraborty M., Tripathi V., Baranwal P., Janardhana B., Stepanova D., Wischert D. Conceptual analysis for a technology demonstration mission of the ion beam shepherds. CEAS Space Journal. 2022. V. 15. P. 567–584. doi: 10.1007/s12567-022-00464-x
12. Obukhov V.A., Kirillov V.A., Petukhov V.G., Pokryshkin A.I., Popov G.A., Svitina V.V., Testoyedov N.A., Usovik I.V. Control of a service satellite during its mission on space debris removal from orbits with high inclination by implementation of an ion beam method // Acta Astronautica. 2022. V. 194. P. 390–400. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.09.041
13. Obukhov V.A., Pokryshkin A.I., Svitina V.V. Thruster Rotation Angle Control During Contactless Removal of Space Debris Objects // Applied Mathematics and Computational Mechanics for Smart Applications. Singapore : Springer, 2021. P. 127–139. doi: 10.1007/978-981-33-4826-4
14. Khoroshylov S. Out-of-plane relative control of an ion beam shepherd satellite using yaw attitude deviations // Acta Astronautica. 2019. V. 164. P. 254–261. doi: 10.1016/j.actaastro.2019.08.016

15. Aslanov V.S., Ledkov A.S. Fuel costs estimation for ion beam assisted space debris removal mission with and without attitude control // *Acta Astronautica*. 2021. V. 187. P. 123–132. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.06.028
16. Bombardelli C. Relative dynamics and control of an ion beam shepherd satellite // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2012. V. 143. P. 2145–2158.
17. Alpatov A., Cichocki F., Fokov A., Khoroshylov S., Merino M., Zakrzhevskii A. Determination of the force transmitted by an ion thruster plasma plume to an orbital object // *Acta Astronautica*. 2016. V. 119. P. 241–251. doi: 10.1016/j.actaastro.2015.11.020
18. Alpatov A., Khoroshylov S., Bombardelli C. Relative control of an ion beam shepherd satellite using the impulse compensation thruster // *Acta Astronautica*. 2018. V. 151. P. 543–554. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.06.056
19. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. М. : Высшая школа, 2003. 585 с.
20. Ледков А.С., Белов А.А., Тчанников И.А. Сравнение эффективности использования лазерной абляции и ионного потока для бесконтактной уборки космического мусора с квазикруговой орбиты // *Труды МАИ*. 2022. № 127. doi: 10.34759/trd-2022-127-01

References

1. Veniaminov S.S., Chervonov A.M. (2012) *Kosmicheskii musor-ugroza chelovechestvu* [Space debris is a threat to mankind]. Moscow: SIC RKO FBU.
2. Kessler D.J., Cour-Palais B.G. (1978) Collision frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. 83(A6). pp. 2637–2646. doi: 10.1029/JA083iA06p02637
3. Ledkov A., Aslanov V. (2022) Review of contact and contactless active space debris removal approaches. *Progress in Aerospace Sciences*. 134. Article 100858. doi: 10.1016/j.paerosci.2022.100858
4. Zhang W., Li F., Li J., Cheng Q. (2023) Review of on-orbit robotic arm active debris capture removal methods. *Aerospace*. 10(1). Article 13. doi: 10.3390/aerospace10010013
5. Sizov D.A., Aslanov V.S. (2021) Optimal thrust control during tether deployment after harpoon capture of space debris. *AIP Conference Proceedings*. 2318. Article 050005. doi: 10.1063/5.0035876
6. Huang W., He D., Li Y., Zhang D., Zou H., Liu H., Yang W., Qin L., Fei Q. (2022) Nonlinear dynamic modeling of a tether-net system for space debris capture. *Nonlinear Dynamics*. 110(3). pp. 2297–2315. doi: 10.1007/s11071-022-07718-7
7. Bombardelli C., Pelaez J. (2011) Ion beam shepherd for contactless space debris removal. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 34(3). pp. 916–920. doi: 10.2514/1.51832
8. Fang Y. (2022) Dynamic deorbit of small-sized space debris in near-Earth orbit in view of space-based pulse laser. *Journal of Laser Applications*. 34(2). Article 022018. doi: 10.2351/7.0000662
9. Aslanov V.S. (2017) Exact solutions and adiabatic invariants for equations of satellite attitude motion under Coulomb torque. *Nonlinear Dynamics*. 90. pp. 2545–2556. doi: 10.1007/s11071-017-3822-5
10. Aslanov V.S. (2019) Gravitational trap for space debris in geosynchronous orbit. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 56(4). pp. 1277–1281. doi: 10.2514/1.A34384
11. Colpari R., Sajjad N., Kiran A., Chakraborty M., Tripathi V., Baranwal P., Janardhana B., Stepanova D., Wischert D. (2022) Conceptual analysis for a technology demonstration mission of the ion beam shepherds. *CEAS Space Journal*. 15. pp. 567–584. doi: 10.1007/s12567-022-00464-x
12. Obukhov V.A., Kirillov V.A., Petukhov V.G., Pokryshkin A.I., Popov G.A., Svotina V.V., Testoyedov N.A., Usovik I.V. (2022) Control of a service satellite during its mission on space debris removal from orbits with high inclination by implementation of an ion beam method. *Acta Astronautica*. 194. pp. 390–400. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.09.041

13. Obukhov V.A., Pokryshkin A.I., Svotina V.V. (2021) Thruster rotation angle control during contactless removal of space debris objects. In: *Applied Mathematics and Computational Mechanics for Smart Applications: Proceedings of AMMAI 2020*. Singapore: Springer Singapore. pp. 127–139. doi: 10.1007/978-981-33-4826-4
14. Khoroshylov S. (2019) Out-of-plane relative control of an ion beam shepherd satellite using yaw attitude deviations. *Acta Astronautica*. 164. pp. 254–261. doi: 10.1016/j.actaastro.2019.08.016
15. Aslanov V.S., Ledkov A.S. (2021) Fuel costs estimation for ion beam assisted space debris removal mission with and without attitude control. *Acta Astronautica*. 187. pp. 123–132. doi: 10.1016/j.actaastro.2021.06.028
16. Bombardelli C., Urrutxua H., Merino M., Ahedo E., Peláez J. (2012) Relative dynamics and control of an ion beam shepherd satellite. *Advances in the Astronautical Sciences*. 143. pp. 2145–2158.
17. Alpatov A., Cichocki F., Fokov A., Khoroshylov S., Merino M., Zakrzhevskii A. (2016) Determination of the force transmitted by an ion thruster plasma plume to an orbital object. *Acta Astronautica*. 119. pp. 241–251. doi: 10.1016/j.actaastro.2015.11.020
18. Alpatov A., Khoroshylov S., Bombardelli C. (2018) Relative control of an ion beam shepherd satellite using the impulse compensation thruster. *Acta Astronautica*. 151. pp. 543–554. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.06.056
19. Pantelev A.V., Bortakovskiy A.S. (2003) *Teoriya upravleniya v primerakh i zadachakh* [Control theory in examples and problems]. Moscow: Vysshaya shkola.
20. Ledkov A.S., Belov A.A., Tchannikov I.A. (2022) Sroavnenie effektivnosti ispol'zovaniya lazernoy ablyatsii i ionnogo potoka dlya beskontaktnoy uborki kosmicheskogo musora s kvazikrugovoy orbity [Comparison of laser ablation and ion beam efficiency for contactless space debris deorbiting from a quasi-circular orbit]. *Trudy MAI*. 127. doi: 10.34759/trd-2022-127-01

Сведения об авторах:

Ледков Александр Сергеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики Самарского национального исследовательского университета им. С.П. Королева (Самара, Россия). E-mail: ledkov@inbox.ru

Белов Алексей Александрович – лаборант НИГ-63 (научно-исследовательская группа механики), бакалавр Самарского национального исследовательского университета им. С.П. Королева (Самара, Россия). E-mail: belov-developer@mail.ru

Information about the authors:

Ledkov Aleksandr S. (Candidate of Technical Sciences, Samara National Research University, Samara, Russian Federation). E-mail: ledkov@inbox.ru

Belov Aleksey A. (Samara National Research University, Samara, Russian Federation). E-mail: belov-developer@mail.ru

Статья поступила в редакцию 14.03.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 14.03.2023; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 531.38, 531.13

doi: 10.17223/19988621/89/8

Принципы реализации сервосвязей в неголономных механических системах

Евгения Арифжановна Микишанина

*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,
Чебоксары, Россия, evaeva_84@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается проблема реализации сервосвязей в неголономных механических системах. Отмечаются особенности введения управляющих сил, реализующих заданную сервосвязями программу движения. Построен математический алгоритм управления посредством сервосвязей механической системой, состоящей из колесной платформы (робота) с дифференциальным приводом ведущих колес и прицепа. На колеса системы дополнительно наложены неголономные ограничения. Результаты проиллюстрированы графически.

Ключевые слова: управление, неголономная связь, сервосвязь, уравнения движения, программа движения, колесный робот

Благодарности: Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-10019) и Чувашской Республики, <https://rscf.ru/project/23-21-10019/>

Для цитирования: Микишанина Е.А. Принципы реализации сервосвязей в неголономных механических системах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 103–118. doi: 10.17223/19988621/89/8

Original article

Principles for implementing servo-constraints in nonholonomic mechanical systems

Evgeniya A. Mikishanina

I.N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation, evaeva_84@mail.ru

Abstract. The problem of implementing servo-constraints in nonholonomic mechanical systems is considered. An attempt is made to outline the theoretical principles for composing equations of motion of nonholonomic mechanical systems with servo-constraints, to set the conditions for implementing servo-constraints, and to indicate the features of the introduction of control forces implementing the motion program from the point of view of their practical realization. In contrast to nonholonomic constraints, the method of implementation is important for servo-constraints. To illustrate the principles outlined in this study, a mathematical algorithm for controlling a wheeled two-link robot (driving trolley and trailer) with a differential drive is constructed using servo-constraints. Nonho-

lonomic constraints are also imposed on the wheels of the system. On the basis of the joint solution of the equations of motion in quasi-velocities and time derivatives of non-holonomic and servo-constraints, the equations of motion of the wheeled robot are obtained. The dynamics of the wheeled robot is studied when a motion program is set that allows pursuing a target. The dynamics of the wheeled robot is studied when a motion program is set that controls the angle of deviation of the trailer from the driving trolley axis. The results are illustrated graphically.

Keywords: control, nonholonomic constraint, servo-constraint, equations of motion, motion program, wheeled robot

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-10019) and Chuvash Republic, <https://rscf.ru/en/project/23-21-10019/>

For citation: Mikishanina, E.A. (2024) Principles for implementing servo-constraints in nonholonomic mechanical systems. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 103–118. doi: 10.17223/19988621/89/8

Введение

К настоящему времени широко исследована динамика разнообразных неголономных систем. Это и модели шара Чаплыгина [1, 2], волчка Чаплыгина [3], саний Чаплыгина [4, 5], и модель Суслова [6] и др. Также в современной научной литературе имеется достаточное количество работ в области управления неголономными системами, в том числе при помощи роторов, гироскопов, за счет смещения центра масс. Укажем лишь некоторые публикации, освещающие данную проблематику: [7–10]. Однако существуют и другие способы управления механическими системами, например с помощью сервосвязей.

Впервые это понятие было введено А. Бегеном в его диссертации [11]. Позже П. Аппель сделал попытку систематизировать некоторые принципы динамики систем с сервосвязями в [12]. Согласно [12], существует категория механизмов, осуществляющих связи другим, отличным от неголономных связей, образом. Неголономные связи реализуются пассивно, вследствие контакта поверхностей, например отсутствие проскальзывания в точке контакта в модели качения твердого тела [2, 13] или отсутствие проскальзывания и верчения в модели резинового качения [13]. Сервосвязи же реализуются активно, за счет использования различного рода управляющих сил или управления инерционными свойствами системы [14, 15].

В современной науке теория механических систем с сервосвязями получила развитие в трудах А.Г. Азизова [16], В.И. Киргетова [17], В.В. Козлова [14, 15, 18], Я.В. Татарина [19] и зарубежных авторов [20, 21]. В работах В.В. Козлова излагаются некоторые принципы динамики систем с сервосвязями на примере систем с одной сервосвязью в смысле Бегена–Аппеля. В работе Я.В. Татарина предлагается альтернативный подход, основанный на неклассическом принуждении. В.И. Киргетов предлагает применять аппарат неголономной механики к задачам с сервосвязями на примере метода прямого наведения (погоны) в динамике полетов. Однако, на наш взгляд, поскольку природа сервосвязей отличается от природы неголономных связей, осуществляться как неголономные связи они не могут. В данной работе рассмотрим наиболее классический вариант – реализацию сервосвязей посредством управляющих сил.

Некоторые исследования в этой области опубликованы нами [22, 23] и носят прикладной характер. В работе [22] анализируется движение сферического робота, стесненное сервосвязью Билимовича. В [23] рассмотрено движение сфероробота с маятниковым приводом за целью методом погони. В отличие от работы В.И. Киргетова, где сервосвязь метода погони реализуется как неголономная, в нашей работе она реализуется за счет введения управляющего крутящего момента, который генерирует маятниковый привод.

Описанные в современной научной литературе принципы работы с механическими системами, стесненными сервосвязями, кажутся не всегда понятными с точки зрения их практического применения. Поэтому в данной работе изложены теоретические аспекты составления уравнений движения неголономных механических систем с сервосвязями в контексте их физической реализации и указаны условия реализуемости сервосвязей.

На примере колесного робота с прицепом показана реализация программы движения, заданной конечными и дифференциальными сервосвязями. В основе математической модели колесного робота с прицепом лежит модель роллеррейсера – системы, являющейся связкой двух колесных платформ [24]. На ведущих колесах робота установлены электродвигатели с дифференциальным приводом. Для реализации сервосвязей привод генерирует управляющие крутящие моменты на колесах. В работе построены уравнения движения, найдены управления, реализующие программу движения, для иллюстрации полученных результатов построены графики искомых механических параметров и траектории движения.

1. Уравнения движения неголономных систем с сервосвязями

Рассмотрим некоторую механическую систему. Пусть на систему наложены неголономные ограничения (связи), линейные по скоростям:

$$f^s = \sum_{i=1}^n b_i^s(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + b_0^s(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ – обобщенные координаты на конфигурационном пространстве размерности n .

Общая форма уравнений движения, как известно, представлена системой дифференциальных уравнений с неопределенными множителями

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} + \sum_{k=1}^s \lambda_s \frac{\partial f^s}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

где T – кинетическая энергия, $\mathbf{F}$ – обобщенные силы, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right)^T$,

$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q_n} \right)^T$, λ_s – неопределенные множители, характеризующие силы реакции связей, которые единственным образом восстанавливаются из совместного решения уравнений движения и производных по времени от уравнений (1).

Пусть помимо неголономных связей (1) движение системы управляемо сервосвязями, и пусть они также линейны по скоростям:

$$\Phi^r = \sum_{i=1}^n \sigma_i^r(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + \sigma_0^r(\mathbf{q}, t) = 0.$$

Запишем в матричном виде систему неголономных связей и систему сервосвязей

$$\mathbf{f} = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\Phi = \Sigma\dot{\mathbf{q}} + \Sigma_0 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$\text{где } \mathbf{B} = \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial \dot{q}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^s}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial f^s}{\partial \dot{q}_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} b_0^1(\mathbf{q}, t) \\ \vdots \\ b_0^s(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial \dot{q}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^r}{\partial \dot{q}_1} & \dots & \frac{\partial \Phi^r}{\partial \dot{q}_n} \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0^1(\mathbf{q}, t) \\ \vdots \\ \sigma_0^r(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix}.$$

Считаем, что уравнения (2), (3) независимы. Тогда, по всей видимости, существует вектор управлений (моментов) $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)^T$ такой, что по крайней мере p из компонент Q_i , $1 \leq p \leq n$, не равны тождественно нулю, и с их учетом уравнения движения примут вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)^T$ – вектор неопределенных множителей. Неравные тождественно нулю управляющие силы будем называть активными и обозначим их $\tilde{Q}_i$.

Продифференцируем систему неголономных связей и сервосвязей по времени:

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\Sigma\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\Sigma}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\Sigma}_0 = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где

$$\dot{\mathbf{B}} = \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial t} \right\|, \quad \dot{\mathbf{B}}_0 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_0^1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial b_0^1(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_0^s(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial b_0^s(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \end{pmatrix},$$

$$\dot{\Sigma} = \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial t} \right\|, \quad \dot{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_0^1(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \sigma_0^1(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_0^r(\mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \sigma_0^r(\mathbf{q}, t)}{\partial t} \end{pmatrix}$$

есть матрицы, состоящие из полных по времени производных элементов матриц $\mathbf{B}$, Σ , $\mathbf{B}_0$, Σ_0 соответственно.

Предложение 1. Динамика механической системы с наложенными на нее неголономными ограничениями (2), управляемой сервосвязями (3), задается системой $n + s + r$ дифференциальных уравнений (4)–(6). Уравнения (3) задают программу движения механической системы.

Сначала имеет смысл совместно решить уравнения движения (4) с производными по времени от неголономных ограничений (5). Для этого распишем систему (4) более подробно:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F_i + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}_i} + Q_i, i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Введем обозначения: $\mathbf{A} = \left\| \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\|$ – положительно определенная матрица коэффициентов, задающая евклидову метрику на пространстве ускорений $(\ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}})$; $\mathbf{T}' = \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\|$ – вектор-столбец такой, что для уравнений Лагранжа вектор $\ddot{\mathbf{q}}_f = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{T}')$ задает освобожденное от всех связей движение, т.е. движение только под действием приложенных сил.

Из системы уравнений (7) выразим вектор ускорений

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{T}' + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}). \quad (8)$$

Подставляя его в (5), получим

$$\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{F} - \mathbf{T}') - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{Q} - \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{B}}_0, \quad (9)$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T$, $\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$.

Подставляя выражения (8) с учетом (9) в (6), получим линейную относительно управляющих сил систему

$$\begin{aligned} & \Sigma \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) \mathbf{Q} = \\ & + - \Sigma \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) (\mathbf{F} - \mathbf{T}') + \Sigma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} (\dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{B}}_0) - \dot{\Sigma} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Sigma}_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица n -го порядка.

Система (10) в общем случае является системой r уравнений, линейных относительно Q_i , среди которых p не равны тождественно нулю.

Необходимое условие реализуемости сервосвязей (3). Если сервосвязи (3) реализуемы, то

$$\Sigma \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) \mathbf{Q} \neq \mathbf{0}.$$

Возможны следующие случаи:

1) если $p = r$, то система (10) определена, тогда компоненты векторов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{Q}$ восстанавливаются однозначно из уравнений (9), (10);

2) если $p > r$, то система (10) не определена и свободные переменные необходимо выбирать из числа $\tilde{Q}_i$. Тогда s функций λ_k и r функций $\tilde{Q}_i$ будут выражаться через оставшиеся $(p - r)$ функций $\tilde{Q}_i$. Другими словами, программа движения

механической системы не определена. Поэтому для ее доопределения необходимо задать свободные $\tilde{Q}_i$, исходя из возможности их физической реализации.

3) если $p < r$, то управление задано с избытком. Вообще говоря, решение задачи будет невозможно.

В случае механической системы только с одной сервосвязью

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (11)$$

система (10) будет состоять из одного уравнения

$$\Sigma \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} = -\Sigma \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{T}') - \dot{\Sigma} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Sigma}_0. \quad (12)$$

Необходимое условие реализуемости сервосвязи (11). Если сервосвязь (11) реализуема, то выполняется условие

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q} \right) \neq 0,$$

причем если вектор $\mathbf{Q}$ содержит одну активную компоненту, то она восстанавливается однозначно из (12), иначе программа движения не задана.

Замечание 1. Была рассмотрена неголономная система с кинематическими (дифференциальными) сервосвязями (3). Хотя по аналогии с голономными и неголономными связями сервосвязи могут быть заданы не только в кинематическом, но и в геометрическом (конечном по Аппелю) виде:

$$\Psi(q_1, \dots, q_n, t) = 0, \quad (13)$$

и любую геометрическую связь можно представить в дифференциальной форме, взяв полную производную по времени от уравнения (13). Согласно теории Бегена–Аппеля, независимо от типа сервосвязей механизм определения управляющих сил остается одинаковым, причем сами сервосвязи принимаются во внимание лишь после того, как вычислены выражения $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{F}$.

Рассмотрим далее динамику механической системы, стесненной сервосвязями, на примере движения двухзвенного колесного робота с дифференциальным приводом.

2. Уравнения движения двухзвенного колесного робота

Механическая система состоит из двух колесных платформ (робота и прицепа), движущихся по плоскости. Запишем допущения, касающиеся конструктивных особенностей (рис. 1):

1. На роботе жестко закреплены два активных колеса с независимыми двигателями и роульное колесо, которое крутится во все стороны и не влияет на динамику системы. Оси вращения активных колес совпадают. Обозначим точкой O_1 центр оси, соединяющей колеса. Центр масс робота C может быть смещен вдоль его главной оси, перпендикулярной оси колес, от точки O_1 на расстояние d_1 .

2. На прицепе жестко закреплена одна отбалансированная колесная пара с пассивными колесами так, что центр масс прицепа совпадает с геометрическим центром O_2 колесной пары.

3. Прицеп жестко сцеплен с жесткой рамой, которая, в свою очередь, крепится шарниром в точке O_1 к роботу. Рама может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O_1 .

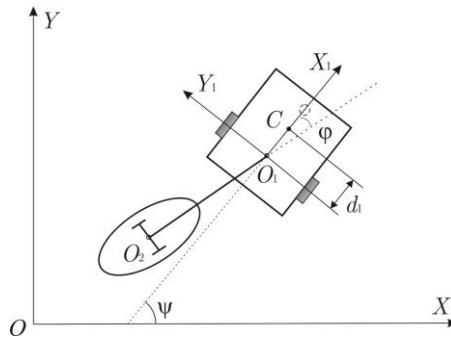


Рис. 1. Схематический дизайн колесного робота
Fig. 1. Schematic diagram of a wheeled robot

Введем две системы координат в пространстве: неподвижную $OXYZ$ и подвижную $O_1X_1Y_1Z_1$, связанную с геометрическим центром оси, соединяющей активные колеса, и осями O_1X_1 , совпадающей с главной осью платформы, и O_1Y_1 , проходящей через центры активных колес. Считаем, что $d_1 \geq 0$.

Введем обозначения в подвижной системе координат: r — радиус колеса робота, b — длина жесткой рамы, соединяющей прицеп с роботом; $2l$ — расстояние между геометрическими центрами колес робота; $C(d_1, 0)$ — координаты центра масс робота; m_1 — масса платформы робота; m_k — масса активного колеса; m_2 — общая масса прицепа с колесной парой; I_1 — момент инерции горизонтальной платформы (без колес) робота относительно вертикальной оси O_1Z_1 ; I_{kz} — момент инерции ведущих колес относительно вертикальной оси O_1Z_1 ; I_{ky} — «приведенный» момент инерции колеса с учетом момента инерции ротора электродвигателя относительно оси O_1Y_1 ; I_2 — центральный тензор инерции прицепа относительно вертикальной оси, проходящей через геометрический центр второй колесной пары O_2 ; $\mathbf{V} = (V_1, V_2, 0)$ — вектор скорости центра O_1 колесной оси робота; $\mathbf{V}_{p_1}, \mathbf{V}_{p_2}$ — векторы скоростей геометрических центров колес; $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ — вектор угловой скорости робота; $\mathbf{\omega}_1 = (0, \omega_1, \Omega)$, $\mathbf{\omega}_2 = (0, \omega_2, \Omega)$ — векторы угловых скоростей активных колес; ϕ_1, ϕ_2 — углы поворота колес относительно горизонтальной оси O_1Y_1 ; ψ — угол поворота подвижной системы координат относительно неподвижной, $\dot{\psi} = \Omega$; ϕ — угол поворота оси прицепа относительно оси робота, причем при повороте оси прицепа против часовой стрелки угол принимает положительные значения, иначе — отрицательные.

Рассматриваемая система является неголономной: на колеса каждого из звеньев накладываются неголономные ограничения, которые делают невозможным любое движение данного тела в направлении, перпендикулярном его главной оси:

$$f_1 = V_2 = 0, \quad f_2 = V_1 \sin \phi - V_2 \cos \phi + b(\Omega + \dot{\phi}) = 0 \quad (14)$$

а также условия отсутствия проскальзывания в точках контакта с плоскостью качения активных колес

$$f_3 = V_1 - r\omega_1 - l\Omega = 0, \quad f_4 = V_1 - r\omega_2 + l\Omega = 0. \quad (15)$$

Также для выполнения некоторой заданной программы движения электродвигатели на колесах будут генерировать управляющие крутящие моменты U_1, U_2 .

Кинетическая энергия механической системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \tilde{I}_1 \Omega^2 + \frac{1}{2} \tilde{I}_2 (\Omega + \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} I_{ky} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} M (V_1^2 + V_2^2) + d_1 m_1 v_2 \Omega + m_2 b (\Omega + \dot{\phi}) (V_1 \sin \phi - V_2 \cos \phi),$$

где $\tilde{I}_1 = I_1 + 2m_k l^2 + 2I_{kz}$, $\tilde{I}_2 = I_2 + m_2 b^2$, $M = m_1 + m_2 + 2m_k$.

Записывая уравнения движения в квазискоростях с неопределенными множителями, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial V_1} \right) - \Omega \frac{\partial T}{\partial V_2} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial V_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial V_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial V_1} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial V_1}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial V_2} \right) + \Omega \frac{\partial T}{\partial V_1} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial V_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial V_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial V_2} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial V_2}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \Omega} \right) + V_1 \frac{\partial T}{\partial V_2} - v_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \Omega} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \Omega} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \Omega} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial \Omega}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \omega_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \omega_i} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial \omega_i} + \lambda_4 \frac{\partial f_4}{\partial \omega_i} + U_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Решая систему (16) совместно с производными по времени от связей (14), (15), получим уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{-J_2 \sin \phi \cos \phi \dot{\phi} V_1 + d_1 m_1 b^2 \Omega^2 + \frac{b^2}{r} (U_1 + U_2)}{J_2 \sin^2 \phi + M_0 b^2}, \\ \dot{\Omega} &= -\frac{d_1 m_1 V_1 \Omega + \frac{l}{r} (U_1 - U_2)}{J_1}, \quad \dot{\psi} = \Omega, \\ \dot{\phi} &= -\frac{V_1 \sin \phi}{b} - \Omega, \quad \omega_1 = \frac{V_1 - l \Omega}{r}, \quad \omega_2 = \frac{V_1 + l \Omega}{r}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $J_1 = \tilde{I}_1 + \frac{2l^2 I_{ky}}{r^2}$, $M_0 = M + \frac{2I_{ky}}{r^2}$, $J_2 = \tilde{I}_2 - 2m_2 b^2$.

Для определения местоположения колесного экипажа в неподвижной системе координат необходимо к системе (17) добавить уравнения, определяющие координаты (X, Y) точки O_1 :

$$\dot{X} = V_1 \cos \psi, \quad \dot{Y} = V_1 \sin \psi, \quad (18)$$

Таким образом, уравнения (17), (18) составляют полную систему уравнений движения.

3. Программа преследования подвижного объекта

Зададим программу движения, позволяющую роботу преследовать некоторый подвижный объект P , с заданной на плоскости OXY траекторией $P(x, y)$ или заданным вектором скорости $(\dot{x}, \dot{y})$ по методу прямой погони. В частном случае эта задача сводится к задаче движения по заданной траектории [23].

Замечание 2. Метод прямой погони относится к методам наведения и применяется, как правило, в баллистике [25], однако он применим, как показано в этой работе, и для управления наземными системами.

Согласно этому методу, вектор скорости $(\dot{X}, \dot{Y})$ точки O_1 должен быть всегда направлен на цель:

$$\frac{\dot{X}}{x - X} = \frac{\dot{Y}}{y - Y},$$

откуда следует

$$\psi = \text{ATAN2}(\dot{Y}, \dot{X}) = \text{ATAN2}(y - Y, x - X), \quad (19)$$

$$V_1 = f(t) \cdot \rho, \quad \rho = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}, \quad (20)$$

где управляющая функция $f(t)$ является коэффициентом «расстояние–скорость», вид которого зависит от особенностей моделируемого сценария. Траектория точки O_1 будет находиться из уравнений

$$X = x - \rho \cos \psi, \quad Y = y - \rho \sin \psi.$$

Из условия (19) получим первую сервосвязь

$$\Omega = \frac{\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi}{\rho}. \quad (21)$$

Для доопределения второй сервосвязи (20) необходимо задать управляющую функцию $f(t)$ так, чтобы движение отвечало следующим условиям: робот находится от подвижного объекта на некотором расстоянии; при достижении критического расстояния ρ_0 изменяет направление скорости на противоположное во избежание столкновения; выходит на сервосвязь из состояния покоя. Этим условиям удовлетворяет

$$f(t) = \alpha \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad \rho_0 = \rho(0). \quad (22)$$

В [23] было найдено условие для коэффициента α в управляющей функции (22) при качении сферического робота с маятниковым приводом, при котором робот никогда не столкнется с преследуемым объектом. Аналогичное условие для колесной платформы примет вид:

$$\alpha > v_{\max} (\rho_0 - h)^{-1},$$

где $v_{\max}$ – максимальная величина абсолютного значения скорости преследуемого объекта, h – расстояние от геометрического центра оси активных колес до переднего края робота. Тогда $\rho > h \quad \forall t \in [0, +\infty)$.

