

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.87:519.6:519.178

DOI 10.17223/20710410/64/5

АНАЛИЗ БАЗЫ ДАННЫХ
ОПТИМАЛЬНЫХ ДВУХКОНТУРНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ СЕТЕЙ¹

Э. А. Монахова, О. Г. Монахов

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Россия***E-mail:** {emilia, monakhov}@rav.sccc.ru

Оптимальные циркулянтные сети вызывают практический интерес как модели надёжных с низкой задержкой сетей связи мультимикросерверных кластерных систем и сетей на кристалле. Авторами впервые построена большая база данных (датасет) оптимальных по диаметру двухконтурных кольцевых циркулянтных сетей до 50 тысяч узлов, содержащая полный набор образующих оптимальных графов. Проведён анализ датасета с целью исследования проблемы поиска аналитически задаваемых семейств оптимальных графов. Разработаны два новых алгоритма автоматизированного поиска аналитических, описываемых полиномами от диаметра, описаний семейств оптимальных графов. С помощью реализованных алгоритмов найдено большое количество новых аналитически описываемых семейств оптимальных сетей, проверенное с помощью валидации на всём диапазоне изменения диаметров графов датасета. Найденные семейства оптимальных сетей могут быть использованы при масштабировании алгоритмов передачи информации в двухконтурных кольцевых циркулянтных структурах.

Ключевые слова: датасет оптимальных сетей, неориентированные двухконтурные кольцевые сети, циркулянтные сети, минимальный диаметр.

DATABASE ANALYSIS OF OPTIMAL DOUBLE-LOOP NETWORKS

E. A. Monakhova, O. G. Monakhov

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk,
Russia*

Optimal circulant networks are of practical interest as models of reliable low-latency communication networks for multiprocessor cluster systems and on-chip networks. The authors are the first to construct a large dataset of optimal diameter double-loop circulant networks with up to 50 thousand nodes, containing a complete set of optimal graph generators. The analysis of the dataset has been carried out in order to study the problem of finding analytically defined families of optimal graphs. Two new algorithms for automatically finding analytical descriptions of optimal graphs families described by polynomials in diameter have been developed. Using the implemented

¹Работа выполнена при финансовой поддержке бюджетным проектом ИВМиМГ СО РАН (код проекта FWNM-2022-0005).

algorithms, a large number of new analytically described families of optimal networks have been found and tested using validation over the entire range of changes in the diameters of the dataset graphs. The found families of optimal networks can be used when scaling information transmission algorithms in double-loop circulant structures.

Keywords: *dataset of optimal networks, undirected double-loop networks, circulant networks, minimum diameter.*

Введение

Неориентированные двухконтурные кольцевые сети являются объектом интенсивных исследований [1–11]. Благодаря высокой масштабируемости, надёжности и симметрии, они находят применение как сети связи в мультипроцессорных кластерных системах, в криптографии при построении совершенных кодов, исправляющих ошибки, а также в сетях на кристалле в качестве замены традиционно используемых в них двумерных решёток и торов, имеющих существенно большие задержки при одинаковом числе узлов.

Двухконтурная кольцевая сеть (undirected double-loop network) представляет собой неориентированный граф $C(N; 1, s)$, $1 < s < N/2$, с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, N-1\}$ и рёбер $E = \{(i, j) : i - j \equiv \pm 1 \pmod{N}, i - j \equiv \pm s \pmod{N}\}$, где $\{1, s\}$ — образующие; N — порядок графа. Пример двухконтурной кольцевой сети с числом узлов $N = 18$ представлен на рис. 1. Двухконтурные кольцевые сети степени четыре принадлежат к классу циркулянтных сетей [1–3, 12–16].

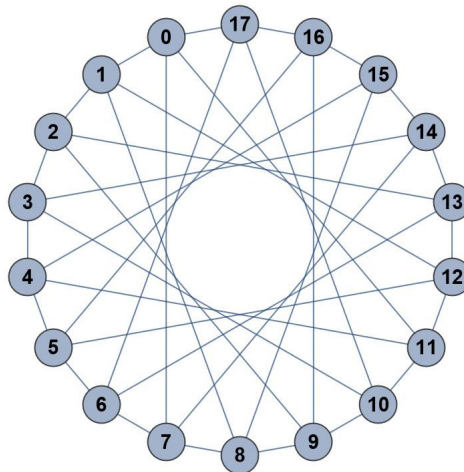


Рис. 1. Двухконтурная кольцевая сеть $C(18; 1, 7)$

Задержки при передаче информации в сети, а также при организации коллективных обменов в системе оцениваются диаметром графа (и/или средним расстоянием между вершинами) [3, 4, 16]. Диаметр графа $G = (V, E)$ есть параметр $d(G) = \max_{i, j \in V} d(i, j)$, где $d(i, j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j . Известно (см. ссылки в [1, 3]), что верхняя граница максимально возможного числа вершин в циркулянтных графах степени четыре с диаметром d равна $N_d = 2d^2 + 2d + 1$. Точная нижняя граница диаметра циркулянтов степени четыре получена в [17, 18]: $D(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N-1})/2 \rceil$.

