ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2014 Управление, вычислительная техника и информатика № 2 (27)

УДК 519.254.1

Д.В. Иванов

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ARX-СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМЕХОЙ НАБЛЮДЕНИЯ ВО ВХОДНОМ СИГНАЛЕ

Предложен критерий для оценивания параметров линейных ARX-систем с помехой наблюдения во входном сигнале. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок параметров при помехах класса мартингал-разность. Для получения сильно состоятельных оценок не требуется знания законов распределения помех.
Ключевые слова: помеха наблюдения; разность дробного порядка; метод наименьших квадратов.

В последнее время модели на основе дифференциальных и разностных уравнений дробного порядка находят применение во многих приложениях: теория вязкоупругости, теория хаоса, фракталы, для описания диэлектрических материалов, электрохимических процессов, траффика в компьютерных сетях.

Модели ошибки уравнения (ARX-модели) [1] – наиболее распространенный вид моделей параметризации шума. Идентификация моделей ошибки уравнения сводится к классической задаче регрессионного анализа и может быть решена методом наименьших квадратов. Однако во многих практических задачах помеха содержится также и во входном сигнале, в этом случае классический метод наименьших квадратов не позволяет получать состоятельные оценки.

В настоящее время активно развиваются методы нелинейного оценивания параметров динамических систем [2, 3]. Для динамических систем дробного порядка с различными моделями шума разработаны методы для оценивания параметров [4–8].

В статье [9] предложен рекуррентный алгоритм оценивания параметров билинейных ARX систем с помехой во входном сигнале на основе стохастической аппроксимации.

В данной статье разработан критерий для оценивания параметров линейных ARX дробного порядка с помехой во входном сигнале и доказана сильная состоятельность получаемых оценок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную ARX-систему дробного порядка, описываемую следующими стохастическими уравнениями с дискретным временем $i = \ldots -1, 0, 1, \ldots$:

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i + \xi_i,\ w_i = x_i + \zeta_i, \tag{1}$$

где

$$0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r,\ \ 0 < \beta_1 \ldots < \beta_{r_1},\ \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt,\ \Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j},$$

$$\Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_m}{j} x_{i-j},\ \binom{\alpha_m}{j} = \frac{\Gamma(\alpha_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m - j + 1)},\ \binom{\beta_m}{j} = \frac{\Gamma(\beta_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m - j + 1)}.$$

z_i – наблюдаемая выходная переменная; x_i, w_i – ненаблюдаемая и наблюдаемая переменная входные переменные; ζ_i – помеха наблюдения во входных сигналах; ξ_i – ошибка в уравнении.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1. Множество $\widetilde{\mathrm{B}}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой динамической системы, является компактом.

2. Случайные процессы $\{\xi_i\}, \{\zeta_i\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям: $E\left(\xi_{i+1} / F_{\xi}^{(i)}\right)=0$, $E\left(\zeta_{i+1} / F_{\zeta}^{(i)}\right)=0$ п.н., $E\left(\xi_{i+1}^2 / F_{\xi}^{(i)}\right)<\infty$, $E\left(\zeta_{i+1}^2 / F_{\zeta}^{(i)}\right)<\infty$ п.н. $E\left(\xi_i^4\right)<\infty$, $E\left(\xi_i^2\right)<\infty$, $E\left(\zeta_i^4\right)<\infty$, $E\left(\zeta_i^2\right)<\infty$, где $F_{\xi}^{(i)}, F_{\zeta}^{(i)}-\sigma$ – алгебры, индуцированные семействами непрерывных случайных величин $\{\xi(t), \zeta(t), t \in T_i\}, T_i = \{t; t \le i, t \in Z_c$ – множество целых чисел$\}$.

3. Входной сигнал x_i является случайным процессом с $E(x_i)=0$, $E(x_i^2)=\sigma_x^2<\infty$, и истинные значения параметров b_0, a_0 удовлетворяют условию

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \,\vdots\, \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\right)^T\left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \,\vdots\, \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\right)=H \text{ п.н.},$$

где

$$\varphi_z^{(i)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_1}{j}z_{i-j-1},\ldots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_{r_1}}{j}z_{i-j-1}\right)^T,\ \varphi_x^{(i)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_1}{j}x_{i-j},\ldots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_{r_1}}{j}x_{i-j}\right)^T,$$

причем H существует, ограничена и положительно определена.