Таким образом, имеем две сервосвязи и два управляющих крутящих момента U_1, U_2 . Управление задано однозначно. Подставим уравнения (17) в производные по времени от (20), (21) и получим выражения для управляющих крутящих моментов

$$U_{1,2} = r \left[\frac{\alpha l \Delta \rho \pm 2 J_1 b^2 \Omega}{2 l b^2 \rho} (\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi - V_1) \mp \frac{J_1}{2 l \rho} (\ddot{y} \cos \psi - \ddot{x} \sin \psi - V_1 \Omega) + \right. \\ \left. + \frac{J_2}{4 b^2} \sin 2\varphi V_1 \dot{\varphi} - \frac{d_1 m_1 \Omega}{2 l} (\Omega l \pm V_1) \right],$$

где $\Delta = J_2 \sin^2 \varphi + M_0 b^2$. Имеем своего рода систему с обратной связью. Тогда динамика системы будет описываться уравнениями движения

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \alpha (\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi - V_1), \\ \dot{\psi} &= \frac{\alpha (\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi)}{V_1 + \alpha \rho_0}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{V_1 \sin \varphi}{b} - \frac{\alpha (\dot{y} \cos \psi - \dot{x} \sin \psi)}{V_1 + \alpha \rho_0} \end{aligned} \quad (23)$$

с начальными условиями $V_1(0) = 0$, $\psi(0) = \text{ATAN2}(y(0) - Y(0), x(0) - X(0))$, $\varphi(0) = 0$.

Численный эксперимент. Преследуемый объект движется по закону

$$x = 6 \sin 0.05t - \sin 0.3t + 2, \quad y = 5 + \cos 0.3t - 6 \cos 0.05t.$$

Параметры математической модели представлены в таблице.

Параметры математической модели

$I_1, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0.7	$m_1, \text{кг}$	4	$b, \text{м}$	1
$I_2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0.3	$m_2, \text{кг}$	2	$d_1, \text{м}$	0.3
$I_{ky}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0.00028	$m_k, \text{кг}$	1	$l, \text{м}$	0.2
$I_{kz}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	0.00014	$\alpha, \text{с}^{-1}$	1	$r, \text{м}$	0.075

На рис. 2 представлены траектории преследуемого объекта (точечная) и робота (сплошная), на рис. 3 показаны изменения скорости $V_1(t)$, угла $\varphi(t)$ и угловых скоростей колес $\omega_1(t)$ (точечная), $\omega_2(t)$ (сплошная).

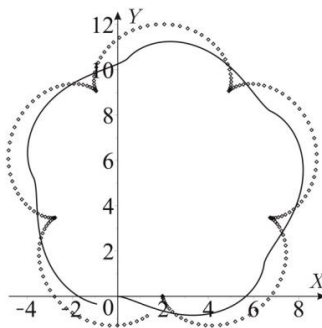


Рис. 2. Траектория движения робота (сплошная линия) за преследуемым объектом (точечная линия)

Fig. 2. Trajectory of the robot (solid line) pursuing a moving object (dotted line)

Если $\dot{x}, \dot{y}$ являются T -периодическими функциями времени, то динамика системы приобретает периодический характер, что легко подтверждается построением фазовых портретов и отображений за период.

Интересно влияние на систему параметра α , который отвечает за динамичность: чем выше его значение, тем быстрее система реагирует на изменение расстояния до преследуемого объекта. В [23] было показано, что функция расстояния при управлении (22) является ограниченной, если скорость преследуемого объект ограничена, причем при $\alpha \rightarrow \infty$ расстояние $\rho \rightarrow \rho_0$.

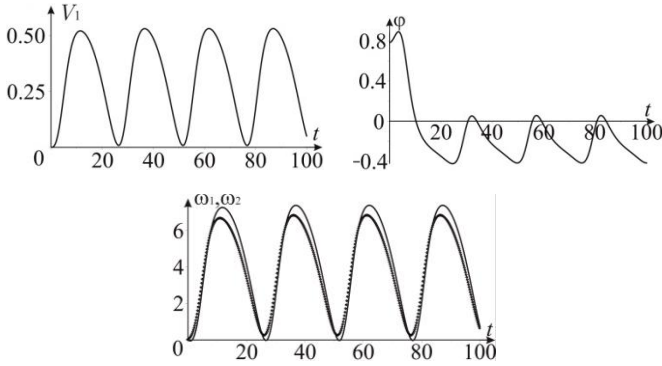


Рис. 3. Графики скорости $V_1(t)$, угла $\varphi(t)$ и угловых скоростей колес $\omega_1(t)$ (точечная линия), $\omega_2(t)$ (сплошная линия)

Fig. 3. Time dependences of the velocity $V_1(t)$, angle $\varphi(t)$, and angular velocities $\omega_1(t)$ (dotted line), $\omega_2(t)$ (solid line)

Следовательно, из системы (23) очевидно, что скорости $V_1(t)$, $\Omega(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ будут ограничены. При возрастании параметра α амплитуда периодических колебаний функций $V_1(t)$, $\Omega(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ возрастает до некоторого предельного значения.

4. Движение, управляемое конечной сервосвязью $\varphi = g(t)$

В предыдущем пункте сервосвязи, задающие программу движения, имели дифференциальный вид. В качестве примера рассмотрим алгоритм задания программы движения для механической системы, стесненной конечной (геометрической) сервосвязью

$$\varphi = g(t). \quad (24)$$

Иными словами, требуется так реализовать движение системы с помощью задания управления на колеса, чтобы выполнялось условие (24).

Используя уравнения движения (17), необходимо получить соотношения для управляющих крутящих моментов на активных колесах. Так как одной связи (24) недостаточно, чтобы однозначно задать U_1 , U_2 , то доопределим их, исходя из возможности физической реализации. Например, такую связь можно осуществить, если $U_1 = -U_2$. Тогда управляющие моменты находятся однозначно:

$$U_1 = -U_2 = \frac{r(J_1 \ddot{g} - d_1 m_1 V_1 \Omega)}{2l} + \frac{J_1 r b (d_1 m_1 \Omega^2 \sin g + M_0 V_1 \dot{g} \cos g)}{2l \Delta},$$

где $\Delta = J_2 \sin^2 g + M_0 b^2$, $\Omega = -\frac{V_1 \sin g}{b} - \dot{g}$. Система (17) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{-J_2 \dot{g} V_1 \sin g \cos g + d_1 m_1 (V_1 \sin g + b \dot{g})^2}{\Delta}, \\ \dot{\psi} &= -\frac{V_1 \sin g}{b} - \dot{g}, \quad \omega_1 = \frac{V_1 - l \Omega}{r}, \quad \omega_2 = \frac{V_1 + l \Omega}{r}. \end{aligned} \quad (25)$$

Исследуем динамику системы (25). Сделав замену $Q = V_1 \sqrt{\Delta}$, преобразуем первое уравнение системы к виду:

$$\dot{Q} = \frac{d_1 m_1 (Q \sin g + b \dot{g} \sqrt{\Delta})^2}{\Delta \sqrt{\Delta}}.$$

Функция Q является постоянной в следующих случаях:

- $d_1 = 0$;
- $\varphi = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $Q(0) = 0$, $\varphi = \text{const}$.

В остальных случаях она монотонно возрастает, так как $d_1 \geq 0$. Скорость $V_1(t)$ также будет неограниченно возрастать, и движение на сервосвязи начиная с некоторого момента времени станет невозможным.

При $d_1 = 0$ скорости находятся следующим образом:

$$V_1(t) = V_1(0) \sqrt{\frac{J_2 \sin^2 \varphi_0 + M_0 b^2}{J_2 \sin^2 g + M_0 b^2}}, \quad \Omega(t) = -\frac{V_1(0) \sin g}{b} \sqrt{\frac{J_2 \sin^2 \varphi_0 + M_0 b^2}{J_2 \sin^2 g + M_0 b^2}} - \dot{g}.$$

Численные эксперименты. Параметры модели заданы в таблице, за исключением местоположения центра масс первого звена. Примем $d_1 = 0$.

1. Случай постоянного местоположения прицепа относительно робота

$$g(t) = g_0 = \text{const}.$$

Очевидно, что движение будет происходить равномерно по окружности с линейной и угловой скоростями

$$V_1(t) = V_1(0) \text{ и } \Omega(t) = -\frac{V_1(0) \sin g_0}{b} \quad (g_0 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}, V_1(0) \neq 0)$$

или по прямой с линейной скоростью

$$V_1(t) = V_1(0) \quad (g_0 = \pi k, k \in \mathbb{Z}, V_1(0) \neq 0).$$

2. Случай равномерного вращения прицепа вокруг точки крепления к роботу

$$g(t) = 0.1 \cdot t. \quad (26)$$

На рис. 4 представлены траектория движения робота (точки O_1) и графики угловых скоростей колес при начальном условии $V_1(0) = 0.4$ м/с.

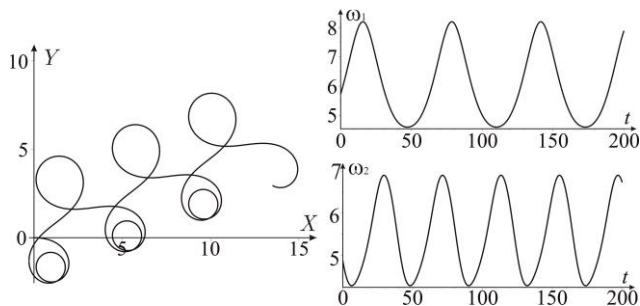


Рис. 4. Траектория движения и графики угловых скоростей колес при управлении сервосвязью (26)

Fig. 4. The trajectory of motion and graphs of angular velocities of the wheels under servo-constraint (26)

3. Случай периодически меняющегося угла

$$g(t) = \frac{\pi}{4} \cdot \sin 0.15t. \quad (27)$$

На рис. 5 представлены траектория движения робота (точки O_1) и графики угловых скоростей колес при начальном условии $V_1(0) = 0.4$ м/с.

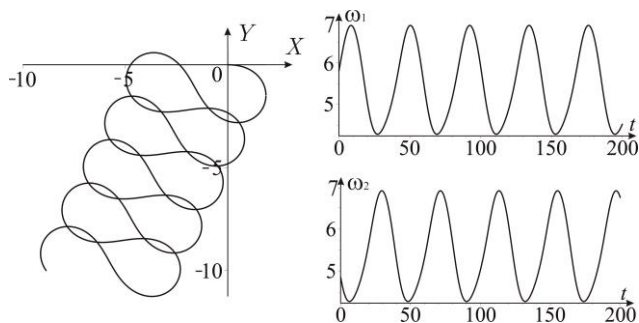


Рис. 5. Траектория движения и графики угловых скоростей колес при управлении сервосвязью (27)

Fig. 5. The trajectory of motion and graphs of angular velocities of the wheels under servo-constraint (27)

Заключение

Актуальность подобного рода исследований продиктована развитием мобильной робототехники, электроники, теории управления. Сервосвязи рассматриваются как способ управления механическими системами. Класс задач динамики механических систем с сервосвязями гораздо шире класса неголономных задач. Возможность выбора управляющих сил позволяет получить системы с разнообразной динамикой. В работе был построен алгоритм реализации сервосвязей на примере неголономной системы с качением. Методы реализации сервосвязей существенным образом отличаются от методов реализации голономных и неголономных связей. В случае с сервосвязями необходимо учитывать способ их осуществления, в то время как голономные и неголономные связи осуществляются вследствие простого контакта.

Список источников

1. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1903. Т. 24. С. 139–168. (Chaplygin S.A. On a Ball's Rolling on a Horizontal Plane // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. V. 7 (2). P. 131–148. doi: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000200).
2. Kilin A.A. The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis // Regular and Chaotic Dynamics. 2001. V. 6 (3). P. 291–306. doi: 10.1070/RD2001v006n03ABEH000178
3. Borisov A.V., Kazakov A.O., Sataev I.R. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin top // Regular and Chaotic Dynamics. 2014. V. 19 (6). P. 718–733. doi: 10.1134/S1560354714060094
4. Борисов А.В., Мамаев И.С. Неоднородные сани Чаплыгина // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 4. С. 625–639. doi: 10.20537/nd1704014

5. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика саней Чаплыгина // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 2. С. 219–225.
6. Микишанина Е.А. Исследование влияния случайных возмущений на динамику системы в задаче Сулова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 3. С. 17–29. doi: 10.17223/19988621/73/2
7. Borisov A.V., Mikishanina E.A. Dynamics of the Chaplygin Ball with Variable Parameters // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16 (3). P. 453–462. doi: 10.20537/nd200304
8. Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: Controllability theory and applications // IEEE Trans. On Automatic Control. 2000. V. 45 (9). P. 1586–1599. doi: 10.1109/9.880610
9. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. V. 17 (3-4). P. 258–272. doi: 10.1134/S1560354712030045
10. Болотин С.В. Задача оптимального управления качением шара с роторами // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 837–852.
11. Беген А. Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями / пер. с фр. Я.Н. Ройтенберга. М. : Наука, 1967. 171 с.
12. Анпель П. Теоретическая механика. М. : Физматлит, 1960. Т. 2: Динамика системы. Аналитическая механика. 487 с.
13. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А., Бизяев И.А. Избранные задачи неголономной механики. М.–Ижевск : Ин-т компьютерных исслед., 2016. 883 с.
14. Kozlov V.V. The Dynamics of systems with servoconstraints. I // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20 (3). P. 205–224. doi: 10.1134/S1560354715030016
15. Kozlov V.V. The Dynamics of systems with servoconstraints. II // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. V. 20 (4). P. 401–427. doi: 10.1134/S1560354715040012
16. Азизов А.Г. К динамике систем, стесненных сервосвязями // Научные труды Ташкентского государственного университета им. В.И. Ленина. 1971. № 397. С. 3–9.
17. Курбетов В.И. О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями) // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31 (3). С. 433–446.
18. Козлов В.В. Принципы динамики и сервосвязи // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 5. С. 59–66.
19. Татаринов Я.В. Уравнения классической механики в лаконичных формах. М. : Изд-во Центра прикладных исслед. при мех.-мат. фак-те МГУ, 2005. 86 с.
20. Chen Y.H. Mechanical systems under servo-constraints: the Lagrange's approach // Mechatronics. 2005. V. 15 (3). P. 317–337.
21. Yang Y., Betsch P., Altmann R. A numerical method for the servo constraint problem of under-actuated mechanical systems // Pamm. 2015. V. 15 (1). P. 79–80. doi: 10.1002/pamm.201510030
22. Микишанина Е.А. Динамика качения сферического робота с маятниковым приводом, управляемого сервосвязью Билимовича // Теоретическая и математическая физика. 2022. Т. 211 (2). P. 281–294. doi: 10.4213/tmf10227
23. Mikishanina E.A. Motion Control of a spherical robot with a pendulum actuator for pursuing a target // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2022. V. 18 (5). P. 899–913. doi: 10.20537/nd221223
24. Bizyaev I.A. The Inertial motion of a Roller Racer // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. V. 22 (3). P. 239–247. doi: 10.1134/S1560354717030042
25. Королев С.А., Липанов А.М., Русяк И.Г., Тененев В.А. Разработка подходов к решению обратной задачи внешней баллистики в различных условиях применения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 76–83. doi: 10.17223/19988621/57/6

References

1. Chaplygin S.A. (2002) On a Ball's Rolling on a Horizontal Plane. *Regular and Chaotic Dynamics*. 7(2). pp. 131–148. doi: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000200

2. Kilin A.A. (2001) The dynamics of Chaplygin ball: the qualitative and computer analysis. *Regular and Chaotic Dynamics*. 6(3). pp. 291–306. doi: 10.1070/RD2001v006n03ABEH000178
3. Borisov A.V., Kazakov A.O., Sataev I.R. (2014) The reversal and chaotic attractor in the non-holonomic model of Chaplygin top. *Regular and Chaotic Dynamics*. 19(6). pp. 718–733. doi: 10.1134/S1560354714060094
4. Borisov A.V., Mamaev I.S. (2017) An inhomogeneous Chaplygin sleigh. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 13(4). pp. 625–639. doi: 10.20537/nd1704014
5. Borisov A.V., Mamaev I.S. (2009) The dynamics of a Chaplygin sleigh. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 73(2). pp. 156–161.
6. Mikishanina E.A. (2021) Issledovanie vliyaniya sluchaynykh vozmushcheniy na dinamiku sistemy v zadache Suslova [Investigation of the influence of random perturbations on the dynamics of the system in the Suslov problem]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 73. pp. 17–29. doi: 10.17223/19988621/73/2
7. Borisov A.V., Mikishanina E.A. (2020) Dynamics of the Chaplygin ball with variable parameters. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 16(3). pp. 453–462. doi: 10.20537/nd200304
8. Marigo A., Bicchi A. (2000) Rolling bodies with regular surface: Controllability theory and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 45(9). pp. 1586–1599. doi: 10.1109/9.880610
9. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. (2012) How to control Chaplygin's sphere using rotors. *Regular and Chaotic Dynamics*. 17(3–4). pp. 258–272. doi: 10.1134/S1560354712030045
10. Bolotin S.V. (2012) Zadacha optimal'nogo upravleniya kacheniem shara s rotorami [The problem of optimal control of the rolling ball with rotors]. *Nelineynaya Dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 8(4). pp. 837–852.
11. Beghin M.H. (1931) *Étude théorique des compas gyrostatiques Anschütz et Sperry*. Paris: Impr. Nationale.
12. Appel P. (1953) *Traité de Mécanique rationnelle: V.2. Dynamique des systèmes. Mécanique analytique*. Paris: Gauthier-Villars.
13. Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A., Bizyaev I.A. (2016) *Izbrannye zadachi negolononnoy mekhaniki* [Selected problems of nonholonomic mechanics]. Moscow–Izhevsk.
14. Kozlov V.V. (2015) The dynamics of systems with servoconstraints. I. *Regular and Chaotic Dynamics*. 20(3). pp. 205–224. doi: 10.1134/S1560354715030016
15. Kozlov V.V. (2015) The dynamics of systems with servoconstraints. II. *Regular and Chaotic Dynamics*. 20(4). pp. 401–427. doi: 10.1134/S1560354715040012
16. Azizov A.G. (1971) K dinamike sistem, stesnyonnykh servosvyazyami [To the dynamics of systems constrained by servo-constraints]. *Nauchnye trudy TashGU*. 397. pp. 3–9.
17. Kirgetov V.I. (1967) O dvizhenii upravlyaemykh mekhanicheskikh sistem s uslovnymi svyazyami (servosvyazyami) [On the motion of controlled mechanical systems with conditional constraints (servo-constraints)]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 31(3). pp. 433–446.
18. Kozlov V.V. (1989) Printsipy dinamiki i servosvyazi [Principles of dynamics and servo-constraints]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika – Moscow University Mathematics Bulletin, Moscow University Mechanics Bulletin*. 5. pp. 59–66.
19. Tatarinov Ya.V. (2005) *Uravneniya klassicheskoy mekhaniki v lakonichnykh formakh* [Equations of classical mechanics in concise forms]. Moscow: Izdatel'stvo tsentra prikladnykh issledovaniy pri mekhaniko-matematicheskoy fakul'tete MGU.
20. Chen Y.H. (2005) Mechanical systems under servo constraints: the Lagrange's approach. *Mechatronics*. 15(3). pp. 317–337.
21. Yang Y., Betsch P., Altmann R. (2015) A numerical method for the servo constraint problem of underactuated mechanical systems. *Pamm*. 15(1). pp. 79–80. doi: 10.1002/pamm.201510030

22. Mikishanina E.A. (2022) Rolling motion dynamics of a spherical robot with a pendulum actuator controlled by the Bilimovich servo-constraint. *Theoretical and Mathematical Physics*. 211(2). pp. 679–691. doi: 10.1134/S0040577922050087
23. Mikishanina E.A. (2022) Motion control of a spherical robot with a pendulum actuator for pursuing a target. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 18(5). pp. 899–913. doi: 10.20537/nd221223
24. Bizyaev I.A. (2017) The inertial motion of a roller racer. *Regular and Chaotic Dynamics*. 22(3). pp. 239–247. doi: 10.1134/S1560354717030042
25. Korolev S.A., Lipanov A.M., Rusyak I.G., Tenenev V.A. (2019) Razrabotka podkhodov k resheniyu obratnoy zadachi vneshney ballistiki v razlichnykh usloviyakh primeneniya [Development of the approaches for solving an inverse problem of external ballistics in various application conditions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 77–84. doi: 10.17223/19988621/57/6

Сведения об авторе:

Микишанина Евгения Арифжановна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры актуарной и финансовой математики, научный сотрудник университетско-академической лаборатории «Искусственный интеллект и робототехника» Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова (Чебоксары, Россия). E-mail: evaeva_84@mail.ru

Information about the author:

Mikishanina Evgeniya A. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, I.N. Uliyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation). E-mail: evaeva_84@mail.ru

Статья поступила в редакцию 25.04.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 25.04.2023; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 539.319

doi: 10.17223/19988621/89/9

Уравнения вязкоупругости не полностью отвержденного эпоксидного связующего при малых деформациях

Валерий Михайлович Пестренин¹, Ирина Владимировна Пестренина²,
Лидия Владимировна Ландик³, Татьяна Николаевна Поморцева⁴,
Андрей Федорович Мерзляков⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия

¹ PestreninVM@mail.ru

² IPestrenina@gmail.com

³ LidiaLandik@gmail.com

⁴ tata.lisica@yandex.ru

⁵ merzlyakov@psu.ru

Аннотация. Рассматривается комплексный расчетно-экспериментальный подход к описанию механического состояния эпоксидного связующего при малых деформациях в зависимости от степени его отверждения. Кинетическое трехпараметрическое уравнение конверсии строится на основе изотермических испытаний. Физические уравнения вязкоупругости в форме Вольтерра используют результаты испытаний стандартных образцов по программе: растяжение с заданной скоростью до заданной деформации, выдержка при фиксированной деформации в течение заданного времени.

Ключевые слова: эпоксидное связующее, не полное отверждение, кинетическое уравнение, уравнение вязкоупругости, вспенивание

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта № С-26/1025.

Для цитирования: Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В., Поморцева Т.Н., Мерзляков А.Ф. Уравнения вязкоупругости не полностью отвержденного эпоксидного связующего при малых деформациях // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 119–134. doi: 10.17223/19988621/89/9

Original article

Equations of viscoelasticity for an incompletely cured epoxy binder under small strains

Valeriy M. Pestrenin¹, Irena V. Pestrenina², Lidiya V. Landik³,
Tat'yana N. Pomortseva⁴, Andrey F. Merzlyakov⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Perm State University, Perm, Russian Federation

¹ PestreninVM@mail.ru

² IPestrenina@gmail.com³ LidiaLandik@gmail.com⁴ tata.lisica@yandex.ru⁵ merzlyakov@psu.ru

Abstract. In this paper, the mechanical state of an epoxy binder during incomplete curing is studied. The degree of curing is described by a three-parameter kinetic equation of conversion with the material parameters and their temperature dependence determined using mathematical optimization methods based on isothermal conversion data. Mechanical properties of the incompletely cured polymer are obtained with the use of experimental data on uniaxial loading of reference samples according to a program assuming stretching to a specified strain at a given rate and holding at a fixed strain during a specified period of time. The physical equations for the polymer under study are assumed to be linear viscoelastic Volterra equations under the condition that the volumetric deformation is elastic. A method for determining the material parameters of the equations, i.e., instantaneous elastic constants and relaxation kernels, is proposed. Curing of the epoxy binder in vacuum is accompanied by foaming due to the presence of air bubbles in the binder. This phenomenon is shown to be prevented by pre-curing up to the "barrier" level in atmospheric conditions. The research results can be used when calculating the technological processes of manufacturing structures made of composites.

Keywords: epoxy binder, incomplete curing, kinetic equation, viscoelasticity equation, foaming

Acknowledgments: This work was financially supported by the Government of the Perm Krai (project No. C-26/1025).

For citation: Pestrenin, V.M., Pestrenina, I.V., Landik, L.V., Pomortseva, T.N., Merzlyakov, A.F. (2024) Equations of viscoelasticity for an incompletely cured epoxy binder under small strains. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 119–134. doi: 10.17223/19988621/89/9

Введение

Эпоксидные полимеры широко используются в качестве связующих композиционных конструкционных материалов. Физико-механические свойства таких полимеров обуславливают и соответствующие свойства материалов изделий из композитов на всех этапах технологического процесса их изготовления [1], т.е. при непрерывно меняющейся степени отверждения полимера. Это обстоятельство делает актуальным изучение механических свойств эпоксидных связующих не только при полной степени отверждения полимера, но и в его промежуточных состояниях.

Свойства эпоксидных связующих изучают многие авторы [1–24]. В работе [2] свойства эпоксидных связующих, ненаполненных и наполненных углеродными нанотрубками, изучаются методом индентирования. Определяются кратковременная и длительная ползучесть полимера, в частности находится модуль Юнга для «нерелаксированного» и «релаксированного» материала. В [3] экспериментально изучаются релаксационные свойства эпоксидного полимера в зависимости от наполнителей (резиновые порошки, тальк, каолин, графит). В [4] рассматривается влияние доли активного разбавителя на релаксационные и прочностные свойства

полимера: вязкость, модуль упругости, прочность при растяжении. Исследования механических свойств связующих в зависимости от различных наполнителей описаны, например, в обзорной статье [5]. Математическое моделирование состояния эпоксидных связующих в опытах на одномерное нагружение приводится в работах [6–8]. В [6] изучается влияние наполнителей эпоксидной смолы (карбида кремния и бора, алюмосиликата), температуры и дополнительной термообработки на вязкие, упругие и пластические свойства отвержденного связующего. Его поведение описывается моделями Максвелла и Кельвина–Фойхта. В статье [7] приводится моделирование эпоксидного связующего при ступенчатой релаксации с промежуточной разгрузкой при малых деформациях. Показывается, что поведение рассматриваемой среды хорошо описывается уравнениями линейной термовязкоупругости. Моделирование поведения эпоксидного связующего при деформациях до 10% изучается в [8]. В этом случае авторы предлагают вязкоупругопластическую модель, хорошо описывающую поведение материала при малоцикловом нагружении. Заметим, что в упомянутых публикациях авторы не указывают степень отверждения изучаемого связующего. Неявно считается, что материал полностью отвержден. Возможность неполного отверждения связующего при заданном режиме полимеризации приводится, например, в [9], где изучается изменение его механических свойств вследствие доотверждения в процессе термообработки.

Процесс полимеризации связующего зависит от многих факторов (температура [11], наличие каталитической системы [12], модификаторов [13, 14], реагентов, способствующих образованию сетчатой структуры полимера [12], наполнителей [13, 15, 16], испарение реагентов [17, 18], воздействие на прохождение реакции радиационного излучения, электрического поля [19] и др. [20–24]), поэтому сложно оценить его текущую степень отверждения. Это обстоятельство обуславливает необходимость дополнения механических уравнений состояния связующего кинетическим уравнением конверсии. Разумно использовать феноменологическое кинетическое уравнение полимеризации [25], построенное на экспериментальных данных, так как такие данные, во-первых, содержат все особенности отверждающегося полимера и, во-вторых, определяют область адекватного применения такого уравнения.

В настоящей работе предлагается расчетно-экспериментальная методика комплексного изучения механических свойств эпоксидного связующего в процессе отверждения при малых деформациях. Методика включает построение кинетического уравнения конверсии эпоксидного связующего и материальных параметров модели его линейно вязкоупругого поведения.

Приведены примеры вычисления эффективных материальных вязкоупругих характеристик конкретных композиций.

1. Расчетно-экспериментальное построение кинетического уравнения отверждения эпоксидного связующего

Рассматривается феноменологическое уравнение с автоускорением и автозамедлением, описывающее конверсию связующего, предложенное в работе [25]:

$$\frac{dC}{dt} = -k_1 C [1 - k_2 (1 - C)] [1 + k_3 (1 - C)], \quad (1)$$

где $C = 1 - \beta$ – концентрация эпоксидных групп, β – степень отверждения связующего; коэффициенты уравнения k_1, k_2, k_3 определяются на основе экспериментальных данных и могут быть функциями температуры. Задача состоит в определении параметров уравнения (1) по изотермическим экспериментальным данным. Уравнение (1) интегрируется и представляется в форме:

$$t = \frac{\alpha\zeta}{\gamma} \left[\ln \left(\frac{C_0}{C} \right) + \frac{\alpha}{\alpha + \zeta} \ln \left| \frac{1 + \alpha C}{1 + \alpha C_0} \right| + \frac{\zeta}{\alpha + \zeta} \ln \left| \frac{1 - \zeta C}{1 - \zeta C_0} \right| \right], \quad (2)$$

где обозначено $\alpha = \frac{k_2}{1 - k_2}$, $\zeta = \frac{k_3}{1 + k_3}$, $\gamma = k_1 k_2 k_3$, $C_0 = C(t_0)$, t_0 – время начала испытаний.