Проблема синтеза оптимальных циркулянтных графов состоит в поиске графов с минимально возможным диаметром среди графов заданных степени и числа вершин. *Оптимальным* называется граф $C(N; 1, s)$ с диаметром $d(C(N; 1, s)) = D(N)$, *субоптимальным* — граф с диаметром $D(N) + 1$. В работе [19] выдвинута гипотеза, проверенная для всех значений $N \leq 8 \cdot 10^6$: по крайней мере, субоптимальные графы вида $C(N; 1, s)$ существуют для любых $N > 4$.

Оптимальное семейство циркулянтных сетей любого порядка $N > 4$ и степени четыре найдено в [17] и переоткрыто в [18, 20]: $\{C(N; d, d+1) : d \geq 1\}$, где d — ближайшее целое к $(-1 + \sqrt{2N-1})/2$. В [17] доказано, что все графы семейства одновременно имеют минимумы диаметра и среднего расстояния между вершинами. Для данного семейства сетей известны аналитические алгоритмы парной маршрутизации с константными оценками сложности [3, 20, 21].

Из описания циркулянтного графа вида $C(N; d, d+1)$ можно получить изоморфные описания путём умножения его образующих d и $d+1$ на элементы $t \leq \lfloor N/2 \rfloor$ приведённой системы вычетов по модулю N . Но такой метод не может быть использован для получения оптимальных описаний графов $C(N; 1, s)$ при любых N , поскольку для некоторых N они либо не существуют, либо существуют, но не изоморфны описанию вида $(N; d, d+1)$. В настоящей работе предлагается метод автоматизации поиска аналитических описаний семейств оптимальных графов вида $C(N; 1, s)$ на основе полученной авторами большой базы данных (датасета) параметров описаний оптимальных двухконтурных кольцевых сетей $C(N; 1, s)$.

1. Подходы к построению оптимальных двухконтурных кольцевых сетей

Семейства двухконтурных кольцевых сетей, описанные в литературе, привлекают внимание в качестве сетей связи при изучении их структурных и коммуникативных свойств — алгоритмов маршрутизации различных видов, вложимости в чипы для сети на кристалле, структурной надёжности и др. Например, первое известное семейство оптимальных графов с аналитическим описанием [22] активно изучалось в теории кодирования [11] и как модель сети связи многопроцессорных систем:

$$\{C(N_d; 1, 2d+1) : d \geq 1\}.$$

В работе [23] поставлена следующая проблема: классифицировать все значения N , для которых оптимальные неориентированные графы $C(N; 1, s)$ существуют. В литературе рассмотрены различные подходы к решению данной проблемы и получены некоторые бесконечные семейства графов $C(N; 1, s)$ с аналитическим описанием.

В [23] доказано, что для семейства графов с числом вершин $N = N_d - 1$, где $d > 1$, минимально возможный диаметр равен $D(N) + 1$. В большинстве работ, посвящённых поиску бесконечных семейств оптимальных графов $C(N; 1, s)$, используются теоретические верхние оценки диаметра [19, 23–28]. В работах [8, 19, 23, 26, 28] найдены или исследуются семейства графов с линейными образующими вида $s = 2d \pm \alpha$, где d — диаметр; в [5, 29, 30] — семейства графов с квадратичными образующими от диаметра. Эффективные алгоритмы парной маршрутизации разработаны для ряда найденных семейств [26, 29, 31]. Известен [9] алгоритм парной маршрутизации для графов $C(N; 1, s)$ сложности $O(\Delta)$, где $\Delta \leq d$. В [31, 32] получены «плотные» бесконечные семейства оптимальных графов, описания которых следуют из взаимной простоты чисел (N, d) или $(N, d+1)$. В [19] найдено множество мощности $O(\sqrt{d})$ бесконечных семейств оптимальных графов $C(N; 1, s)$ для каждого интервала значений N ,

где $N_{d-1} < N \leq N_d$, $d > 1$, с образующими вида $s = 2d \pm \alpha$. В [27] найдены три семейства оптимальных сетей, которые представимы как произведения Кронекера двух циклов. В [5] авторы получили шесть оптимальных и пять субоптимальных семейств графов $C(N; 1, s)$ для каждого интервала значений N , где $2d^2 + d < N < N_d - 1$, $d > 1$. В [33] реализованы генетические алгоритмы поиска семейств и построены 70 новых семейств оптимальных графов с линейными образующими видов $s = 4d \pm \alpha$ и $s = 6d \pm \alpha$. Авторы [34], используя предложенный ими алгоритм вычисления диаметра графов $C(N; 1, s)$, представили некоторые фрагменты результатов вычисления оптимальных и субоптимальных образующих для различных значений N , включая $N = 32\,000$. В [35], в связи с актуальностью применения циркулянтов в сетях на кристалле, получен датасет оптимальных циркулянтов различных степеней от 4 до 10 с числом вершин до 500, который включает в том числе двухконтурные кольцевые сети.

В [36] авторы построили датасет оптимальных (с минимально возможным диаметром при заданном порядке) графов $C(N; 1, s)$ до 50 тысяч вершин. Новый датасет содержит для каждого порядка графов все образующие, соответствующие оптимальным или субоптимальным (в случае отсутствия оптимальных) описаниям графа. Перечисление образующих для оптимальных графов в датасете позволило найти аналитические зависимости параметров, определяющих семейства оптимальных графов.