4. $\{x_i\}$ статистически не зависит от $\{\xi_i\}, \{\zeta_i\}$.

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов динамической системы, описываемой уравнением (1), по наблюдаемым последовательностям z_i, w_i при известных порядках $r, r_1, \alpha_m, \beta_m$.

2. Критерий для оценивания параметров

Система может быть записана как линейная регрессия

$$y_i=\varphi_i^T\theta_0+\varepsilon_i, \tag{2}$$

где

$$\varphi_i=\left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \,\vdots\, \left(\varphi_w^{(i)}\right)^T\right)^T,\ \varphi_w^{(i)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_1}{j}w_{i-j},\ldots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_{r_1}}{j}w_{i-j}\right)^T,\ \theta_0=\left(b_0^T \,\vdots\, a_0^T\right)^T,$$

$$b_0=\left(b_0^{(1)},\ldots,b_0^{(r)}\right)^T, a_0=\left(a_0^{(1)},\ldots,a_0^{(r_1)}\right)^T,\ \varepsilon_i=\xi_i-\sum_{k=1}^{d}a_0^T\varphi_{\zeta}^{(i)},$$

$$\varphi_{\zeta}^{(i)}=\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_1}{j}\zeta_{i-j},\ldots,\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_{r_1}}{j}\zeta_{i-j}\right)^T.$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1–3, тогда математическое ожидание ε_i равно нулю $E(\varepsilon_i)=0$.

Доказательство. Из предположения, что $\{\xi_i\}, \{\zeta_i\}$ – мартингал-разности, следует, что $E(\xi_i)=0$, $E(\zeta_i)=0$, тогда, используя предположение 3, можно показать

$$E(\varepsilon_i)=E\left(\xi_i-a_0^T\varphi_{\zeta}^{(i)}\right)=E(\xi_i)-\sum_{m=1}^{r_1}a_0^{(m)}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_m}{j}E\left(\zeta_{i-j}\right)=0.$$

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1–3, тогда средняя дисперсия обобщенной ошибки равна

$$\overline{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\overline{\sigma}_{\xi}^{2}+a_0^T H'_{\zeta} a_0=\omega(a_0),$$

где

$$\overline{\sigma}_{\xi}^{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}\xi_i^2,\quad H'_{\zeta}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E\left[\sum_{i=1}^{N}\varphi_{\zeta}^{(i)}\left(\varphi_{\zeta}^{(i)}\right)^T\right]=\begin{pmatrix} h_{\zeta}^{\prime(11)} & \dots & h_{\zeta}^{\prime(r_1\,1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\zeta}^{\prime(1r_1)} & \dots & h_{\zeta}^{\prime(r_1\,r_1)} \end{pmatrix},$$

$$h_{\zeta}^{\prime(mn)}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E\sum_{i=0}^{N-1}\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_m}{j}\zeta_{i-j}\cdot\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{\beta_n}{j}\right)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=j}^{N-1}\binom{\beta_m}{j}\binom{\beta_n}{j}\sigma_{\zeta}^2(i-j),\ m=\overline{1,r_1}\ ,\ n=\overline{1,r_1}\ .$$

Доказательство. По определению средней дисперсии

$$\overline{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(\varepsilon_i-E(\varepsilon_i)\right)^2,$$

так как согласно Лемме 1 $E(\varepsilon_i)=0$, то

$$\overline{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(\varepsilon_i\right)^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(\xi_i-a_0^T\varphi_{\zeta}^{(i)}\right)^2=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(\xi_i^2+a_0^T\varphi_{\zeta}^{(i)}\left(\varphi_{\zeta}^{(i)}\right)^T a_0-2\xi_i\, a_0^T\varphi_{\zeta}^{(i)}\right).$$

Используя лемму 1.1 [10] для случайного процесса ξ_i, а также условия 3, 4 получаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(\xi_i^2+a_0^T\varphi_{\zeta}^{(i)}\left(\varphi_{\zeta}^{(i)}\right)^T a_0\right)=\overline{\sigma}_{\xi}^{2}+a_0^T H'_{\zeta} a_0\,.$$

Применяя лемму 2 [11] для случайных процессов, получаем

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\left(-2\xi_i\, a_0^T\varphi_{\zeta}^{(i)}\right)=0.$$