По экспериментальным данным для каждой температуры испытаний T_i ($i = 1, \dots, m$), m – число изотермических опытов, строится система уравнений

$$t_{ij} = \frac{\alpha_i \zeta_i}{\gamma_i} \left[\ln \left(\frac{C_{i0}}{C_{ij}} \right) + \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \zeta_i} \ln \left| \frac{1 + \alpha_i C_{ij}}{1 + \alpha_i C_{i0}} \right| + \frac{\zeta_i}{\alpha_i + \zeta_i} \ln \left| \frac{1 - \zeta_i C_{ij}}{1 - \zeta_i C_{i0}} \right| \right], \quad j = 1, \dots, n_i, \quad (3)$$

где n_i – число экспериментальных точек для T_i температуры. Система уравнений (3) решается приближенно. Погрешность вычислений оценивается по величине среднеквадратического отклонения

$$\delta_i = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(t_{ij} - \hat{t}_{ij})^2}{\hat{t}_{ij}^2}}, \quad (4)$$

где $\hat{t}_{ij}$ – время j -го измерения параметра C_{ij} в эксперименте.

В результате определяются параметры $k_1(T_i), k_2(T_i), k_3(T_i)$. В диапазоне температур, охватываемом экспериментальными данными, при произвольно изменяющейся температуре параметры $k_1(T), k_2(T), k_3(T)$ находятся аппроксимацией по $k_1(T_i), k_2(T_i), k_3(T_i)$, $i = 1, \dots, m$, или по формулам линейной интерполяции

$$k_j(T) = k_j(T_i) + \frac{k_j(T_{i+1}) - k_j(T_i)}{T_{i+1} - T_i} (T - T_i), \quad T_i < T < T_{i+1}; \quad j = 1, 2, 3; \quad i = \overline{1, (m-1)}. \quad (5)$$

Далее приводится построенное по предлагаемой методике феноменологическое кинетическое уравнение для двухкомпонентной смеси.

2. Феноменологическое уравнение конверсии для двухкомпонентной смеси

Рассматривалась двухкомпонентная смесь эпоксидной смолы на основе Бисфенола А фирмы Олдрич (Aldrich) (ММ = 374) – 10 массовых частей, и триэтилентетраамин ТЭТА фирмы Олдрич (Aldrich) – 1 массовая часть. Измерения кинетики отверждения эпоксидной смолы в изотермических опытах проводились методом инфракрасной спектроскопии. Смесь компонентов помещалась между тефлоновыми пленками с прокладкой толщиной 10 мкм. Пленки зажимались между стеклами бромида калия в спектральной кассете и помещались в спектрометр. Для проведения реакции при повышенной температуре использовался термощаф со стабилизацией температуры.

Спектры ИК-Фурье смеси компонентов регистрировались на спектрометре Excalibur MX3000 (Agilent, USA). Спектральное разрешение составляло 4 см^{-1} , число сканов 100, время записи одного спектра 2 мин. Для регистрации и обработки спектров использовалось программное обеспечение ResolutionPro.

Концентрация эпоксидных групп измерялась по интенсивности линии 915 см^{-1} колебаний эпоксидных групп в спектре ИК-поглощения. Интенсивность измеряемой линии нормализовалась на интенсивность линии колебаний ароматического кольца молекулы эпоксидной смолы при 1608 см^{-1} . Испытания проводились при четырех различных температурах: 20, 45, 60, 80°C [26].

Результаты измерений обрабатывались по методике, изложенной в разд. 1. Значения параметров k_1 , k_2 , k_3 в зависимости от температуры испытаний приведены в табл. 1 и на рис. 1 ($k_3 = \text{const}$).

Таблица 1

Значения параметров аппроксимации кинетического уравнения k_1 , k_2 , k_3 в изотермических испытаниях при 20, 45, 60 и 80°C

	$T = 20^\circ\text{C}$	$T = 45^\circ\text{C}$	$T = 60^\circ\text{C}$	$T = 80^\circ\text{C}$
k_1	0.00106	0.00394	0.00996	0.0339
k_2	2.54	2.05	1.57	1.24
k_3	5.67	5.67	5.67	5.67
δ , %	50	8	7	12

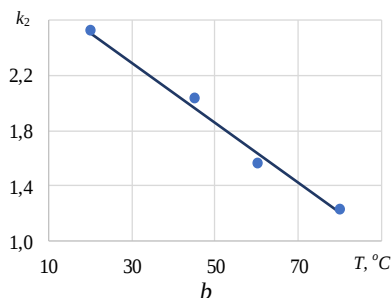
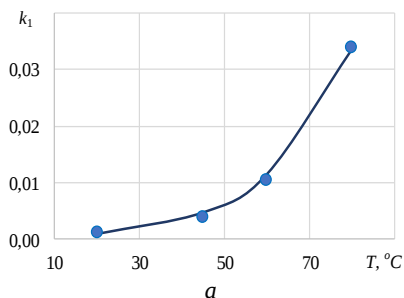


Рис. 1. Зависимость коэффициентов кинетического уравнения от температуры:

$a - k_1(T)$, $b - k_2(T)$

Fig. 1. Temperature dependence of coefficients in a kinetic equation: (a) $k_1(T)$ and (b) $k_2(T)$

Соответствующие этим параметрам кривые аппроксимации $C(t)$ строятся на основании аналитического решения (2) и приведены на рис. 2 сплошной линией (экспериментальные значения показаны точками).

Из табл. 1 видно, что наибольшее среднеквадратическое отклонение δ (см. равенство (4)) наблюдается при наименьшей температуре и отражает наибольший разброс экспериментальных данных.

Изотермические кривые конверсии в виде $C = C(t)$ из равенства (2) вследствие его трансцендентности получить затруднительно. Проще выполнить численное интегрирование уравнения (1). На рис. 2 представлены построенные таким путем кривые $C(t)$ для заданных температур 20, 45, 60 и 80°C и промежуточных 57 и 70°C . В последнем случае параметры k_1 , k_2 , k_3 вычислялись по интерполяционным формулам (5).

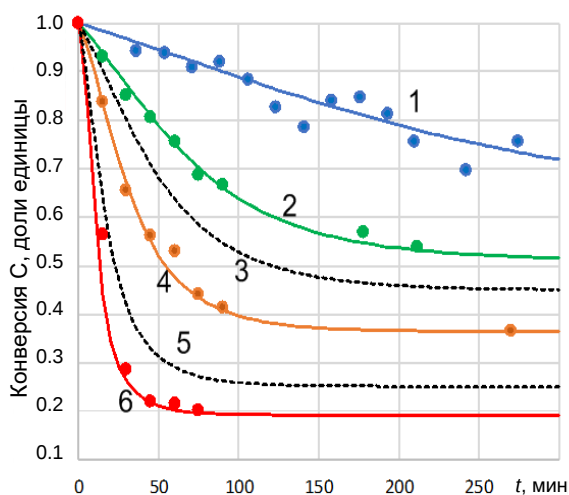


Рис. 2. Зависимость $C(t)$ в изотермических опытах:

1 – 20°C; 2 – 45°C; 3 – 57°C; 4 – 60°C; 5 – 70°C; 6 – 80°C

Fig. 2. Dependence $C(t)$ in isothermal experiments: (1) 20, (2) 45, (3) 57, (4) 60, (5) 70, and (6) 80°C

Из рис. 2 видно, что расположение кривых для 57 и 70°C хорошо согласуется с их ожидаемым поведением.

3. Механические свойства не полностью отвержденного эпоксидного связующего

3.1. Одномерные испытания растяжение-релаксация-сжатие

Приведенные в разд. 2 расчетно-экспериментальные зависимости конверсии эпоксидного связующего от времени и температуры позволяют при заданном температурном нагружении оценить текущую степень отверждения. Экспериментальное определение механических свойств связующего, соответствующих его неполному отверждению, проводится в опытах на растяжение–релаксацию–сжатие на образцах, изготовленных по ГОСТ 270–75.

Испытания полученных образцов проводились на испытательной машине Zwick – Z-250. Для управления испытательной машиной использовалось универсальное программное обеспечение TestXpert фирмы Zwick. Для измерения статических и динамических усилий использовался датчик силы Xforce HP с номинальным усилием 2,5 кН. Погрешность измерения не превосходит 1% прилагаемой нагрузки. Деформация образцов измерялась с помощью контактного экстензометра датчика продольной деформации BTC-EXMACRO с начальной расчетной длиной 10–100 мм. Длина щупа 300 мм, диапазон измерения 80 мм, разрешение 0,6 мкм. Использование данного датчика позволило проводить измерения деформации в течение всего времени испытания. Образец во время испытания закреплялся с помощью винтовых захватов, обеспечивающих стабильность крепления образцов. Испытуемый образец нагружался до деформации 0,4% с постоянной скоростью 0,4–0,8 мм/мин, после чего подвижная траверса останавливалась, а измерение усилия продолжалось. Такое испытание на релаксацию проходило в течение 6 ч.

На рис. 3, 4 представлены результаты обработки трех испытаний не полностью отвержденного при 70°C образца при малых деформациях. Расчетное значение степени отверждения 75%.

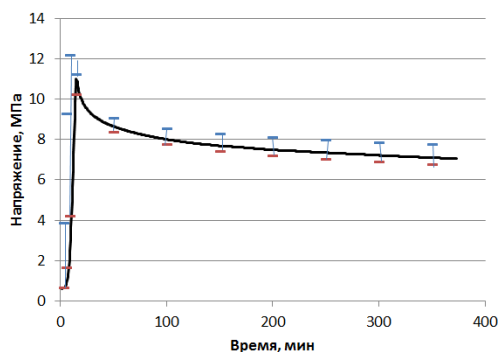


Рис. 3. Среднее напряжение в зависимости от времени и 95%-ный вероятностный доверительный интервал

Fig. 3. Average stress versus time and 95% probability confidence interval

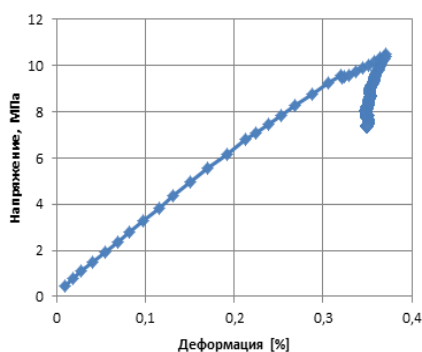


Рис. 4. Зависимость средних значений напряжений и деформаций в процессе проведения экспериментов

Fig. 4. Average stress–strain curve during experiments

3.2. Уравнения состояния не полностью отвержденного связующего при малых деформациях

Из представленных на рис. 3, 4 графиков видно, что не полностью отвержденное связующее проявляет вязкоупругие свойства. При описании вязкоупругого и вязкоупругопластического поведения материала в опытах на растяжение–сжатие образцов обычно используется метод структурного моделирования, обобщающий одномерные модели Максвелла и Фойхта [5, 7, 27]. При этом переход к описанию среды при сложном напряженно деформированном состоянии предполагает принятие дополнительных допущений (например, подобия девиаторов напряжений и деформаций) [28, 29].

В настоящей работе для описания вязкоупругого поведения связующего при малых деформациях применяется другой подход, основанный на использовании гипотез Больцмана [30]. Полагается, что в данном случае уравнениями состояния являются уравнения Вольтерра, материальные параметры которых (динамические константы и ядро релаксации сдвига) находятся из экспериментальных данных. Такой подход позволяет построить уравнения состояния связующего, справедливые при описании его сложного напряженно деформированного состояния без принятия дополнительных гипотез.

Примем, что объемное деформирование является упругим, тогда уравнения Вольтерра будут такими:

$$s_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma$ – девиатор напряжений, $\sigma = K\theta$, $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon$ – девиатор деформаций, $\varepsilon = \theta/3$, $\theta = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$, $K = \text{const}$ – объемный мо-

дуль упругости, $\Gamma(t)$ – ядро релаксации сдвига, G – мгновенный модуль сдвига. При одноосном нагружении лишь $\sigma_{11} \neq 0$, поэтому

$$\frac{2}{3} \sigma_{11}(t) = 2G \left(\varepsilon_{11}(t) - \frac{\sigma_{11}(t)}{9K} \right) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \left(\varepsilon_{11}(\tau) - \frac{\sigma_{11}(\tau)}{9K} \right) d\tau. \quad (7)$$

Это уравнение используется для определения материальных параметров на основании опытных данных.

3.3. Алгоритм метода нелинейной аппроксимации определения материальных параметров и функций физических уравнений (6) на основе экспериментальных данных

Ядро релаксации $\Gamma(t)$ разыскивается в виде суммы экспоненциального ряда

$\Gamma(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i t}$; после его подстановки в (7) запишем

$$\sigma_{11}(t) = 3G \left(\left(\varepsilon_{11}(t) - \frac{\sigma_{11}(t)}{9K} \right) - \frac{3}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i(t-\tau)} \left(\varepsilon_{11}(\tau) - \frac{\sigma_{11}(\tau)}{9K} \right) d\tau \right). \quad (8)$$

Задача состоит в определении по экспериментальным данным параметров $G, K, C_1, C_2, \dots, C_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Алгоритм состоит в следующем. Из множества точек наблюдения эксперимента $t_1, t_2, \dots$ выбирается конечное число (L) узловых точек $\{t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_L}\}$, с использованием которых строится квадратичное среднее J для экспериментальных значений σ_{11} , ε_{11} и значений параметров $\tilde{\sigma}_{11}(t_{m_j})$, $\tilde{\varepsilon}_{11}(t_{m_j})$ в момент времени t_{m_j} , определенных по формуле (8):

$$J = \sqrt{\frac{1}{m_L} \left(\sum_{j=1}^{m_L} \left(1 - \frac{\tilde{\sigma}_{11}(t_{m_j})}{\sigma_{11}(t_{m_j})} \right)^2 \right)}. \quad (9)$$

Для момента времени t_{m_j} введем обозначения

$$f(t_{m_j}) = \left(\varepsilon_{11}(t_{m_j}) - \frac{\sigma_{11}(t_{m_j})}{9K} \right), \quad \Phi_i(t_{m_j}) = \int_0^{t_{m_j}} e^{-\alpha_i(t_{m_j}-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (10)$$

и перепишем (8) в виде:

$$\tilde{\sigma}_{11}(t_{m_j}) = 3G f(t_{m_j}) - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i(t_{m_j}). \quad (11)$$

При вычислении интеграла в формуле (10) используется его свойство аддитивности:

$$I = \int_0^t e^{-\alpha_i(t-\tau)} f(\tau) d\tau = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-\alpha_i(t_k-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad (12)$$

а также линейная интерполяция на промежутке $[t_{k-1}; t_k]$ подинтегральной функции $f(\tau) = \left(\varepsilon_{11}(\tau) - \frac{\sigma_{11}(\tau)}{9K} \right)$. Поиск минимума функции J по параметрам аппрок-

симуляции осуществляется следующим образом. Прежде всего строятся условия стационарности этой функции по $G, C_1, C_2, \dots, C_n$, которые являются линейными уравнениями относительно этих параметров. Построим такую систему линейных уравнений относительно линейной группы неизвестных параметров, используя необходимые условия минимума функции (9):

$$1) \frac{\partial J}{\partial G} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m_t} \left[\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}(t_{m_j})}{\sigma(t_{m_j})} \right) \frac{1}{\sigma(t_{m_j})} f(t_{m_j}) \right] = 0; \quad (13)$$

$$2) \frac{\partial J}{\partial C_q} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m_t} \left[\left(1 - \frac{\tilde{\sigma}(t_{m_j})}{\sigma(t_{m_j})} \right) \frac{1}{\sigma(t_{m_j})} \Phi_q(t_{m_j}) \right] = 0, \quad q = 1, \dots, n.$$

В результате получаем систему линейных уравнений относительно $G, C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$A_{11}G + A_{12}C_1 + A_{13}C_2 + \dots = B_1, \quad (14)$$

$$A_{(q+1)1}G + A_{(q+1)2}C_1 + A_{(q+1)3}C_2 + \dots = B_{(q+1)}, \quad q = 1, \dots, n,$$

где обозначено

$$B_1 = \sum_{j=1}^{m_t} \frac{f(t_{m_j})}{\sigma(t_{m_j})}, \quad A_{11} = 3 \sum_{j=1}^{m_t} \frac{f^2(t_{m_j})}{\sigma^2(t_{m_j})},$$

$$A_{i(i+1)} = -\frac{3}{2} \sum_{j=1}^{m_t} \frac{\Phi_i(t_{m_j}) f(t_{m_j})}{\sigma^2(t_{m_j})}, \quad i = 1, \dots, n, \quad B_{q+1} = \sum_{j=1}^{m_t} \frac{\Phi_q(t_{m_j})}{\sigma(t_{m_j})},$$

$$A_{(q+1)1} = 3 \sum_{j=1}^{m_t} \frac{f(t_{m_j}) \Phi_q(t_{m_j})}{\sigma^2(t_{m_j})}, \quad A_{(q+1)(i+1)} = -\frac{3}{2} \sum_{j=1}^{m_t} \frac{\Phi_i(t_{m_j}) \Phi_q(t_{m_j})}{\sigma^2(t_{m_j})}, \quad i = 1, \dots, n.$$

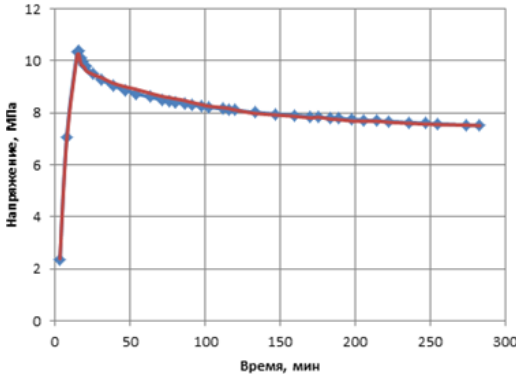


Рис. 5. Сравнение экспериментальных напряжений (точки) с результатами их аппроксимации (линия) для степени отверждения 75%

Fig. 5. Comparison of experimental stresses (dotted line) with their approximations (solid line) for a curing degree of 75%

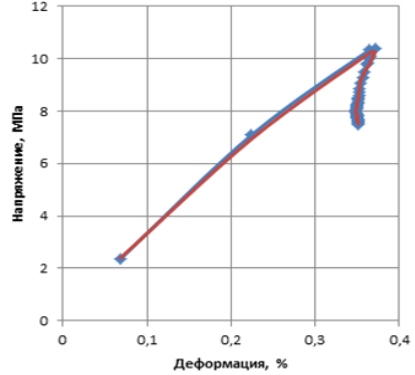


Рис. 6. Сравнение экспериментально полученной зависимости σ – ε (точки) с результатами их аппроксимации (линия) для степени отверждения 75%

Fig. 6. Comparison of the experimental dependence σ – ε (dotted line) with its approximation (solid line) for a curing degree of 75%

Решение системы линейных уравнений (14), подставленное в (9), позволяет оставить в качестве неопределенных неизвестных лишь оставшиеся параметры $K, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$, которые определяются методом Нелдера–Мида (деформируемых многогранников) [31] из условия минимума функции J .

Критериями достоверности получаемого решения являются малость значения (допускаемая погрешность) среднеквадратического отклонения (9), устойчивость решения к выбору узловых точек $\{t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_L}\}$.

Результаты вычисления материальных параметров уравнения (8) для случаев 45, 67 и 75% степени отверждения образцов приводятся на рис. 5, 6 и в табл. 2.

Таблица 2

Параметры аппроксимации для уравнения (8)

Степень отверждения	45%	67%	75%
G [МПа]	807.0	944.0	1 527.0
$1/K$ [МПа ⁻¹]	0.0005	0.0017	0.00013
C_1 [МПа/мин]	4.5	5.71	6.71
C_2 [МПа/мин]	2.79	49.94	1 257.6
α_1 [1/мин]	0.007	0.016	0.017
α_2 [1/мин]	0.01	0.105	1.14
Среднеквадратичная погрешность J , %	1.2	2.3	1.3

Данное исследование показало, что физические уравнения не полностью отвержденного связующего при малых деформациях вполне удовлетворительно описываются уравнениями Вольтерра линейной вязкоупругости.

3.4. Особенности полимеризации в вакууме

В работе [26] предлагается технология изготовления космических крупнобаритных конструкций из препрега с не полностью отвержденным связующим и последующим их разворачиванием и отверждением в космосе в условиях вакуума.



Рис. 7. Исходный и вспененный образцы

Fig. 7. Initial and foamed samples

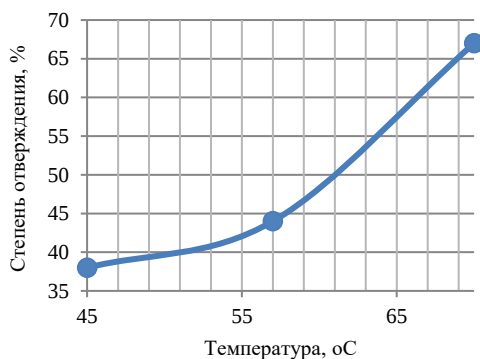


Рис. 8. Зависимость барьерной степени отверждения от температуры

Fig. 8. Temperature dependence of the barrier curing degree

Показывается, что при отверждении эпоксидного связующего в вакууме критичным является испарение его активных компонентов, значительное уменьшение которого может быть достигнуто предотвращением полимера. Еще одной особенностью отверждения связующего в вакууме является его вспенивание из-за наличия в нем пузырьков воздуха (рис. 7).

Эффект вспенивания зависит от температуры. При этом для каждой температуры существует «барьерная» степень отверждения, начиная с которой образец в вакууме не вспенивается (рис. 8). Такая степень отверждения отвечает отверждению образца в условиях атмосферного давления. Например, для рассмотренного выше эпоксидного связующего при температуре 70°C барьерной степенью отверждения будет 67%. Механические свойства 67%-ного отверждения связующего описываются параметрами, приведенными в табл. 2. Представление о барьерной степени может использоваться при оценке степени отверждения связующего в препрегах, используемых в доотверждаемых в условиях вакуума конструкциях.

Заключение

Предложен комплексный расчетно-экспериментальный подход к описанию механического состояния эпоксидного связующего при малых деформациях в зависимости от степени его отверждения. Подход базируется на экспериментальных данных: изотермических испытаниях по отверждению эпоксидного связующего и длительных опытах при одноосном нагружении образцов. Полученные данные обрабатываются с использованием математических методов оптимизации для определения материальных параметров уравнения конверсии и физических уравнений вязкоупругости в форме Вольтерра. Результаты исследования могут использоваться в расчетах технологических процессов изготовления конструкций из композитов, а также в прогнозировании поведения конструкций космического назначения, доотверждаемых в условиях вакуума в открытом космосе.

Список источников

1. Сахабутдинова Л.Р., Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В. Численное моделирование процесса изготовления крупногабаритного композитного кокона с учетом термовязкоупругости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 165–181. doi: 10.17223/19988621/76/12
2. Нацик В.Д., Фоменко Л.С., Лубенец С.В. Исследование ползучести и стеклования эластомеров методом микроиндентирования: эпоксидная смола и нанокompозиты на ее основе // Физика твердого тела. 2013. Т. 55, №. 5. С. 940–952.
3. Садикова М.М., Хамраева М.К. Эпоксидные композиционные материалы и их влияние на физико-механические свойства полимеров // Universum: технические науки : электронный научный журнал. 2020. № 6 (75). URL: <http://7universum.com/ru/tech/archive/item/9796> (дата обращения: 03.06.2023).
4. Молоков М.В., Низин Д.Р., Низина Т.А., Старцев О.В. Результаты экспериментальных исследований полимерных композиционных материалов на основе низковязких эпоксидных связующих // Орапёв-online. 2014. № C2 (40). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rezultaty-eksperimentalnyh-issledovaniy-polimernyh-kompozitsionnyh-materialov-na-osnove-nizkovyazkih-epoksidnyh-svyazuyuschih> (дата обращения: 03.06.2023).
5. Manickam R., Lakshmi Narasimhan R., Nagarajan S., Damodaran V.K., Devarajan B. Influence of filler material on properties of fiber-reinforced polymer composites: a review // E-Polymers. 2022. V. 22 (1). P. 898–916. doi: 10.1515/epoly-2022-0080

6. Полоз А.Ю., Эбич Ю.Р., Долинская Р.М., Мозгалева В.В. Вязкоупругие свойства износостойких эпоксидных композитов // Вопросы химии и химической технологии. 2013. № 5. С. 72–77.
7. Böckenhoff P., Gundlach C., Kästner M. Experimental characterization and modeling of the material behavior of an epoxy system // SN Appl. Sci. 2020. V. 2 (1702). P. 1–13. doi: 10.1007/s42452-020-03451-1
8. Rocha I.B.C.M., van der Meer F.P., Raijmakers S., Lahuerta F., Nijssen R.P.L., Sluys L.J. Numerical/experimental study of the monotonic and cyclic viscoelastic/viscoplastic/fracture behavior of an epoxy resin // International Journal of Solids and Structures. 2019. V. 168. P. 153–165. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2019.03.018
9. Lascano D., Quiles-Carrillo L., Torres-Giner S., Boronat T., Montanes N. Optimization of the Curing and Post-Curing Conditions for the Manufacturing of Partially Bio-Based Epoxy Resins with Improved Toughness // Polymers. 2019. V. 11 (1354). doi: 10.3390/polym11081354
10. Karkanas P.I., Partridge I.K. Cure modeling and monitoring of epoxy/amine resin systems. I. Cure kinetics modeling // J Appl Polym Sci. 2000. V. 77 (7). P. 1419–1431. doi: 10.1002/1097-4628(20000815)
11. Pater J.T.M., Weicker G., van Swaaij W.P.M. Polymerization of liquid propylene with a fourth generation Ziegler-Natta catalyst: Influence of temperature, hydrogen, monomer concentration, and prepolymerization method on polymerization kinetics // J. Appl. Polym. Sci. 2003. V. 87. P. 1421–1435.
12. Захарова В.Г., Кавардина В.А. Кинетическое уравнение элементарной реакции // Поколение будущего: взгляд молодых ученых – 2021 : сб. ст. 10-й Междунар. молодежной науч. конф. Курск : Юго-Зап. гос. ун-т, 2021. Т. 4. С. 35–38.
13. Хозин В.Г., Зыкова Е.С. Модифицирование эпоксидных связующих наночастицами для полимеркомпозитной арматуры // Вестник Казанского технологического университета. 2013. № 18. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modifitsirovanie-epoksidnyh-svyazuyuschih-nanochastitsami-dlya-polimerkompozitnoy-armatury> (дата обращения: 03.06.2023).
14. Bornosuz N.V., Gorbunova I.Yu., Petrakova V.V., ..., Onuchin D.V., Sirotin I.S. Isothermal kinetics of epoxyphosphazene cure // Polimers. 2021. V. 13 (2). Art. 297. P. 1–16. doi: 10.3390/polym13020297
15. Kovaleva E.G., Savotchenko S.E. Kinetic features of polymerization of epoxy resin modified by silicon-containing additives and mineral fillers // Polymer Engineering & Science. 2022. V. 62 (1). P. 75–82. doi: 10.1002/pen.25833
16. Abhijit S., Mahanwar P.A., Bambole V.A. Effect of polypyrrole on the properties of conventional epoxy coatings // Pigment & Resin Technology. 2013. Vol. 42 (5). P. 317–325. doi: 10.1108/PRT-04-2011-0030
17. Кондюрин А.В., Комар Л.А., Свистков А.Л. Моделирование кинетики реакции отверждения композиционного материала на основе эпоксидного связующего // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 4. С. 597–611.
18. Свистков А.Л., Комар Л.А., Кондюрин А.В., Мальцев М.С., Терпугов В.Н. Испарение молекул отвердителя в реакции полимеризации эпоксидной смолы // Материалы XI Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016). М. : Моск. авиационный ин-т, 2016. С. 385–387.
19. Jingkuan Duan, Jun Zhang, Pingkai Jiang. Effect of external electric field on morphologies and properties of the cured epoxy and epoxy/acrylate systems // Journal of Applied Polymer Science. 2012. V. 125 (2). P. 902–914. doi: 10.1002/app.33368
20. Kupriyanova E.V., Osipchik V.S., Kravchenko T.P., Pachina A.N., Morozova T.V. Optimization of Properties of Epoxy Binders during Their Modification // Polymer Science. Series D. 2021. Vol. 14 (4). P. 483–488. doi: 10.1134/S1995421221040109
21. Arinina M.P., Kostenko V.A., Gorbunova I.Y., Il'in S.O., Malkin A.Y. Kinetics of Curing of Epoxy Oligomer by Diaminodiphenyl Sulfone: Rheology and Calorimetry // Polymer Science. Series A. 2018. V. 60 (5). P. 683–690.

22. Роцин Д.Е., Патлажан С.А., Берлин А.А. Моделирование свободно-радикальной полимеризации при периодическом фотоиницировании // Высокомолекулярные соединения Б. 2022. Т. 64 (1). С. 71–80. doi: 10.31857/S2308113922010065
23. Бондалетова Л.И., Бондалетов В.Г. Полимерные композиционные материалы : учеб. пособие. Томск : Изд-во Том. политехн. ун-та, 2013. Ч. 1. 118 с.
24. Kim W.G., Lee J.Y. Cure Properties of Methacrylate-Type Prepolymer That Include Cyclohexane Moiety // Journal of Applied Polymer Science. 2004. V. 92 (1). P. 43–52. doi: 10.1002/app.13635
25. Малкин А.Я., Бегушев В.П. Химическое формование полимеров. М. : Химия, 1991. 240 с.
26. Kondyurin A. Design and Fabrication of Large Polymer Constructions in Space. Elsevier, 2022. 630 p.
27. Морозов И.А., Свистков А.Л. Структурно-феноменологическая модель механического поведения резины // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14, № 4. С. 583–596.
28. Качанов Л.М. Теория ползучести. М. : Физматгиз, 1960. 455 с.
29. Одквист Ф. Технические теории ползучести // Механика : сб. переводов и обзоров. 1959. № 2. С. 101–111.
30. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М. : Наука. 1970. 280 с.
31. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М. : Мир. 1975. 536 с.

