УДК 512.532 DOI 10.17223/20710410/64/2

СОПОСТАВЛЕНИЕ СВОЙСТВ ВНЕШНЕПЛАНАРНОСТИ И ОБОБЩЁННОЙ ВНЕШНЕПЛАНАРНОСТИ ГРАФОВ КЭЛИ ПЛАНАРНЫХ ПОЛУГРУПП

Д. В. Соломатин

Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

E-mail: solomatin_dv@omgpu.ru

Найдены две бесконечные серии полугрупп, свойство внешнепланарности графов Кэли в которых эквивалентно свойству обобщённой внешнепланарности их графов Кэли, но не эквивалентно свойству планарности, и одна бесконечная серия полугрупп, свойство обобщённой внешнепланарности графов Кэли которых эквивалентно свойству планарности их графов Кэли, но не эквивалентно внешнепланарности. Доказано, что граф Кэли конечной полугруппы не изоморфен ни одному из запрещённых подграфов Седлачека, взятых с любой ориентацией и раскраской рёбер, по характеристическому свойству обобщённой внешнепланарности.

Ключевые слова: *графы Чартрэнда — Харари, графы Седлачека, полугруппы с планарными графами Кэли.*

COMPARISON OF OUTERPLANARITY AND GENERALIZED OUTERPLANARITY PROPERTIES FOR CAYLEY GRAPHS OF PLANAR SEMIGROUPS

D. V. Solomatin

Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

We have found two infinite series of semigroups whose Cayley graphs have an outerplanarity property equivalent to the generalized outerplanarity property of their Cayley graphs, but not equivalent to the planarity property, and one infinite series of semigroups whose Cayley graphs have a generalized outerplanarity property equivalent to the planarity property of their Cayley graphs, but not equivalent to outerplanarity. It is proved that the Cayley graph of a finite semigroup is not isomorphic to any of the forbidden Sedláček's subgraphs by the characteristic property of generalized outer planarity with any orientation and edge coloring.

Keywords: *Chartrand — Harari graphs, Sedláček graphs, semigroups with planar Cayley graphs.*

Введение

Внешнепланарные графы, как связные графы, имеющие не менее трёх вершин, которые можно вложить в плоскость так, чтобы все вершины лежали во внешней грани, введены Г. Чартрэндом и Ф. Харари [1] при решении вопросов планарности графов, образованных совершенными паросочетаниями, связывающими две копии одного графа.

Дальнейшее обобщение внешнепланарных графов развивалось в разных направлениях, исторически первым было предложенное в [2] И. Седлачеком рассмотрение таких планарных графов, каждое ребро которых принадлежит внешней грани хотя бы одной из своих вершин.

В цифровую эпоху внешнепланарные графы находят применение в информатике, особенно в областях, связанных с сетевыми структурами и химической информатикой, а именно: внешнепланарные графы используют для описания отношений в сетевых структурах, так как они представляют собой подмножество плоских и круговых графов; они могут применяться для моделирования связности, сбора данных, маршрутизации, мобильности, энергоэффективности, управления топологией, анализа трафика, поиска кратчайших путей и балансировки нагрузки. Приложения в хемоинформатике ещё шире, так как многие химические соединения можно описать с помощью внешнепланарных графов. Например, в [3] описан полиномиальный алгоритм, который вычисляет максимальный общий подграф между двумя внешнепланарными графами, он оказался полезен для решения задач прогнозирования в обозначенной сфере. Способность внешнепланарных графов представлять сложные отношения визуально-интуитивным образом делает их ценным инструментом в различных областях дискретной математики. Планарные графы, в свою очередь, находят приложения при проектировании микросхем. Известно также применение частично коммутативных полугрупп при анализе возможности распараллеливания алгоритмов и программ.

В обзоре [4] анализируются вопросы внешнепланарности графов Кэли полугрупп, среди прочего — в классах частично коммутативных полугрупп, конечных свободных коммутативных полугрупп, моноидов и полугрупп с нулём, связанные с возможностью их обобщения. В разных классах полугрупп нередко возникают такие ситуации, что полугруппа допускает обобщённый внешнепланарный, но не допускает внешнепланарный граф Кэли [5]. Очевидны примеры полугрупп, в которых свойство планарности графов Кэли эквивалентно свойству внешнепланарности и свойству обобщённой внешнепланарности, такими среди прочих являются полугруппы с нулевым умножением. В работе приведены несколько классов полугрупп, для которых свойство графа Кэли быть обобщённым внешнепланарным эквивалентно лишь его внешнепланарности либо лишь его планарности.