Так как ряд из коэффициентов $\binom{\beta_m}{j}$ сходится абсолютно [12. С. 279]: $\sum_{j=0}^{\infty}\left|\binom{\beta_m^{(k)}}{j}\right|<\infty,$ применяя теорему Мертенса [13. С. 328], можно показать, что ряд сходится:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{i}\binom{\beta_m}{j}\binom{\beta_n}{j}\sigma_{\zeta}^2(i-j)<\infty.$$

Тогда определим оценку $\hat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщённых ошибок $\left(\varepsilon_i(a,i)\right)^2$ с весом $\omega(a)$, т.е.

$$\min_{\theta\in\tilde{B}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(y_i-\phi_i^T\theta\right)^2}{\overline{\sigma}_{\xi}^{2}+a^T H_{\zeta} a}=\min_{\theta\in\tilde{B}}\frac{U_N(b,a)}{\omega(a)},\tag{3}$$

где

$$H_\zeta = \begin{pmatrix} h_\zeta^{(11)} & \dots & h_\zeta^{(r_1 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\zeta^{(1 r_1)} & \dots & h_\zeta^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix}, \quad h_\zeta^{(mn)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_m}{j} \zeta_{i-j} \cdot \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_n}{j} \zeta_{i-j} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_k}{j} \zeta_{i-j}^2, \quad m = \overline{1, r_1},\ n = \overline{1, r_1}.$$

Так как согласно лемме 1.1 [10] $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{i=i_0}^{N} \zeta_i^2 = \overline{\sigma}_\zeta^2$, то, применяя теорему Мертенса [13. С. 328], можно показать $h_\zeta^{(mn)} < \infty$.

Теорема. Пусть некоторый случайный процесс $\{y_i, i = \ldots -1,0,1,\ldots\}$ описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1–4. Тогда оценка $\hat{\theta}(N)$, определяемая выражением (3) с вероятностью 1 при $N \to \infty$, существует единственная и является сильно состоятельной, т.е.

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}} \theta_0.$$

Доказательство. Определим

$$\frac{1}{N} U_N(b, a^{(1)}, \ldots, a^{(d)}) = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(z_i + \xi_i - \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T b - \left(\varphi_x^{(i)} + \varphi_\zeta^{(i)}\right)^T a \right)^2 =$$

$$= N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_i + \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T b_0 + \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T a_0 - \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T b - \left(\varphi_x^{(i)} + \varphi_\zeta^{(i)}\right)^T a \right)^2 =$$

$$= N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_i - \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \tilde{b} - \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \tilde{a} - \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T a \right)^2 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3;$$

$$\nu_1 = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_i^2 + \sum_{k=1}^{d} \left(a^{(k)}\right)^T \varphi_\zeta^{(ik)} \left(\varphi_\zeta^{(ik)}\right)^T a^{(k)} \right), \tag{4}$$

$$\nu_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{\theta}^T \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \mid \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right)^T \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \mid \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right) \tilde{\theta},$$

$$\nu_3 = 2N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \left(-\xi_i \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \tilde{b} - \xi_i \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \tilde{a} - \xi_i \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T a + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \tilde{b} + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \tilde{a} \right),$$

где $\tilde{b} = b - b_0, \tilde{a} = a - a_0, \tilde{\theta} = \theta - \theta_0$.

Применив лемму [10] для случайных процессов, получаем, что

$$\nu_1 \xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}} \overline{\sigma}_\xi^2 + a^T H_\zeta a,$$

так как из 3

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \mid \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right)^T \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \mid \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right) = H \text{ п.н.},$$

то $\nu_2 \xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}} \tilde{\theta}^T H \tilde{\theta}.$

Первые два слагаемых в сумме ν_3 в силу условий 2, 3, 4 удовлетворяют условиям леммы 2 [11] и, следовательно,

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\xi_i\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\tilde{a}\xrightarrow[N\to\infty]{}0\ \text{п.н.},\quad \forall\theta\in\tilde{B}.$$

Заметим, что

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}a_0^T\varphi_\zeta^{(i)}\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\tilde{a}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_0^T H_{\zeta x}\tilde{a},$$

$$H_{\zeta x}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}E\left[\sum_{i=1}^{N}\varphi_\zeta^{(i)}\left(\varphi_x^{(i)}\right)^T\right]=\begin{pmatrix} h_{\zeta x}^{(11)} & h_{\zeta x}^{(21)} & \dots & h_{\zeta x}^{(r_1 1)} \\ h_{\zeta x}^{(21)} & h_{\zeta x}^{(22)} & \dots & h_{\zeta x}^{(r_1 2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\zeta x}^{(1r_1)} & h_{\zeta x}^{(2r_1)} & \dots & h_{\zeta x}^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix},$$

таким образом, (4) можно представить в виде конечного числа слагаемых, каждое из которых в силу предположений 2–3 по лемме 2 [11] сходится к нулю.