References

1. Sakhabutdinova L.R., Smetannikov O.Yu., Il'inykh G.V. (2022) Chislennoe modelirovanie protsessa izgotovleniya krupnogabaritnogo kompozitnogo kokona s uchetom termovyazko-uprugosti [Numerical simulation of the process manufacture of large-scale composite shell taking into account thermo viscoelastic]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 165–181. doi: 10.17223/19988621/76/12
2. Natsik V.D., Fomenko L.S., Lubenets S.V. (2013) Issledovanie polzuchesti i steklovaniya elastomerov metodom mikroindentirovaniya: epoksidnaya smola i nanokompozity na ee osnove [Investigation of the creep and glass transition of elastomers by the microindentation method: Epoxy resin and related nanocomposites]. *Physics of the Solid State*. 55. pp. 1020–1033. doi: 10.1134/S1063783413050260
3. Sadikova M.M., Khamraeva M.K. (2020) Epoksidnye kompozitsionnye materialy i ikh vliyanie na fiziko-mekhanicheskie svoystva polimerov [Epoxy composite materials and their influence on physical-mechanical properties of polymers]. *Universum: Tekhnicheskie nauki – Universum: Technical Sciences*. 6(75). URL: <http://universum.com/ru/tech/archive/item/9796>
4. Molokov M.V., Nizin D. R., Nizina T.A., Startsev O.V. (2014) Rezul'taty eksperimental'nykh issledovaniy polimernykh kompozitsionnykh materialov na osnove nizkovyazkikh epoksidnykh svyazuyushchikh [Experimental studies of polymer composites based on low-viscosity epoxy binders]. *Ogarev-Online*. C2(40).
5. Manickam R., Lakshmi Narasimhan R., Nagarajan S., Damodaran V.K., Devarajan B. (2022) Influence of filler material on properties of fiber-reinforced polymer composites: A review. *E-Polymers*. 22(1). pp. 898–916. doi: 10.1515/epoly-2022-0080
6. Poloz A.Yu., Ebich Yu.R., Dolinskaya R.M., Mozgalev V.V. (2013) Vyazkouprugie svoystva iznosostoykikh epoksidnykh kompozitov [Viscoelastic properties of wear resistant epoxy composites]. *Voprosy khimii i khimicheskoy tekhnologii*. 5. pp. 72–77.
7. Böckenhoff P., Gundlach C., Kästner M. (2020) Experimental characterization and modeling of the material behavior of an epoxy system. *SN Applied Sciences*. 2(1702). pp. 1–13. doi: 10.1007/s42452-020-03451-1

8. Rocha I.B.C.M., van der Meer F.P., Raijmakers S., Lahuerta F., Nijssen R.P.L., Sluys L.J. (2019) Numerical/experimental study of the monotonic and cyclic viscoelastic/viscoplastic/fracture behavior of an epoxy resin. *International Journal of Solids and Structures*. 168. pp. 153–165. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2019.03.018
9. Lascano D., Quiles-Carrillo L., Torres-Giner S., Boronat T., Montanes N. (2019) Optimization of the curing and post-curing conditions for the manufacturing of partially bio-based epoxy resins with improved toughness. *Polymers*. 11(8). Article 1354. doi: 10.3390/polym11081354
10. Karkanis P.I., Partridge I.K. (2000) Cure modeling and monitoring of epoxy/amine resin systems. I. Cure kinetics modeling. *Journal of Applied Polymer Science*. 77(7). pp. 1419–1431. doi: 10.1002/1097-4628(20000815)
11. Pater J.T.M., Weicker, G., van Swaaij W.P.M. (2003) Polymerization of liquid propylene with a fourth generation Ziegler-Natta catalyst: Influence of temperature, hydrogen, monomer concentration, and prepolymerization method on polymerization kinetics. *Journal of Applied Polymer Science*. 87. pp. 1421–1435.
12. Zakhharova V.G., Kavardina V.A. (2021) Kineticheskoe uravnenie elementarnoy reaktsii [Kinetic equation of elementary reaction]. *Sbornik statey 10-y Mezhdunarodnoy molodyozhnoy nauchnoy konferentsii*. 4. pp. 35–38.
13. Khozin V.G., Zykova E.S. (2013) Modifitsirovanie epoksidnykh svyazuyushchikh nanochastitsami dlya polimerkompozitnoy armatury [Modification of epoxy binders with nanoparticles for polymer composite reinforcement]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta – Bulletin of the Technological University*. 18. pp. 178–181.
14. Bornosuz N.V., Gorbunova I.Yu., Petrakova V.V., Shutov V.V., Kireev V.V., Onuchin D.V., Sirotin I.S. (2021) Isothermal kinetics of epoxyphosphazene cure. *Polimers*. 13(2). Article 297. pp. 1–16. doi: 10.3390/polym13020297
15. Kovaleva E.G., Savotchenko S.E. (2022) Kinetic features of polymerization of epoxy resin modified by silicon-containing additives and mineral fillers. *Polymer Engineering & Science*. 62(1). pp. 75–82. doi: 10.1002/pen.25833
16. Abhijit S., Mahanwar P.A., Bambole V.A. (2013) Effect of polypyrrole on the properties of conventional epoxy coatings. *Pigment & Resin Technology*. 42(5). pp. 317–325. doi: 10.1108/PRT-04-2011-0030
17. Kondyurin A.V., Komar L.A., Svistkov A.L. (2010) Modelirovanie kinetiki reaktsii otverzhdeniya kompozitsionnogo materiala na osnove epoksidnogo svyazuyushchego [Modeling the kinetics of the curing reaction of a composite material based on an epoxy binder]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Mechanics of Composite Materials and Structures*. 16(4). pp. 597–611.
18. Svistkov A.L., Komar L.A., Kondyurin A.V., Mal'tsev M.S., Terpugov V.N. (2016) Isparenie molekul otverditelya v reaktsii polimerizatsii epoksidnoy smoly [Evaporation of hardener molecules in the polymerization reaction of epoxy resin]. *Materialy XI Mezhdunarodnoy konferentsii po neravnovesnym protsessam v soplakh i struyakh. Moskovskiy aviatsionnyy institut*. pp. 385–387.
19. Duan J., Zhang J., Jiang P. (2012) Effect of external electric field on morphologies and properties of the cured epoxy and epoxy/acrylate systems. *Journal of Applied Polymer Science*. 125(2). pp. 902–914. doi: 10.1002/app.33368
20. Kupriyanova E.V., Osipchik V.S., Kravchenko T.P., Pachina A.N., Morozova T.V. (2021) Optimization of properties of epoxy binders during their modification. *Polymer Science, Series D*. 14(4). pp. 483–488. doi: 10.1134/S1995421221040109
21. Arinina M.P., Kostenko V.A., Gorbunova I.Y., Il'in S.O., Malkin A.Y. (2018) Kinetics of curing of epoxy oligomer by diaminodiphenyl sulfone: rheology and calorimetry. *Polymer Science, Series A*. 60(5). pp. 683–690. doi: 10.1134/S0965545X18050012
22. Roshchin D.E., Patlazhan S.A., Berlin A.A. (2022) Modelirovanie svobodno-radikal'noy polimerizatsii pri periodicheskom fotoinitsirovanii [Simulation of free-radical polymeriza-

- tion during periodic photoinitiation]. *Vysokomolekulyarnye soedineniya B – Polymer Science, Series B*. 64(1). pp. 71–80. doi: 10.31857/S2308113922010065
23. Bondaletova L.I., Bondaletov V.G. (2013) *Polimernye kompozitsionnye materialy (chast' 1): uchebnoe posobie* [Polymer composite materials (part 1): Textbook]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta.
 24. Kim W.G., Lee J.Y. (2004) Cure properties of methacrylate-type prepolymer that include cyclohexane moiety. *Journal of Applied Polymer Science*. 92(1). pp. 43–52. doi: 10.1002/app.13635
 25. Malkin A.Ya., Begishev V.P. (1991) *Khimicheskoe formovanie polimerov* [Chemical molding of polymers]. Moscow: Khimiya.
 26. Kondyurin A. (2022) *Design and Fabrication of Large Polymer Constructions in Space*. Elsevier.
 27. Morozov I.A., Svistkov A.L. (2008) Strukturno-fenomenologicheskaya model' mekhanicheskogo povedeniya reziny [Structural phenomenological model of mechanical behavior of filled rubber]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy – Mechanics of Composite Materials and Structures*. 14(4). pp. 583–596.
 28. Kachanov L.M. (1960) *Teoriya polzuchesti* [Creep theory]. Moscow: Fizmatlit.
 29. Odkvist F. (1959) Tekhnicheskie teorii polzuchesti [Technical theories of creep]. *Sbornik perevodov «Mekhanika»*. 2. pp. 101–111.
 30. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. (1970) *Osnovy matematicheskoy teorii termovязкоупругosti* [Fundamentals of the mathematical theory of thermoviscoelasticity]. Moscow: Nauka.
 31. Khimmel'blau D. (1975) *Prikladnoe nelineynoe programmirovaniye* [Applied nonlinear programming]. Moscow: Mir.

Сведения об авторах:

Пестренин Валерий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета (ПГНИУ) (Пермь, Россия). E-mail: PestreninVM@mail.ru

Пестренина Ирина Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета (ПГНИУ) (Пермь, Россия). E-mail: IPestrenina@gmail.com

Ландик Лидия Владимировна – инженер кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета (ПГНИУ) (Пермь, Россия). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

Поморцева Татьяна Николаевна – заведующая учебно-методическим кабинетом кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета (ПГНИУ) (Пермь, Россия). E-mail: tata.lisica@yandex.ru

Мерзляков Андрей Федорович – заведующий учебно-научной лабораторией термомеханических методов испытаний кафедры вычислительной и экспериментальной механики Пермского государственного национального исследовательского университета (ПГНИУ) (Пермь, Россия). E-mail: merzlyakov@psu.ru

Information about the authors:

Pestrenin Valeriy M. (Candidate of Physics and Mathematics, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: pestreninvm@mail.ru

Pestrenina Irena V. (Candidate of Technical Sciences, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: ipestrenina@gmail.com

Landik Lidiya V. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: LidiaLandik@gmail.com

Pomortseva Tat'yana N. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: tata.lisica@yandex.ru

Merzlyakov Andrey F. (Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: merzlyakov@psu.ru

Статья поступила в редакцию 03.06.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 03.06.2023; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 539.32

doi: 10.17223/19988621/89/10

Влияние параметров включений с оболочкой на напряженно-деформированное состояние полимерной матрицы в дисперсно-армированном композиционном материале

Игорь Николаевич Сидоров¹, Владимир Александрович Куклин²,
Анна Игоревна Энская³, Максим Петрович Данилаев⁴

^{1, 2, 3, 4} Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия

¹ INSidorov@kai.ru

² iamkvova@yandex.ru

³ AIEnskaya@kai.ru

⁴ danilaev@mail.ru

Аннотация. Один из подходов к повышению смачиваемости дисперсных частиц наполнителя полимером основан на формировании полимерной оболочки на поверхностях частиц. Различия механических свойств ортотропного полимера и капсулированных частиц наполнителя являются основной причиной возникновения локальных напряженно-деформированных состояний в областях наполнителя. В работе представлены результаты математического моделирования формирования остаточных технологических напряжений на примере структурной модели полимерных композиционных материалов. Показана зависимость этих технологических напряжений от ориентации молекул полимера в кристаллитах по отношению к частицам наполнителя.

Ключевые слова: дисперсно-армированный полимер, напряженно-деформированные состояния, полимерный композиционный материал

Благодарности: Научные исследования проведены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках исполнения обязательств по Соглашению № 075-03-2024-067 от 17.01.2024.

Для цитирования: Сидоров И.Н., Куклин В.А., Энская А.И., Данилаев М.П. Влияние параметров включений с оболочкой на напряженно-деформированное состояние полимерной матрицы в дисперсно-армированном композиционном материале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 135–146. doi: 10.17223/19988621/89/10

Effect of the parameters of inclusions with shells on the stress-strain state of a polymer matrix in a composite material reinforced with a dispersed filler

Igor' N. Sidorov¹, Vladimir A. Kuklin²,
Anna I. Enskaya³, Maksim P. Danilaev⁴

^{1, 2, 3, 4} Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, Russian Federation

¹ INSidorov@kai.ru

² iamkvova@yandex.ru

³ AIEnskaya@kai.ru

⁴ danilaev@mail.ru

Abstract. An increase in the wettability of dispersed particles with a polymer is one of the main tasks when creating polymer composite materials reinforced with a dispersed filler. Wettability can be increased due to the polymer shells provided on the surfaces of the particles. By varying the polymer shell thickness of the filler particles, the mechanical properties of the polymer composite materials can be controlled. In a polymer matrix with partial crystallinity, the stress-strain states can be induced by the orthotropy of macromolecules near the filler particles. The main reasons for the stress-strain states are the differences in the mechanical properties of the polymer and filler particles and the technological parameters. In this paper, mathematical modeling results for the occurrence of internal residual stresses are obtained using a three-phase structural model of polymer composite materials. It is shown that these technological stress-strain states are independent of the orientation of polymer molecules to the filler particles in crystallites, and they can decrease the mechanical properties of the entire composition. Thus, the effect of submicron filler particles with polymer shells on the mechanical properties of the polymer composition may vary depending on the amorphous or crystalline structure of the polymer matrix.

Keywords: polymer reinforced with a dispersed filler, stress-strain states, polymer composite material

Acknowledgments: This scientific research was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (agreement No. 075-03-2024-067).

For citation: Sidorov, I.N., Kuklin, V.A., Enskaya, A.I., Danilaev, M.P. (2024) Effect of the parameters of inclusions with shells on the stress-strain state of a polymer matrix in a composite material reinforced with a dispersed filler. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 135–146. doi: 10.17223/19988621/89/10

Введение

От функционального полимерного композита требуется сочетание различных свойств [1, 2]. Например, механические свойства и устойчивость к биоразложению [3] требуются для полимерных композитов, которые используются в тропи-

ческом климате, или электрическая проводимость, оптическая прозрачность и сопротивление истиранию [4] требуются для полисилоксанового композиционного покрытия органического стекла в авиации. Частицы субмикронного наполнителя широко используются для придания полимерной композиции требуемых функциональных свойств (теплопроводность, электропроводность, стойкость к биодеструкции и др.) [5, 6].

Для защиты полимерных композитов от биодеструкции эффективно используют дисперсные частицы наполнителя, например оксида меди, оксида цинка [7, 8]. Так, частицы оксида цинка можно использовать для достижения биоцидного эффекта полиэтилена, который имеет частично кристаллическую структуру [7]. Обеспечение требуемых механических свойств наряду с функциональными таких полимерных композитов зачастую требует хорошей адгезии субмикронных частиц к полимерной матрице. Один из подходов к повышению адгезии между субмикронными частицами наполнителя и полимером основан на формировании полимерной оболочки на поверхности этих частиц [9, 10]. Например, создание биоцидного полимерного композита с требуемыми механическими характеристиками возможно за счет формирования оболочки из биоразлагаемого материала, например полилактида [11], на частицах, проявляющих токсичность к микроорганизмам-деструкторам [8]. Использование биоразлагаемого материала оболочки способствует повышению скорости растворения частиц: в результате деструкции полилактида ферментами микроорганизмов образуется молочная кислота [12]. Однако следует отметить, что в полимерной матрице с кристаллической структурой вблизи частиц наполнителя возможно возникновение локальных напряженно-деформированных состояний (НДС) [13]. Возникновение локальных НДС может быть вызвано структурной усадкой и температурной деформацией в полимерной матрице и полимерной оболочке при формировании полимерного композита. Это должно сказаться на механических характеристиках полимерного композиционного материала [14]. Характер локального НДС зависит от свойств матрицы, частиц наполнителя и полимерной оболочки на поверхности частиц.

Цель данной работы – определение влияния толщины полимерной оболочки из полилактида на поверхностях частиц оксида цинка, а также среднего размера этих частиц на характер напряженно-деформированного состояния в частично кристаллической матрице.

Теоретическая часть

Рассмотрим решение задачи определения поля остаточных технологических напряжений (ОТН) элементов полимерного композиционного материала (ПКМ) на этапе его создания. Построение математической модели будем проводить аналогично работе [15] в приближении линейной теории упругости. Для анализа возникновения внутренних деформаций и соответствующих им напряжений в ПКМ будем рассматривать модель, представленную на рис. 1. Объем ПКМ (см. рис. 1) состоит из следующих элементов: Ω_1 – ортотропная, обладающая кристаллическостью полимерная матрица; субмикронные сферические частицы, состоящие из внешней изотропной оболочки постоянной толщины с известными механическими характеристиками – Ω_2 ; включения в виде изотропного элемента (дисперсной частицы наполнителя) также с известными механическими характеристиками – Ω_3 .

Решение задачи будем рассматривать при малой объемной доле содержания сферических включений в полимерной матрице, полагая их сферически симметричное деформирование в бесконечно протяженной полимерной матрице (см. рис. 1) при действии температурных и усадочных деформаций матрицы.

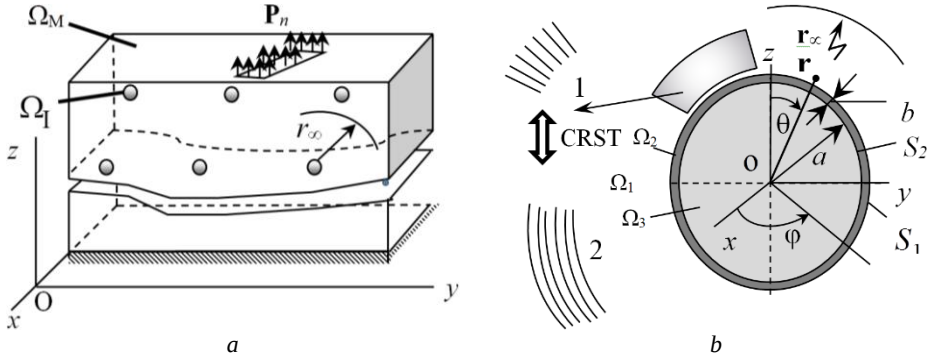


Рис. 1. Дисперсно-армированный ПКМ: *a* – общий вид дисперсно-армированного ПКМ, где Ω_M – объем матрицы, Ω_1 – объем субмикронной сферической частицы включения; *b* – объем субмикронной сферической частицы со структурой, где Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 – объемы матрицы, оболочки и включения, CRST – структура ориентации кристаллов полимерной матрицы, S_1 , S_2 – поверхности раздела матрицы, оболочки и включения

Fig. 1. Polymer composite material with a dispersed filler: (*a*) schematic view, where Ω_M is the volume of the matrix and Ω_1 is the volume of a submicron spherical filler particle; (*b*) volume of a submicron spherical filler particle, where Ω_1 , Ω_2 , and Ω_3 are the volumes of the matrix, shell, and filler particle, respectively; CRST is the crystal orientation in the polymer matrix; S_1 and S_2 are the interface surfaces between the matrix, shell, and filler particle

В этом случае система уравнений равновесия приводится к одному уравнению вида [16, 17]:

$$d_{,r}\sigma_{rr} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) = 0, \quad 0 \leq r \leq r_\infty, \quad (1)$$

где σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\phi\phi}$ – физические компоненты радиальных и тангенциальных нормальных напряжений, r_∞ – радиус сферы, на которой отсутствуют радиальные напряжения (выполнено $\sigma_{rr}|_{r_\infty} \approx 0$), и его значение определяется расстоянием между включениями (см. рис. 1), $d_{,r} \equiv d/dr$, $d_{,rr} \equiv d^2/dr^2$.

Уравнения для определения радиальной компоненты вектора перемещений элемента ПКМ u_r после введения безразмерных параметров задачи с использованием соотношений $r = a \cdot r^*$, $u_r = a \cdot u_r^*$, $\sigma_{rr} = E_r \cdot \sigma_{rr}^*$, $\sigma_{\theta\theta} = E_r \cdot \sigma_{\theta\theta}^*$ получим с использованием подхода, рассмотренного в работе [15]. Для ортотропной полимерной матрицы (координатные линии сферической системы координат являются осями ортотропии полимерной матрицы)

$$d_{,rr}u_r + \frac{2}{r}d_{,r}u_r - 2\gamma\frac{u_r}{r^2} = \frac{2\gamma_{T\varepsilon}}{r}, \quad \left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq r \leq \frac{r_\infty}{a}, \quad (2)$$

$$\gamma_{T\varepsilon} = \frac{\varepsilon_r(E_r^I \alpha_r^I - E_0^I \alpha_0^I) - (E_r^I \varepsilon_r^I - E_0^I \varepsilon_0^I)}{E_r^I(1 - \mu_{0\phi})}, \quad \gamma = \frac{E_0^I(1 - \mu_{0r})}{E_r^I(1 - \mu_{0\phi})},$$

$$\begin{aligned}
 E_i^I &= \frac{E_i/E_r}{1-\mu_i-2\mu_i^2}, \alpha_i^I = \alpha_i(1+\mu_i), E_r^I = k_\mu, \alpha_r^I = 2\mu_{r0}\left(\frac{\alpha_{0\phi}}{\alpha_r}\right) + (1-\mu_{0\phi}), \\
 \varepsilon_r^I &= \varepsilon_{(0)r}\left(2\mu_{r0}\left(\frac{\varepsilon_{(0)0\phi}}{\varepsilon_{(0)r}}\right) + (1-\mu_{0\phi})\right), E_0^I = \left(\frac{E_0}{E_r}\right)k_\mu, \alpha_0^I = \left(\frac{\alpha_{0\phi}}{\alpha_r}\right) + \mu_{0r}, \\
 \varepsilon_0^I &= \varepsilon_{(0)r}\left(\left(\frac{\varepsilon_{(0)0\phi}}{\varepsilon_{(0)r}}\right) + \mu_{0r}\right), \varepsilon_{rr} = d_{,r}u_r, \varepsilon_{\theta\theta} = u_r/r, \varepsilon_{tr} = \alpha_r\Delta T, k_\mu = \frac{1}{(1-\mu_{0\phi}-2\mu_{r0}\mu_{0r})}, \\
 E_0 &= E_\phi, \mu_{r0} = \mu_{r\phi}, \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}, \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi}, E_0\mu_{0r} = E_r\mu_{r0},
 \end{aligned}$$

изотропных однородных (без усадки) полимерной оболочке ($i = 2$) и включении ($i = 3$):

$$d_{,r}\left(\frac{1}{r^2}d_{,r}(r^2u_r)\right) = 0, \quad 0 \leq r \leq (1+b/a). \quad (3)$$

Здесь E_r, E_0, E_ϕ – модули Юнга в радиальном и тангенциальных направлениях, $\mu_{r0}, \mu_{0r}, \mu_{0\phi}$ – коэффициенты Пуассона материала матрицы; $\alpha_r, \alpha_{0\phi}$ – радиальные и тангенциальные коэффициенты линейного термического расширения (КЛТР) материала матрицы; u_r – радиальная компонента вектора перемещений элемента ПКМ от начала его полимеризации; $\varepsilon_{(0)r}, \varepsilon_{(0)0\phi}$ – усадочные деформации материала матрицы (предполагаем, что модули Юнга, КЛТР, усадочные деформации не зависят от радиуса); E_i, μ_i, α_i – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, КЛТР оболочки и включения; $\Delta T = T_0 - T_1$ – изменение температуры объема ПКМ при охлаждении от температуры T_1 (начальная температура; в работе принята 450 К), соответствующей вязкому состоянию ПКМ при его формировании, до температуры окружающей среды T_0 (конечная температура; в работе принята 300 К).

Дополним уравнения (2), (3) граничными условиями и условиями сопряжения на границах раздела S_2 ($r = 1$; включение–оболочка) (см. рис. 1) и S_1 ($r = 1 + b/a$; оболочка–матрица) с учетом того, что на этапе формирования ПКМ вектор напряжений (см. рис. 1) на внешней поверхности его объема $\mathbf{P}_n = 0$:

$$\sigma_{rr}^{(3)}\big|_{r=1} = \sigma_{rr}^{(2)}\big|_{r=1}, u_r^{(3)}\big|_{r=1} = u_r^{(2)}\big|_{r=1}, \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)}\big|_{S_1} = \sigma_{rr}^{(1)}\big|_{S_1}, u_r^{(2)}\big|_{S_1} = u_r^{(1)}\big|_{S_1}, \quad (5)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}\big|_{(r_\infty/a)} = 0, u_r^{(3)}\big|_{r=0} = 0.$$

Решения уравнений (2), (3) с учетом условий (4), (5) для компоненты u_r , для радиальных σ_{rr} и тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ имеют вид [15]:

$$\begin{aligned}
 u_r^{(1)} &= rf(r) + C_1^{(1)}r^{\beta_1} + C_2^{(1)}r^{\beta_1}, \\
 \beta_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+8\gamma}, f(r) = \begin{cases} (2\gamma_{T\varepsilon}/3)(\ln r - 1/3), & \gamma = 1, \\ \gamma_{T\varepsilon}/(1-\gamma), & \gamma \neq 1, \end{cases} \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{(1)} &= E_r^I \left((f(r) + rd_{,r}f(r))(1-\mu_{0\phi}) + f(r)2\mu_{r0} + C_1^{(1)}(\beta_1(1-\mu_{0\phi}) + 2\mu_{r0})r^{\beta_1-1} + \right. \\
 &\quad \left. + C_2^{(1)}(\beta_2(1-\mu_{0\phi}) + 2\mu_{r0})r^{\beta_2-1} \right) - E_r^I\alpha_r^I\varepsilon_{tr} - E_r^I\varepsilon_r^I, rd_{,r}f = \begin{cases} (2\gamma_{T\varepsilon}/3), & \gamma = 1, \\ 0, & \gamma \neq 1, \end{cases} \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = E_0^I \left(f(1 + \mu_{0r}) + (rd_{,r} f) \mu_{0r} + C_1^{(1)} (\beta_1 \mu_{0r} + 1) r^{\beta_1 - 1} + \right. \\ \left. + C_2^{(1)} (\beta_2 \mu_{0r} + 1) r^{\beta_2 - 1} \right) - E_0^I \alpha_0^I \varepsilon_{rr} - E_0^I \varepsilon_0^I, \quad (8)$$

$$u_r^{(i)} = \frac{C_1^{(i)}}{3} r + \frac{C_2^{(i)}}{r^2}, \quad i = 2, 3, \quad (9)$$

$$\sigma_{rr}^{(i)} = E_i^I \left(\frac{C_1^{(i)}}{3} (1 + \mu_i) - \frac{2(1 - 2\mu_i) C_2^{(i)}}{r^3} - \alpha_i^I \Delta T \right), \quad (10)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)} = E_i^I \left(\frac{C_1^{(i)}}{3} (1 + \mu_i) + \frac{(1 - 2\mu_i) C_2^{(i)}}{r^3} - \alpha_i^I \Delta T \right). \quad (11)$$

После подстановки выражений (6), (9) для компоненты u_r и выражений (7), (10) для радиальных напряжений σ_{rr} в условия (4), (5) получим систему уравнений для определения вектора неизвестных констант $\mathbf{C}_x = [C_1^{(3)} C_1^{(2)} C_2^{(2)} C_1^{(1)} C_2^{(1)}]^T$ (T – символ транспонирования, константа $C_2^{(3)} = 0$ в силу ограниченности компоненты u_r при $r = 0$)

$$\mathbf{D} \mathbf{C}_x = \mathbf{B}_x, \quad (12)$$

где вектор $\mathbf{B}_x = [0 B_{x2} B_{x3} B_{x4} B_{x5}]^T$ и матрица $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) с элементами, определяемыми геометрией и механическими параметрами субмикронной сферической частицы матрицы.

Результаты расчета

Данные по механическим характеристикам материалов ПКМ, которые использовались в расчетах, приведены в таблице. Характерные зависимости распределений радиальных σ_{rr} и тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$, рассчитанных по формулам (7), (8), (10)–(12), от степени ортотропии материала матрицы k_{orth} при относительной толщине оболочки $b/a = 0.05$ ($a = 2 \cdot 10^{-7}$ м, $b = 10^{-8}$ м) представлены на рис. 2.

Данные по материалам ПКМ ($\Delta T = -150$ К)

Матрица: полиэтилен					
E_r , МПа	Предел прочности при растяжении σ_{tem}^+ , МПа	КЛТР, α_r , 1/К	μ_{0r}	$\mu_{0\phi}$	$\varepsilon_{(0)r}$
260	10–17	$1.7 \cdot 10^{-4}$	0.18	0.18	$3 \cdot 10^{-2}$
Включения: оксид цинка					
E_3 , ГПа		КЛТР, α_3 , 1/К	μ_3		
143		$4.45 \cdot 10^{-6}$	0.36		
Оболочка: полилактид					
E_2 , МПа		КЛТР, α_2 , 1/К	μ_2		
343		$9 \cdot 10^{-6}$	0.3		

При этом степень ортотропии задается с помощью одного параметра $k_{orth} = E_0/E_r = \alpha_r/\alpha_{0\phi} = \varepsilon_{(0)r}/\varepsilon_{(0)\phi}$. Следует отметить, что $k_{orth} > 1$ соответствует тангенциальной ориентации молекул полимерной матрицы в кристаллите (см. рис. 1), а $k_{orth} < 1$ – радиальной ориентации. При радиальной ориентации молекул механические характеристики определяются внутримолекулярными взаимодействиями

в полимерных молекулах кристаллита, а при тангенциальном – межмолекулярными взаимодействиями [18, 19]. Случай $k_{orth} = 1$ соответствует случайной ориентации макромолекул полимера, т.е. изотропии механических характеристик полимерной матрицы вблизи включения с оболочкой. Расчеты выполнены при радиусе сферы $|r_\infty| = 10^{-2}$ м.