1. Предварительные сведения

Приведём определения ключевых понятий. *Графом Кэли полугруппы* S относительно множества образующих её элементов X называем ориентированный мультиграф $\mathrm{Cay}(S,X) = (S, \{(a,x,b) : a,b \in S, x \in X, ax = b\})$ с помеченными дугами. Дуга (a,x,b) начинается в вершине $a \in S$, заканчивается в вершине $b \in S$ и помечена элементом $x \in X$ тогда и только тогда, когда в полугруппе S выполнено равенство $ax = b$.

Граф называется *внешнепланарным*, если он изоморфен плоскому графу, каждая вершина плоской укладки которого принадлежит внешней грани. Граф называется *обобщённым внешнепланарным*, если он изоморфен плоскому графу, каждое ребро плоской укладки которого принадлежит внешней грани хотя бы одной из своих вершин. Говорим, что *полугруппа* S *допускает* (*обобщённый*) *внешнепланарный граф Кэли*, если относительно некоторого множества образующих X *основа* $\mathrm{SCay}(S,X) = \big(S, \{\{a,b\} : a,b \in S, \exists x \in X\,(ax = b)\}\big)$ графа $\mathrm{Cay}(S,X)$, полученная из исходного путём удаления петель, меток и заменой всех дуг вида (a,x,b) и (b,y,a) для $a,b \in S$ и $x,y \in X$ одним ребром $\{a,b\}$, является (обобщённым) внешнепланарным графом.

Согласно критерию Седлачека, граф является обобщённым внешнепланарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к запрещённым графам Седлачека G_1–G_{12}. Для сравнения, согласно критерию Чартрэндта — Харари, граф внешнепланарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных графам Чартрэнда — Харари, $K_{2,3}$ или K_4.

2. Основной результат

В [6] доказано, что нециклическая полугруппа S с одним определяющим соотношением, допускающая полугрупповое тождество, имеет планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда S антиизоморфна одной из полугрупп: $S_1 = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$, $S_{2,k} = \left\langle a, b \mid ab = b^k \right\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba \rangle$, $S_4 = \langle a, b \mid aba = b \rangle$, $S_5 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$, $S_6 = \langle a, b \mid aba^2 = ba \rangle$; или изоморфна одной из полугрупп: S_1, $S_{2,1}$, S_4, S_5. Заметим, что в силу [7] полугруппы S_1, $S_{2,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, S_3, S_4, S_5 и S_6 — это все возможные полугруппы, которым может быть изоморфна или антиизоморфна нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением, допускающая полугрупповое тождество. Как оказалось, полугруппа S с одним определяющим соотношением и с тождеством допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли.

Теорема 1. Если S — это нециклическая полугруппа с единственным определяющим соотношением, допускающая полугрупповое тождество, то следующие условия эквивалентны:

1) полугруппа S допускает внешнепланарный граф Кэли;
2) полугруппа S допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли;
3) полугруппа S антиизоморфна одной из полугрупп: $S_{2,k} = \left\langle a, b \mid ab = b^k \right\rangle$, где $k \leqslant 3$; $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba \rangle$; или изоморфна полугруппе $S_{2,1} = \langle a, b \mid ab = b \rangle$.

Доказательство. В [8, теорема 5.1] доказано, что нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением и с тождеством допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она антиизоморфна одной из полугрупп $S_{2,k} = \left\langle a, b \mid ab = b^k \right\rangle$, где $k \leqslant 3$, или $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba \rangle$; или изоморфна полугруппе $S_{2,1} = \langle a, b \mid ab = b \rangle$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно выполнить дополнительную проверку допустимости обобщённого внешнепланарного графа Кэли перечисленных в [6] полугрупп, допускающих планарные графы Кэли.

