ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 512.718 DOI 10.17223/20710410/64/1

КРИТЕРИЙ НЁТЕРОВОСТИ ПО УРАВНЕНИЯМ И СЛОЖНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

А. Ю. Никитин, И. Д. Кудык

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, г. Омск, Россия

E-mail: nikitinlexey@gmail.com, volume8091@mail.ru

Представлены результаты, касающиеся основной проблемы алгебраической геометрии над частично упорядоченными множествами с вычислительной точки зрения, а именно задачи разрешимости системы уравнений над частичным порядком. Задача разрешимости систем уравнений разрешима за полиномиальное время, если ориентированный граф, соответствующий частичному порядку, является приведённым интервальным орграфом, и является NP-полной, если основание ориентированного графа соответствующего частичного порядка является циклом длины не меньше 4. Получен также результат, характеризующий возможность перехода от бесконечных систем уравнений над частичным порядком к конечным системам. Алгебраические системы, обладающие указанным свойством, называются нётеровыми по уравнениям. Частично упорядоченное множество обладает свойством нётеровости по уравнениям тогда и только тогда, когда любые его верхние и нижние конусы с базой являются конечно определёнными.

Ключевые слова: *системы уравнений, вычислительная сложность, частично упорядоченное множество, нётеровость по уравнениям, конусы, разрешимость.*

CRITERION FOR EQUATIONAL NOETHERIANITY AND COMPLEXITY OF THE SOLVABILITY PROBLEM FOR SYSTEMS OF EQUATIONS OVER PARTIALLY ORDERED SETS

A. Yu. Nikitin, I. D. Kudyk

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Results are presented concerning the main problem of algebraic geometry over partially ordered sets from a computational point of view, namely, the solvability problem for systems of equations over a partial order. This problem is solvable in polynomial time if the directed graph corresponding to the partial order is a adjusted interval digraph, and is NP-complete if the base of the directed graph corresponding to the partial order is a cycle of length at least 4. We also present a result characterizing the possibility of transition from infinite systems of equations over partial orders to finite systems. Algebraic systems with this property are called equationally Noetherian. A partially ordered set is equationally Noetherian if and only if any of its upper and lower cones with base are finitely defined.

Keywords: *systems of equations, computational complexity, partially ordered set, poset, equationally Noetherian property, cones, solvability.*

Введение

Классическая алгебраическая геометрия изучает уравнения и системы уравнений над полями вещественных и комплексных чисел. Во второй половине XX века бурный рост переживает такое направление математики, как универсальная алгебраическая геометрия, которая изучает системы уравнений над произвольными алгебраическими системами. Общие закономерности для алгебраических систем выводятся на основе изучения различных алгебраических систем, таких, как свободные неабелевы группы, абелевы группы, разрешимые группы, метабелевы группы, полугруппы, решётки, графы и т. д. Данная работа посвящена вопросам алгебраической геометрии над частично упорядоченными множествами и представляет собой продолжение исследований алгебраической геометрии над алгебраическими системами без функциональных символов.

Системы уравнений бывают как конечные, так и бесконечные. Свойство нётеровости по уравнениям говорит о том, что можно из бесконечных систем уравнений выделить эквивалентные конечные подсистемы, оно характеризует «податливость» системы к изучению с точки зрения алгебраической геометрии. Если система обладает данным свойством, то из этого сразу же следует множество свойств, характеризующих конечность цепочек алгебраических конструкций над этой системой, таких, как убывающие цепочки алгебраических подмножеств, цепочки собственных эпиморфизмов координатных алгебр, обрыв возрастающих цепочек дизъюнктивных радикальных идеалов и т. д. [1]. Существуют алгебраические структуры, обладающие данным свойством как безусловно, так и при определённом условии (известны критерии нётеровости). В п. 1 данной работы приведены необходимые предварительные сведения. Пункт 2 посвящён формулировке критерия нётеровости по уравнениям для частично упорядоченных множеств (ЧУМ).

Для систем уравнений над алгебраическими системами существуют такие важные объекты, как координатная алгебра и радикал системы. Они определяют общее решение системы, если оно есть. Но перед тем, как решать систему уравнений и искать её общее решение, важно знать: разрешима ли эта система, имеет ли она решение в принципе? Этому вопросу посвящен п. 3, где показана связь ЧУМ с подклассом ориентированных графов и связь задачи разрешимости систем уравнений с подзадачей удовлетворения ограничений — задачей списочного гомоморфизма.

Использование частично упорядоченных множеств на практике широко распространено. С их помощью можно строить модели таких структур, как базы данных, потоки данных в сети, события во временных рядах и др., где требуется задание иерархии. Уравнения над частичными порядками задают некоторые подструктуры (подпорядки) в данных моделях. Поэтому изучение систем уравнений над частично упорядоченными множествами также важно и с практической точки зрения. Например, если задана модель компьютерных вычислений в качестве последовательно-параллельного частичного порядка, то через решение системы уравнений можно определять доступность одного вычисления для другого. Но по свойствам изначальной модели можно сразу понять: разрешимы ли системы за полиномиальное время или нет? И если нет, то модель вычислений можно менять так, чтобы системы решались эффективно по времени.

Теоремы 1, 5, 6 и леммы 1 и 2 доказаны А. Ю. Никитиным. Следствие 1 выведено И. Д. Кудыком.

1. Предварительные сведения

Дадим базовые определения теории решёток [2, 3] и универсальной алгебраической геометрии [1] и введём вспомогательные определения порождающих элементов конуса, конуса с базой, конечно порождённого и конечно определённого конуса, необходимые для формулировки результатов.

Частично упорядоченным множеством (*частичным порядком*) называется алгебраическая система $\mathcal{P} = \langle P; \{\leqslant^{(2)}, A\}\rangle$, где $\leqslant$ — предикатный символ отношения порядка и A — множество константных символов, на которой выполнены следующие три аксиомы:

1) $\forall p \in P\ p \leqslant p$ (рефлексивность);
2) $\forall p_1, p_2 \in P\ (p_1 \leqslant p_2 \wedge p_2 \leqslant p_1) \Rightarrow p_1 = p_2$ (антисимметричность);
3) $\forall p_1, p_2, p_3 \in P\ (p_1 \leqslant p_2 \wedge p_2 \leqslant p_3) \Rightarrow p_1 \leqslant p_3$ (транзитивность).

Язык (сигнатуру) частичных порядков с множеством константных символов A будем обозначать как L_A.