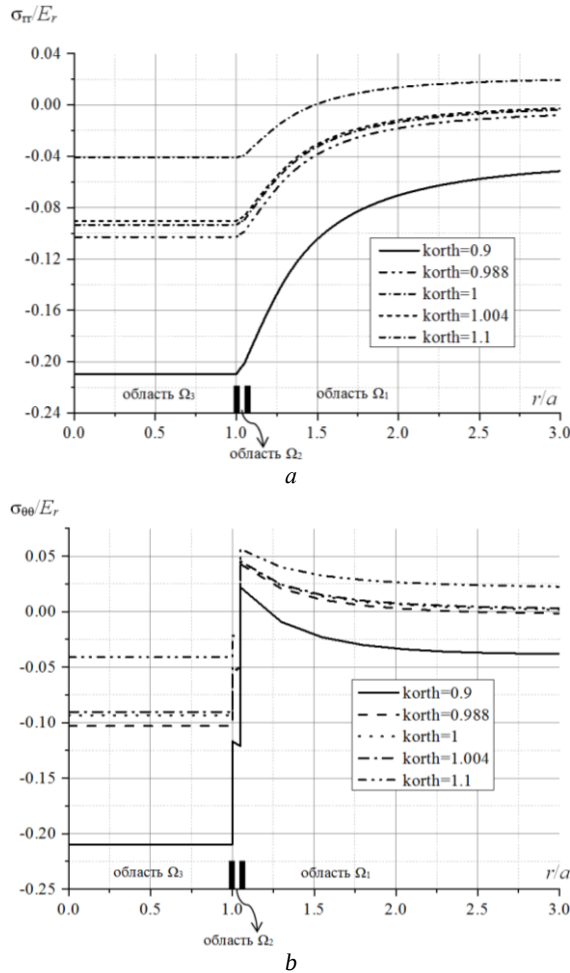


Рис. 2. Графики распределения σ_{rr}/E_r (a) и $\sigma_{\theta\theta}/E_r$ (b)

при различной степени ортотропии k_{orth} ($b/a = 0.05$, $|r_\infty| = 10^{-2}$ м)

Fig. 2. Distributions of (a) σ_{rr}/E_r and (b) $\sigma_{\theta\theta}/E_r$ as the functions of r/a with different degrees of orthotropy k_{orth} ($b/a = 0.05$, $|r_\infty| = 10^{-2}$ м)

Результаты расчета показывают, что из-за скачка механических характеристик материалов частиц наполнителя, оболочки и матрицы на границе их раздела тангенциальные напряжения претерпевают разрыв значений (см. рис. 2, b) [16], в отличие от непрерывных радиальных напряжений (соотношения (4), (5)). Следует отметить существенные изменения значений тангенциальных и радиальных

напряжений от степени ортотропии в материале полимерной матрицы вблизи частиц. Это может быть обусловлено различием в свойствах кристаллитов полимера вдоль и поперек ориентации макромолекул. Эти различия могут проявляться при температурных и усадочных деформациях, возникающих на стадии формирования дисперсно-армированного полимерного композиционного материала.

На рис. 3 приведены зависимости относительных радиальных σ_{rr}/E_r и тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}/E_r$ от относительной толщины оболочки b/a , соответствующих среднему радиусу включения $a = 2 \cdot 10^{-7}$ м, $|\mathbf{r}_\infty| = 10^{-2}$ м и толщинам оболочки 10^{-8} , $3 \cdot 10^{-8}$, $7 \cdot 10^{-8}$, 10^{-7} , $1.2 \cdot 10^{-7}$, $1.5 \cdot 10^{-7}$ м при степени ортотропии материала матрицы $k_{orth} = 0.9$ и $k_{orth} = 1.1$. При этом σ_{rr}/E_r , $\sigma_{\theta\theta}/E_r$ рассматривались на границе раздела матрицы и оболочки $S_1(r = 1 + b/a)$ со стороны матрицы (см. рис.1).

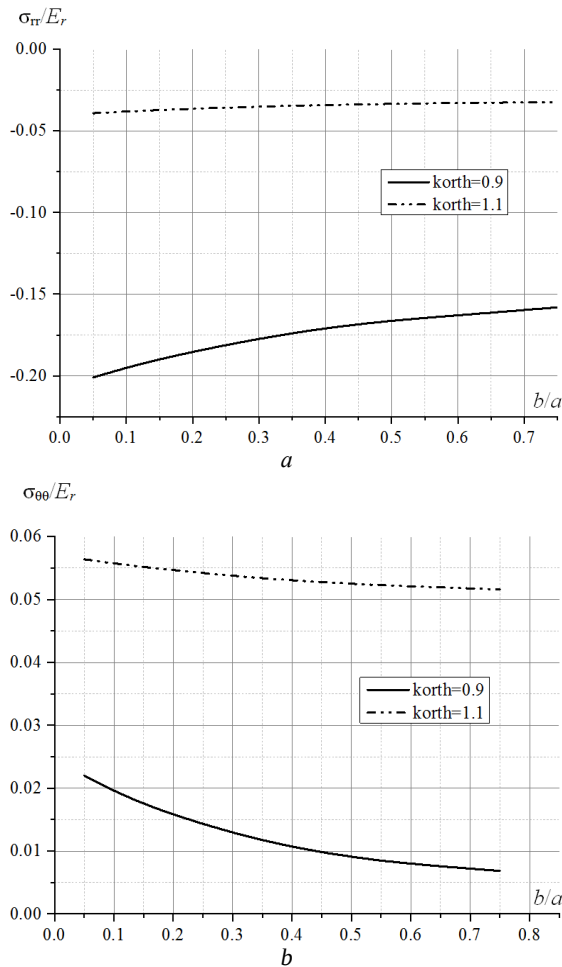


Рис. 3. Графики распределения σ_{rr} / E_r (a) и $\sigma_{\theta\theta} / E_r$ (b) при различной относительной толщине оболочки b/a

Fig. 3. Distributions of (a) σ_{rr} / E_r and (b) $\sigma_{\theta\theta} / E_r$ as the functions of shell thickness ratio b/a

Результаты расчета показывают, что при изменении степени ортотропии в диапазоне $k_{orth} = 0.9 \div 1.1$ при различных значениях относительной толщины оболочки b/a тангенциальные $\sigma_{\theta\theta}$ и радиальные напряжения σ_{rr} на границе раздела S_1 сохраняют со стороны матрицы соответственно положительные (растягивающие) и отрицательные (сжимающие) значения, а значения $\sigma_{\theta\theta}$ могут достигать величины $(0.056 \div 0.052) \cdot E_r = (14.6 \div 13.5)$ МПа, соизмеримой с пределом прочности при растяжении (см. таблицу).

Выводы

Таким образом, результаты расчета радиальных и тангенциальных ОТН в области частично кристаллической матрицы, примыкающей к границе раздела оболочки и матрицы, показывают следующее:

– в диапазоне степени ортотропии $k_{orth} = 0.9 \div 1.1$ при различных значениях относительной толщины оболочки в диапазоне $b/a = 0.05 \div 0.75$ тангенциальные $\sigma_{\theta\theta}$ и радиальные напряжения σ_{rr} на границе раздела S_1 сохраняют соответственно положительные (растягивающие) и отрицательные (сжимающие) значения;

– значения положительных ОТН $\sigma_{\theta\theta}$ соизмеримы с пределом прочности полимерной матрицы (полиэтилена) при растяжении σ_{tem}^+ (см. таблицу), и при растяжении образца ПКМ (на лицевой поверхности образца приложен растягивающий равномерно распределенный вектор напряжений $\mathbf{P}_n$ (см. рис. 1)) к растягивающим нормальным напряжениям вдоль оси z от действия этой нагрузки в областях частиц наполнителя добавятся положительные ОТН $\sigma_{\theta\theta}$. Это может привести к изменению предельного (разрушающего образец) значения модуля растягивающего вектора напряжений $\mathbf{P}_n$ по сравнению с предельным значением этого напряжения для ненаполненного полимера (полиэтилена). Изменение будет зависеть от выбора теории прочности и взаимного положения годографа вектора, состоящего из компонент тензора напряжений, и предельных поверхностей (поверхностей прочности) элементов образца ПКМ [19].

Список источников

1. Rybak A., Malinowski L., Adamus-Wlodarczyk A., Ulanski P. Thermally conductive shape memory polymer composites filled with boron nitride for heat management in electrical insulation // *Polymers*. 2021. V. 13 (13). P. 2161–2172. doi: 10.3390/polym13132191
2. Mittal V. Functional polymer nanocomposites with graphene: a review // *Macromolecular Materials and Engineering*. 2014. V. 299 (8). P. 906–931. doi: 10.1002/mame.201300394
3. Rościszewski P., Łukasiak J., Dorosz A., Galiński J., Szponar M. Biodegradation of polyorganosiloxanes // *Macromolecular Symposia*. 1998. V. 130 (1). P. 337–346. doi: 10.1002/masy.19981300129
4. Li Y., Zhang L., Li C. Highly transparent and scratch resistant polysiloxane coatings containing silica nanoparticles // *Journal of colloid and interface science*. 2020. V. 559. P. 273–281. doi: 10.1016/j.jcis.2019.09.031
5. Chauhan S.R., Thakur S. Effects of particle size, particle loading and sliding distance on the friction and wear properties of cenosphere particulate filled vinylester composites // *Materials & Design*. 2013. V. 51. P. 398–408. doi: 10.1016/j.matdes.2013.03.071
6. Hong J.I., Winberg P., Schadler L.S., Siegel R.W. Dielectric properties of zinc oxide/low density polyethylene nanocomposites // *Materials Letters*. 2005. V. 59 (4). P. 473–476. doi: 10.1016/j.matlet.2004.10.036

7. Vasyukova I.A., Zakharova O.V., Chaika V.V. Toxic Effect of Metal-Based Nanomaterials on Representatives of Marine Ecosystems: A Review // *Nanobiotechnology Reports*. 2021. V. 16 (2). P. 138–154. doi: 10.1134/S2635167621020178
8. Wyszowska J., Borowik A., Kucharski M., Kucharski J. Effect of cadmium, copper and zinc on plants, soil microorganisms and soil enzymes // *Journal of Elementology*. 2013. V. 18 (4). P. 769–796. doi: 10.5601/jelem.2013.18.4.455
9. Akhmadeev A.A., Bogoslov E.A., Danilaev M.P., Klabukov M.A., Kuklin V.A. Influence of the Thickness of a Polymer Shell Applied to Surfaces of Submicron Filler Particles on the Properties of Polymer Compositions // *Mechanics of Composite Materials*. 2020. V. 56. P. 241–248. doi: 10.1007/s11029-020-09876-4
10. Danilaev M.P., Drobyshev S.V., Klabukov M.A., Kuklin V.A., Mironova D.A. Formation of a Polymer Shell of a Given Thickness on Surfaces of Submicronic Particles // *Nanobiotechnology Reports*. 2021. V. 16 (2). P. 162–166. doi: 10.1134/S263516762102004X
11. Marra A., Silvestre C., Duraccio D., Cimmino S. Polylactic acid/zinc oxide biocomposite films for food packaging application // *International journal of biological macromolecules*. 2016. V. 88. P. 254–262. doi: 10.1016/j.ijbiomac.2016.03.039
12. Zaaba N.F., Jaafar M. A review on degradation mechanisms of polylactic acid: Hydrolytic, photodegradative, microbial, and enzymatic degradation // *Polymer Engineering & Science*. 2020. V. 60 (9). P. 2061–2075. doi: 10.1002/pen.25511
13. Анисимова М.А., Князева А.Г. Оценка напряжений и деформаций в процессе формирования переходного слоя между частицей и матрицей // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 63. С. 60–71.
14. Rahmanian V., Galeski A. Cavitation in strained polyethylene/nanographene nanocomposites // *Polymer*. 2021. V. 232 (6). P. 124158–124169. doi: 10.1016/j.polymer.2021.124158
15. Данилаев М.П., Карандашов С.А., Киямов А.Г., Клабуков М.А., Кузлин В.А., Сидоров И.Н., Энская А.И. Формирование и характер остаточных напряжений в дисперсно-наполненных полимерных композитах с частично кристаллической структурой // *Физическая мезомеханика*. 2022. Т. 25 (2). С. 67–76. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_2_67
16. Седов Л.И. Механика сплошной среды : учебник для вузов. СПб. : Лань, 2004. Т. 1. 528 с.
17. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости. М. : МАИ, 2009. 112 с.
18. Casale A. Polymer stress reactions. Elsevier, 2012. doi: 10.1016/B978-0-12-162801-7.X5001-0
19. Christensen R.M. Mechanics of composite materials. Courier Corporation, 2012. doi: 10.1115/1.3153710

References

1. Rybak A., Malinowski L., Adamus-Wlodarczyk A., Ulanski P. (2021) Thermally conductive shape memory polymer composites filled with boron nitride for heat management in electrical insulation. *Polymers*. 13(13). pp. 2161–2172. doi: 10.3390/polym13132191
2. Mittal V. (2014) Functional polymer nanocomposites with graphene: a review. *Macromolecular Materials and Engineering*. 299(8). pp. 906–931. doi: 10.1002/mame.201300394
3. Rościszewski P., Łukasiak J., Dorosz A., Galiński J., Szponar M. (1998) Biodegradation of polyorganosiloxanes. *Macromolecular Symposia*. 130(1). pp. 337–346. doi: 10.1002/masy.19981300129
4. Li Y., Zhang L., Li C. (2020) Highly transparent and scratch resistant polysiloxane coatings containing silica nanoparticles. *Journal of Colloid and Interface Science*. 559. pp. 273–281. doi: 10.1016/j.jcis.2019.09.031
5. Chauhan S.R., Thakur S. (2013) Effects of particle size, particle loading and sliding distance on the friction and wear properties of cenosphere particulate filled vinyl ester composites. *Materials & Design*. 51. pp. 398–408. doi: 10.1016/j.matdes.2013.03.071

6. Hong J.I., Winberg P., Schadler L.S., Siegel R.W. (2005) Dielectric properties of zinc oxide/low density polyethylene nanocomposites. *Materials Letters*. 59(4). pp. 473–476. doi: 10.1016/j.matlet.2004.10.036
7. Vasyukova I.A., Zakharova O.V., Chaika V.V. (2021) Toxic effect of metal-based nanomaterials on representatives of marine ecosystems: A review. *Nanobiotechnology Reports*. 16(2). pp. 138–154. doi: 10.1134/S2635167621020178
8. Wyszowska J., Borowik A., Kucharski M., Kucharski J. (2013) Effect of cadmium, copper and zinc on plants, soil microorganisms and soil enzymes. *Journal of Elementology*. 18(4). pp. 769–796. doi: 10.5601/jelem.2013.18.4.455
9. Akhmadeev A.A., Bogoslov E.A., Danilaev M.P., Klabukov M.A., Kuklin V.A. (2020) Influence of the thickness of a polymer shell applied to surfaces of submicron filler particles on the properties of polymer compositions. *Mechanics of Composite Materials*. 56. pp. 241–248. doi: 10.1007/s11029-020-09876-4
10. Danilaev M.P., Drobyshev S.V., Klabukov M.A., Kuklin V.A., Mironova D.A. (2021) Formation of a polymer shell of a given thickness on surfaces of submicronic particles. *Nanobiotechnology Reports*. 16(2). pp. 162–166. doi: 10.1134/S263516762102004X
11. Marra A., Silvestre C., Duraccio D., Cimmino S. (2016) Polylactic acid/zinc oxide biocomposite films for food packaging application. *International Journal of Biological Macromolecules*. 88. pp. 254–262. doi: 10.1016/j.ijbiomac.2016.03.039
12. Zaaba N.F., Jaafar M. (2020) A review on degradation mechanisms of polylactic acid: hydrolytic, photodegradative, microbial, and enzymatic degradation. *Polymer Engineering & Science*. 60(9). pp. 2061–2075. doi: 10.1002/pen.25511
13. Anisimova M.A., Knyazeva A.G. (2020) Otsenka napryazheniy i deformatsiy v protsesse formirovaniya perekhodnogo sloya mezhdu chastitsey i matritsey [Evaluation of the stress and strain during transition layer formation between a particle and a matrix.]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 60–71. doi: 10.17223/19988621/63/6
14. Rahmanian V., Galeski A. (2021) Cavitation in strained polyethylene/nanographene nanocomposites. *Polymer*. pp. 124158–124169. doi: 10.1016/j.polymer.2021.124158
15. Danilaev M.P., Karandashov S.A., Kiyamov A.G., Klabukov M.A., Kuklin V.A., Sidorov I.N., Enskaya, A.I. (2022) Formirovanie i kharakter ostatochnykh napryazheniy v dispersno-napolnennykh polimernykh kompozitakh s chastichno kristallicheskoj strukturoy [Formation and behavior of residual stresses in particulate-filled polymer composites with a partially crystalline structure]. *Fizicheskaya Mezomekhanika – Physical Mesomechanics*. 25(2). pp. 67–76. doi: 10.55652/1683-805X_2022_25_2_67
16. Sedov L.I. (2004) *Mekhanika sploshnoy sredy: uchebnyk dlya vuzov* [Continuum mechanics: textbook for higher education institutions]. Saint Petersburg: Lan’.
17. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. (2009) *Obshchie sootnosheniya i variatsionnye printsipy matematicheskoy teorii uprugosti* [General relations and variational principles of the mathematical theory of elasticity]. Moscow: MAI.
18. Casale A. (2012) *Polymer Stress Reactions*. Elsevier. doi: 10.1016/B978-0-12-162801-7.X5001-0
19. Christensen R.M. (2012) *Mechanics of Composite Materials*. Courier Corporation. doi: 10.1115/1.3153710

Сведения об авторах:

Сидоров Игорь Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики и математики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ (Казань, Россия). E-mail: INSidorov@kai.ru

Куклин Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, ведущий инженер межвузовской междисциплинарной лаборатории Казанского национального ис-

следовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ (Казань, Россия). E-mail: iamkvova@yandex.ru

Энская Анна Игоревна – старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной механики и математики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ (Казань, Россия). E-mail: AIenskaya@kai.ru

Данилаев Максим Петрович – доктор технических наук, профессор, заведующий межвузовской междисциплинарной лабораторией Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева – КАИ (Казань, Россия). E-mail: danilaev@mail.ru

Information about the authors:

Sidorov Igor' N. (Doctor of Physics and Mathematics, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation). E-mail: INSidorov@kai.ru

Kuklin Vladimir A. (Candidate of Physics and Mathematics, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation). E-mail: iamkvova@yandex.ru

Enskaya Anna I. (Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation). E-mail: AIenskaya@kai.ru

Danilaev Maksim P. (Doctor of Technical Sciences, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation). E-mail: danilaev@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.02.2023; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 18.02.2023; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/89/11

Механическое поведение титановых сплавов при динамическом продавливании

Владимир Владимирович Скрипняк¹,
Владимир Альбертович Скрипняк²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ skrp2012@yandex.ru

² skrp2006@yandex.ru

Аннотация. Определение физико-механических характеристик материалов при высоких скоростях деформации играет ключевую роль в повышении адекватности и точности инженерного анализа конструкций, работающих в экстремальных условиях. В данной работе представлены результаты экспериментальных исследований деформации и разрушения тонколистового проката сплава Ti–5Al–2.5Sn при продавливании полусферическим индентором со скоростью 10, 5, 1 и 0,5 м/с и результаты численного имитационного моделирования испытаний. Результаты моделирования испытаний на динамическое продавливание пластин с использованием вязкопластической модели механического поведения повреждаемых сред показали возможность валидации модели с кинетикой повреждения для сложных напряженных состояний в условиях двухосного высокоскоростного растяжения. Полученные в расчетах формы трещин и прогибы пластин аналогичны наблюдаемым в экспериментах при динамическом продавливании сплава.

Ключевые слова: титановые сплавы, испытание на продавливание, высокие скорости деформации, сложное напряженное состояние

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФ (код проекта 22-79-00162).

Для цитирования: Скрипняк В.В., Скрипняк В.А. Механическое поведение титановых сплавов при динамическом продавливании // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 147–161. doi: 10.17223/19988621/89/11

Mechanical behavior of titanium alloys in a dynamic punch test

Vladimir V. Skripnyak¹, Vladimir A. Skripnyak²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ skrp2012@yandex.ru

² skrp2006@yandex.ru

Abstract. In this paper, the deformation and fracture of Ti–5Al–2.5Sn alloy in complex stress states under biaxial tension at strain rates of up to several hundred per second are studied. Such loading conditions are provided during high-speed punch tests for thin plates. Samples of titanium alloy plates are punched with a hemispherical indenter, which is 20 mm in diameter, at velocities of 10, 5.0, 1.0, and 0.5 m/s with simultaneous recording of the punching forces and maximum deflection and video recording of the sample surface at a speed of 13.000 frames/s. Numerical simulation of punching tests is performed at punching velocities ranging from 0.5 to 10 m/s to validate the constitutive relationships and damage development kinetics. To describe the plastic flow and fracture of Ti–5Al–2.5Sn alloy in the range of strain rates from 0.001 to 1000 s⁻¹, the micromechanical damage model coupled with a model of the viscoplastic mechanical behavior of the material is used. The simulated crack shape and deflections are found to be similar to those obtained experimentally. Thus, dynamic bursting testing allows the validation of models of damage kinetics in complex stress states.

Keywords: titanium alloys, dynamic punch test, high strain rates, complex stress state

Acknowledgments: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-79-00162).

For citation: Skripnyak, V.V., Skripnyak, V.A. (2024) Mechanical behavior of titanium alloys in a dynamic punch test. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 147–161. doi: 10.17223/19988621/89/11

Введение

Альфа-титановый сплав Ti–5Al–2.5Sn (аналог сплава BT5-1 или Grade 6) обладает хорошей стойкостью к окислению, хорошей свариваемостью, но плохо поддается механической обработке резанием [1–3]. Следует отметить, что сплав Ti–5Al–2.5Sn обладает высокой вязкостью разрушения в криогенных средах и успешно применяется для создания емкостей для хранения водорода. Поэтому изготовление тонкостенных конструктивных элементов из сплава Ti–5Al–2.5Sn методами формовки может осуществляться в широком диапазоне режимов нагружения [4, 5]. При изготовлении элементов конструкций из листового проката альфа- и псевдоальфа-титановых сплавов в настоящее время применяются технологии высокоскоростной формовки, в том числе перспективные технологии, такие как электромагнитная формовка, электрогидравлическая формовка, взрывная формовка, ударная гидроформовка и др. Одним из перспективных технологических направлений производства тонкостенных элементов конструкций также яв-

ляется динамическая штамповка [6, 7]. Режимы штамповки чувствительны к скорости деформации, напряженному состоянию и распределению пластической деформации по толщине листа, а также к возникновению повреждений и образованию микропор и макротрещин.

Результаты последних исследований показывают, что испытания, проводимые в условиях сложного напряженного состояния, позволяют получить более полную информацию о механическом отклике материалов на физические и механические воздействия, возникающие при изготовлении и эксплуатации конструкций [6–10]. В ряде исследований механическое поведение легких сплавов в широком диапазоне скоростей деформации изучалось методом обратного моделирования, основанным на численном анализе результатов испытаний на продавливание полусферическим индентором плоских образцов [7, 9, 10]. Испытания на продавливание тонких пластин из металлов и сплавов полусферическими инденторами позволяют исследовать механическое поведение материалов при упругопластическом деформировании в условиях сложного напряженного состояния, близкого к двuosному растяжению [9, 10]. Квазистатические и динамические испытания на продавливание полусферическими инденторами выполняют на тонких образцах металлов и сплавов в соответствии с принятыми стандартами (ASTM E3205, BS EN 10371, CWA 15627, ГОСТ 10510–80, GB/T 29459) [9–16].

Результаты испытаний на продавливание могут быть использованы для валидации моделей механического поведения материала, разработанных с учетом данных, полученных в экспериментах при одноосном нагружении [11–14]. Результаты испытаний могут также применяться при разработке методов моделирования технологических процессов динамической штамповки, прогнозирования режимов штамповки, эффектов пружинения, распределения пластических деформаций и возникновения повреждений [7, 9, 11–14].

Актуальность исследований сплава Ti–5Al–2.5Sn при динамических воздействиях обусловлена необходимостью предотвращения возникновения микроповреждений в процессе изготовления тонкостенных резервуаров и сосудов.

Цель данной работы – исследование механического поведения сплава Ti–5Al–2.5Sn с помощью испытания на высокоскоростное продавливание тонких пластин полусферическим индентором. Полученные данные дополняют результаты ранее проведенных исследований механического поведения титановых сплавов при динамическом нагружении и варьировании параметра трехосности напряженного состояния [6, 8, 10].

1. Материал и метод испытания

Исследования проводились на промышленном тонколистовом прокате Ti–5Al–2.5Sn (аналог сплава BT5-1). Сплав Ti–5Al–2.5Sn имел химический состав (мас. %): 5.311 Al; 2.51 Sn; 0.211 Fe; 0.0116 Si; 0.864 B; 0.2786 Zr; Ti – остальное.

Сплав находился в поликристаллическом состоянии. Зеренная структура сплава была мелкокристаллической, однородной и равноосной. Средний размер зерна сплава составлял ~ 40 мкм. Образцы для испытаний вырезались электроэрозионным методом на станке с ЧПУ ДК7732 из листа толщиной 1.2 ± 0.05 мм, что обеспечивало высокую точность воспроизведения геометрических параметров образцов. Поверхности образцов полировались для снижения коэффициента тре-

ния при контакте с индентором. Геометрические параметры образцов для высокоскоростных испытаний выбраны в соответствии с рекомендациями INSTRON и стандартами ASTM E643–09 и ISO 8490–86. На рис. 1, *a* показана схема испытательной установки. Диаметр образца d составляет 60 ± 0.1 мм, диаметр D в нижней части опорной матрицы 42 ± 0.1 мм.

Испытания при постоянной скорости продавливания проводились на высокоскоростном испытательном стенде Instron VHS 40/50-20 (Instron, Хай Вайкомб, Великобритания) с датчиком усилий 50 кН.

На рис. 1, *b* представлены фотографии положений инденторов в начале и конце процесса испытаний на продавливание. Датчик усилий установлен в инденторе, а закрепленный в опорной матрице образец перемещался с заданной постоянной скоростью. Испытания проводились в режиме поддержания постоянной скорости при начальных значениях продольных скоростей: 0.5 ± 0.001 , 1 ± 0.01 , 2 ± 0.01 , 5 ± 0.01 , 10 ± 0.1 м/с.

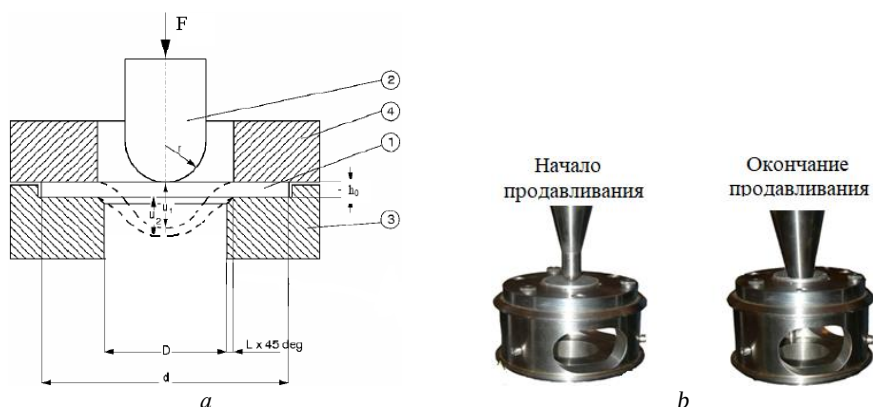


Рис. 1. Схема испытательной установки (*a*): 1 – образец, 2 – индентор полусферический, 3, 4 – нижняя и верхняя части опорной матрицы соответственно; фотографии положений инденторов в начале и конце процесса испытаний на продавливание на сервогидравлическом стенде Instron VHS 40/50-20 (*b*)

Fig. 1. (*a*) Sectional scheme of a punch test setup: 1, specimen; 2, hemispherical punch; 3 and 4, the lower and the upper parts of a support matrix, respectively; (*b*) photograph of the initial and final stages of punching on the Instron VHS 40/50-20 testing machine

Стоит отметить, что динамика разрушения образцов и характер образования трещин при продавливании зависят от геометрических параметров индентора и образца. Поэтому для регистрации конфигурации образца в момент фрагментации применялась высокоскоростная видеосъемка. Для видеорегистрации деформации и разрушения образцов использовалась высокоскоростная камера Phantom V711 (Vision Research – АМТЕК Со, Уэйн, Нью-Джерси, США). Для освещения поверхности образцов при высокоскоростных испытаниях использованы две галогеновые лампы по 5 Вт. Съемка выполнялась при скорости 13 000 кадров/с и экспозиции 10 мкс. Видеокамера устанавливалась в вертикальной плоскости, параллельной перемещению траверсы. Съемка деформации и разрушения тыльной поверхности образцов осуществлялась с использованием зеркала, установленного в подвижном устройстве закрепления образцов.