Наличие обобщённой внешнеплоской укладки представлено в [8] на рис. 5.1.1 и 5.1.2 для $1 \leqslant k \leqslant 3$ и на рис. 5.1.3. Отсутствие обобщённой внешнеплоской укладки в оставшихся случаях рассматриваемых полугрупп с плоскими графами Кэли обосновывается наличием в основе их графа Кэли подграфов, стягиваемых к первому из графов Седлачека, G_1 в обозначениях из [9]. Более точно, для полугруппы, изоморфной или антиизоморфной S_1 или изоморфной S_4, наличие подграфа, стягиваемого к G_1 в основе, обеспечивается существованием трёх непересекающихся маршрутов от вершины a^2 до вершины a^2b^3, которым принадлежат вершины следующих множеств: $\{a^2, a, ab, ab^2, ab^3, a^2b^3\}$, $\{a^2, a^2b, a^2b^2, a^2b^3\}$, $\{a^2, a^3, a^3b, a^3b^2, a^3b^3, a^2b^3\}$. Для полугруппы, антиизоморфной $S_{2,k}$ при $k \geqslant 4$, наличие подграфа, стягиваемого к G_1 в основе, обеспечивается существованием трёх непересекающихся маршрутов от вершины $b^{2k-1}a$ до вершины b^2a (рис. 1). Здесь пунктиром изображён фрагмент маршрута, полученный последовательным умножением на b слева $(k-3)$ раза с учётом того, что для любого натурального числа n имеет место равенство $ab^na = abb^{n-1}a = b^kb^{n-1}a = b^{n+k-1}a$, которое используется при умножении на a слева.

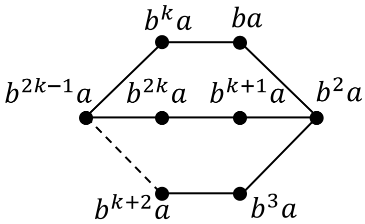

Рис. 1. Подграф основы графа Кэли полугруппы, антиизоморфной $S_{2,k} = \langle a, b \mid ab = b^k \rangle$, при $k \geqslant 4$ стягиваемый к первому графу Седлачека

В основе графа Кэли полугруппы, изоморфной S_5, обнаруживается подграф, стягиваемый к G_1 и состоящий из трёх непересекающихся маршрутов от вершины ba до a^5, восстанавливаемых на вершинах следующих множеств: $\{ba, bab, b^3a, b^5, a^6, a^5\}$, $\{ba, b^3, a^4, a^5\}$, $\{ba, b, a^2, a^3, a^3b, a^5\}$.

В основе графа Кэли полугруппы, антиизоморфной S_4, обнаруживается подграф, стягиваемый к G_1 и состоящий из трёх непересекающихся маршрутов от вершины b^2a^2 до bab, восстанавливаемых на вершинах следующих множеств: $\{b^2a^2, ba^2, ba, b, ab, bab\}$, $\{b^2a^2, b^2a, b^2, bab\}$, $\{b^2a^2, b^3a^2, b^3a, b^3, ab^3, bab\}$. Отметим попутно, что на соответствующем данной полугруппе рис. 11 в [6] содержится типографская неточность, вместо вершины ba следует читать bab.

В основе графа Кэли полугруппы, антиизоморфной S_5, обнаруживается подграф, стягиваемый к G_1 и состоящий из трёх непересекающихся маршрутов от вершины ab до a^5, восстанавливаемых на вершинах следующих множеств: $\{ab, bab, ab^3, b^5, a^6, a^5\}$, $\{ab, b^3, a^4, a^5\}$, $\{ab, b, a^2, a^3, ba^3, a^5\}$.

И наконец, в основе графа Кэли полугруппы, антиизоморфной S_6, обнаруживается подграф, стягиваемый к G_1 и состоящий из трёх непересекающихся маршрутов от вершины ba^4 до ba, восстанавливаемых на вершинах следующих множеств: $\{ba^4, a^4, a^3, a^2, a, ba\}$, $\{ba^4, ba^3, ba^2, ba\}$, $\{ba^4, b^2a^4, b^2a^3, b^2a^2, b^2a, ba\}$. Следовательно, графы Кэли полугрупп, допускающих планарные графы Кэли, но не удовлетворяющих условиям теоремы, не являются обобщёнными внешнепланарными. ■

Найти информацию о частично коммутативных полугруппах, необходимую для понимания следующей теоремы, можно в [10].

Теорема 2. Если $S(\Gamma)$ — это частично коммутативная свободная полугруппа, соответствующая графу коммутативности Γ множества образующих её элементов, то следующие условия эквивалентны:

1) полугруппа $S(\Gamma)$ допускает внешнепланарный граф Кэли;
2) полугруппа $S(\Gamma)$ допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли;
3) степень любой вершины в графе Γ равна нулю, то есть полугруппа $S(\Gamma)$ антикоммутативная.