На рис. 2 приведено трёхмерное графическое изображение фрагмента датасета точек (N, s, d) с числом вершин $10 \leq N \leq 900$. Датасет получен с применением параллельного алгоритма исчерпывающего поиска, реализованным на C на кластере Kunpeng [36]. Точки (N, s, d) соответствуют параметрам описаний оптимальных графов $C(N; 1, s)$. Для каждого N показаны все образующие $s \leq N/2$, которые определяют граф минимально возможного диаметра d при данном N . Проведённый анализ графов из датасета показал существование значений N , для которых единственная оптимальная образующая может быть как линейного, так и квадратичного видов от диаметра. Весь датасет описаний параметров оптимальных графов с $N \leq 5 \cdot 10^4$ вершин содержит около 451 000 точек и представлен в открытом доступе в Интернете: <https://github.com/mila0411/Double-loop-networks/tree/main/Dataset>.

Первоначальный анализ датасета на открытие аналитически описываемых семейств оптимальных графов проведён в [36] с помощью подхода, основанного на темплейтах с недоопределёнными коэффициентами и использующего для поиска перспективных темплейтов алгоритмы метаэвристического поиска — муравьиной колонии и дифференциальной эволюции [37, 38]. Подробное описание алгоритмов поиска можно найти в [36]. Реализованные алгоритмы с применением пяти найденных темплейтов сгенерировали 200 семейств оптимальных двухконтурных кольцевых графов. На рис. 3 члены полученных семейств графов отмечены чёрными точками.

Далее рассмотрен другой подход к автоматизации поиска семейств оптимальных графов в датасете, основанный на последовательном делении с остатком параметров оптимальных графов и построении коэффициентов полиномов для их порядков и образующих, который: 1) обобщает темплейт-ориентированный подход; 2) содержит некоторые общие принципы построения семейств оптимальных графов; 3) позволяет открыть известные и получить новые семейства, покрывающие, как показали эксперименты, представительную часть точек датасета; 4) даёт возможность проводить теоретический анализ и практическую реализацию сетей, основанных на аналитических описаниях. На базе нового подхода разработаны два алгоритма автоматизированного поиска семейств оптимальных графов, отличающихся видом образующих.