2. Численное моделирование пластического течения и развития поврежденных титанового сплава при динамических испытаниях на продавливание

Вычислительная модель использует теоретическую основу механики сплошных сред с повреждениями.

Изменение температуры при развитии пластического течения за счет диссипации энергии рассчитывалось в адиабатическом приближении [14]:

$$T = T_0 + \int_0^{\varepsilon_{eq}^p} (\beta / \rho C_p) \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p, \quad (1)$$

где T_0 – начальная температура, параметр $\beta \sim 0.9$ – доля пластической работы, преобразованная в тепло, $\sigma_{eq} = [(3/2)\sigma_{ij}\sigma_{ij} - 0.5\sigma_{kk}^2]^{1/2}$ – эквивалентное напряжение Мизеса, $d\varepsilon_{eq}^p = \dot{\varepsilon}_{eq}^p dt = [(2/3)\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p]^{1/2} dt$ – приращение эквивалентной пластической деформации, $\dot{\varepsilon}_{eq}^p$ – компоненты скорости пластической деформации.

Температурная зависимость удельной теплоемкости альфа-титанового сплава Ti–5Al–2.5Sn от температуры T в диапазоне от 293 до 1115 К описана феноменологическим соотношением [15]

$$C_p = 248.389 + 1.53067T - 0.00245T^2 [\text{Дж/кг К}] \text{ at } 0 < T < T_{\alpha\beta} \approx 1320 \text{ К}. \quad (2)$$

Температурная зависимость модуля сдвига альфа-титанового сплава рассчитывалась из соотношения [16]

$$\mu(T, \rho) = \mu_0[1 + \mu_1 p(\rho_0/\rho) - \mu_2(T - 295 \text{ К})], \quad (3)$$

где $\mu_0 = 48.66$ ГПа, $\mu_1 = 11\,500$ ГПа⁻¹, $\mu_2 = 0.000662$ К⁻¹ – феноменологические параметры для сплава Ti–5Al–2.5Sn, p – давление, ρ_0 , ρ – значения массовой плотности при 295 К и температуре T соответственно.

Напряжение течения конденсированной фазы сплава описывалось с помощью следующего определяющего соотношения [10]:

$$\sigma_s = (C_0 (\varepsilon_{eq}^p)^{1/2} + C_1) \exp(-A_0 T) \exp(A_1 T \ln(1 + \dot{\varepsilon}_{eq}^p / \dot{\varepsilon}_{disl0}^p)), \quad (4)$$

где C_0 , C_1 , A_0 , A_1 – параметры материала, $\dot{\varepsilon}_{disl0}^p$ – параметр, нормирующий скорость пластической деформации, $\varepsilon_{eq}^p = [(2/3)\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p]^{1/2}$ – эквивалентная пластическая деформация.

Расчеты выполнены для сплава Ti–5Al–2.5Sn при численных значениях параметров: $C_0 = 0.665$ ГПа, $C_1 = 0.8$ ГПа, $A_0 = 0.0016$ К⁻¹, $A_1 = 0.0002$ К⁻¹, $\dot{\varepsilon}_{disl0}^p = 1$ с⁻¹, $T_m = 1\,875$ К.

Модель GTN была использована для определения пластического потенциала [6, 10]:

$$(\sigma_s^2 / \sigma_s^2) + 2q_1 f^* \cosh(-q_2 p / 2\sigma_s) - 1 - q_3 (f^*)^2 = 0, \quad (5)$$

где σ_s – предел текучести, p – давление, q_1 , q_2 и q_3 – параметры модели, f – объемная доля пор.

Кинетическая модель развития повреждаемости за счет эволюции размера пор использовалась для описания кинетики повреждений, связанных с зарождением и ростом пор при пластической деформации [6]. Скорость роста связана со скоростью объемной пластической деформации. Зарождение пор зависит от эквива-

лентной пластической деформации ε_{eq}^p и предполагает нормальное распределение пор по размерам.

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \dot{f}_{nucl} + \dot{f}_{growth}, \\ \dot{f}_{growth} &= (1-f)\dot{\varepsilon}_{kk}^p, \\ \dot{f}_{nucl} &= [f_N / (\sqrt{2\pi} s_N)] \exp\{-0.5[(\varepsilon_{eq}^p - \varepsilon_N) / s_N]^2\} \dot{\varepsilon}_{eq}^p,\end{aligned}\quad (6)$$

где $\dot{f}$, $\dot{f}_{nucl}$, $\dot{f}_{growth}$ – скорость изменения параметра поврежденности, скорость зарождения повреждений, скорость роста пор, ε_N и s_N – средняя деформация при зарождении пор и стандартное отклонение соответственно.

Величина релаксации напряжений в модели, связанная с зарождением пор в конденсированной фазе, контролируется параметром f_N . Финальная стадия развития повреждений перед вязким разрушением соответствует слиянию пор в макроскопическую трещину. Слияние пор приводит к релаксации напряжений и ускорению скорости роста параметра поврежденности f^* вплоть до эрозии конечного элемента (когда доля пор f_F достигает критического значения f_c).

$$f^* = [f_c + (\bar{f}_F - f_c) / (f_F - f_c)] H(f - f_c) + f H(f_c - f), \quad (7)$$

где $\bar{f}_F = (q_1 + \sqrt{q_1^2 - q_3}) / q_3$, q_1 , q_2 и q_3 – константы модели, $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Параметры модели титанового сплава Ti–5Al–2.5Sn были определены методом полуобратного численного моделирования испытаний на одноосное растяжение при скоростях деформации 0.1, 100, 1 000 с⁻¹ [6, 17]. В расчетах использовались следующие значения коэффициентов модели для Ti–5Al–2.5Sn: $q_1 = 1.0$, $q_2 = 0.7$, $q_3 = 1.0$, $f_0 = 0.003$, $f_N = 0.1156$, $f_c = 0.117$, $f_F = 0.260$, $\varepsilon_N = 0.25$, $s_N = 0.05$. Дискретизация расчетной области образца выполнялась с помощью 3D линейных лагранжеевых шестигранных элементов. Сходимость численных результатов расчетов обеспечивалась при подборе пространственного шага сетки. В расчетах использовалась мелкая сетка с характерным размером 0.3 мм. Расчетная область титановой пластины состояла из ~ 200 000 элементов. Расчетные области индентора и опорных матриц описывались моделью абсолютно твердого тела и разбивались на 2D элементы. Граничные условия были заданы аналогично [10].

3. Результаты и обсуждение

Экспериментальные диаграммы $F(u_z)$ «усилие–перемещение», полученные при продавливании образцов сплава Ti–5Al–2.5Sn со скоростями 0.5, 10, 5, 10 м/с представлены на рис. 2.

Результаты испытаний свидетельствуют о хорошей воспроизводимости пиковых значений усилий и предельных прогибов в сериях из 5 испытаний для каждой скорости продавливания. На рис. 2 показаны экспериментальные диаграммы, с максимальной, минимальной и одной из средних амплитуд усилий для исследованных скоростей продавливания. Полученные диаграммы усилия $F(u_z)$ от величины прогиба пластины свидетельствуют о вязком характере разрушения при скоростях индентора до 10 м/с. Пиковое усилие варьировало в диапазоне от 9 до 12 кН при скоростях индентора от 0.5 до 10 м/с. С ростом скорости продавлива-

ния происходят изменение наклона на кривых деформирования и увеличение пиковых значений усилий. Это свидетельствует о скоростной чувствительности напряжения течения сплава Ti-5Al-2.5Sn. Результаты указывают на отсутствие охрупчивания альфа-титанового сплава Ti-5Al-2.5Sn в условиях двусогнутого напряженного состояния.

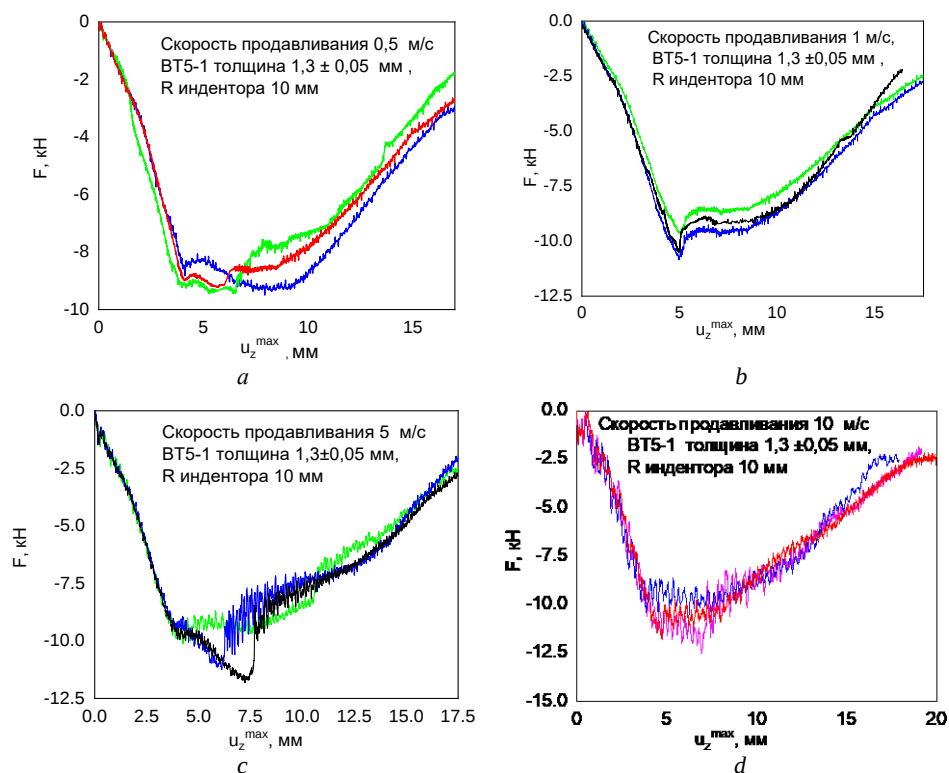


Рис. 2. Диаграммы «усилие–перемещение», полученные при продавливании сплава Ti-5Al-2.5Sn со скоростями: *a* – 0.5 м/с, *b* – 1.0 м/с, *c* – 5.0 м/с, *d* – 10 м/с

Fig. 2. Force–displacement diagrams resulting from the punching of Ti-5Al-2.5Sn alloy at a velocity of (*a*) 0.5, (*b*) 1.0, (*c*) 5.0, and (*d*) 10 m/s

Диаграммы «усилие продавливания – прогиб образца» не имеют четко выраженного начала зарождения трещины. При использовании результатов высокоскоростной съемки и сопоставлении данных о времени продавливания и видеокадров с зарождающейся трещиной можно определить величину прогиба, при которой возникает видимое нарушение сплошности образца. Кадры видеосъемки, представленные на рис. 3, свидетельствуют, что трещины зарождались в центральной точке площадки контакта образца и индентора.

В момент зарождения макротрещина имела от двух до трех радиальных ветвей. Раскрытие трещин с увеличением прогиба имеет прерывистый характер, что подтверждает сохранение высоконапряженного состояния в зоне формирования разрушения. Образованию трещин предшествовала значительная пластическая деформация. Периодическое торможение трещины и ее инициация в центре пло-

щадки контакта свидетельствуют о чувствительности предельных деформаций сплава Ti–5Al–2.5Sn к параметру трехности напряженного состояния. Формирование трещин с тремя ветвями под углами друг другу, близкими к 120° , свидетельствовало об изотропном характере развития пластической деформации и накопления повреждений. Трещины с двумя стохастически направленными ветвями и двумя ветвями под углом друг другу, близким к 180° , наблюдались в одном из пяти образцов, испытанных при скоростях 1 и 0,5 м/с. При этом сценарии разрушения раскрытие трещин сопровождалось формированием новых ветвей, а пиковые значения усилий и ход диаграмм нагружения не выходили за пределы доверительного интервала для соответствующих скоростей нагружения, что не гарантирует совпадения предельных значений пластических деформаций в зоне разрушения.

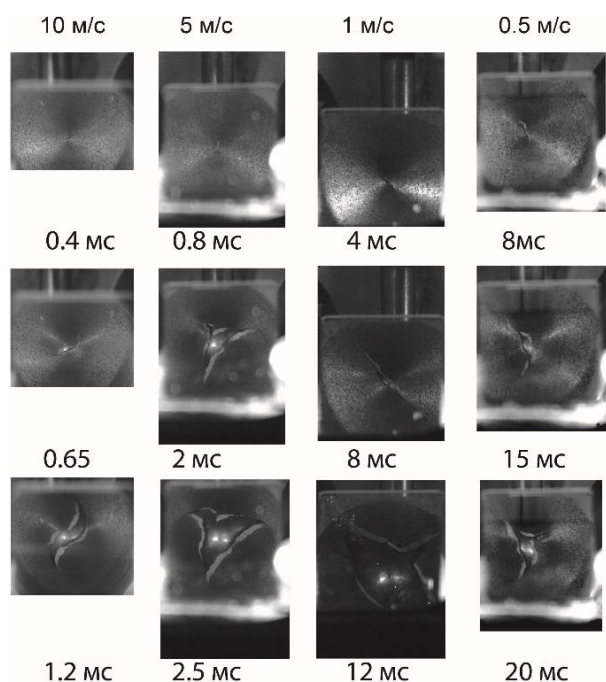


Рис. 3. Кадры видеосъемки образца сплава Ti–5Al–2.5Sn при продавливании со скоростями 10, 5, 0, 1,0 и 0,5 м/с, содержащие последовательные моменты времени раскрытия трещины

Fig. 3. Video frames of Ti–5Al–2.5Sn specimens during punching at velocities of 10, 5, 0, 1,0, and 0.5 m/s with subsequent moments of the crack opening

Численное моделирование процесса продавливания в диапазоне скоростей нагружения от 0,5 до 10 м/с было проведено для исследования закономерностей процессов деформирования, повреждения и разрушения листов титанового сплава Ti–5Al–2.5Sn. Получены расчетные зависимости усилий от смещения в центре площадки контакта пластины и индентора. На рис. 4 представлены расчетные и экспериментальные диаграммы «усилие–прогиб», полученные при продавливании сплава Ti–5Al–2.5Sn со скоростями индентора 10 и 0,5 м/с. Линия 1 – результаты расчета, линия 2 – экспериментальные данные.

Полученные результаты моделирования показали хорошее согласие расчетных и экспериментальных кривых «усилие–прогиб» при динамическом нагружении, что позволило провести анализ развития пластических деформаций в процессе продавливания.

Расчетное распределение эффективных скоростей деформации в поперечном сечении пластины из Ti–5Al–2.5Sn при скорости пуансона 10 м/с показано на рис. 5.

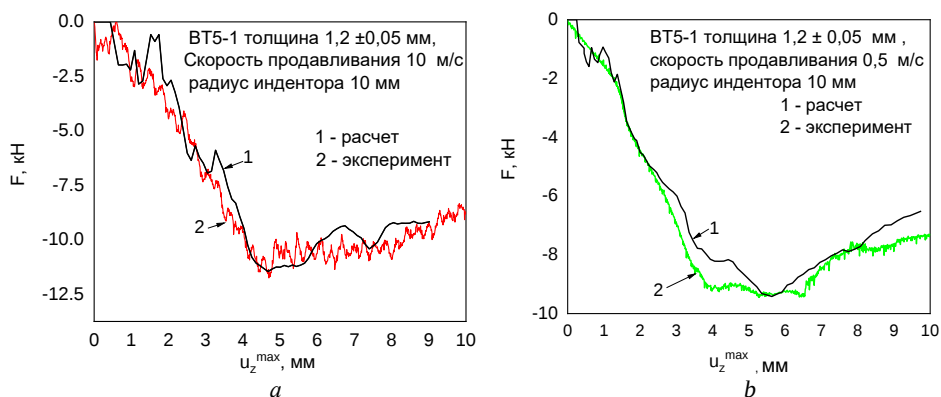


Рис. 4. Сравнение расчетных и экспериментальных диаграммы «усилие–прогиб», полученных при продавливании сплава Ti–5Al–2.5Sn со скоростью пуансона 10 м/с (a) и 0,5 м/с (b)

Fig. 4. Comparison of calculated and experimental force–deflection diagrams resulting from the punching of Ti–5Al–2.5Sn alloy at a punching velocity of (a) 10 and (b) 0.5 m/s

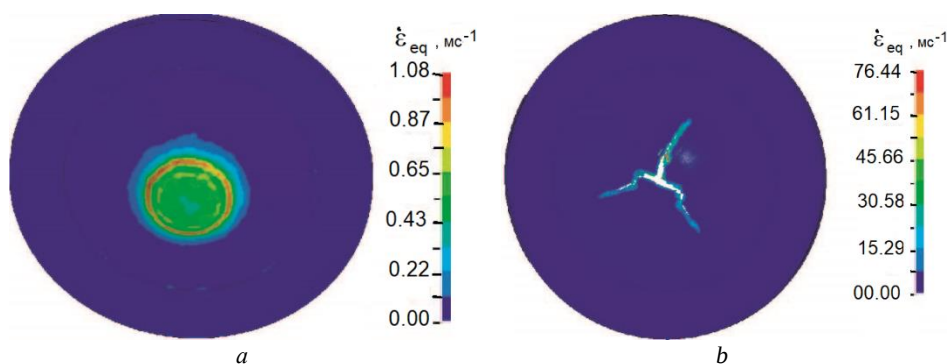


Рис. 5. Распределение эквивалентной скорости деформации в образцах сплава Ti–5Al–2.5Sn при 10 м/с (a); распределение эквивалентной скорости деформации в вершине трещины сплава Ti–5Al–2.5Sn при продавливании со скоростью 10 м/с (b)

Fig. 5. Distribution of the equivalent strain rate in the (a) Ti–5Al–2.5Sn specimens at 10 m/s and (b) head of the crack in Ti–5Al–2.5Sn alloy at a punching velocity of 10 m/s

Скорость деформации в зоне пластической деформации изменялась в широком диапазоне: от 100 до 4 000 s^{-1} . Область максимальных значений скорости деформации имела окружную форму и соответствовала контуру площадки контакта. При разрушении образца скорость деформации в вершине трещины существенно превышала эти значения. Результаты моделирования показали, что при

накоплении повреждений пластическая деформация развивается на контактной поверхности неоднородно. На рис. 6 представлены расчетные диаграммы «эквивалентное напряжение – эквивалентная деформация» в центральной точке тыльной поверхности образцов сплава Ti–5Al–2.5Sn.

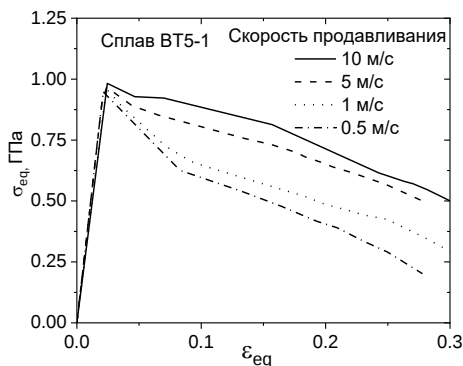


Рис. 6. Расчетные диаграммы «эквивалентное напряжение – эквивалентная деформация» в центральной точке тыльной поверхности образцов сплавов Ti–5Al–2.5Sn при продавливании со скоростями 0.5, 1, 5, 10 м/с

Fig. 6. Equivalent stress–equivalent strain diagrams calculated at the back surface center of Ti–5Al–2.5Sn specimens at punching velocities of 0.5, 1.0, 5.0, and 10 m/s

Отметим, что максимальные значения пластической деформации в зоне площадки контакта пластины и индентора значительно превышали имеющиеся в литературе значения макроскопического удлинения δ перед разрушением сплава Ti–5Al–2.5Sn. При этом расчетные значения эквивалентных напряжений согласуются с экспериментальными значениями напряжений течения, полученными для сплава Ti–5Al–2.5Sn при одноосном растяжении сплава в соответствующем диапазоне скоростей деформации [6].

Таким образом, в тонких пластинах при относительно небольших прогибах в процессе динамической штамповки могут создаваться достаточно высокие эквивалентные напряжения, что приводит к изменениям параметра трехосности напряженного состояния $\eta = -p/\sigma_{eq}$.

Расчетные распределения параметра трехосности напряженного состояния η в сечении деформируемой пластины представлены на рис. 7.

Результаты моделирования показали, что на контуре площадки контакта напряженное состояние соответствовало чистому сдвигу, в то время как в центре образца на тыльной поверхности значения параметра трехосности напряженного состояния были близки к 0.65, что соответствует двусосному растяжению.

Процесс формирования трещин из-за накопления повреждений в зоне продавливания сопровождался пространственно-неоднородным изменением параметра трехосности напряженного состояния η . Поэтому для повышения точности САЕ-анализа высокоскоростной штамповки титановых сплавов необходим учет эволюции параметра трехосности напряженного состояния в процессе деформации.

Распределения расчетных перемещений прогиба u_z и параметра поврежденности f в сечении деформируемого образца при раскрытии образовавшихся трещин представлены на рис. 8.

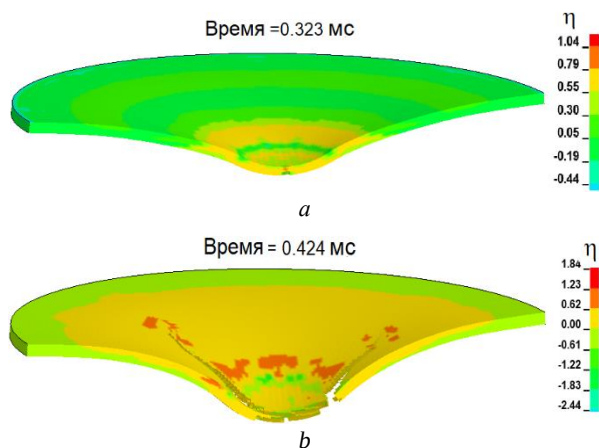


Рис. 7. Расчетные распределения параметра трехосности напряженного состояния η в сечении пластины Ti-5Al-2.5Sn: a – при деформировании со скоростью 10 м/с; b – при раскрытии трещины

Fig. 7. Calculated distributions of the stress triaxiality parameter η in the section of Ti-5Al-2.5Sn plate during: (a) deformation at a rate of 10 m/s and (b) crack opening

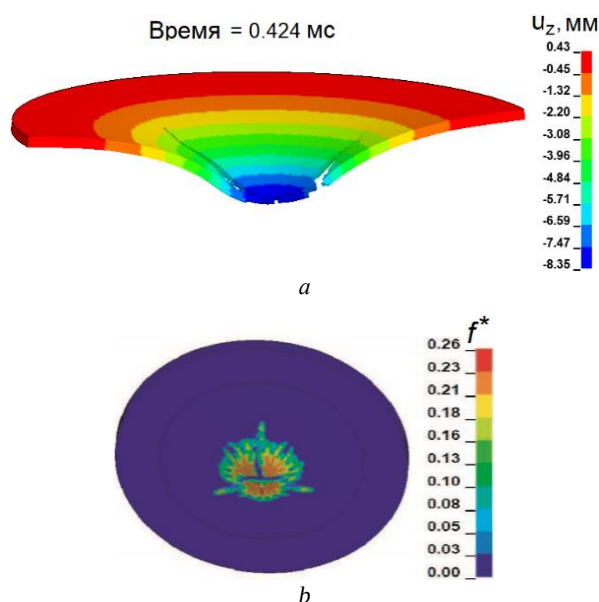


Рис. 8. Расчетное распределение смещений u_z в поперечном сечении пластины Ti-5Al-2.5Sn на момент времени 0.42419 мс (a); распределение параметра поврежденности f (b)

Fig. 8. Calculated distributions of (a) displacements u_z in a cross-section of Ti-5Al-2.5Sn plate at a time instant of 0.42419 ms and (b) damage parameter f

Асимметричные трещины, возникающие при воздействии на пластину полусферическим индентором, являются следствием локализации высокоскоростной пластической деформации. Методика испытаний металлических материалов при

продавливании позволила оценить предельные деформации и определить закономерности зарождения и роста микрповреждений в условиях двусосного растяжения. Для валидации кинетики повреждений в модели были использованы данные на участке диаграмм «усилие–прогиб» после достижения пиковых значений усилий. На рис. 9 показано сравнение конфигураций трещин, наблюдаемых в эксперименте и полученных при численном моделировании процесса продавливании образцов сплава Ti–5Al–2.5Sn. Качественное совпадение расчетных конфигураций и траекторий роста образующихся трещин с наблюдаемыми в экспериментах подтверждает адекватность предложенной модели и возможность прогнозирования разрушения альфа-титановых сплавов при высоких скоростях деформации в условиях двухосного растяжения.

Увеличение скорости деформации способствует образованию полос локализованного сдвига, показанных на рис. 8, b, 9.

Образование полос локализации связано с неустойчивостью процесса пластического течения и сопровождается изменениями структуры сплава. Склонность сплава к реализации локализованного адиабатического сдвига обусловлено относительно высоким пределом текучести и низкой степенью деформационного упрочнения.

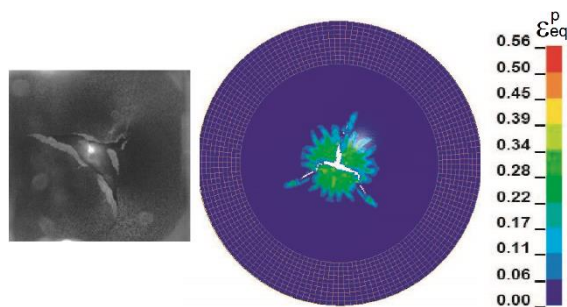


Рис. 9. Сравнение расчетных и экспериментальных конфигураций трещин в образце сплава Ti–5Al–2.5Sn после продавливании при скорости 10 м/с

Fig. 9. Comparison of calculated and experimental configurations of cracks in Ti–5Al–2.5Sn specimen after punching at a velocity of 10 m/s

Вероятность образования локализованных сдвигов в титановом сплаве при штамповке возрастает с увеличением скорости нагружения. В результате в пластине образуются радиальные полосы локализации деформации. Структурные изменения, протекающие в полосах локализованной деформации, нивелируют эффекты анизотропии пластического течения, характерные для титановых сплавов. Таким образом, увеличение скорости штамповки выше определенного предела позволяет улучшить штампуемость титановых сплавов при комнатной температуре. Стоит отметить, что с увеличением температуры происходит снижение предела текучести материала, что приводит к увеличению критической скорости нагружения, необходимой для формирования полос локализованного сдвига.

Заключение

Механическое поведение сплава Ti–5Al–2.5Sn было исследовано с помощью испытания на продавливание.

Индентор имел полусферическую форму с диаметром 20 мм. Испытания проводились на сервогидравлическом стенде Instron VHS 40/50-20 с постоянными скоростями нагружения 0,5, 1, 5 и 10 м/с. Напряженное состояние в центре площадки контакта индентор–образец соответствовало равноосному двuosному растяжению. Анализ развития пластических деформаций и формирования трещин проводился с использованием численного имитационного моделирования.

Результаты можно резюмировать следующим образом:

1. Максимальные значения пластической деформации в зоне трещин разрушенных пластин значительно превышали имеющиеся в литературе значения макроскопического удлинения δ до разрушения сплава Ti–5Al–2.5Sn.

2. Увеличение скорости деформации в условиях двухосного напряженного состояния способствует образованию полос локализованного сдвига.

3. Параметр трехосности напряженного состояния на площадке контакта индентор–образец изменяется нестационарно и пространственно неоднородно при накоплении повреждений. Вычислительная модель, предложенная в [6], позволяет описать закономерности изменения пластического течения и разрушения сплава Ti–5Al–2.5Sn в широком диапазоне скоростей деформации и сложном напряженном состоянии.

4. Результаты указывают на вязкий характер разрушения альфа-титанового сплава Ti–5Al–2.5Sn в условиях двuosного растяжения при комнатной температуре и скоростях деформации до 10^4 с^{-1} .

Полученные результаты исследования механического поведения сплава Ti–5Al–2.5Sn в широком диапазоне скоростей деформации и двuosном напряженном состоянии могут быть использованы при проектировании тонколистовых изделий из титана и технологии его изготовления штамповкой.