Доказательство. Пусть V_Γ — множество вершин графа Γ. Тогда, как показано в [8, рис. 6.1.1], при наличии хотя бы одной пары коммутирующих элементов в множестве образующих основа графа Кэли содержит три попарно непересекающихся маршрута, восстанавливаемых на следующих множествах вершин: $\{sa^3b^2, sa^3b, sa^2b, sab, sb, sb^2\}$, $\{sa^3b^2, sa^2b^2, sab^2, sb^2\}$, $\{sa^3b^2, sa^3b^3, sa^2b^3, sab^3, sb^3, sb^2\}$, где s — слово из букв алфавита V_Γ, возможно пустое, завершающееся элементом, не коммутирующим с коммутирующими между собой a и b. Следовательно, основа графа Кэли такой полугруппы содержит подграф, стягиваемый к первому графу Седлачека G_1. Поэтому полугруппа $S(\Gamma)$ допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли или допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $S(\Gamma)$ некоммутативная. ■

Для полноты картины приведём ещё один результат, в классе n-веерных полурешёток описывающий полугруппы, свойство обобщённой внешнепланарности графа Кэли которых эквивалентно свойству его планарности.

Теорема 3. Если $S = S_k^n$ — это n-веерная полурешётка, то следующие условия эквивалентны:

1) полугруппа S допускает планарный граф Кэли;
2) полугруппа S допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли;
3) $\left|S^{(2)}\right| \leqslant 3$, где $S^{(2)}$ — множество всех ненулевых слов полугруппы S вида $a_i a_j$, $i \neq j$.

Доказательство. Характеристическому свойству планарности графа Кэли полугрупп S_k^n, доказанному в [10], удовлетворяют только S_k^1 (тогда основу графа Кэли формирует пустой граф первого порядка при любом $k \geqslant 1$), S_k^2 (тогда основу графа Кэли формирует звезда $K_{1,k}$ при любом $k \geqslant 1$) и S_3^3 (ориентированная основа графа Кэли в этом случае приведена в [8, рис. 6.2.2]). В каждом из этих случаев граф Кэли является обобщённым внешнепланарным. ■

Развивая идеи решения задачи о допустимости графов Понтрягина — Куратовского, взятых с некоторой ориентацией и пометкой рёбер в качестве графов Кэли полугрупп [11], и аналогично графам Чартренда — Харари [8, теорема 7.1], рассмотрим вопрос о допустимости графов Седлачека, взятых с некоторой ориентацией и пометкой рёбер, в качестве графов Кэли полугрупп.

Теорема 4. Если G — граф Кэли конечной полугруппы, то G не изоморфен ни одному из графов Седлачека G_i, $1 \leqslant i \leqslant 12$, с любой ориентацией и раскраской рёбер.

Доказательство. Число вершин n и число рёбер m графа Кэли полугруппы связаны с числом образующих её элементов t равенством $nt = m$. В противном случае не хватит рёбер для операции умножения на каждый из образующих либо не хватит вершин для получения результатов такого умножения. Параметры n и m графов Седлачека приведены в таблице.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	8	8	8	8	6	7	7	7	8	5	6	6
m	9	9	9	9	8	9	9	9	10	9	9	9

Как видим, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 12$, число рёбер $m = |E(G_i)|$ не делится на число вершин $n = |V(G_i)|$. Следовательно, ни один из графов Седлачека, взятый с некоторой ориентацией и пометкой рёбер, не изоморфен графу Кэли какой-либо полугруппы. ■

Заключение

В результате проведённого исследования найдены: бесконечные серии частично коммутативных полугрупп и бесконечные серии нециклических полугрупп с единственным определяющим соотношением, допускающие полугрупповое тождество, свойство внешнепланарности графов Кэли которых эквивалентно свойству обобщённой внешнепланарности, но не эквивалентно свойству планарности; серии n-веерных полурешёток, свойство планарности графов Кэли которых эквивалентно свойству обобщённой внешнепланарности, но не эквивалентно внешнепланарности. Кроме того, доказано, что граф Кэли любой конечной полугруппы не изоморфен ни одному из запрещённых графов Седлачека из критерия обобщённой внешнепланарности графов, взятых с любой ориентацией и пометкой рёбер.