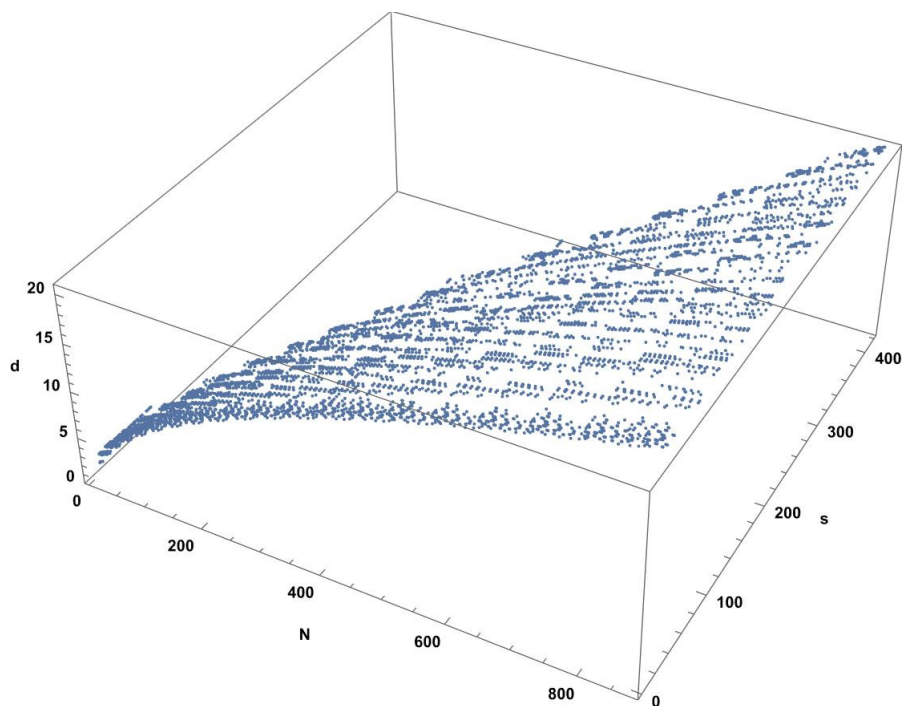


Рис. 2. Фрагмент датасета точек (N, s, d) оптимальных графов $C(N; 1, s)$

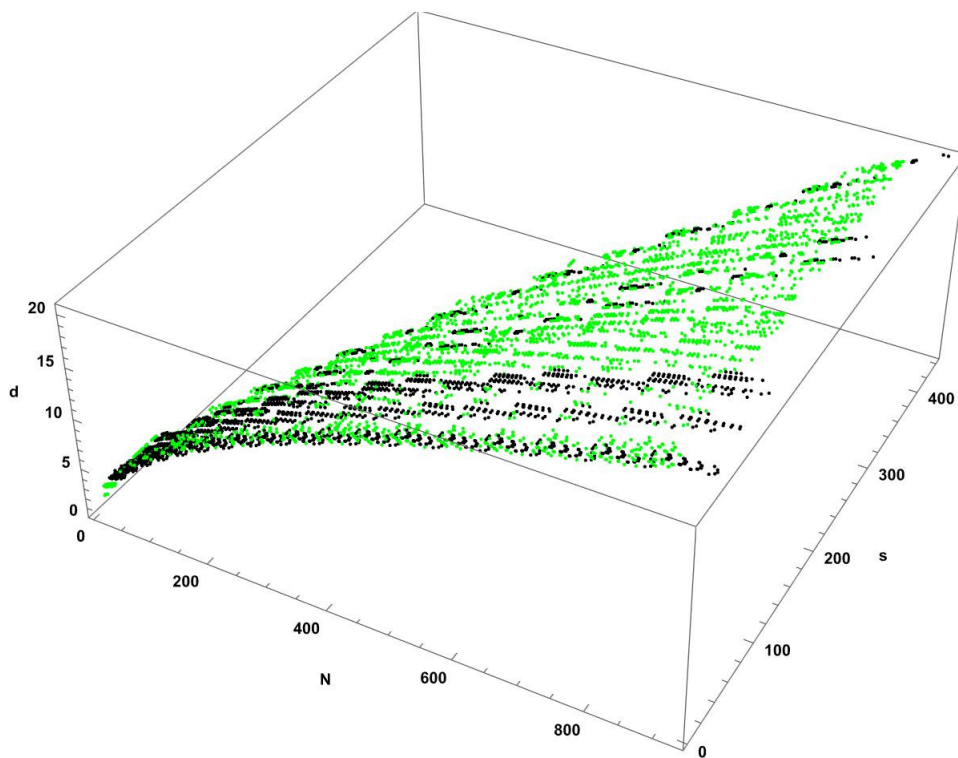


Рис. 3. Семейства оптимальных графов, полученные с помощью темплейт-ориентированного подхода

2. Поиск семейств оптимальных двухконтурных кольцевых сетей с квадратичными образующими

Чтобы автоматизировать процесс поиска семейств оптимальных графов, рассмотрим конкретный пример построения графов потенциально возможного семейства, основываясь на данных, взятых из датасета.

Введём параметр $p \geq 1$. Назовём его периодом повторяемости членов семейства. Параметр p равен разнице диаметров между соседними членами семейства. Анализ известных семейств оптимальных графов показал, что p может принимать различные значения — от $p = 1$, когда семейство существует при любом диаметре [22], до $p = 15$ [5, теорема 3.8], когда члены оптимального семейства существуют в классе диаметров по модулю 15. В настоящей работе мы рассматриваем случаи, когда разница диаметров между соседними членами семейства является постоянной.

Покажем, как, используя две точки датасета, можно получить аналитические формулы для построения образующих и порядков графов потенциального семейства.

Возьмём точку в датасете, например $(N_1, s_1, d_1) = (258, 48, 11)$. Пусть $p = 6$. Найдём в датасете точку (N_2, s_2, d_2) , для которой, кроме условия $d_2 = d_1 + p$, выполняется следующее:

$$\left\lfloor \frac{N_1}{s_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N_2}{s_2} \right\rfloor. \quad (1)$$

Например, пусть это будет точка $(N_2, s_2, d_2) = (606, 108, 17)$. Выполнение условия (1) означает, что обе точки датасета находятся на общей линии с углом наклона, определяемым отношением $\lfloor N/s \rfloor$ (см. рис. 2). Найдём целые части и остатки от деления образующих графов, соответствующих данным точкам, на их диаметр: $s_1 = 4d_1 + 4$, $s_2 = 6d_2 + 6$. Введём параметры, которые определяют последовательности увеличения коэффициентов при одинаковых степенях d для образующих графов возможного семейства:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left\lfloor \frac{s_2}{d_2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s_1}{d_1} \right\rfloor, \\ \Delta_2 &= s_2 \bmod d_2 - s_1 \bmod d_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Для нашего примера $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$. Если продолжить эти последовательности, увеличивая диаметр графов на p , то общий вид образующих графов семейства будет следующим:

$$s = \left(\left\lfloor \frac{s_1}{d_1} \right\rfloor + \frac{(d - d_1)\Delta_1}{p} \right) d + s_1 \bmod d_1 + \frac{(d - d_1)\Delta_2}{p}.$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях d , получим квадратичный полином от диаметра, определяющий образующие семейства оптимальных графов:

$$\begin{aligned} s &= ed^2 + fd + g, \\ e &= \frac{\Delta_1}{p}, \\ f &= \left\lfloor \frac{s_1}{d_1} \right\rfloor - \frac{d_1\Delta_1}{p} + \frac{\Delta_2}{p}, \\ g &= s_1 \bmod d_1 - \frac{d_1\Delta_2}{p}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для нашего примера в силу (3) получаем $s = (d^2 + 2d + 1)/3$.

Теперь для двух рассмотренных точек датасета найдём формулу, которая определит порядки графов возможного семейства.

Имеем $N_1 = 5s_1 + N_1 \bmod s_1 = 5s_1 + 18$, $N_2 = 5s_2 + N_2 \bmod s_2 = 5s_2 + 66$. После деления остатков на диаметры получим $N_1 = 5s_1 + d_1 + 7$, $N_2 = 5s_2 + 3d_2 + 15$.