Для частично упорядоченного множества $\mathcal{P} = \langle P; \{\leqslant^{(2)}, A\}\rangle$ предикат частичного порядка $\leqslant^{(2)}$ задаёт соотношения для элементов носителя P. Множество таких соотношений обозначается $\leqslant^{\mathcal{P}}$. Если для элементов p_i, p_j частичного порядка $\mathcal{P}$ выражение $p_i \leqslant p_j$ выполнимо над $\mathcal{P}$, то это можно обозначить как $p_i \leqslant p_j \in \leqslant^{\mathcal{P}}$, или в терминах выполнимости как $\mathcal{P} \vDash p_i \leqslant p_j$.

Алгебраическая система называется *диофантовой*, если между носителем алгебраической системы и множеством её константных символов в языке существует взаимно однозначное соответствие.

Элементы x и y частичного порядка $\mathcal{P}$ называются *сравнимыми*, если в $\mathcal{P}$ либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. В противном случае, элементы называются *несравнимыми*, это обозначается как $x \not\sim y$ [3, с. 16]. Далее по тексту в некоторых местах удобно будет писать не $a \leqslant b$, а $b \geqslant a$, что означает одно и то же.

Для любого множества элементов A частичного порядка $\mathcal{P}$ определены множества $A^{\uparrow} = \{x \in \mathcal{P} : \forall a \in A\ a \leqslant x\}$ и $A^{\downarrow} = \{x \in \mathcal{P} : \forall a \in A\ x \leqslant a\}$. Эти множества называются *верхним* и *нижним конусами* множества A (или просто верхнее и нижнее множества A) [2, с. 90]. Для одноэлементного множества $A = \{a\}$ будем обозначать $a^{\uparrow}$ и $a^{\downarrow}$ соответственно.

Множеством *порождающих элементов* конуса $A^{\uparrow}$ ($A^{\downarrow}$) называется множество элементов B частичного порядка $\mathcal{P}$, для которого верно $B^{\uparrow} = A^{\uparrow}$ ($B^{\downarrow} = A^{\downarrow}$). Конус $A^{\uparrow}$ ($A^{\downarrow}$) называется *конечно порождённым*, если существует конечное множество B порождающих этого конуса.

Пусть задано множество элементов частичного порядка A. *Конусом с базой* называется пара $(A, A^{\uparrow})$, которая состоит из *базы* A и верхнего конуса $A^{\uparrow}$, порождённого базой A. Аналогично определяется нижний конус с базой. Верхний конус с базой $(A, A^{\uparrow})$ называется *конечно определённым*, если существует $B \subseteq A$, такое, что $|B| < \infty$ и $B^{\uparrow} = A^{\uparrow}$.

Термом в языке L от переменных X называется выражение, определенное рекурсивно следующим образом:

1) любая переменная $x \in X$ есть терм;
2) любая константа языка L есть терм;

3) если $t_1, \ldots, t_n$ — термы и $F^{(n)}$ — функциональный символ языка L, то $F(t_1, \ldots, t_n)$ является термом.

Через $T_L(X)$ обозначим множество всех термов языка L от переменных X.

Атомарной формулой языка L от переменных X называется выражение, определенное следующим образом:

1) для любых $t_i, t_j \in T_L(X)$ выражение $t_i = t_j$ является атомарной формулой;
2) для любого предикатного символа $R^{(n)}$ языка L и для любых термов $t_1, \ldots, t_n \in T_L(X)$ выражение $R(t_1, \ldots, t_n)$ является атомарной формулой.

Множество атомарных формул в языке L от переменных X обозначается $At_L(X)$. В алгебраической геометрии *уравнением* в языке L от переменных X называется атомарная формула в этом языке от переменных X. Произвольное множество уравнений из $At_L(X)$ называется *системой уравнений*. Дадим определение уравнения для частичных порядков.

Пусть $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество переменных и задан частичный порядок $\mathcal{P} = \langle P; \{\leqslant, A\}\rangle$. *Уравнением* в языке L_A частичного порядка $\mathcal{P}$ от переменных X_n называется одно из следующих выражений:

1) $a_i = a_j$, где $a_i, a_j \in A$;
2) $a_i \leqslant a_j$ (или $a_j \geqslant a_i$), где $a_i, a_j \in A$;
3) $x_i = a_j$, где $x_i \in X_n$, $a_j \in A$;
4) $x_i = x_j$, где $x_i, x_j \in X_n$;
5) $a_i \leqslant x_j$ (или $x_j \geqslant a_i$), где $x_j \in X_n$, $a_i \in A$;
6) $x_i \leqslant a_j$ (или $a_j \geqslant x_i$), где $x_i \in X_n$, $a_j \in A$;
7) $x_i \leqslant x_j$ (или $x_j \geqslant x_i$), где $x_i, x_j \in X_n$.

Для системы уравнений $S(X)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ в языке L_A от переменных X договоримся обозначать множество уравнений типа $a_i = a_j$, где $a_i, a_j \in A$, в системе уравнений $S(X)$ через $S_{a=a}$. Аналогично обозначаются остальные множества типов уравнений:

$$S_{a=a}, \quad S_{a\leqslant a}, \quad S_{x=a}, \quad S_{x=x}, \quad S_{a\leqslant x}, \quad S_{x\leqslant a}, \quad S_{x\leqslant x}. \tag{1}$$

Множество $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A\}$ называется *аффинным n-мерным пространством* над алгебраической системой $\mathcal{A}$, а его элементы — точками.

Точка $p = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ называется *корнем* (*решением*) уравнения $s \in At_L(X)$, если $\mathcal{A} \vDash s(a_1, \ldots, a_n)$. Точка p является решением системы уравнений $S \subseteq At_L(X)$, если она является решением для каждого уравнения из системы S.

Пусть S — система уравнений языка L_A от переменных X. Множество всех решений системы S в пространстве A^n обозначается через $V_{\mathcal{A}}(S)$ (или $V(S)$ для краткости) и определяется как $V_{\mathcal{A}}(S) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \forall s \in S\, \mathcal{A} \vDash s(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Система уравнений S называется *несовместной* над $\mathcal{A}$, если $V_{\mathcal{A}}(S) = \varnothing$; иначе она называется *совместной*. Две системы уравнений S_1 и S_2 называются *эквивалентными* над $\mathcal{A}$ (обозначается $S_1 \sim_{\mathcal{A}} S_2$), если $V_{\mathcal{A}}(S_1) = V_{\mathcal{A}}(S_2)$.