Полученные результаты могут быть использованы для установления взаимного отношения между классами полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли, и классами полугрупп, допускающих обобщённые внешнепланарные графы Кэли. Последнее открывает перспективы исследования более сложных конструкций, в частности ординальных сумм прямоугольных полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли и их обобщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chartrand G. and Harary F.* Planar permutation graphs // Annales de l'I. H. P. Section B. 1967. V. 3. No. 4. P. 433–438.
2. *Sedláček J.* O jednom zobecněni vnějškově rovinných grafů // Časopis Pěst. Mat. 1988. V. 2. No. 113. P. 213–218. (in Czech)
3. *Schietgat L., Ramon J., and Bruynooghe M.* A polynomial-time maximum common subgraph algorithm for outerplanar graphs and its application to chemoinformatics // Ann. Math. Artif. Intell. 2013. V. 69. P. 343–376.
4. *Соломатин Д. В.* Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы // Прикладная дискретная математика. 2021. № 54. С. 5–57.
5. *Соломатин Д. В.* Прямые произведения циклических моноидов, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения // Вестник ТвГУ. Сер. Прикладная математика. 2023. № 4. С. 43–56.
6. *Соломатин Д. В.* Конечно порожденные полугруппы с одним определяющим соотношением и с тождеством, допускающие планарные графы Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2007. № 6. С. 42–48.
7. *Шнеерсон Л. М.* Тождества в полугруппах с одним определяющим соотношением // Логика, алгебра и вычисл. матем. Иваново, 1972. № 1–2. С. 139–156.
8. *Соломатин Д. В.* Строение полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. 191–212.
9. *Almeria J. C. and Sevilla A. M.* A linear algorithm to recognize maximal generalized outerplanar graphs // Mathematica Bohemica. 1997. V. 122. No. 3. P. 225–230.
10. *Соломатин Д. В.* Свободные частично коммутативные полугруппы и n-веерные полурешетки с планарными графами Кэли // Математика и информатика: Наука и образование. 2009. № 8. С. 36–39.
11. *Соломатин Д. В.* О допустимости некоторых графов в качестве графов Кэли полугрупп // Математика и информатика: Наука и образование. 2004. № 4. С. 32–34.

REFERENCES

1. *Chartrand G. and Harary F.* Planar permutation graphs. Annales de l'I. H. P., section B, 1967, vol. 3, no. 4, pp. 433–438.
2. *Sedláček J.* O jednom zobecněni vnějškově rovinných grafů [A generalization of outerplanar graphs]. Časopis Pěst. Mat., 1988, vol. 2, iss. 113, pp. 213–218. (in Czech)
3. *Schietgat L., Ramon J., and Bruynooghe M.* A polynomial-time maximum common subgraph algorithm for outerplanar graphs and its application to chemoinformatics. Ann. Math. Artif. Intell., 2013, vol. 69, pp. 343–376.
4. *Solomatin D. V.* Issledovaniya polugrupp s planarnymi grafami Keli: rezul'taty i problemy [Researches of semigroups with planar Cayley graphs: Results and problems]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2021, no. 54, pp. 5–57. (in Russian)

5. *Solomatin D. V.* Pryamye proizvedeniya tsiklicheskikh monoidov, dopuskayushchie vneshneplanarnye grafy Keli i ikh obobshcheniya [Direct products of cyclic monoids admitting outerplanar Cayley graphs and their generalizations]. Vestnik TvGU, Ser. Prikladnaya Matematika, 2023, no. 4, pp. 43–56. (in Russian)
6. *Solomatin D. V.* Konechno porozhdennye polugruppy s odnim opredelyayushchim sootnosheniem i s tozhdestvom, dopuskayushchie planarnye grafy Keli [Finitely generated semigroups with one defining relation and identity, admitting planar Cayley graphs]. Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, 2007, no. 6, pp. 42–48. (in Russian)
7. *Shneerson L. M.* Tozhdestva v polugruppakh s odnim opredelyayushchim sootnosheniem [Identities in semigroups with one defining relation]. Logika, Algebra i Vychisl. Matem., Ivanovo, 1972, no. 1–2, pp. 139–156. (in Russian)
8. *Solomatin D. V.* Stroenie polugrupp, dopuskayushchikh vneshneplanarnye grafy Keli [Semigroups with outerplanar Cayley graphs]. Sib. Elektron. Matem. Izv., 2011, vol. 8, pp. 191–212. (in Russian)
9. *Almeria J. C. and Sevilla A. M.* A linear algorithm to recognize maximal generalized outerplanar graphs. Mathematica Bohemica, 1997, vol. 122, no. 3, pp. 225–230.
10. *Solomatin D. V.* Svobodnye chastichno kommutativnye polugruppy i n-veernye polureshetki s planarnymi grafami Keli [Free partially commutative semigroups and n-fan semilattices with planar Cayley graphs]. Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, 2009, no. 8, pp. 36–39. (in Russian)
11. *Solomatin D. V.* O dopustimosti nekotorykh grafov v kachestve grafov Keli polugrupp [On the admissibility of some graphs as Cayley graphs of semigroups]. Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, 2004, no. 4, pp. 32–34. (in Russian)