Введём параметры, которые определяют последовательности увеличения коэффициентов при одинаковых степенях d в разложении остатков от деления на d остатка от деления N на s :

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \lfloor (N_2 \bmod s_2)/d_2 \rfloor - \lfloor (N_1 \bmod s_1)/d_1 \rfloor, \\ \Delta_4 &= (N_2 \bmod s_2) \bmod d_2 - (N_1 \bmod s_1) \bmod d_1.\end{aligned}\tag{4}$$

Для рассматриваемого примера $\Delta_3 = 2$, $\Delta_4 = 8$. Если продолжить эти последовательности, увеличивая диаметр графов на величину p , то общий вид порядков возможного семейства будет следующий:

$$N = \lfloor N_1/s_1 \rfloor s + \left(\lfloor (N_1 \bmod s_1)/d_1 \rfloor + \frac{(d - d_1)\Delta_3}{p} \right) d + (N_1 \bmod s_1) \bmod d_1 + \frac{(d - d_1)\Delta_4}{p}.$$

Подставляя формулу (3) для образующей s и собирая коэффициенты при одинаковых степенях d , получаем

$$\begin{aligned}N &= ad^2 + bd + c, \\ a &= e \lfloor N_1/s_1 \rfloor + \Delta_3/p, \\ b &= f \lfloor N_1/s_1 \rfloor + \lfloor (N_1 \bmod s_1)/d_1 \rfloor - d_1\Delta_3/p + \Delta_4/p, \\ c &= g \lfloor N_1/s_1 \rfloor + (N_1 \bmod s_1) \bmod d_1 - d_1\Delta_4/p.\end{aligned}\tag{5}$$

Таким образом, квадратичный полином от диаметра, который определяет порядки оптимальных графов потенциально возможного семейства, сформирован.

Для рассмотренного примера в силу (5) получаем $N = 2d^2 + 2d - 6$ и соответственно следующий вид семейства графов: $\{C(2d^2 + 2d - 6; 1, (d^2 + 2d + 1)/3) : d \equiv 5 \pmod{6}\}$. Проверка в датасете показала существование всех графов семейства, начиная с $d = 5$ до 149.

Ниже описана общая схема алгоритма 1 — эвристического алгоритма автоматического поиска семейств оптимальных графов, основанного на рассмотренных выше принципах.

Следует отметить интересную особенность результатов работы алгоритма 1: некоторые из найденных семейств графов имеют образующие линейного вида от d . Это происходит в тех случаях, когда при выполнении необходимого условия (1) также выполняется условие $\lfloor s_1/d_1 \rfloor = \lfloor s_2/d_2 \rfloor$, что даёт $e = 0$. Чтобы автоматизировать процесс поиска семейств оптимальных графов с линейными образующими от диаметра, мы разработали отдельный алгоритм, основанный на аналогичных принципах.

Алгоритм 1. Алгоритм автоматического поиска семейств оптимальных графов с квадратичными образующими (общая схема)

Вход: Точки датасета (N, s, d) ; P — максимальное значение параметра p .

- 1: Выбираем начальное значение периода $p \in \{1, 2, 3, \dots, P\}$ и диаметра $d = d_1$, где $d_1 \equiv 0 \pmod{p}$. Выбираем все точки (N_1, s_1, d_1) в датасете и среди точек вида (N_2, s_2, d_2) , где $d_2 = d_1 + p$, выбираем точки (N_2, s_2, d_2) , которые удовлетворяют условию (1).

Для точки (N_1, s_1, d_1) и очередной точки (N_2, s_2, d_2) генерируем общие формулы для s и N в виде квадратичных полиномов от диаметра для графов возможного семейства:

$$C(N = ad^2 + bd + c; 1, s = ed^2 + fd + g).$$

Для этого используется свойство повторяемости вида членов семейства через $k = (d - d_1)/p$ шагов, а именно: для коэффициентов e, f, g используются формулы (2) и (3); для a, b, c — формулы (3), (4) и (5). Таким образом, для точек (N_1, s_1, d_1) и (N_2, s_2, d_2) аналитический вид графов возможного семейства сформирован.

- 2: Проверяем присутствие членов сформированного семейства в датасете, увеличивая диаметр на величину p . Если существование следующих членов семейства подтверждено на выбранной части датасета, то считается, что семейство прошло тестирование и новое семейство графов найдено; оно добавляется в лист потенциальных семейств.
- 3: Процесс поиска семейств продолжается до тех пор, пока не рассмотрены, во-первых, все имеющиеся паросочетания графов с диаметрами d_1 и d_2 и, во-вторых, диаметры для всех вычетов по модулю p и затем — последовательно весь выделенный диапазон значений параметра p .
- 4: После этого все найденные семейства проверяются на той части датасета, которая не была включена в предварительно проведённое тестирование на шаге 2. Если результат положительный, то считается, что новое семейство найдено.

Выход: Множество аналитических описаний (формул $N(d)$ и $s(d)$) семейств оптимальных графов с квадратичными образующими, ограниченное рассмотренным диапазоном изменения параметра p .

3. Поиск семейств оптимальных графов с линейными образующими

При анализе полученного датасета было замечено, что линейные образующие с нечётным коэффициентом при d не дают устойчивых оптимальных семейств на больших диапазонах изменения диаметра. Поэтому для поиска семейств оптимальных графов с линейными образующими будем рассматривать образующие вида $s = \gamma d + \alpha$, где γ может принимать только чётные, а α — любые целые значения. Для разработки процесса автоматизации поиска семейств оптимальных графов рассмотрим пример построения семейства оптимальных графов на основании данных, взятых из датасета. Покажем, как по двум точкам датасета можно получить аналитические формулы для порядков графов семейства и образующих линейного вида.