2. Критерий нётеровости по уравнениям

Сформулируем и докажем критерии свойств нётеровости по уравнениям и слабой нётеровости по уравнениям для частичных порядков.

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *слабо нётеровой по уравнениям*, если для любого конечного множества X и любой системы уравнений $S \subseteq At_L(X)$ существует такая конечная система S_0, что $V_{\mathcal{A}}(S) = V_{\mathcal{A}}(S_0)$. Если при этом $S_0 \subseteq S$, то алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется *нётеровой по уравнениям.*

Теорема 1. Частичный порядок $\mathcal{P}$ в языке L_A в диофантовом случае обладает свойством нётеровости по уравнениям тогда и только тогда, когда для любого подмножества B элементов частичного порядка $\mathcal{P}$ верхний и нижний конусы с базой B являются конечно определёнными.

Доказательство. Пусть для частичного порядка $\mathcal{P}$ любые конусы с базой являются конечно определёнными и задана система уравнений $S(X_n)$ над $\mathcal{P}$ в языке L_A от n переменных. Предположим, что эта система содержит все семь типов уравнений (1) и уравнений каждого типа бесконечное число.

Без ограничения общности считаем, что все различные константы в системе $S(X_n)$ имеют разные интерпретации на $\mathcal{P}$. Это условие не является обязательным, но упрощает дальнейшие строгие рассуждения и не влияет на суть доказательства.

Требуется доказать, что из системы $S(X_n)$ можно выбрать конечную подсистему $S'(X_n)$, эквивалентную $S(X_n)$. Множество решений системы $S(X_n)$ можно определить следующим образом: $V(S) = V(S_{a=a}) \cap V(S_{a\leqslant a}) \cap V(S_{x=a}) \cap V(S_{x=x}) \cap V(S_{x\leqslant a}) \cap \cap V(S_{a\leqslant x}) \cap V(S_{x\leqslant x})$. Покажем, что из подсистем каждого типа уравнений можно выбрать конечную подсистему, эквивалентную изначальной.

Сначала рассмотрим подсистему $S_{a=a} \subset S(X_n)$. Если это множество уравнений совместно над $\mathcal{P}$, то оно никак не влияет на множество решений системы уравнений $S(X_n)$ и определяется подсистема $S'_{a=a} = \varnothing$. Если $S_{a=a}$ несовместна над $\mathcal{P}$, то существует уравнение $a_i = a_j \in S_{a=a}$, которое не выполнено над частичным порядком $\mathcal{P}$, и это уравнение эквивалентно подсистеме $S_{a=a}$. Аналогичные рассуждения применимы к множеству уравнений $S_{a\leqslant a} \subset S(X_n)$.

Ввиду конечности множества переменных можно выбрать конечные подмножества уравнений $S'_{x=x}$ и $S'_{x\leqslant x}$, эквивалентных подсистемам $S_{x=x}$ и $S_{x\leqslant x}$ соответственно. Отметим, что системы $S_{x=x}$ и $S_{x\leqslant x}$ не могут быть несовместными.

Если множество уравнений $S_{x=a} \subset S(X_n)$ совместно, то, опять ввиду конечности множества переменных, существует конечная подсистема $S'_{x=a} \subset S_{x=a}$, эквивалентная $S_{x=a}$. Иначе в $S_{x=a}$ существует такая пара уравнений $x_i = a_j$, $x_i = a_k$, что $a_j \neq a_k$. Эта пара уравнений является эквивалентной $S_{x=a}$ подсистемой.

Пусть выделено подмножество уравнений $S_{x_i\leqslant a} \subset S_{x\leqslant a}$, в котором все уравнения зависят от переменной x_i. Это множество можно представить следующим образом: $S_{x_i\leqslant a} = \{x_i \leqslant a_j : j \in J,\ |J| = \infty\}$. Из этого представления видно, что $V(S_{x_i\leqslant a}) = A_i^{\downarrow}$, где $A_i = \{a_j : j \in J\}$. Пользуясь свойством, что любые конусы с базой частичного порядка $\mathcal{P}$ конечно определённые, можно выбрать такое конечное подмножество $J' \subset J$, что $A'_i = \{a_j : j \in J',\ |J'| < \infty\}$ и $(A'_i)^{\downarrow} = A_i^{\downarrow}$. Это означает, что можно выбрать конечную подсистему $S'_{x_i\leqslant a} \sim S_{x_i\leqslant a}$.

Применяя описанную процедуру для всех переменных из $S_{x\leqslant a}$, можно выделить конечную подсистему $S'_{x\leqslant a} \sim S_{x\leqslant a}$. Аналогичными рассуждениями можно вывести существование конечной подсистемы $S'_{a\leqslant x} \sim S_{a\leqslant x}$.

Таким образом, построены конечные подсистемы $S'_{a=a}$, $S'_{a\leqslant a}$, $S'_{x=a}$, $S'_{x=x}$, $S'_{a\leqslant x}$, $S'_{x\leqslant a}$ и $S'_{x\leqslant x}$, эквивалентные подсистемам $S_{a=a}$, $S_{a\leqslant a}$, $S_{x=a}$, $S_{x=x}$, $S_{a\leqslant x}$, $S_{x\leqslant a}$ и $S_{x\leqslant x}$ системы $S(X_n)$ соответственно. Это означает, что $V(S) = V(S'_{a=a}) \cap V(S'_{a\leqslant a}) \cap V(S'_{x=a}) \cap \cap V(S'_{x=x}) \cap V(S'_{x\leqslant a}) \cap V(S'_{a\leqslant x}) \cap V(S'_{x\leqslant x})$.

Теперь пусть частичный порядок $\mathcal{P}$ нётеров по уравнениям. Рассмотрим произвольное бесконечное множество элементов A частичного порядка $\mathcal{P}$. У него есть нижний конус $A^{\downarrow}$. Составим систему уравнений $S(x) = \{x \leqslant a_i : a_i \in A\}$ над $\mathcal{P}$. Ввиду того, что $\mathcal{P}$ нётеров по уравнениям, можно выбрать конечную подсистему $S'(x) = \{x \leqslant a_i : a_i \in A',\ |A'| < \infty\} \sim S(x)$. Это означает, что $A^{\downarrow} = A'^{\downarrow}$. Тем самым доказана конечная определённость нижнего конуса с базой для любого множества элементов A частичного порядка $\mathcal{P}$. Аналогично доказывается конечная определённость верхних конусов с базой. ■

Следует отметить, что если конус с базой B не является конечно определённым, то это не означает, что $B^{\uparrow}$ или $B^{\downarrow}$ не являются конечно порождёнными. Пример: пусть задан частичный порядок $\mathcal{P} = \mathbb{Z} \cup \{q\}$, где $\mathbb{Z}$ — линейный порядок на множестве целых чисел и q — единичный элемент, который не сравним ни с одним элементом из $\mathbb{Z}$. Фрагмент графа данного частичного порядка приведён на рис. 1.