Можно доказать, что и все остальные слагаемые в ν_3 сходятся к нулю с вероятностью 1 при $N\to\infty$.

Таким образом, имеем: $\nu_3\xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}}0,$

Окончательно имеем

$$N^{-1}U_N(b,a)\xrightarrow[N\to\infty]{}\bar{\sigma}_\xi^2+\tilde{\theta}^T H\tilde{\theta}+a^T H_\zeta a\equiv\bar{U}(b,a). \tag{5}$$

Покажем, что решение задачи

$$\min\omega^{-1}(a)\bar{U}(b,a),\quad \theta\in\tilde{B} \tag{6}$$

существует и достигается в единственной точке $\theta=\theta_0$, т.е.

$$\min_{\theta\in\tilde{B}}\omega^{-1}(a)\bar{U}(b,a)=\frac{\bar{U}\left(b_0,a_0\right)}{\omega\left(a_0\right)}. \tag{7}$$

Для этого вместе с критерием (3) рассмотрим функцию

$$V\left(b,a,\lambda\right)=\bar{U}(b,a)-\lambda\omega(a), \tag{8}$$

$$V\left(\lambda\right)=\min_{\theta\in\tilde{B}}V(b,a,\lambda).$$

Тогда (8) равно

$$V(b,a,\lambda)=\bar{\sigma}_\xi^{\,2}+\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^T H\left(\frac{b_0}{a_0}\right)-\lambda\bar{\sigma}_\xi-2\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^T H\left(\frac{b}{a}\right)+$$
$$+\left(\frac{b}{a}\right)^T\left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zx} \\ \hline \left(H_{zx}\right)^T & H_{ww}-\lambda H_\zeta \end{array}\right)\left(\frac{b}{a}\right),$$

где $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi_w^{(i)}\left(\varphi_w^{(i)}\right)^T=H_{ww}$.

Дифференцируя $V\left(b,a,\lambda\right)$ по b,a и приравнивая производные к нулю, находим

$$\left(\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}\right)=\left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zx} \\ \hline \left(H_{zx}\right)^T & H_{ww}-\lambda H_\zeta \end{array}\right)^{-1}H\left(\frac{b_0}{a_0}\right) \tag{9}$$

и тогда

$$V(\lambda)=\bar{\sigma}_\xi^{\;2}+\begin{pmatrix}b_0\\a_0\end{pmatrix}^T H\begin{pmatrix}b_0\\a_0\end{pmatrix}-\lambda\bar{\sigma}_\xi-\left(H\begin{pmatrix}b_0\\a_0\end{pmatrix}\right)^T\left(\begin{array}{c|c}H_{zz} & H_{zx}\\ \hline (H_{zx})^T & H_{ww}-\lambda H_\zeta\end{array}\right)^{-1}H\begin{pmatrix}b_0\\a_0\end{pmatrix},$$

функция $V(\lambda)$ на интервале $(-\infty,\lambda_{\min}+1)$ непрерывна, где $\lambda_{\min}$ – наименьшее собственное число регулярного пучка квадратичных форм, т.е. наименьший корень уравнения:

$$\det\left(\Phi_w^T\Phi_w-\Phi_w^T\Phi_z\left(\Phi_z^T\Phi_z\right)^{-1}\left(\Phi_w^T\Phi_z\right)^T-\lambda H_\zeta(N)\right)=0. \qquad (10)$$

Легко показать, что уравнение $V(\lambda)=0$ имеет не более одного корня λ_1 на $(-\infty,\lambda_{\min}+1)$, так как на этом интервале функция $V(\lambda)$ непрерывна и

$$\dot{V}(\lambda)=-(\bar{\sigma}_\xi^2+(a(\lambda))^T H_\zeta a(\lambda))<-1, \lambda\in(-\infty,\lambda_{\min}+1).$$

Непосредственной подстановкой $\lambda_1=1$ в уравнение $V(\lambda)=0$ можно убедиться, что $\lambda_1=1$ является корнем уравнения, единственным на этом интервале. Тогда из (11) непосредственно следует справедливость (8).