Список источников

1. Jayaprakash M., Ping D.H., Yamabe-Mitarai Y. Enhanced yielding strength of near- α Ti–Al–Zr–Sn high temperature alloys // *Materials Science and Engineering: A*. 2015. V. 625. P. 131–139. doi: 10.1016/j.msea.2014.11.099
2. Lu Z., Zhang X., Ji W., Wei W., Yao C., Han D. Investigation on the deformation mechanism of Ti–5Al–2.5Sn ELI titanium alloy at cryogenic and room temperatures // *Materials Science and Engineering: A*. 2021. V. 818. Art. 141380. doi: 10.1016/j.msea.2021.141380
3. Tan M.J., Chen G.W., Thiruvarduchelvan S. High temperature deformation in Ti–5Al–2.5Sn alloy // *Journal of Materials Processing Technology*. 2007. V. 192–193. P. 434–438. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2007.04.027
4. Ghosh A.K., Hamilton C.H. Superplastic forming and diffusion bonding of titanium alloys // *Defense Science Journal*. 1986. V. 36. P. 153–177.
5. Tabie V.M., Li C., Saifu W., Li J., Xu X. Mechanical properties of near alpha titanium alloys for high-temperature applications – a review // *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 2020. V. 92. P. 521–540. doi: 10.1108/AEAT-04-2019-0086
6. Skripnyak V.V., Skripnyak E.G., Skripnyak V.A. Fracture of titanium alloys at high strain rates and under stress triaxiality // *Metals*. 2020. V. 10. Art. 305. doi: 10.3390/met10030305
7. Hammer J.T., Liutkus T.J., Seidt J.D., Gilat A. Using Digital Image Correlation (DIC) in Dynamic Punch Tests // *Experimental Mechanics*. 2014. V. 55 (1). P. 201–210. doi: 10.1007/s11340-014-9924-9
8. Скрипняк В.В., Иохим К.В., Скрипняк В.А. Локализация пластической деформации технически чистого титана в сложном напряженном состоянии при высокоскоростном

- растяжении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2021. № 70. С. 89–102. doi: 10.17223/19988621/70/8
9. Spulak N., Seidt J., Gilat A. Ductile fracture of 2024 aluminum under unequal biaxial in-plane tension and out-of-plane compression // *Mechanics of Materials*. 2024. V. 179. Art. 104585. doi: 10.1016/j.mechmat.2023.104585
 10. Skripnyak V.V., Iohim K.V., Skripnyak V.A. Mechanical behavior of titanium alloys at moderate strain rates characterized by the punch test technique // *Materials*. 2023. V. 16. Art. 416. doi: 10.3390/ma16010416
 11. Li X., Guo G., Xiao J., Song N., Li D. Constitutive modeling and the effects of strain-rate and temperature on the formability of Ti–6Al–4V alloy sheet // *Materials & Design*. 2014. V. 55. P. 325–334. doi: 10.1016/j.matdes.2013.09.069
 12. Li H., Chen S.-F., Zhang S.-H., Xu Y., Song H.-W. Deformation characteristics, formability and springback control of Titanium alloy sheet at room temperature: a review // *Materials*. 2022. V. 15. Art. 5586. doi: 10.3390/ma15165586
 13. Sirvin Q., Velay V., Bonnaire R., Penazzi L. Mechanical behaviour modelling and finite element simulation of simple part of Ti-6Al-4V sheet under hot/warm stamping conditions // *Journal of Manufacturing Processes*. 2019. V. 38. P. 472–482. doi: 10.1016/j.jmapro.2018.12.010
 14. Dabboussi W., Nemes J.A. Modeling of ductile fracture using the dynamic punch test // *International Journal of Materials Science*. 2005. V. 47. P. 1282–1299. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2005.01.015
 15. Zhang J., Zhao Y., Hixson R.S., Gray G.T., Wang L., Utsumi W., Takanori H. Thermal equations of state for titanium obtained by high pressure–temperature diffraction studies // *Physical Review B*. 2008. V. 78. Art. 054119. doi: 10.1103/PhysRevB.78.054119
 16. Steinberg D.J., Cochran S.G., Guinan M.W. A constitutive model for metals applicable at high-strain rate // *Journal of Applied Physics*. 1980. V. 51. P. 1498–1504. doi: 10.1063/1.327799
 17. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. Mechanical behavior of alpha titanium alloys at high strain rates, elevated temperature, and under stress triaxiality // *Metals*. 2022. V. 12. Art. 1300. doi: 10.3390/met12081300

References

1. Jayaprakash M., Ping D.H., Yamabe-Mitarai Y. (2015) Enhanced yielding strength of near- α Ti–Al–Zr–Sn high temperature alloys. *Materials Science and Engineering: A*. 625. pp. 131–139. doi: 10.1016/j.msea.2014.11.099
2. Lu Z., Zhang X., Ji W., Wei W., Yao C, Han D. (2021) Investigation on the deformation mechanism of Ti–5Al–2.5Sn ELI titanium alloy at cryogenic and room temperatures. *Materials Science and Engineering: A*. 818. Article 141380. doi: 10.1016/j.msea.2021.141380
3. Tan M.J., Chen G.W., Thiruvarduchelvan S. (2007) High temperature deformation in Ti–5Al–2.5Sn alloy. *Journal of Materials Processing Technology*. 192–193. pp. 434–438. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2007.04.027
4. Ghosh A.K., Hamilton C.H. (1986) Superplastic forming and diffusion bonding of titanium alloys. *Defense Science Journal*. 36. pp. 153–177.
5. Tabie V.M., Li C., Saifu W., Li J., Xu X. (2020) Mechanical properties of near alpha titanium alloys for high-temperature applications – A review. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. 92. pp. 521–540. doi: 10.1108/AEAT-04-2019-0086
6. Skripnyak V.V., Skripnyak E.G., Skripnyak, V.A. (2020) Fracture of titanium alloys at high strain rates and under stress triaxiality. *Metals*. 10. Article 305. doi: 10.3390/met10030305
7. Hammer J.T., Liutkus T.J., Seidt J.D., Gilat A. (2014) Using digital image correlation (DIC) in dynamic punch tests. *Experimental Mechanics*. 55(1). pp. 201–210. doi: 10.1007/s11340-014-9924-9
8. Skripnyak V.V., Iokhim K.V., Skripnyak V.A. (2021) Lokalizatsiya plasticheskoy deformatsii tekhnicheskii chistogo titana v slozhnom napryazhennom sostoyanii pri vysokoskorostnom rastyazhenii [Localization of plastic deformation in commercially pure titanium in a complex

- stress state under high-speed tension]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 125–139. doi: 10.17223/19988621/70/8
9. Spulak N., Seidt J., Gilat A. (2024) Ductile fracture of 2024 aluminum under unequal biaxial in-plane tension and out-of-plane compression. *Mechanics of Materials*. 179. Article 104585. doi: 10.1016/j.mechmat.2023.104585
 10. Skripnyak V.V., Iohim K.V., Skripnyak V.A. (2023) Mechanical behavior of titanium alloys at moderate strain rates characterized by the punch test technique. *Materials*. 16. Article 416. doi: 10.3390/ma16010416
 11. Li X., Guo G., Xiao J., Song N., Li D. (2014) Constitutive modeling and the effects of strain-rate and temperature on the formability of Ti–6Al–4V alloy sheet. *Materials & Design*. 55. pp. 325–334. doi: 10.1016/j.matdes.2013.09.069
 12. Li H., Chen S.-F., Zhang S.-H., Xu Y., Song H.-W. (2022) Deformation characteristics, formability and springback control of titanium alloy sheet at room temperature: A review. *Materials*. 15. Article 5586. doi: 10.3390/ma15165586
 13. Sirvin Q., Velay V., Bonnaire R., Penazzi L. (2019) Mechanical behaviour modelling and finite element simulation of simple part of Ti-6Al-4V sheet under hot/warm stamping conditions. *Journal of Manufacturing Processes*. 38. pp. 472–482. doi: 10.1016/j.jmapro.2018.12.010
 14. Dabboussi W., Nemes J.A. (2005) Modeling of ductile fracture using the dynamic punch test. *International Journal of Materials Science*. 47. pp. 1282–1299. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2005.01.015
 15. Zhang J., Zhao Y., Hixson R.S., Gray G.T., Wang L., Utsumi W., Takanori H. (2008) Thermal equations of state for titanium obtained by high pressure–temperature diffraction studies. *Physical Review B*. 78. Article 054119. doi: 10.1103/PhysRevB.78.054119
 16. Steinberg D.J., Cochran S.G., Guinan M.W. (1980) A constitutive model for metals applicable at high-strain rate. *Journal of Applied Physics*. 51. pp. 1498–1504. doi: 10.1063/1.327799
 17. Skripnyak V.V., Skripnyak V.A. (2022) Mechanical behavior of alpha titanium alloys at high strain rates, elevated temperature, and under stress triaxiality. *Metals*. 12. Article 1300. doi: 10.3390/met12081300

Сведения об авторах:

Скрипняк Владимир Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: skrp2012@yandex.ru

Скрипняк Владимир Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: skrp2006@yandex.ru

Information about the authors:

Skripnyak Vladimir V. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Deformable Solid Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2012@yandex.ru

Skripnyak Vladimir A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Deformable Solid Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: skrp2006@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 16.02.2024; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 16.02.2024; accepted for publication 03.06.2024

Научная статья

УДК 531.2

doi: 10.17223/19988621/89/12

Эффективные механические параметры костных тканей для подбора индивидуальных остеоимплантатов

Татьяна Витальевна Чайковская

Томский государственный университет, Томск, Россия, kolmakova@ftf.tsu.ru

Аннотация. Определены нетрадиционные эффективные механические параметры, являющиеся относительной мерой проявления деформационного отклика рассматриваемых мезо- или микрообъемов кости в трех перпендикулярных направлениях, и эффективный модуль упругости при осевом сжатии. Установлено, что образцы костных тканей, имеющие разное строение и состав, могут отличаться характером распределения напряжений и деформаций, но иметь близкие модули упругости, и наоборот. Показано, что введенные параметры отражают характер распределения напряжений и деформаций. Предлагается использовать рассмотренные характеристики при подборе индивидуальных остеоимплантатов.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, эффективные механические параметры, кортикальная костная ткань, губчатая костная ткань, компьютерное моделирование, остеоимплантаты

Для цитирования: Чайковская Т.В. Эффективные механические параметры костных тканей для подбора индивидуальных остеоимплантатов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 162–175. doi: 10.17223/19988621/89/12

Original article

Effective mechanical parameters of bone tissue samples for the selection of individual osteoimplants

Tat'yana V. Chaykovskaya

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation, kolmakova@ftf.tsu.ru

Abstract. The results of the stress-strain state of model bone meso-volumes containing cancellous and cortical bone tissue together and micro-volumes of cortical and cancellous bone tissue separately under uniaxial compression are presented. Unconventional effective mechanical parameters, serving as a relative measure of the deformation response manifestation for the considered meso- or micro-volume of bone in three perpendicular directions, and the effective modulus of elasticity under axial compression are determined. It has been revealed that the micro- and meso-volumes of bone tissue with different structures and compositions may differ in the pattern of stress and strain distribution, but have similar elastic moduli, and vice versa. It has been shown that the micro- and meso-

volumes of bone tissue samples with different structures and compositions, having the same distribution of stresses and strains, are characterized by the same values of the introduced effective mechanical parameters. It is proposed to use effective mechanical characteristics and longitudinal modulus of elasticity during the selection and development of individual osteoimplants. When installing an implant into the bone, it is suggested to coordinate the orthotropic axes of the implant and the replaced bone site to maintain a favorable mechanical state of the bone consistent with that before implant installation.

Keywords: stress-strain state, effective mechanical parameters, cortical bone tissue, cancellous bone tissue, computer modeling, osteoimplants

For citation: Chaykovskaya, T.V. (2024) Effective mechanical parameters of bone tissue samples for the selection of individual osteoimplants. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 162–175. doi: 10.17223/19988621/89/12

Введение

Многолетний опыт использования остеоимплантатов показывает, что биохимическая совместимость – необходимое, но недостаточное условие поведения системы кость–имплантат как единого целого. Важным условием является также их биомеханическая совместимость. Неправильный выбор остеоимплантата с точки зрения механической совместимости может привести к резорбции (рассасыванию) костной ткани на границе кость–имплантат и расшатыванию протеза (имплантата) [1], что влечет за собой повторные операционные вмешательства. Костные клетки подстраивают структуру и состав кости под изменяющиеся механические условия и обеспечивают благоприятное ее механическое состояние посредством резорбирования и восстановления костной ткани в многочисленных микроскопических участках. Состав и структура костных тканей варьируют в пределах одной кости и отличаются для разных людей [2–6], в связи с чем один и тот же имплантат может у одного пациента прижиться, а у другого нет. Поэтому возникает вопрос: какие механические параметры остеоимплантатов должны обеспечить их механическую совместимость с костной тканью для исключения приграничной резорбции кости? Существующие в настоящее время исследования механики костных тканей [7–14] посвящены в основном определению таких эффективных механических характеристик, как модуль упругости и предел прочности. В данной работе наряду с модулем упругости оцениваются нетрадиционные эффективные механические параметры, определяемые на основе исследования механического поведения костных тканей с разным составом и структурой с использованием методов компьютерного моделирования.

Модели костных тканей

Разработаны следующие модели: модель кости на мезоуровне (мезообъем) [15], модель кортикальной костной ткани и модель губчатой костной ткани на микроуровне (микрообъемы) [16–18].

Модели костей на мезоуровне содержат губчатую и кортикальную костные ткани разного объема (V_s , V_c соответственно), учитывающиеся в явном виде (рис. 1). Материал кортикальной и губчатой костных тканей является изотропным. Эффек-

тивный модуль упругости кортикальной и губчатой ткани рассчитывался по модели Эрнандеса в зависимости от плотности и массовой доли минералов двух типов костной ткани.

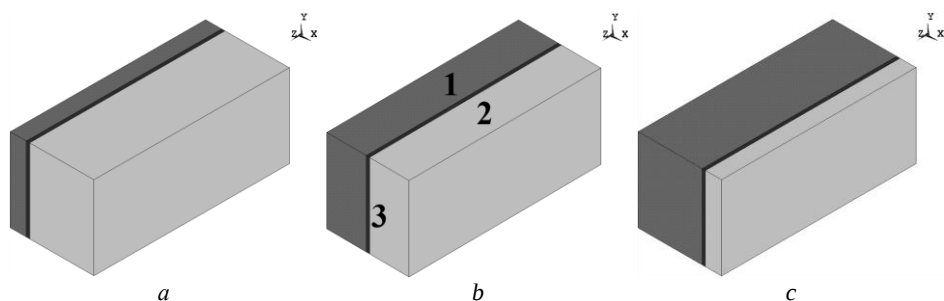


Рис. 1. Модели фрагментов кости на мезоуровне (1 – кортикальная костная ткань, 2 – губчатая костная ткань, 3 – промежуточный слой) с разным соотношением объемов V_c/V_s : *a* – 0.25, *b* – 1.0, *c* – 4.0

Fig. 1. Models of bone fragments (1, cortical bone tissue; 2, cancellous bone tissue; and 3, intermediate layer) at the meso-level with different volume ratios V_c/V_s : (a) 0.25, (b) 1.0, and (c) 4.0

Модель кортикальной костной ткани построена на основе изображения структуры природной кости (рис. 2). Явным образом учтены остеоны и Гаверсовы каналы, цементная линия, окружающая остеоны, и матрица, в реальности представляющая собой остатки остеонов после ремоделирования. Материал всех структурных составляющих микрообъема кортикальной костной ткани принимался трансверсально изотропным. Эффективные механические параметры матрицы и остеонов определяются, учитывая угол направления коллагено-минеральных волокон, значения объемных долей коллагеновой и минеральной составляющих, пористости за счет наличия каналов Фолькмана и лакунарно-канальцевой системы. Пористость, формируемая Гаверсовыми каналами, учитывается в явном виде.

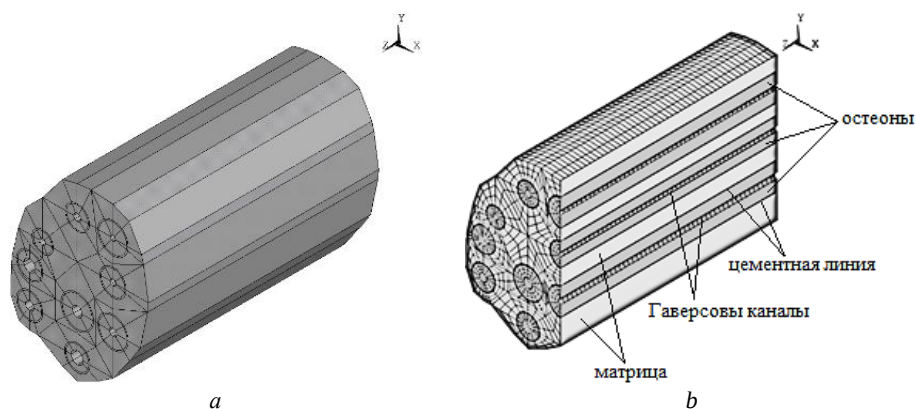


Рис. 2. Геометрическая модель кортикальной костной ткани на микроуровне (*a*); сечение конечно-элементной модели плоскостью YZ (*b*)

Fig. 2. (a) Geometric model of cortical bone tissue at the micro-level and (b) YZ-plane section of the finite element model

Структурной единицей модельного микрообъема губчатой костной ткани является трабекулярный узел (рис. 3, а), который включает центр, представляющий собой сферу, и 1/2 часть трабекул, расположенных взаимно перпендикулярно.

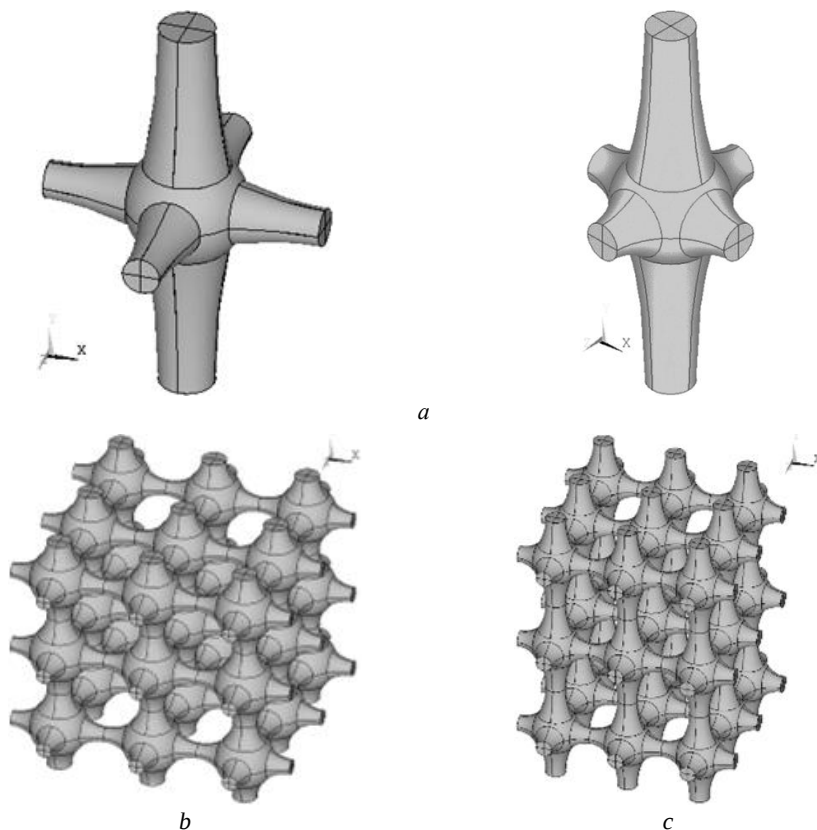


Рис. 3. Примеры трабекулярных узлов (а) и модели губчатой костной ткани (b), (c)
Fig. 3. (a) Examples of trabecular nodes and (b), (c) model samples of cancellous bone tissue

Модельный фрагмент губчатой кости строится как совокупность трабекулярных узлов (рис. 3, b, c). Материал костных балок (трабекул) и центрального элемента считается изотропным. Эффективный модуль упругости структурных составляющих губчатой костной ткани рассчитывался по выражению механики композиционных материалов для случая произвольно ориентированных гидроксиапатитовых волокон в коллагеновой матрице [19].

Результаты и обсуждение

Модельные образцы костных тканей с разными структурой и составом подвергались одноосному сжатию. Микрообъемы кортикальной костной ткани и мезообъемы кости сжимались вдоль оси z, микрообъемы губчатой костной ткани – вдоль оси y. Для расчетов использовался метод конечных элементов программного комплекса ANSYS Mechanical APDL. Для модельного мезообъема варьировали

отношение объемов компактной и губчатой костной ткани (V_c/V_s), их плотность (ρ_c , ρ_s) и массовую долю минералов (α_c , α_s). Для микрообъема кортикальной костной ткани варьировали такие параметры, как пористость за счет лакунарно-канальцевой системы, Фолькмановских и Гаверсовых и каналов (P), массовая доля минералов (α); изменялась ориентация коллагено-минеральных волокон в остеонах (тип $I_{\pm 45^\circ}$ – волокна под углами $\pm 45^\circ$ к оси остеона; тип I – волокна под углом 90° к оси остеона; тип III – волокна параллельно оси остеона; тип II – волокна меняют свою ориентацию с перпендикулярной на параллельную к оси остеона). Для модельных микрообъемов губчатой костной ткани изменялись средняя толщина (t_1 , t_2) и длина (l_1 , l_2) продольной (главной) и поперечной (второстепенной) трабекулы, массовая доля минералов (α). Все параметры варьировали в соответствии с экспериментальными литературными данными.

Деформационное поведение всех рассматриваемых микро- и мезообъемов костных тканей с разным составом и структурой показывает, что в каждом образце при осевом сжатии реализуется три вида деформации в трех взаимно перпендикулярных направлениях, которые проявляются в разной мере, что показывают распределения перемещений (рис. 4). Для мезообъема кости реализуются сжатие в направлении приложения нагрузки (в направлении оси z), растяжение и изгиб в двух других перпендикулярных направлениях (в направлениях u и x соответственно), для микрообъемов кортикальной и губчатой костной ткани – сжатие в направлении приложения нагрузки (в направлении оси z для кортикальной костной ткани, в направлении оси u для губчатой костной ткани) и растяжение в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Введены параметры для оценки меры проявления отмеченных выше деформационных откликов мезо- и микрообъемов кости mU_x , mU_y , mU_z , равные отношению максимального по абсолютной величине значения перемещения в направлении оси x , y или z к сумме максимальных по абсолютной величине значений перемещений в трех перпендикулярных направлениях [20]:

$$mU_x = \frac{\max |U_x|}{(\max |U_x| + \max |U_y| + \max |U_z|)};$$

$$mU_y = \frac{\max |U_y|}{(\max |U_x| + \max |U_y| + \max |U_z|)};$$

$$mU_z = \frac{\max |U_z|}{(\max |U_x| + \max |U_y| + \max |U_z|)}.$$

При этом для мезообъема кости mU_z – относительная мера проявления его сжатия, mU_x – относительная мера проявления изгиба, mU_y – относительная мера проявления растяжения. Для микрообъема кортикальной костной ткани mU_x и mU_y отвечают за меры проявления растяжения микрообъема в направлениях осей X и Y соответственно, mU_z отвечает за относительную меру проявления его сжатия. Для микрообъема губчатой костной ткани mU_y отвечает за меру проявления его сжатия, mU_x , mU_z – за меры проявления растяжения микрообъема в направлениях осей X и Z соответственно.

Распределения осевых нормальных напряжений и деформаций в модельных мезообъемах костей, микрообъемах компактной костной ткани и губчатой костной ткани разного строения и состава представлены на рис. 5–7.

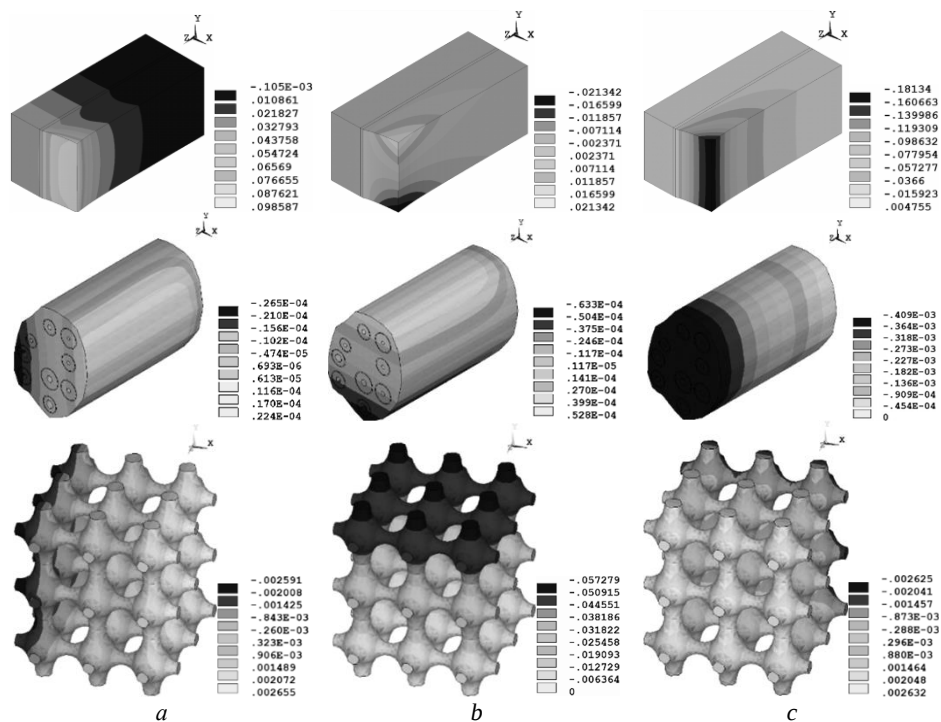


Рис. 4. Распределение перемещений (*a* – U_x ; *b* – U_y ; *c* – U_z), мм: в мезообъеме кости с параметрами $V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.6 \text{ г/см}^3$, $\rho_s = 0.2 \text{ г/см}^3$, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$ при сжимающем напряжении $\sigma_0 = 1.2 \text{ МПа}$; в микрообъеме компактной костной ткани с параметрами $P = 0.05$, $\alpha = 0.6$, I тип при напряжении сжатия $\sigma_0 = 6.5 \text{ МПа}$; в микрообъеме губчатой костной ткани с параметрами $t_1 = 0.22 \text{ мм}$, $t_2 = 0.16 \text{ мм}$, $l_1 = 0.38 \text{ мм}$, $l_2 = 0.22 \text{ мм}$, $\alpha = 0.1$ при сжимающем напряжении $\sigma_0 = 15 \text{ МПа}$

Fig. 4. Distribution of displacements (*(a)* U_x , *(b)* U_y , and *(c)* U_z) (mm) in the meso-volume of the bone with parameters $V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.6 \text{ g/cm}^3$, $\rho_s = 0.2 \text{ g/cm}^3$, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$ under compression stress $\sigma_0 = 1.2 \text{ МПа}$, in the micro-volume of the compact bone tissue with parameters $P = 0.05$, $\alpha = 0.6$, I type under compression stress $\sigma_0 = 6.5 \text{ МПа}$, in the micro-volume of the cancellous bone tissue with parameters $t_1 = 0.22 \text{ мм}$, $t_2 = 0.16 \text{ мм}$, $l_1 = 0.38 \text{ мм}$, $l_2 = 0.22 \text{ мм}$, $\alpha = 0.1$ under compression stress $\sigma_0 = 15 \text{ МПа}$

Рисунки показывают, что микро- и мезообъемы костной ткани, имеющие разное строение и состав, могут иметь как одинаковый, так и разный характер распределения деформаций и напряжений. Одинаковый характер распределения деформаций и напряжений обусловлен одинаковой мерой проявления деформационного отклика микро- и мезообъемов костной ткани в трех взаимно перпендикулярных направлениях при одноосном сжатии, т.е. такие образцы имеют одинаковые параметры mU_x , mU_y и mU_z (таблица). Результаты, представленные в таблице и на рис. 5–7 показывают, что мезо- и микрообъемы могут отличаться характером распределения деформаций и напряжений, но иметь близкие модули упругости, и наоборот – могут иметь идентичный характер распределения деформаций и напряжений, т.е. одинаковые параметры mU_x , mU_y и mU_z , и разные модули упругости (см. таблицу).