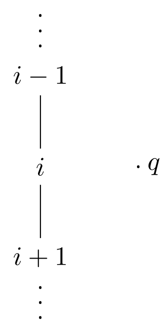

Рис. 1. Частичный порядок $\mathcal{P} = \mathbb{Z} \cup \{q\}$

Легко видеть, что $\mathbb{Z}^{\downarrow} = \varnothing$; для любого конечного подмножества $B \subset \mathbb{Z}$ верно $B^{\downarrow} \neq \varnothing$. Но если взять множество $C = \{0, q\}$, то $C^{\downarrow} = \varnothing = \mathbb{Z}^{\downarrow}$. Это означает, что $\mathbb{Z}^{\downarrow}$ является конечно порождённым.

Из этого примера и критерия нётеровости по уравнениям получаем следующее

Следствие 1. Частичный порядок $\mathcal{P}$ в языке L_A обладает свойством слабой нётеровости по уравнениям тогда и только тогда, когда для любого подмножества A элементов частичного порядка $\mathcal{P}$ конусы $B^{\uparrow}$ и $B^{\downarrow}$ являются конечно порождёнными.

3. Сложность проблемы разрешимости систем уравнений над частичными порядками

Сформулируем задачу разрешимости систем уравнений над частичными порядками и необходимые условия её полиномиальной разрешимости и NP-полноты. Для этого введём ряд определений [4] и переформулируем их с алгебраической точки зрения.

Граф $G = G(V)$ с множеством вершин V есть некоторое семейство сочетаний или пар вида $E = (a, b)$, $a, b \in V$, указывающее, какие вершины считаются соединёнными [4, с. 11].

Если рассматривать граф как алгебраическую систему, то можно сказать, что граф $G = \langle V; E \rangle$ — это алгебраическая система с множеством вершин V в качестве носителя и бинарным предикатным отношением E в языке, задающим множество рёбер в графе [1, с. 21]. Пара вершин $u, v \in V$, для которой выполнено $E(u, v)$, называется *ребром* графа G. Далее ребро будем обозначать (u, v). Если порядок вершин в ребре не существенен, то есть $(u, v) = (v, u)$, то такое ребро называется неориентированным или звеном. Если порядок существенен, то ребро называется ориентированным или *дугой*. Для дуги (u, v) вершина u является исходящей, а вершина v — входящей. Граф является неориентированным, если каждое его ребро неориентированное, и ориентированным, если все его ребра ориентированы. Если ребро графа имеет своё начало и конец в одной и той же вершине, то такое ребро называется *петлёй*.

Ориентированному графу G можно поставить в соответствие неориентированный граф $U(G)$, полученный из G путём замены дуг на неориентированные рёбра.

Далее будем использовать графы специального вида, которые имеют ключевую роль в работе [5]. Пусть задано множество интервалов $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Неориентированный граф $G = \langle V; E\rangle$ называется *интервальным*, если его множеству вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ соответствует множество интервалов $\mathcal{I}$ и $(v_i, v_j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $I_{v_i} \cap I_{v_j} \neq \varnothing$. Пусть теперь задана пара множеств интервалов $\{I_1, \ldots, I_n\}$ и $\{J_1, \ldots, J_n\}$. Ориентированный граф $G = \langle V; E\rangle$ называется *интервальным*, если каждой вершине v соответствует пара интервалов (I_v, J_v) и $(u, v) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $I_u \cap J_v \neq \varnothing$. Ориентированный интервальный граф называется *приведённым*, если для каждой вершины v интервалы I_v и J_v имеют общую левую точку. На рис. 2 представлен пример приведённого интервального ориентированного графа и его интервальная форма.

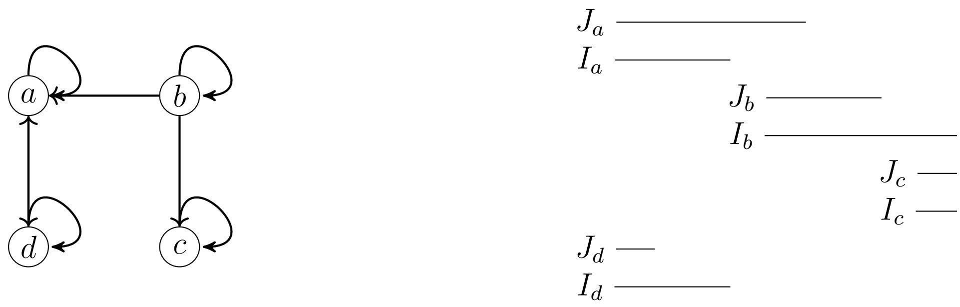

Рис. 2. Приведённый интервальный ориентированный граф и его интервальная форма

Пусть даны два графа H и G. *Гомоморфизмом* графа H в граф G называется такое отображение $\varphi : V(H) \to V(G)$, что для всех $u, v \in V(H)$ если $(u, v) \in E(H)$, то $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G)$.

Известна связь между частичными порядками и графами [4]. Пусть задан частичный порядок $\mathcal{P}$, ему соответствует граф $\Gamma_{\mathcal{P}}$, вершинам которого соответствуют элементы частичного порядка, и дуга (p_i, p_j) есть в графе $\Gamma_{\mathcal{P}}$, если и только если $p_j \leqslant p_i$. Граф $\Gamma_{\mathcal{P}}$ является рефлексивным, транзитивным, антисимметричным и ациклическим, если не рассматривать петли. Назовём граф, построенный по частичному порядку, *p-графом*.

Пусть дан диофантов частичный порядок $\mathcal{P}$ в языке L_A. Задача разрешимости системы уравнений $S(X_n)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ формулируется следующим образом: совместна ли система уравнений $S(X_n)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ в языке L_A? Будем обозначать данную задачу как $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$.