Выражение (3) можно привести к виду

$$\min_{\theta\in\tilde{B}}\omega^{-1}(a)U_N^1(b,a)=\min_{\theta\in\tilde{B}}\frac{\left(Z-\Phi^T\theta\right)^T\left(Z-\Phi^T\theta\right)}{\bar{\sigma}_\xi^2+\theta^T H_\zeta(N)\theta},$$

где

$$Z=(z_1,...,z_N)^T,\ \Phi=\left(\Phi_z \mid \Phi_w\right)=\left(\begin{array}{c|c}\left(\varphi_z^{(0)}\right)^T & \left(\varphi_w^{(01)}\right)^T\\ \vdots & \vdots\\ \left(\varphi_z^{(N-1)}\right)^T & \left(\varphi_w^{(N-11)}\right)^T\end{array}\right),\ H_{\xi\zeta}(N)=\left(\begin{array}{c|c}0 & 0\\ \hline 0 & H_\zeta(N)\end{array}\right).$$

Введём новый вектор переменных $(1 \mid \theta)^T=\bar{\theta}$ и матрицу $\bar{\Phi}=(-Y \mid \Phi)$. Имеем для (3):

$$\min_{\theta\in\tilde{B}}\frac{\bar{\theta}^T\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\bar{\theta}}{\bar{\theta}^T\bar{H}_{\xi\zeta}(N)\bar{\theta}},\ \bar{H}_{\xi\zeta}(N)=\left(\begin{array}{c|c}\bar{\sigma}_\xi^2 & 0\\ \hline 0 & H_{\xi\zeta}(N)\end{array}\right),\ \bar{\Phi}^T\bar{\Phi}>0.$$

Аналогично (9) можно получить (для конечной выборки объёма N):

$$V_N(\lambda)=Z^TZ-\lambda\bar{\sigma}_\xi^2-\left(\Phi^TZ\right)^T\tilde{H}^{-1}\Phi^TZ,$$

$$\tilde{H}=\left(\begin{array}{c|c}\Phi_z^T\Phi_z & \Phi_z^T\Phi_w\\ \hline \Phi_w^T\Phi_z & \Phi_w^T\Phi_w-\lambda H_\zeta(N)\end{array}\right),$$

и $V_N(\lambda)=0$ имеет свойства, аналогичные $V(\lambda)=0.$ (11)

Однако нахождение корня $V_N(\lambda)=0$ можно записать в следующей форме: $\hat{\lambda}_1(N)=\lambda_{\min}(N)\left[\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\bar{H}_{\xi\zeta}\right]$ – минимальное характеристическое число пучка квадратичных форм, определяемых $\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}$ и $\bar{H}_{\xi\zeta}$. Однако $\bar{H}_{\xi\zeta}\geq 0$, поэтому рассмотрим [10]:

$$\lambda_{\min}(N)\left[\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}-\lambda\bar{H}_{\xi\zeta}\right]=\frac{1}{\lambda_{\max}(N)\left[\left(\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\right)^{-1}\bar{H}_{\xi\zeta}\right]}.$$

Известно [14], что

$$\frac{1}{N}\frac{1}{\lambda_{\max}(N)\left[\left(\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\right)^{-1}\bar{H}_{\xi\zeta}\right]}\xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}}\frac{1}{\lambda_{\max}\left[(\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\bar{\Phi}^T\bar{\Phi})^{-1}\bar{H}_{\xi\zeta}\right]}=\lambda_{\min}\left[\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\bar{\Phi}^T\bar{\Phi}\right)\bar{H}_{\xi\zeta}^{\;-1}\right].$$

Так как нахождение $\lambda_{\min}\left[\left(\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\overline{\Phi}^T\overline{\Phi}\right)\overline{H}_{\xi\zeta}{}^{-1}\right]$ можно представить как определение корня уравнения $V(\lambda)=0$, то $\frac{1}{N}\hat{\lambda}_1(N)\xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}}\lambda_1$