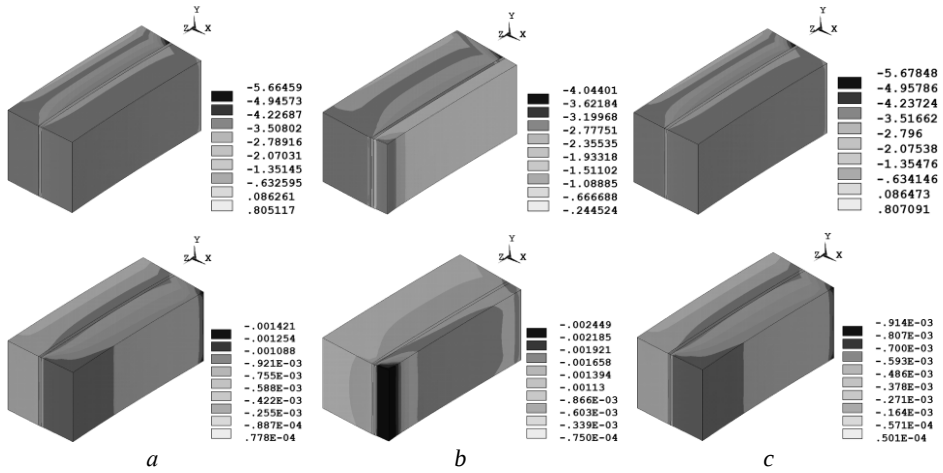


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений, МПа, и деформаций (σ_z , ε_z) в модельных мезообъемах кости с разной структурой и составом (*a* – $V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.6$ г/см³, $\rho_s = 0.8$ г/см³, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$; *b* – $V_c/V_s = 4.0$, $\rho_c = 1.6$ г/см³, $\rho_s = 0.8$ г/см³, $\alpha_c = 0.4$, $\alpha_s = 0.35$; *c* – $V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.9$ г/см³, $\rho_s = 0.95$ г/см³, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$) при сжимающем напряжении $\sigma_0 = 1.2$ МПа

Fig. 5. Distribution of normal stresses (MPa) and strains (σ_z , ε_z) in model bone meso-volumes with different structures and compositions under compression stress $\sigma_0 = 1.2$ MPa: (*a*) $V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.6$ g/cm³, $\rho_s = 0.8$ g/cm³, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$; (*b*) $V_c/V_s = 4.0$, $\rho_c = 1.6$ g/cm³, $\rho_s = 0.8$ g/cm³, $\alpha_c = 0.4$, $\alpha_s = 0.35$; and (*c*) $V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.9$ g/cm³, $\rho_s = 0.95$ g/cm³, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$

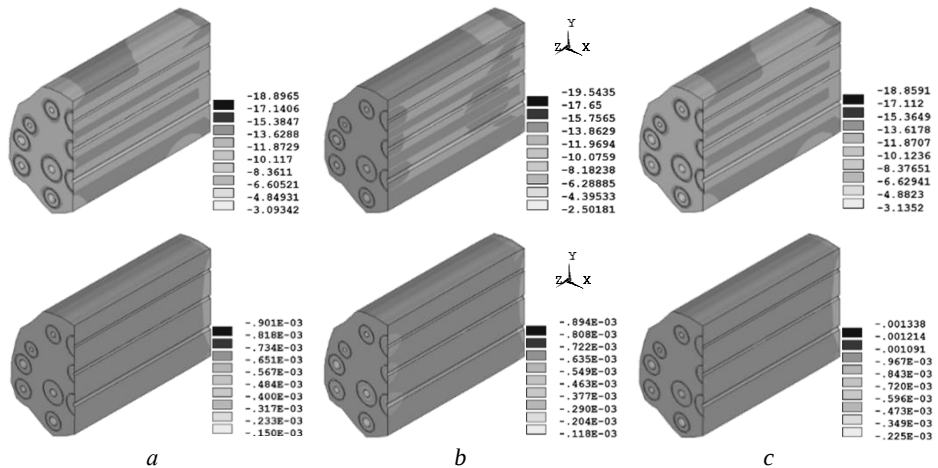


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений, МПа, и деформаций (σ_z , ε_z) в модельных микрообъемах кортикальной костной ткани с разной структурой и составом (*a* – $P = 0.027$, $\alpha = 0.6$, $I_{\pm 45^\circ}$ тип; *b* – $P = 0.027$, $\alpha = 0.6$, II тип; *c* – $P = 0.1$, $\alpha = 0.4$, $I_{\pm 45^\circ}$ тип) при сжимающем напряжении $\sigma_0 = 6.5$ МПа

Fig. 6. Distribution of normal stresses (MPa) and strains (σ_z , ε_z) in model micro-volumes of cortical bone tissue with different structures and compositions under compression stress $\sigma_0 = 6.5$ MPa: (*a*) $P = 0.027$, $\alpha = 0.6$, $I_{\pm 45^\circ}$ type; (*b*) $P = 0.027$, $\alpha = 0.6$, II type; and (*c*) $P = 0.1$, $\alpha = 0.4$, $I_{\pm 45^\circ}$ type

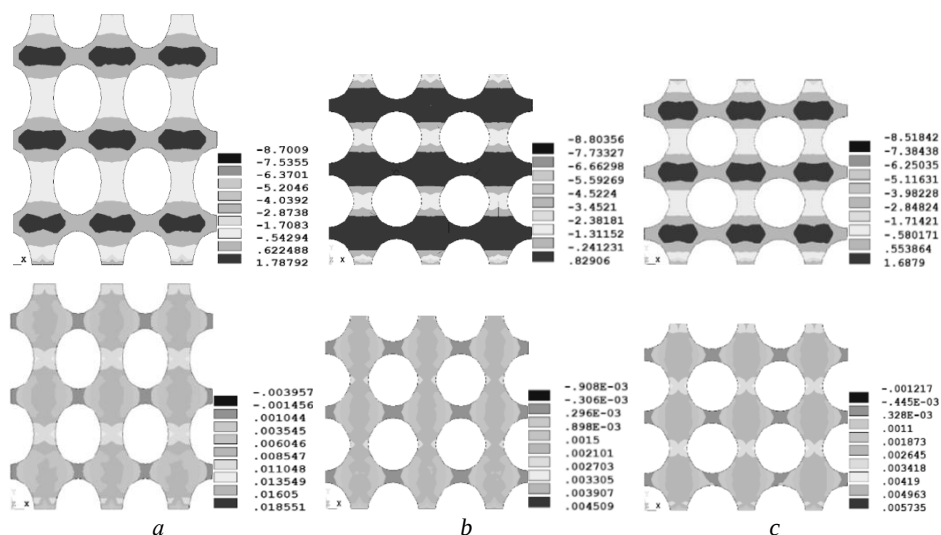


Рис. 7. Распределение нормальных напряжений, МПа, и деформаций (σ_z , ϵ_z) в сечениях модельных микрообъемов губчатой костной ткани с разным составом и структурой ($a - t_1 = 0.22$ мм, $t_2 = 0.16$ мм, $l_1 = 0.38$ мм, $l_2 = 0.22$ мм, $\alpha = 0.1$; $b - t_1 = 0.16$ мм, $t_2 = 0.11$ мм, $l_1 = 0.22$ мм, $l_2 = 0.22$ мм, $\alpha = 0.34$; $c - t_1 = 0.15$ мм, $t_2 = 0.11$ мм, $l_1 = 0.22$ мм, $l_2 = 0.22$ мм, $\alpha = 0.3$) при сжимающем напряжении $\sigma_0 = 15$ МПа

Fig. 7. Distribution of normal stresses (MPa) and strains (σ_z , ϵ_z) in sections of model microvolumes of cancellous bone tissue with different structures and compositions under compression stress $\sigma_0 = 15$ MPa: (a) $t_1 = 0.22$ mm, $t_2 = 0.16$ mm, $l_1 = 0.38$ mm, $l_2 = 0.22$ mm, $\alpha = 0.1$; (b) $t_1 = 0.16$ mm, $t_2 = 0.11$ mm, $l_1 = 0.22$ mm, $l_2 = 0.22$ mm, $\alpha = 0.34$; and (c) $t_1 = 0.15$ mm, $t_2 = 0.11$ mm, $l_1 = 0.22$ mm, $l_2 = 0.22$ mm, $\alpha = 0.3$

Например, образцы кости с параметрами $V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.6$ г/см³, $\rho_s = 0.8$ г/см³, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$ и образцы кости с параметрами $V_c/V_s = 4.0$, $\rho_c = 1.6$ г/см³, $\rho_s = 0.8$ г/см³, $\alpha_c = 0.4$, $\alpha_s = 0.35$ имеют разный характер распределения деформаций и напряжений (см. рис. 5, *a*, *b*), т.е. разные параметры mU_x , mU_y и mU_z (см. таблицу), но близкие модули упругости (см. таблицу). Параметры mU_x , mU_y и mU_z первого упомянутого мезообъема показывают, что преобладает изгиб в направлении оси X , а для второго преобладает сжатие в направлении оси Z . Характер распределения деформаций и напряжений третьего представленного мезообъема с параметрами структуры и состава $V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.9$ г/см³, $\rho_s = 0.95$ г/см³, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$ аналогичен характеру распределения напряжений и деформаций первого мезообъема (см. рис. 5, *a*, *c*). Эти мезообъемы отличаются значениями модуля упругости (см. таблицу), но имеют одинаковые параметры mU_x , mU_y , mU_z .

Аналогичная картина наблюдается для микрообъемов компактной и губчатой костной ткани. Например, представленные микрообъемы компактной костной ткани с параметрами структуры и состава $P = 0.027$, $\alpha = 0.6$, $I_{\pm 45^\circ}$ тип (см. таблицу, № 1) и $P = 0.1$, $\alpha = 0.4$, $I_{\pm 45^\circ}$ тип (см. таблицу, № 3) имеют одинаковые параметры относительной меры проявления деформационного отклика mU_x , mU_y , mU_z , соответственно, одинаковый характер распределения деформаций и напряжений (см. рис. 6, *a*, *c*), но отличаются величиной модуля упругости. Микрообъ-

ем же компактной костной ткани с параметрами $P = 0.027$, $\alpha = 0.6$, II тип имеет близкий модуль упругости к рассматриваемому микрообъему № 1, но отличные от него значения параметров mU_x , mU_y и mU_z (см. таблицу, № 2, №1), а значит, и характер распределения деформаций и напряжений (см. рис. 6, *a*, *b*).

Эффективные механические параметры мезо- и микрообъемов костной ткани с разной структурой и составом

Тип образцов костных тканей	№ образца	Параметры структуры и состава	Изображение характера распределения напряжений и деформаций	Эффективный модуль упругости E , ГПа	mU_i		
					mU_x	mU_y	mU_z
Мезообъемы кости	1	$V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.6 \text{ г/см}^3$, $\rho_s = 0.8 \text{ г/см}^3$, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$	рис. 5, <i>a</i>	2.7	0.54	0.02	0.44
	2	$V_c/V_s = 4.0$, $\rho_c = 1.6 \text{ г/см}^3$, $\rho_s = 0.8 \text{ г/см}^3$, $\alpha_c = 0.4$, $\alpha_s = 0.35$	рис. 5, <i>b</i>	2.6	0.44	0.04	0.52
	3	$V_c/V_s = 1.0$, $\rho_c = 1.9 \text{ г/см}^3$, $\rho_s = 0.95 \text{ г/см}^3$, $\alpha_c = 0.6$, $\alpha_s = 0.53$	рис. 5, <i>c</i>	4.2	0.54	0.02	0.44
Микрообъемы компактной (кортикальной) костной ткани	1	$P = 0.027$, $\alpha = 0.6$, I $_{\pm 45^\circ}$ тип	рис. 6, <i>a</i>	16.5	0.09	0.09	0.82
	2	$P = 0.027$, $\alpha = 0.6$, II тип	рис. 6, <i>b</i>	17.0	0.07	0.12	0.81
	3	$P = 0.1$, $\alpha = 0.4$, I $_{\pm 45^\circ}$ тип	рис. 6, <i>c</i>	11.0	0.09	0.09	0.82
Микрообъемы губчатой костной ткани	1	$t_1 = 0.22 \text{ мм}$, $t_2 = 0.16 \text{ мм}$, $l_1 = 0.38 \text{ мм}$, $l_2 = 0.22 \text{ мм}$, $\alpha = 0.1$	рис. 7, <i>a</i>	0.5	0.04	0.92	0.04
	2	$t_1 = 0.16 \text{ мм}$, $t_2 = 0.11 \text{ мм}$, $l_1 = 0.22 \text{ мм}$, $l_2 = 0.22 \text{ мм}$, $\alpha = 0.34$	рис. 7, <i>b</i>	2.2	0.05	0.90	0.05
	3	$t_1 = 0.15 \text{ мм}$, $t_2 = 0.11 \text{ мм}$, $l_1 = 0.22 \text{ мм}$, $l_2 = 0.22 \text{ мм}$, $\alpha = 0.3$	рис. 7, <i>c</i>	1.9	0.04	0.92	0.04
	4	$t_1 = 0.16 \text{ мм}$, $t_2 = 0.14 \text{ мм}$, $l_1 = 0.38 \text{ мм}$, $l_2 = 0.22 \text{ мм}$, $\alpha = 0.36$	—	2.2	0.03	0.94	0.03

Микрообъемы губчатой костной ткани № 1 ($t_1 = 0.22$ мм, $t_2 = 0.16$ мм, $l_1 = 0.38$ мм, $l_2 = 0.22$ мм, $\alpha = 0.1$) и № 3 ($t_1 = 0.15$ мм, $t_2 = 0.11$ мм, $l_1 = 0.22$ мм, $l_2 = 0.22$ мм, $\alpha = 0.3$) имеют идентичный характер распределения деформаций и напряжений (см. рис. 7, а, с), одинаковые значения параметров mU_x , mU_y и mU_z , отличаются модулем упругости (см. таблицу, № 1, № 3). Микрообъемы губчатой костной ткани № 2 ($t_1 = 0.16$ мм, $t_2 = 0.11$ мм, $l_1 = 0.22$ мм, $l_2 = 0.22$ мм, $\alpha = 0.34$), № 3 ($t_1 = 0.15$ мм, $t_2 = 0.11$ мм, $l_1 = 0.22$ мм, $l_2 = 0.22$ мм, $\alpha = 0.3$), № 4 ($t_1 = 0.16$ мм, $t_2 = 0.14$ мм, $l_1 = 0.38$ мм, $l_2 = 0.22$ мм, $\alpha = 0.36$) имеют близкие модули упругости, но отличаются характером распределения деформаций и напряжений (см. рис. 7, b, c), имеют разные параметры mU_x , mU_y и mU_z .

Величины и характер распределения напряжений и деформаций играют важную роль при ремоделировании (перестройке) костной ткани, определяя области расположения костных клеток, остеокластов и остеобластов, для выполнения своих функций, заключающихся в рассасывании и создании костной ткани соответственно для восстановления благоприятного механического состояния [21].

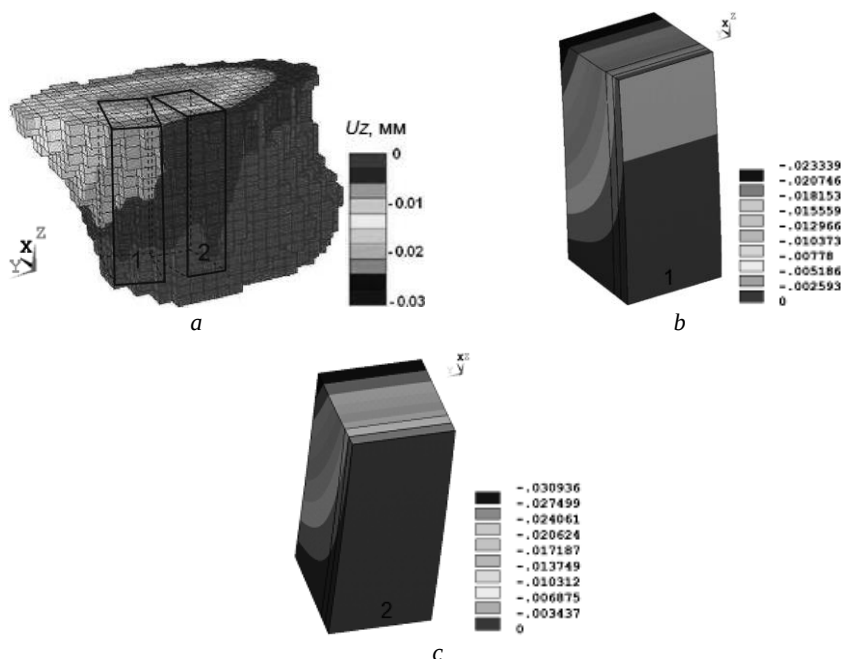


Рис. 8. Соответствие распределения перемещений U_z , мм, модели проксимального отдела бедренной кости работы [22] (a) и модельных мезообъемов кости (b, c)

Fig. 8. Correspondence of the distribution of displacements U_z (mm) in the (a) model of the proximal femur in [22] and (b), (c) model bone meso-volumes

В связи с вышесказанным предлагается осуществлять подбор остеоимплантатов по эффективному модулю упругости замещающего участка костной ткани, который определяет величину реализующихся деформаций и напряжений, и по параметрам mU_x , mU_y , mU_z , определяющим характер распределения деформаций и напряжений, например, по выражениям, представленным в работе [20]. Для со-

хранения благоприятного механического состояния кости при установке в нее имплантата важным также является совмещение их осей ортотропии. При замене фрагмента, содержащего компактный и губчатый слой, значение параметра mUz имплантата должно соответствовать значению параметра mUz мезообъема кости в осевом направлении макрообъема кости, значение параметра mUx имплантата должно соответствовать значению того же параметра мезообъема в радиальном направлении макрообъема кости, значение mUy – по касательной к макрообъему кости. Соответствие направлений осей ортотропии мезообъемов и макрообъема кости определено из сопоставления полученных автором результатов распределения перемещений в модельных мезообъемах и в проксимальном отделе бедренной кости работы [22] (рис. 8).

Заключение

Описаны модели костных тканей на мезо- и микроуровнях, представлены распределения напряжений и деформаций и определены нетрадиционные эффективные параметры mUx , mUy , mUz , являющиеся относительной мерой проявления деформационного отклика костных тканей при осевом сжатии. Выявлено и показано, что микро- и мезообъемы костных тканей, имеющие разное строение и состав, могут отличаться характером распределения деформаций и напряжений, но иметь близкие модули упругости, и наоборот – могут иметь одинаковый характер распределения деформаций и напряжений и отличаться модулем упругости. Одинаковый характер распределения деформаций и напряжений обусловлен одинаковой мерой проявления деформационных откликов микро- и мезообъемов кости в трех перпендикулярных направлениях. Показано, что введенные эффективные параметры образцов кости mUx , mUy и mUz отражают характер распределения деформаций и напряжений, а эффективный модуль упругости отражает величины реализующихся напряжений и деформаций. Предлагается использовать рассмотренные эффективные характеристики при подборе и разработке индивидуальных остеоимплантатов. Необходимым условием при установке имплантата вместо замещаемого микро- или мезообъема кости является совмещение их осей ортотропии для сохранения существующего до установки благоприятного механического состояния кости, что, предположительно, позволит избежать резорбции кости на границе кость–имплантат.

Список источников

1. Сагаловски С., Шенерт М. Клеточно-молекулярные механизмы развития асептической нестабильности эндопротеза тазобедренного сустава // Травма. 2012. Т. 13, № 1. С. 153–160.
2. Goldman H.M., Bromage T.G. Preferred collagen fiber orientation in the human mid-shaft femur // The Anatomical Record Part A. 2003. V. 272A (1). P. 434–445. doi: 10.1002/ar.a.10055
3. Avrunin A.S., Tses E.A. The birth of a new scientific field – biomechanics of the skeleton. Julius Wolff and his work “Das Gesetz der Transformation der Knochen” // History of Medicine. 2016. V. 3 (4). P. 447–461. doi: 10.17720/2409-5834.v3.4.2016.36q
4. Mellon S.J., Tanner K.E. Bone and its adaptation to mechanical loading: a review // International Materials Reviews. 2012. V. 57 (5). P. 235–255.
5. Keaveny T.M., Morgan E.F., Yeh O.C. Biomedical Engineering and Design Handbook / ed. by M. Kutz. New York : McGraw-Hill, 2009.

6. Cowin S.C. Bone Mechanics Handbook. 2nd ed. New York : CRC Press, 2001. 978 p.
7. Rosa N., Moura M.F.S.F., Olhero S., Simoes R., Magalhães F.D., Marques A.T., Ferreira J.P.S., Reis A.R., Carvalho M., Parente M. Bone: An Outstanding Composite Material // Applied Sciences. 2022. V. 12 (7). Art. 3381. P. 1–15. doi: 10.3390/app12073381
8. Novitskaya E., Chen P.Y., Hamed E., Li J., Lubarda V.A., Jasiuk I., Mckittrick J. Recent advances on the measurement and calculation of the elastic moduli of cortical and trabecular bone: a review // Theoretical and Applied Mechanics. 2011. V. 38 (3). P. 209–297. doi: 10.2298/TAM1103209N
9. Orava H., Huang L., Ojanen S.P., Mäkelä J.T.A., Finnilä M.A.J., Saarakkala S., Herzog W., Korhonen R.K., Töyräs J., Tanska P. Changes in subchondral bone structure and mechanical properties do not substantially affect cartilage mechanical responses – a finite element study // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. 2022. V. 128. Art. 105129. P. 1–15. doi: 10.1016/j.jmbbm.2022.105129
10. Lee T., Garlapati R.R., Lam K., Lee P.V., Chung Y.S., Choi J.B., Vincent T.B., Das De S. Fast tool evaluation of iliac crest tissue elastic properties using the reduced-basis methods // Journal of Biomechanical Engineering. 2010. V. 132. Art. 121009. P. 1–8. doi: 10.1115/1.4001254
11. Xi L., Barbieri E., Wang P., Wu W., Gupta H. Separating effects of bone-quality changes at multiple scales in steroid-induced osteoporosis: Combining multiscale experimental and modelling approaches // Mechanics of Materials. 2021. V. 157. Art. 103821. P. 1–15. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.103821
12. Lovrenić-Jugović M., Tonković Z., Skozrit I. Experimental and numerical investigation of cyclic creep and recovery behavior of bovine cortical bone // Mechanics of Materials. 2020. V. 146. Art. 103407. P. 1–14. doi: 10.1016/j.mechmat.2020.103407
13. Lubarda V.A., Novitskaya E.E., Kittrick J.Mc., Bodde S.G., Chen P.Y. Elastic properties of cancellous bone in terms of elastic properties of its mineral and protein phases with application to their osteoporotic degradation // Mechanics of Materials. 2012. V. 44. P. 139–150. doi: 10.1016/j.mechmat.2011.06.005
14. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Ищенко А.Н., Афанасьева С.А., Хабибуллин М.В., Югов А.А., Стуканов А.Л. Математическое моделирование разрушения костной ткани при динамическом нагружении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 2 (10). С. 28–37.
15. Kolmakova T.V. Computer-aided study of the mechanical behavior of the jaw bone fragments under uniaxial compression // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1760. Art. 020030. P. 1–4. doi: 10.1063/1.4960249
16. Kolmakova T. Computer modeling of the structure of the cortical and trabecular bone tissue // AIP Conference Proceedings. 2015. V. 1683. Art. 020087. P. 1–4. doi: 10.1063/1.4932777
17. Lastovkina Y.N., Kolmakova T.V. Computer modelling of the microstructure of the trabecular bone fragments for the study of stress-strain state // IOP Publishing: Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 769. Art. 012020. P. 1–4. doi: 10.1088/1742-6596/769/1/012020
18. Марченко Е.С., Чайковская Т.В. Исследование напряженно-деформированного состояния губчатой костной ткани при одноосном сжатии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 127–142. doi: 10.17223/19988621/83/11
19. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / пер. с англ. А.И. Бейля, Н.П. Жмудя; под ред. Ю.М. Тарнопольского. М. : Мир, 1982. 334 с.
20. Колмакова Т.В. Моделирование структуры, расчет напряженно-деформированного состояния, механических свойств костных тканей и управление характеристиками остеомплантатов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2013. 273 с.
21. Фигурска М. Структура компактной костной ткани // Российский журнал биомеханики. 2007. Т. 11, № 3. С. 28–38.
22. Fedida R., Yosibash Z., Milgrom C., Joskowicz L. Femur mechanical simulation using high-order FE analysis with continuous mechanical properties // 2nd International Conference on Computational Bioengineering; Lisbon, Portugal, 2005.

References

1. Sagalovski S., Shenert M. (2012) Kletочно-molekulyarnye mekhanizmy razvitiya asepticheskoy nestabil'nosti endoproteza tazobedrennogo sustava [Cellular and molecular mechanisms of development of aseptic instability of hip implant]. *Travma – Trauma*. 13(1). pp. 153–160.
2. Goldman H.M., Bromage T.G. (2003) Preferred collagen fiber orientation in the human mid-shaft femur. *The Anatomical Record Part A*. 272A(1). pp. 434–445. doi: 10.1002/ar.a.10055
3. Avrunin A.S., Tses E.A. (2016) The birth of a new scientific field – biomechanics of the skeleton. Julius Wolff and his work “Das Gesetz der Transformation der Knochen”. *History of Medicine*. 3(4). pp. 447–461. doi: 10.17720/2409-5834.v3.4.2016.36q
4. Mellon S.J., Tanner K.E. (2012) Bone and its adaptation to mechanical loading: A review. *International Materials Reviews*. 57(5). pp. 235–255. doi: 10.1179/1743280412Y.0000000008
5. Keaveny T.M., Morgan E.F., Yeh O.C. (2009) *Biomedical Engineering and Design Handbook*. New York: McGraw-Hill.
6. Cowin S.C. (2001) *Bone Mechanics Handbook*. New York: CRC Press.
7. Rosa N., Moura M.F.S.F., Olhero S., Simoes R., Magalhães F.D., Marques A.T., Ferreira J.P.S., Reis A.R., Carvalho M., Parente M. (2022) Bone: An outstanding composite material. *Applied Sciences*. 12(7). Article 3381. pp. 1–15. doi: 10.3390/app12073381
8. Novitskaya E., Chen P.Y., Hamed E., Li J., Lubarda V.A., Jasiuk I., Mckittrick J. (2011) Recent advances on the measurement and calculation of the elastic moduli of cortical and trabecular bone: A review. *Theoretical and Applied Mechanics*. 38(3). pp. 209–297. doi: 10.2298/TAM1103209N
9. Orava H., Huang L., Ojanen S.P., Mäkelä J.T.A., Finnilä M.A.J., Saarakkala S., Herzog W., Korhonen R.K., Töyräs J., Tanska P. (2022) Changes in subchondral bone structure and mechanical properties do not substantially affect cartilage mechanical responses – A finite element study. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 128. Article 105129. pp. 1–15. doi: 10.1016/j.jmbbm.2022.105129
10. Lee T., Garlapati R.R., Lam K., Lee P.V., Chung Y.S., Choi J.B., Vincent T.B., Das De S. (2010) Fast tool evaluation of iliac crest tissue elastic properties using the reduced-basis methods. *Journal of Biomechanical Engineering*. 132. Article 121009. pp. 1–8. doi: 10.1115/1.4001254
11. Xi L., Barbieri E., Wang P., Wu W., Gupta H. (2021) Separating effects of bone-quality changes at multiple scales in steroid-induced osteoporosis: Combining multiscale experimental and modelling approaches. *Mechanics of Materials*. 157. Article 103821. pp. 1–15. doi: 10.1016/j.mechmat.2021.103821
12. Lovrenić-Jugović M., Tonković Z., Skozrit I. (2020) Experimental and numerical investigation of cyclic creep and recovery behavior of bovine cortical bone. *Mechanics of Materials*. 146. Article 103407. pp. 1–14. doi: 10.1016/j.mechmat.2020.103407
13. Lubarda V.A., Novitskaya E.E., Kittrick J.Mc., Bodde S.G., Chen P.Y. (2012) Elastic properties of cancellous bone in terms of elastic properties of its mineral and protein phases with application to their osteoporotic degradation. *Mechanics of Materials*. 44. pp. 139–150. doi: 10.1016/j.mechmat.2011.06.005
14. Belov N.N., Yugov N.T., Ishchenko A.N., Afanas'eva S.A., Habibulin M.V., Yugov A.A., Stukanov A.L. (2010) Matematicheskoe modelirovanie razrusheniya kostnoy tkani pri dinamicheskom nagruzenii [Mathematical modeling of bone tissue destruction under dynamic loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2(10). pp. 28–37.
15. Kolmakova T.V. (2016) Computer-aided study of the mechanical behavior of the jaw bone fragments under uniaxial compression. *AIP Conference Proceedings*. 1760. Article 020030. pp. 1–4. doi: 10.1063/1.4960249
16. Kolmakova T. (2015) Computer modeling of the structure of the cortical and trabecular bone tissue. *AIP Conference Proceedings*. 1683. Article 020087. pp. 1–4. doi: 10.1063/1.4932777

17. Lastovkina Y.N., Kolmakova T.V. (2016) Computer modelling of the microstructure of the trabecular bone fragments for the study of stress-strain state. *Journal of Physics: Conference Series*. 769. Article 012020. pp. 1–4. doi: 10.1088/1742-6596/769/1/012020
18. Marchenko E.S., Chaykovskaya T.V. (2023) Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya gubchatoy kostnoy tkani pri jednoosnom szhatii [A study of the stress–strain state of cancellous bone tissue under uniaxial compression]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 127–142. doi: 10.17223/19988621/83/11
19. Christensen R.M. (1979) *Mechanics of Composite Materials*. New York: Wiley.
20. Kolmakova T.V. (2013) *Modelirovanie struktury, raschyot napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya, mekhanicheskikh svoystv kostnykh tkaney i upravlenie kharakteristikami osteo-implantatov* [Modeling of the structure, calculation of the stress–strain state and mechanical properties of bone tissue samples, and controlling of characteristics of osteoimplants]. Dissertation. Tomsk State University. Tomsk.
21. Figurska M. (2007) Struktura kompaktnoy kostnoy tkani [The structure of compact bone tissue]. *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki – Russian Journal of Biomechanics*. 11(3). pp. 28–38.
22. Fedida R., Yosibash Z., Milgrom C., Joskowicz L. (2005) Femur mechanical simulation using high-order FE analysis with continuous mechanical properties. *Proceedings of the 2nd International Conference on Computational Bioengineering; Lisbon, Portugal*.

Сведения об авторе:

Чайковская Татьяна Витальевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности и проектирования физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

Information about the author:

Chaykovskaya Tat'yana V. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kolmakova@ftf.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 30.01.2024; принята к публикации 03.06.2024

The article was submitted 30.01.2024; accepted for publication 03.06.2024

Научный журнал

**ВЕСТНИК
ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.
МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА**

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

2024. № 89

Редактор Е.Г. Шумская
Оригинал-макет Е.Г. Шумской
Дизайн обложки Л.Д. Кривцова

Подписано в печать 24.06.2024 г. Формат 70×100¹/₁₆.
Печ. л. 10,9; усл. печ. л. 10,1. Цена свободная.
Тираж 250 экз. Заказ № 5956.

Дата выхода в свет 28.06.2024 г.

Адрес издателя и редакции: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет

Журнал отпечатан на полиграфическом оборудовании
Издательства Томского государственного университета
634050, г. Томск, Ленина, 36
Тел. 8(382-2)–52-98-49; 8(382-2)–52-96-75
Сайт: <http://publish.tsu.ru>; E-mail: rio.tsu@mail.ru