Задача разрешимости системы уравнений над частичным порядком тесно связана с задачей *списочного гомоморфизма* (list homomorphism problem) [5–8]. Некоторые авторы называют её задачей *списка H-раскраски* (list H-coloring problem). Она формулируется следующим образом: пусть заданы два графа G и H и для каждой вершины v графа G задано множество вершин $L(v) \subseteq V(H)$ графа H. Существует ли такой гомоморфизм $\varphi : G \to H$, что для каждой вершины $v \in V(G)$ вершина $\varphi(v)$ принадлежит заданному списку вершин $L(v)$? В задаче граф H фиксирован, а граф G и множества вершин $\{L(v_i) : L(v_i) \subseteq V(H),\ v_i \in V(G)\}$ являются входными параметрами. Задача списочного гомоморфизма для графа H обозначается L-HOM(H) [5].

В случае, когда для любой вершины $v \in V(G)$ список $L(v)$ равен всему множеству $V(H)$, задача L-HOM(H) является обычной задачей о гомоморфизме графов. В данной работе рассмотрена также задача RET(H), которая является задачей L-HOM(H), где для каждой вершины v входного графа G список $L(v)$ содержит либо одну вершину u графа H (для каждой v вершина u своя), либо равен множеству $V(H)$.

У задачи L-HOM(H) есть иерархия сложности, поэтому нужно показать, какое место в этой иерархии занимает задача Cons$(\mathcal{P})$. Приведём известные результаты.

Теорема 2 (T. Feder, P. Hell, and J. Hunag [5, Теорема 2.4, с. 6]). Пусть H — рефлексивный орграф, у которого $U(H)$ является циклом длины больше 3. Тогда задача RET(H) является NP-полной.

Теорема 3 (T. Feder, P. Hell, and J. Hunag [5, Следствие 3.8, с. 11]). Если H — рефлексивный приведённый интервальный орграф, то L-HOM(H) разрешима за полиномиальное время.

Поскольку RET(H) является подзадачей L-HOM(H), то видно, что L-HOM(H) не всегда полиномиально разрешима. Более того, существует условие, при котором задача L-HOM(H) является NP-полной.

Теорема 4 (P. Hell and A. Rafiey [7, Теорема 3.2, с. 6]). Пусть H — ориентированный граф. Если H содержит направленную астероидную тройку, то задача L-HOM(H) является NP-полной.

Направленная астероидная тройка — это достаточно сложный объект, определённый для ориентированных графов. Его полное определение дано в [7].

По данным результатам можно понять, что задача RET(H) тоже может быть полиномиально разрешима, если H удовлетворяет некоторым условиям, например если H — рефлексивное колесо, т. е. орграф, полученный присоединением вершины, которая доминирует над всеми остальными [5, с. 7].

Далее показано сведение задачи Cons$(\mathcal{P})$ к задаче L-HOM(H).

Лемма 1. Пусть задан диофантов частичный порядок $\mathcal{P}$ в языке L_A ($|A| = m$) и этому частичному порядку соответствует p-граф H. Задача Cons$(\mathcal{P})$ сводится к задаче L-HOM(H) за полиномиальное время.

Доказательство. Для диофантового случая частичного порядка $\mathcal{P}$ в языке L_A определим множество уравнений $\overline{S}_{a\leqslant a}$ всех отношений порядка между элементами носителя $\mathcal{P}$. Для доказательства леммы опишем алгоритм 1. Графы представляются матрицами смежности, уравнения кодируются тройками: первый аргумент, второй аргумент, предикат.

Необходимо показать, что решениям системы уравнений $S(X_n)$ над $\mathcal{P}$ взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмы из графа G в граф H, удовлетворяющие спискам L. Пусть для решения $p_i = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ задано отображение

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} h_{a_j}, & x = g_{a_j},\ g_{a_j} \in G_A, \\ h_{i_k}, & x = g_{i_k},\ k \in \{1, \ldots, n\},\ g_{i_k} \notin G_A. \end{cases}$$

Сначала нужно показать, что φ_i — это гомоморфизм, то есть

$$\forall g_r, g_s \in V(G)\big((g_r, g_s) \in E(G) \Rightarrow (\varphi_i(g_r), \varphi_i(g_s)) \in E(H)\big).$$

Так как константные символы $S(X_n)$ преобразуются по шагу 4 алгоритма 1 в вершины G_A и все их соотношения добавлены в систему на шаге 2, то можно выделить подграф $W(G_A, E)$ графа G, который изоморфен p-графу H, построенному на шаге 3 алгоритма. Поэтому

$$\forall g_{a_r}, g_{a_s} \in G_A\big((g_{a_r}, g_{a_s}) \in E(G) \Rightarrow (\varphi_i(g_{a_r}), \varphi_i(g_{a_s})) \in E(H)\big),$$

что обеспечивается построением φ_i.

Алгоритм 1. Сведение входа задачи $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ к L-HOM(H)

Вход: система уравнений $S(X_n)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ в языке L_A (вход для задачи $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$).

Выход: граф G со списками вершин L (вход для задачи L-HOM(H)).

1: Система уравнений $S(X_n)$ разбивается на семь непересекающихся подсистем уравнений (1). При этом уравнение $t_1 = t_2$ над $\mathcal{P}$, где t_1 и t_2 — термы, эквивалентно паре неравенств $t_1 \leqslant t_2$ и $t_2 \leqslant t_1$. Поэтому система $S(X_n)$ заменяется на эквивалентную ей систему уравнений $S'(X_n)$, содержащую только уравнения типов $S_{a\leqslant a}$, $S_{x\leqslant a}$, $S_{a\leqslant x}$ и $S_{x\leqslant x}$.

2: Если подсистема $S_{a\leqslant a}$ в $S'(X_n)$ совместна, то её можно исключить из рассмотрения, потому что она не влияет на разрешимость системы $S'(X_n)$. Если $S_{a\leqslant a}$ в $S'(X_n)$ несовместна, то: 1) система $S(X_n)$ несовместна; 2) в системе $S_{a\leqslant a}$ существует уравнение $a_i \leqslant a_j$, которое не верно над $\mathcal{P}$. Вводится система $S''(X_n) = S'(X_n) \cup \overline{S}_{a\leqslant a}$, эквивалентная системе $S(X_n)$.