Возьмём в датасете точку $(N_1, s_1, d_1) = (295, 69, 12)$. Пусть $p = 3$ — разность диаметров соседних членов возможного семейства. Найдём в датасете точку (N_2, s_2, d_2) , для которой, кроме условия $d_2 = d_1 + p$, выполняется ещё условие

$$\left\lfloor \frac{s_1}{d_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{s_2}{d_2} \right\rfloor. \quad (6)$$

Например, это точка $(N_2, s_2, d_2) = (459, 87, 15)$. Условие (6) выполнено, значит, коэффициент γ не зависит от диаметра. Найдём целые части и остатки от деления образующих графов на их диаметры, при этом коэффициент при d должен быть чётным, то есть:

$$\begin{aligned} s &= fd + g, \\ f &= \begin{cases} \lfloor s_1/d_1 \rfloor, & \text{если } \lfloor s_1/d_1 \rfloor \text{ чётное,} \\ \lceil s_1/d_1 \rceil & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ g &= \begin{cases} s_1 \bmod d_1, & \text{если } \lfloor s_1/d_1 \rfloor \text{ чётное,} \\ s_1 - \lceil s_1/d_1 \rceil d_1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Для нашего примера $s_1 = 6d_1 - 3$, $s_2 = 6d_2 - 3$. Таким образом, $f = 6$, $g = -3$ и $s = 6d - 3$.

Введём три параметра, которые определяют последовательности приращения коэффициентов при одинаковых степенях d в разложении N на s и в разложении остатка от деления на d остатка от деления N на s :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \lfloor N_2/s_2 \rfloor - \lfloor N_1/s_1 \rfloor, \\ \Delta_2 &= \lfloor (N_2 \bmod s_2)/d_2 \rfloor - \lfloor (N_1 \bmod s_1)/d_1 \rfloor, \\ \Delta_3 &= (N_2 \bmod s_2) \bmod d_2 - (N_1 \bmod s_1) \bmod d_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Для рассмотренного примера имеем $N_1 = 4s_1 + 19 = 4s_1 + d_1 + 7$, $N_2 = 5s_2 + 24 = 5s_2 + d_2 + 9$. Таким образом, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 2$. Если продолжить эти последовательности, наращивая диаметр графов на величину p , то общий вид порядков возможного семейства будет равен

$$\begin{aligned} N &= (\lfloor N_1/s_1 \rfloor + (d - d_1) \Delta_1/p) s + (\lfloor (N_1 \bmod s_1)/d_1 \rfloor + (d - d_1) \Delta_2/p) d + \\ &\quad + (N_1 \bmod s_1) \bmod d_1 + (d - d_1) \Delta_3/p. \end{aligned}$$

Подставив формулу (7) для образующей s и собрав коэффициенты при одинаковых степенях d , получим

$$\begin{aligned} N &= ad^2 + bd + c, \\ a &= f\Delta_1/p + \Delta_2/p, \\ b &= f \lfloor N_1/s_1 \rfloor + \lfloor (N_1 \bmod s_1)/d_1 \rfloor - fd_1\Delta_1/p + g\Delta_1/p - d_1\Delta_2/p + \Delta_3/p, \\ c &= g \lfloor N_1/s_1 \rfloor + (N_1 \bmod s_1) \bmod d_1 - gd_1\Delta_1/p - d_1\Delta_3/p. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, сформирован квадратичный полином от диаметра, задающий порядки оптимальных графов семейства.

Для нашего примера получаем следующий вид возможного семейства графов: $\{C(2d^2 + 2d/3 - 1; 1, 6d - 3) : d \equiv 0 \pmod{3}\}$. Проверка в датасете показала существование всех графов семейства с $d = 3$ до 150.

Ниже представлена общая схема алгоритма 2 — эвристического алгоритма автоматического поиска семейств оптимальных двухконтурных кольцевых графов с линейными образующими, основанного на описанных принципах.

Алгоритм 2. Алгоритм автоматического поиска семейств оптимальных графов с линейными образующими (общая схема)

Вход: Точки датасета (N, s, d) ; P — максимальное значение параметра p .

- 1: Выбираем начальное значение периода $p \in \{2, 3, 4, \dots, P\}$ и диаметра $d = d_1$, где $d_1 \equiv 0 \pmod{p}$. Выбираем в датасете все точки (N_1, s_1, d_1) и среди точек вида (N_2, s_2, d_2) , где $d_2 = d_1 + p$, выбираем точки, удовлетворяющие условию (6). Для точки (N_1, s_1, d_1) и очередной точки (N_2, s_2, d_2) создаём общие формулы для s и N в виде полиномов от диаметра для возможного семейства графов:

$$C(N = ad^2 + bd + c; 1, s = fd + g).$$

Для этого используется свойство повторяемости вида членов семейства через $k = (d - d_1)/p$ шагов, а именно: для коэффициентов f, g используются формулы (7), для a, b, c — формулы (8) и (9). Таким образом, для точек (N_1, s_1, d_1) и (N_2, s_2, d_2) аналитический вид графов возможного семейства сформирован.

- 2: Проверяем наличие членов сформированного семейства в датасете при увеличении диаметра на p . Если на выбранном фрагменте данных существование следующих членов семейства подтверждено, то считается, что семейство прошло тестирование и новое семейство найдено, оно записывается в список новых семейств.
- 3: Процесс поиска семейств продолжаем до тех пор, пока не рассмотрены, во-первых, все имеющиеся паросочетания графов с диаметрами d_1 и d_2 и, во-вторых, диаметры для всех вычетов по модулю p , затем — последовательно весь выделенный диапазон значений параметра p .
- 4: После этого происходит валидация полученных семейств, для чего используется часть массива данных, не участвовавшая в тестировании на шаге 2. При положительном результате считается, что новое семейство найдено и его аналитическое описание пополняет список найденных семейств.