Далее неизвестные параметры можно определить из решения следующих линейных уравнений:

$$\tilde{H}\theta=\Phi^T Z. \tag{13}$$

Это уравнение получается аналогично уравнению (12), тогда, очевидно, получаем

$$\frac{1}{N}\tilde{H}\theta-\frac{1}{N}\Phi^T Z\xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{\text{П.Н.}}\left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zw} \\ \hline \left(H_{zw}\right)^T & H_{ww}-\lambda H_{\zeta}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} b \\ \hline a\end{array}\right)-H\left(\begin{array}{c} b_0 \\ \hline a_0\end{array}\right)=0.$$

Из единственности решений (11), (12) и последнего выражения следует [15], что

$$\hat{\theta}(N)\xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{П.Н.}\theta_0.$$

Заключение

В работе предложен критерий для оценивания параметров линейной ARX-системы с помехой наблюдения во входном сигнале. Доказана сильная состоятельность получаемых оценок. Полученные результаты могут послужить основой для создания новых высокоэффективных автоматизированных систем управления технологическими процессами. Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение алгоритмов идентификации при автокоррелированных помехах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. М. : Наука, 1991. 432 с.
2. *Кацюба О.А.* Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности. Самара : СамГУПС, 2008. 119 с.
3. *Иванов Д.В.* Рекуррентное оценивание параметров динамических систем. Модели с ошибками в переменных. Saarbrucken : LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, 2011. 136 с.
4. *Chetoui M., Malti R., Thomassin M., Aoun M., Najar S., Oustaloup A. and Abdelkrim M.N.* EIV methods for system identification with fractional models. Proc. 16th IFAC Symposium on System Identification (SYSID). Brussels, 2012. P. 1641–1646.
5. *Иванов Д.В.* Идентификация линейных динамических систем нецелого порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, № 5–2. С. 2534–2536.
6. *Ivanov D.V.* Identification discrete fractional order linear dynamic systems with output-error // Proceedings International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013). Krasnoyarsk: Siberian Federal University. Russia, Krasnoyarsk, September 12–13, 2013. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.
7. *Ivanov D.V.* Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013). Rostov-on-Don. Russia. September 27–30, 2013. P. 374–377.
8. *Иванов Д.В.*, *Кацюба О.А.* О состоятельности оценок параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Стохастическая оптимизация в информатике. 2013. Т. 1, № 2. С. 21–32.
9. *Иванов Д.В., Усков О.В.* Рекуррентное оценивание билинейных ARX-систем с помехой наблюдения в выходном сигнале // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4(25). С. 43–50.
10. *Кацюба О.А., Жданов А.И.* Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 86–90.
11. *Кацюба О.А., Жданов А.И.* Идентификация методом наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 29–38.
12. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. Т. 2. 810 с.
14. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М. : Наука, 1966. 575 с.
15. *Stoica P., Soderstrom T.* Bias correction in least–squares identification // Int. J. Control. 1982. V. 35, № 3. P. 449–457.

Иванов Дмитрий Владимирович, канд. физ.-мат. наук. E-mail: dvi85@mail.ru
Самарский государственный университет
путей сообщения (г. Самара) Поступила в редакцию 14 февраля 2014 г.

Ivanov Dmitriy V., (Samara State University of Transport, Samara, Russian Federation).
Estimation of parameters of linear fractional order ARX systems with noise in input signal.
Keywords: observation noise; fractional order difference; least square method.

The paper deals with the problem of parameter estimation of linear ARX systems with observation noise in the input signals, described by the equations

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i + \xi_i, \; w_i = x_i + \zeta_i,$$

where x_i and w_i are unobservable and observable input variables; z_i is the observable output variable; ξ_i is a noise; ζ_i is the noise observation of the input signal.