3: По частичному порядку $\mathcal{P}$ строится p-граф H. Каждому элементу носителя $p_i \in \mathcal{P}$ ставится в соответствие вершина графа $h_i \in V(H)$. Если для $p_i, p_j \in \mathcal{P}$ верно $\mathcal{P} \vDash p_j \leqslant p_i$, то $(h_i, h_j) \in E(H)$. Так как рассматривается диофантов случай, то константные символы $a_i \in A$ также переходят в элемент h_i, как и p_i.

4: По системе $S''(X_n)$ строится граф G: вершинам графа G соответствуют переменные X_n и константы языка A; дуга (t_i, t_j) присутствует в графе G, если уравнение $t_j \leqslant t_i$ содержится в системе $S'(X_n)$, $t_i, t_j \in \{X_n \cup A\}$. Для вершин графа G, соответствующих константным символам A, вводится обозначение $G_A = \{g_{a_1}, \ldots, g_{a_m}\}$.

5: По подсистеме $S_{x\leqslant a} \cup S_{a\leqslant x}$ строятся списки вершин графа H. Для каждой переменной x_i в подсистеме выделяются те уравнения, которые зависят только от этой переменной: $S_{x_i\leqslant a} \cup S_{a\leqslant x_i}$. Далее из системы $S_{x_i\leqslant a}$ выбираются все константы (их множество обозначим $\overline{A}_{x_i}$). Аналогично выбирается множество $\underline{A}_{x_i}$ констант из $S_{a\leqslant x_i}$. Определяется множество констант $L(x_i) = \overline{A}^{\downarrow}_{x_i} \cap \underline{A}^{\uparrow}_{x_i}$. Если подсистема $S_{x_i\leqslant a}$ пустая, то $L(x_i) = A$; для всех констант $L(a_i) = \{a_i\}$.

6: Для списков элементов из шага 5 определяются списки вершин: для каждого $x \in X_n$ по шагу 4 определена вершина $v \in V(G)$ и списку $L(x) = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}\}$ соответствует список $L(v) = \{h_{i_1}, \ldots, h_{i_r}\} \subseteq V(H)$, где вершина h_{i_k} соответствует константе a_{i_k} из шага 3. Константным символам $a_i \in A$ соответствуют вершины $g_i \in G_A$ по шагу 4 и $L(g_i) = h_i$, где h_i соответствует константе a_i по шагу 3.

Далее пусть зафиксирован элемент $g_{i_k} \in V(G) \setminus G_A$ для решения $p_i = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ системы уравнений $S(X_n)$ и выбран произвольный элемент $g_l \in A$. Если $(g_{i_k}, g_l) \in E(G)$, то по шагу 4 алгоритма 1 вершина g_l соответствует элементу a_l, а вершина g_{i_k} — переменной x_k. Если $(g_{i_k}, g_l) \in E(G)$, то $x_k \leqslant a_l \in S(X_n)$. Для решения p_i переменной x_k соответствует элемент p_{i_k} и, следовательно, $\mathcal{P} \vDash p_{i_k} \leqslant p_l$. Из шага 3 алгоритма следует, что $(h_{i_k}, h_l) \in E(H)$. Но $\varphi_i(g_l) = h_l$ и $\varphi_i(g_{i_k}) = h_{i_k}$. Эти рассуждения верны для всех элементов из $V(G) \setminus G_A$. Тем самым показано, что

$$\forall g_r \in \{V(G) \setminus G_A\} \forall g_{a_s} \in G_A \big((g_r, g_{a_s}) \in E(G) \to (\varphi_i(g_r), \varphi_i(g_{a_s})) \in E(H)\big).$$

Аналогичными рассуждениями доказывается, что

$$\forall g_{a_r} \in G_A \forall g_s \in \{V(G) \setminus G_A\} \big((g_{a_r r}, g_s) \in E(G) \to (\varphi_i(g_{a_r}), \varphi_i(g_s)) \in E(H)\big);$$
$$\forall g_r, g_s \in \{V(G) \setminus G_A\} \big((g_r, g_{a_s}) \in E(G) \to (\varphi_i(g_r), \varphi_i(g_s)) \in E(H)\big).$$

Таким образом, отображение $\varphi_i : G \to H$ является гомоморфизмом.

Теперь нужно показать, что данный гомоморфизм удовлетворяет условиям списков $L(g)$ для графа G.

По шагам 5 и 6 видно, что $L(g_i) = h_i$ для всех $g_i \in G_A$. Так как $\varphi_i(g_i) = h_i$ для всех $g_i \in G_A$, то для всех элементов из G_A гомоморфизм φ_i удовлетворяет условиям списков.

Пусть $g_{i_k} \in \{V(G) \setminus G_A\}$ и $\varphi_i(g_{i_k}) = h_{i_k}$. Для него по шагам 5 и 6 определён список вершин $L(g_{i_k}) \subseteq V(H)$. В шаге 4 вершина g_{i_k} сопоставлена переменной x_k, которой соответствует список элементов $L(x_k)$ (шаг 5). Так как $p_i = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ — решение $S(X_n)$, то $a_{i_k} \in L(x_k)$. По шагу 6 это означает, что $h_{i_k} = \varphi_i(g_{i_k}) \in L(g_{i_k})$, т. е. φ_i удовлетворяет условиям списков вершин.

Таким образом, каждое решение системы уравнений $p_i = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ определяет гомоморфизм φ_i, удовлетворяющий попаданию в списки вершин.

Для взаимно однозначного соответствия осталось показать, что других гомоморфизмов, удовлетворяющих спискам, не существует.

Пусть есть гомоморфизм $\psi : G \to H$, который удовлетворяет спискам вершин, полученным по алгоритму, но не соответствует ни одному из решений. Так как ψ удовлетворяет всем спискам, то он удовлетворяет и всем спискам для $g \in G_A$, то есть сохраняется изоморфность H и подграфа G. Если система уравнений несовместна из-за уравнений в $S_{a \leqslant a}$, то гомоморфизм $G \to H$ нельзя составить так, чтобы он удовлетворял спискам для G_A.

Пусть выделен некоторый элемент $g_i \in V(G) \setminus G_A$ и $\psi(g_i) = h_j$. Из алгоритма 1 видно, что переменная x_i соответствует вершине g_i, а элемент и константа (p_j и a_j) частичного порядка $\mathcal{P}$ — вершине h_j. Так как $h_j \in L(g_i)$, то $a_j \in L(x_i)$ по шагам 5 и 6 алгоритма. Аналогичную процедуру можно проделать по остальным элементам из $V(G) \setminus G_A$ и получить значения $\overline{a} = (a_{\alpha_1}, \ldots, a_{\alpha_n})$ для всех переменных X_n.