Выход: Множество аналитических описаний (формул $N(d)$ и $s(d)$) семейств оптимальных графов с линейными образующими, ограниченное рассмотренным диапазоном изменения параметра p .

4. Экспериментальные результаты реализации алгоритмов

Алгоритм 1 реализован в системе Wolfram Mathematica 10 для $15 \leq d \leq 150$ и $1 \leq p \leq 7$. Общее число полученных аналитически описываемых семейств оптимальных графов равно 1944.

Алгоритм 2 также реализован в системе Wolfram Mathematica 10. Для чётных и нечётных диаметров и значений $2 \leq p \leq 6$ получено 293 аналитически описываемых семейств оптимальных графов с линейными образующими. В таблице приведён фрагмент описаний оптимальных графов семейств вместе с их периодом повторяемости и типом диаметров, полученных при реализации алгоритмов 1 и 2.

На рис. 4 показаны фрагменты найденных семейств оптимальных двухконтурных кольцевых сетей с квадратичными и линейными образующими. Члены найденных семейств отмечены чёрными точками. Описания всех оптимальных семейств, полученных при реализации алгоритмов, приведены в разделе датасета.

Предложенные алгоритмы автоматического поиска семейств основаны на темплейтах описаний известных оптимальных семейств и проведённом интеллектуальном анализе датасета. Этот подход позволил переоткрыть известные семейства и найти боль-

Примеры описаний семейств оптимальных графов

N	s	p	$d \bmod p$	N	s	p	$d \bmod p$
$d + 2d^2$	$3 + 4d$	5	2	$-5 + 2d^2$	$-3 + 2d$	4	2
$1 + d + 2d^2$	$2d$	5	2	$-5 + 2d^2$	$3 + 2d$	4	2
$-7 + 2d + 2d^2$	$-3 + 2d$	5	2	$-4 + 2d^2$	$-3 + 2d$	4	2
$-7 + 2d + 2d^2$	$5 + 2d$	5	2	$-4 + 2d^2$	$3 + 2d$	4	2
$-1 + 2d + 2d^2$	$-1 + 2d$	5	2	$-3 + 2d^2$	$-3 + 2d$	4	2
$-1 + 2d + 2d^2$	$3 + 2d$	5	2	$-3 + 2d^2$	$3 + 2d$	4	2
$1 + 2d + 2d^2$	$1 + 2d$	5	2	$-3 + 2d^2$	$-5 + 4d$	4	2
$-2 + 2d^2$	$-2 - d + d^2$	5	2	$-1 + 2d^2$	$-1 + 2d$	4	2
$-2 + 2d^2$	$-d + d^2$	5	2	$-1 + 2d^2$	$1 + 2d$	4	2
$2d^2$	$-1 - d + d^2$	5	2	$-1 + 2d^2$	$-3 + 4d$	4	2

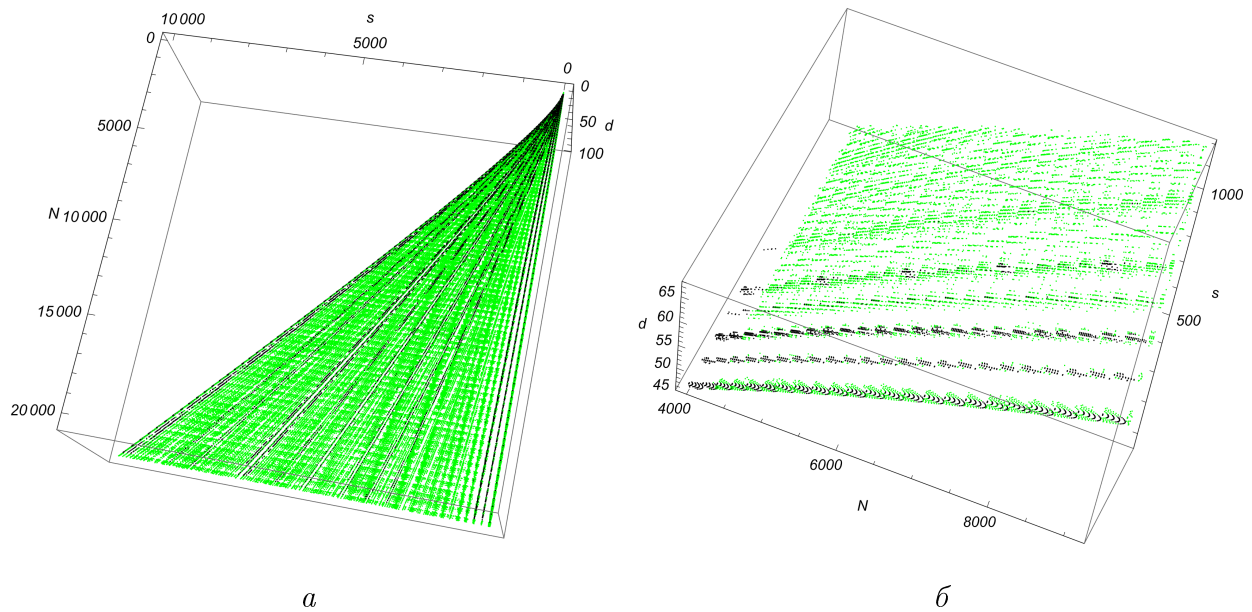


Рис. 4. Семейства оптимальных графов, полученные с помощью алгоритмов 1 (а) и 2 (б)