We proposed the criterion for estimating the parameters of linear fractional order ARX systems, which is a generalization of the method of least squares:

$$\min_{\theta \in \tilde{B}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - \varphi_i^T \theta\right)^2}{\bar{\sigma}_\xi^2 + a^T H_\zeta a},$$

where

$$\varphi_i = \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \,\vdots\, \left(\varphi_w^{(i)}\right)^T \right)^T, \; \varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_1}{j} z_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} z_{i-j-1} \right)^T,$$

$$\varphi_w^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_1}{j} w_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} w_{i-j} \right)^T, \; \theta_0 = \left(b_0^T \,\vdots\, a_0^T\right)^T, \; b_0 = \left(b_0^{(1)}, \ldots, b_0^{(r)}\right)^T, a_0 = \left(a_0^{(1)}, \ldots, a_0^{(r_1)}\right)^T,$$

$$\bar{\sigma}_\xi^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \xi_i^2,$$

$$H_\zeta = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} E\left[\sum_{i=1}^{N} \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T \right] = \begin{pmatrix} h_\zeta^{(11)} & \ldots & h_\zeta^{(r_1 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\zeta^{(1 r_1)} & \ldots & h_\zeta^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix},$$

$$h_\zeta^{(mn)} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} E \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_m}{j} \zeta_{i-j} \cdot \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_n}{j} \right) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_n}{j} \sigma_\zeta^2 (i-j), \; m = \overline{1, r_1}, \; n = \overline{1, r_1}.$$

It is proved that under non-restrictive conditions on the signal and noise, the proposed algorithm provides strongly consistent estimates. Note that there does not require knowledge of the laws of distribution of noise to obtain the strongly consistent estimates.
The results can be used to create new highly automated systems of control by technological processes.

REFERENCES

1. Ljung L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya* [System identification. Theory for the user]. Translated form English by A.S Mandel', A.V Nazin. Moscow: Nauka Publ., 1991. 432 p.
2. Katsyuba O.A. *Teoriya identifikatsii stokhasticheskikh dinamicheskikh sistem v usloviyakh neopredelennosti* [Identification theory of stochastic dynamical systems under uncertainty]. Samara: SSUT Publ., 2008. 119 p.
3. Ivanov D.V. *Rekurrentnoe otsenivanie parametrov dinamicheskikh sistem. Modeli s oshibkami v peremennykh* [Recursive parameter estimation of dynamic systems. Model with errors in variables]. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, 2011. 136 p.
4. Chetoui M., Malti R., Thomassin M., Aoun M., Najar S., Oustaloup A., Abdelkrim M.N. EIV methods for system identification with fractional models. *16th IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*. Brussels, 2012, pp. 1641-1646.
5. Ivanov D.V. Identifikatsiya lineynykh dinamicheskikh sistem netselogo poryadka s pomekhoy v vykhodnom signale [Identification of linear dynamic systems with non-integer order with noise in the output signal]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Ser.*

Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University reports. Series: Natural and Technical sciences, 2013, vol. 18, no. 5-2, pp. 2534-2536.
6. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with output-error. *Proceedings International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013)*. Krasnoyarsk: Siberian Federal University Publ. IEEE Catalog Number: CFP13794-CDR.
7. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables. *Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013)*, Rostov-on-Don, Russia, September 27-30. P. 374-377. (2013).
8. Ivanov D.V, Katsyuba O.A. On the consistency of the parameter estimates ARX-fractional order systems with noise in the output signal. *Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike – Stochastic Optimization in Informatics*, 2013, vol.1, no. 2, pp. 21-32. (In Russian).
9. Ivanov D.V., Uskov O.V. Recursive estimation of bilinear ARX systems with input-error. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2013, no. 4(25), pp. 43-50. (In Russian).
10. Katsyuba O.A., Zhdanov A.I. Osobennosti primeneniya MNK dlya otsenivaniya lineynykh raznostnykh operatorov v zadachakh identifikatsii ob"ektov upravleniya [Features of the application for the OLS estimation of linear difference operators in problems of identification of control objects]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1980, vol. 40, no. 8, pp. 86-90.
11. Katsyuba O.A., Zhdanov A.I. Identifikatsiya metodom naimen'shikh kvadratov parametrov uravneniy avtoregressii s additivnymi oshibkami izmereniy [Identification of the parameters of autoregression equations by the method of least squares in the case of additive measurement errors]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control,* 1982, vol. 43, no.2, pp. 158-166.
12. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications]. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987. 688 p.
13. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow: FIZMATLIT Publ., 2001. Vol. 2, 810 p.
14. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [The Theory of matrices]. Moscow: Nauka Publ., 2000. 575 p.
15. Stoica P., Soderstrom T. Bias correction in least – squares identification. *Int. J. Control*, 1982, vol. 35, no. 3, pp. 449-457. DOI: 10.1080/00207178208922631