В системе уравнений четыре вида подсистем: $S_{a \leqslant a}$, $S_{x \leqslant a}$, $S_{a \leqslant x}$ и $S_{x \leqslant x}$. Как уже отмечалось, $S_{a \leqslant a}$ непротиворечива, иначе ψ не гомоморфизм. Подсистемы $S_{x \leqslant a}$ и $S_{a \leqslant x}$ не могут быть противоречивыми при подстановке значений из $\overline{a}$, так как они удовлетворяют всем спискам вершин, которые составляются по данным уравнениям на шаге 5. Значит, при подстановке значений $\overline{a}$ в систему $S_{x \leqslant x}$ получаются неверные над $\mathcal{P}$ выражения. Пусть таким выражением будет $a_k \leqslant a_l$, соответствующее уравнению $x_i \leqslant x_j$, т. е. $\mathcal{P} \nvDash p_k \leqslant p_l$. Вершины h_k, h_l являются образами вершин g_i, g_j, соответствующих переменным x_i, x_j. По алгоритму 1 переменные x_i, x_j преобразуются в вершины $g_i, g_j \in \{V(G) \setminus G_A\}$ и между ними есть дуга $(g_j, g_i) \in E(G)$. Так как ψ — гомоморфизм, то $(\psi(g_j), \psi(g_i)) = (h_l, h_k) \in E(H)$. Но так как $\mathcal{P} \nvDash p_k \leqslant p_l$, то дуги (h_l, h_k) в H быть не может. Противоречие. Тем самым доказано, что решения системы уравнений взаимно однозначно определяют гомоморфизмы между графами, удовлетворяющие спискам.

Алгоритм сведения задач является полиномиальным по числу элементов частичного порядка (m) и количеству переменных в системе уравнений (n). Первый шаг алгоритма — замена подсистем $S_{a=a}$, $S_{x=a}$ и $S_{x=x}$ на $S_{a\leqslant a}$, $S_{x\leqslant a}$, $S_{a\leqslant x}$ и $S_{x\leqslant x}$ — увеличивает количество уравнений не более чем вдвое. Следующий шаг — проверка совместности подсистемы $S_{a\leqslant a}$; проверяется совместность не более m^2 уравнений. Построение p-графа H по частичному порядку $\mathcal{P}$ представляет собой копирование матрицы смежности. Для получения графа G строится матрица смежности с $(n+m)$ вершинами и не более чем $(n+m)^2$ дугами. Наконец, построение списков вершин — это поиск пересечений конусов. Для элемента частичного порядка a построение $a^{\uparrow}$ и $a^{\downarrow}$ происходит путём сравнения элемента a со всеми элементами частичного порядка. Поэтому трудоёмкость данной операции оценивается как $O(m)$. Построение $A^{\uparrow}_{x_i}$ произвольного подмножества элементов частичного порядка проходит так, что сначала строится $a^{\uparrow}$ для любого элемента $a \in A_{x_i}$. Далее остальные элементы из A_{x_i} сравниваются с $a^{\uparrow}$. Сложность этой процедуры можно оценить как $O(m^2)$. Необходимо построить n таких множеств. Следовательно, алгоритм сведения задачи $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ к задаче L-HOM(H) является полиномиальным по числу элементов частичного порядка и числу переменных в системе уравнений и имеет трудоёмкость $O(n^2 + nm^2 + m^2)$. ■

Следует отметить, что задачу L-HOM(H) нельзя свести к задаче $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$: задача L-HOM$(H)$ шире, чем задача $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$. Например, на рис. 3 показана диаграмма Хассе частичного порядка $\mathcal{M}$. Рассмотрим все возможные конусы:

1) $\varnothing^{\downarrow} = \varnothing^{\uparrow} = a_1^{\downarrow} = a_3^{\uparrow} = \{a_1, a_2, a_3\}$;
2) $a_2^{\uparrow} = \{a_2, a_3\}^{\uparrow} = \{a_1, a_2\}$;
3) $a_2^{\downarrow} = \{a_1, a_2\}^{\downarrow} = \{a_2, a_3\}$;
4) $\{a_1, a_2\}^{\uparrow} = \{a_1, a_3\}^{\uparrow} = \{a_1, a_2, a_3\}^{\uparrow} = \{a_1\}$;
5) $\{a_2, a_3\}^{\downarrow} = \{a_1, a_3\}^{\downarrow} = \{a_1, a_2, a_3\}^{\downarrow} = \{a_3\}$.

Если задать список $L(v) = \{a_1, a_3\}$, то видно, что никакое пересечение из всевозможных конусов не даст множество элементов $\{a_1, a_3\}$. А так как списки элементов формируются по системам уравнений $S_{x\leqslant a}$ и $S_{a\leqslant x}$, то и ни по какой системе уравнений нельзя составить указанный список элементов.

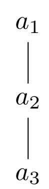

Рис. 3. Частичный порядок $\mathcal{M}$

Теорема 5. Пусть $\mathcal{P}$ — частичный порядок и H — соответствующий этому частичному порядку p-граф. Тогда если H — приведённый интервальный орграф, то задача $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ разрешима за полиномиальное время.

Доказательство. По лемме 1 задача $\mathrm{Cons}(P)$ полиномиально сводится к задаче L-HOM(H), где H — рефлексивный ацикличный транзитивный ориентированный граф. Рефлексивные ацикличные транзитивные орграфы являются подклассом рефлексивных орграфов. Поэтому по теореме 3 задача L-HOM(H) разрешима за полиномиальное время, если H — приведённый интервальный орграф. ■

Можно отметить случай, в котором частичный порядок $\mathcal{P}$ задан в языке L без констант. Тогда $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ решается тривиально. Любая система уравнений $S(X_n)$ над $\mathcal{P}$ состоит из уравнений двух типов: $S_{x=x}$ и $S_{x\leqslant x}$. Следовательно, решениями данной системы будут точки вида $P_i = (p_i, \ldots, p_i)$, $p_i \in \mathcal{P}$.

Что касается задачи $\mathrm{RET}(H)$, то её можно свести к задаче $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ для p-графов H.

Лемма 2. Пусть задан p-граф H и ему соответствует частичный порядок $\mathcal{P}$ в языке L_A. Задача $\mathrm{RET}(H)$ сводится к задаче $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ за полиномиальное время.

Доказательство. Для сведения построим по графам G, H и спискам $L(v)$ систему уравнений $S(X_n)$ и частичный порядок $\mathcal{P}$.

Дано: p-граф G и списки вершин $L(v) \in V(H)$, $v \in V(G)$ (вход для задачи $\mathrm{RET}(H)$). Нужно построить систему уравнений $S(X_n)$ над частичным порядком $\mathcal{P}$ в языке L_A (вход для задачи $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$).

По p-графу H получим частичный порядок $\mathcal{P}$ стандартным образом.

Пусть в графе G всего n вершин. По графу G строится система уравнений $S_{x\leqslant x}$ следующим образом: вершинам графа G ставятся в соответствие переменные X_n; если в графе G присутствует дуга (g_i, g_j), то в систему добавляется уравнение $x_i \geqslant x_j$. По спискам $L(v)$ строится множество уравнений $S_{x=a}$: если для вершины g_i графа G список $L(g_i) = \{h_j\}$, то в систему добавляется уравнение $x_i = a_j$, где x_i соответствует вершине g_i, а константа a_j — вершине h_j. Если $L(g_i) = V(H)$, то никакие уравнения в систему не добавляются. Система $S(X_n)$ представляет собой объединение $S_{x\leqslant x} \cup S_{x=a}$.

Аналогично сведению задачи $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ к задаче $\text{L-HOM}(H)$ в лемме 1 можно показать соответствие гомоморфизмов между графом G со списками L и графом H и решениями системы $S(X_n)$ над $\mathcal{P}$ в языке L_A.

Полиномиальность сведения (по числу вершин графов $|V(G)| = n$ и $|V(H)| = m$) заключается в том, что построение частичного порядка $\mathcal{P}$ по графу H является копированием матрицы смежности и имеет трудоёмкость $O(m)$. Построение системы уравнений $S(X_n)$ не превосходит по сложности $O(n^2)$, так как построение $S_{x\leqslant x}$ оценивается порядком числа дуг графа G, а построение системы $S_{x=a}$ — количеством вершин графа G (это множество уравнений определяется по спискам $L(v)$). Итого, трудоёмкость сведения оценивается как $O(n^2 + m)$. ■

Теорема 6. Пусть задан конечный частичный порядок $\mathcal{P}$. Если для соответствующего ему p-графа H граф $U(H)$ является циклом длины больше 3, то задача $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ является NP-полной.

Доказательство. По лемме 2 задача $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ полиномиально сводится к задаче $\mathrm{RET}(H)$, где H — рефлексивный ацикличный транзитивный ориентированный граф. Рефлексивные ацикличные транзитивные орграфы являются подклассом рефлексивных орграфов. Поэтому по теореме 2 задача $\text{L-HOM}(H)$ является NP-полной, если $U(H)$ является циклом длины больше 3. ■

Такие частичные порядки существуют. Один из них представлен на рис. 4.

Таким образом, показано, что для задачи $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ область значений переменных определяется пересечением конусов в частичном порядке $\mathcal{P}$, в отличие от произвольного случая задания списков в задаче $\text{L-HOM}(H)$ и дуальностью задания списков в задаче $\mathrm{RET}(H)$. Задача $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ может быть как полиномиально разрешимой, так и NP-полной, в зависимости от частичного порядка $\mathcal{P}$. Необходимые условия для удовлетворения данных свойств получены в теоремах 5 и 6.

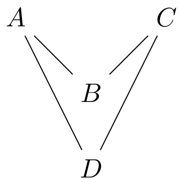

Рис. 4. Частичный порядок $\mathcal{P}$, у которого граф $U(H)$ является циклом длины 4

Заключение

Сформулирован критерий нётеровости по уравнениям для частично упорядоченных множеств и даны необходимые условия для полиномиальной разрешимости и NP-полноты задачи разрешимости системы уравнений над частично упорядоченными множествами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 243 с.
2. *Гуров С. И.* Булевы алгебры, упорядоченные множества, решетки: Определения, свойства, примеры. М.: Либроком, 2013. 221 с.
3. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
4. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980. 380 с.
5. *Feder T., Hell P., Hunag J., and Rafiey A.* Interval graphs, adjusted interval digraphs, and reflexive list homomorphism // Discr. Appl. Math. 2012. V. 160. Iss. 6. P. 697–707.
6. *Feder T., Hell P., and Hunag J.* List Homomorphisms and Retractions to Reflexive Digraphs. `http://theory.stanford.edu/~tomas/ref.pdf`. 2007. 26 p.
7. *Hell P. and Rafiey A.* The Dichotomy of List Homomorphisms for Digraphs. `http://arxiv.org/abs/1004.2908`. 2010.
8. *Feder T. and Hell P.* List homomorphisms to reflexive graphs // J. Combinatorial Theory. 1998. V. 72. No. 2. P. 236–250.

REFERENCES

1. *Daniyarova E. Yu., Myasnikov A. G., and Remeslennikov V. N.* Algebraicheskaya geometriya nad algebraicheskimi sistemami [Algebraic Geometry over Algebraic Systems]. Novosibirsk, SB RAS Publ., 2016. 243 p. (in Russian)
2. *Gurov S. I.* Bulevy algebry, uporyadochennye mnozhestva, reshetki: Opredeleniya, svoystva, primery [Boolean Algebras, Ordered Sets, Lattices: Definitions, Properties, Examples]. Moscow, Librocom Publ., 2013. 221 p. (in Russian)
3. *Grätzer G.* General Lattice Theory. Basel, Birkhäuser Verlag, 1978.
4. *Ore O.* Theory of Graphs. AMS, 1965. 270 p.
5. *Feder T., Hell P., Hunag J., and Rafiey A.* Interval graphs, adjusted interval digraphs, and reflexive list homomorphism. Discr. Appl. Math., 2012, vol. 160, iss. 6, pp. 697–707.
6. *Feder T., Hell P., and Hunag J.* List Homomorphisms and Retractions to Reflexive Digraphs. `http://theory.stanford.edu/~tomas/ref.pdf`, 2007. 26 p.
7. *Hell P. and Rafiey A.* The Dichotomy of List Homomorphisms for Digraphs. `http://arxiv.org/abs/1004.2908`, 2010
8. *Feder T. and Hell P.* List homomorphisms to reflexive graphs. J. Combinatorial Theory, 1998, vol. 72, no. 2, pp. 236–250.