шое количество новых, но он не исчерпывает все возможные виды аналитических выражений для описания семейств. Применение других подходов к анализу датасета, в том числе с использованием моделей глубокого обучения, позволит выявить другие возможные темплейты для описаний оптимальных семейств и алгоритмов их построения и, если это возможно, покрыть сетью аналитики весь построенный датасет в реализованных границах изменения диаметра сетей. Для генерации новых оптимальных семейств с использованием полученных алгоритмов мы предполагаем в дальнейшем также увеличивать область изменения параметра p . Для будущих исследований остаются открытыми следующие вопросы: какие ещё принципы построения семейств оптимальных (субоптимальных) двухконтурных кольцевых графов могут быть реализованы при анализе полученного датасета; как распределяются начальные значения диаметров, при которых порождаются новые семейства; возможный вид функций для параметра p . В частности, для автоматизации поиска оптимальных семейств планируется рассмотреть случаи, когда период повторяемости членов семейства может быть не константой, а функцией линейного вида от другого параметра, как это, например, имеет место для семейства, найденного в [5, следствие 3.6].

Заключение

Предложен новый метод открытия аналитических зависимостей параметров описаний семейств оптимальных двухконтурных кольцевых циркулянтных графов, представляющих практический интерес при моделировании систем связи для сетей на кристалле и кластеров мультипроцессорных систем. При анализе большого датасета параметров оптимальных по диаметру двухконтурных кольцевых графов были замечены некоторые закономерности в их появлении. Чтобы найти новые семейства оптимальных графов, разработаны и реализованы в системе Wolfram Mathematica алгоритмы их автоматизированного поиска в датасете. Найденные с их помощью аналитически описываемые семейства могут составлять базу для конструирования масштабируемых по числу элементов больших многоуровневых вычислительных систем с унификацией по диаметру алгоритмов маршрутизации. Все найденные семейства графов будут представлены в отдельном разделе доступного в Интернете датасета <https://github.com/mila0411/Double-loop-networks/tree/main/Dataset>. Полученный датасет можно также использовать при анализе соотношений между семействами оптимальных графов и их характеристиками, такими, как структурные задержки, определяемые средним расстоянием между узлами, надёжность при отказах элементов сети, пропускная способность, алгоритмы маршрутизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distrib. Comput. 1995. No. 24(1). P. 2–10.
2. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks // Theoret. Comput. Sci. 2003. V. 299. P. 107–121.
3. *Монахова Э. А.* Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 3. С. 92–115.
4. *Huang X., Ramos A. F., and Deng Y.* Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // J. Supercomput. 2022. V. 78. P. 13491–13510.
5. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 2006. V. 8. P. 299–311.
6. *Romanov A. Y.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies // Heliyon. 2019. V. 5. Iss. 4. Article e01516.
7. *Chen B.-X., Xiao W.-J., and Parhami B.* Diameter formulas for a class of undirected double-loop networks // Networks. 2005. V. 6(1). P. 1–15.
8. *Jha K. P.* Tight-optimal circulants vis-a-vis twisted tori // Discrete Appl. Math. 2014. V. 175. P. 24–34.
9. *Huanping L. and Yixian Y.-J.* On the fault-tolerant routing in distributed loop networks // J. Electronics. 2000. V. 17. P. 84–89.
10. *Bian Q.-F., Hang T., Liu H., and Fang M.* Research on the diameter and average diameter of undirected double-loop networks // Int. Conf. Grid Cloud Computing, Nanjang, Jiangsu China, 2010. P. 461–466.
11. *Martinez C., Beivide R., Stafford E., et al.* Modeling toroidal networks with the Gaussian integers // IEEE Trans. Comput. 2008. V. 57. No. 8. P. 1046–1056.
12. *Monakhova E. A., Monakhov O. G., and Romanov A. Yu.* Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip // IEEE Trans. Netw. Sci. Eng. 2023. V. 10. No. 1. P. 413–425.

13. *Perez-Roses H., Bras-Amoros M., and Seradilla-Merintero J. M.* Greedy routing in circulant networks // *Graphs Combinatorics*. 2022. V.38. Article 86.
14. *Lewis R. R.* Analysis and Construction of Extremal Circulant and Other Abelian Cayley Graphs. Ph.D. Thesis. The Open University, London, UK, 2022.
15. *Pai K.-J., Yang J.-S., Chen G.-Y., and Chang J.-M.* Configuring protection routing via completely independent spanning trees in dense Gaussian on-chip networks // *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* 2022. V. 9. No. 2. P. 932–946.
16. *Monakhov O. G., Monakhova E. A., Romanov A. Y., et al.* Adaptive dynamic shortest path search algorithm in networks-on-chip based on circulant topologies // *IEEE Access*. 2021. V. 9. P. 160836–160846.
17. *Монахова Э. А.* Об аналитическом описании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // *Вычислительные системы*. 1981. № 90. С. 81–91.
18. *Boesch F. and Wang J.-F.* Reliable circulant networks with minimum transmission delay // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1985. V. 32. No. 12. P. 1286–1291.
19. *Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks. 1. Large infinite optimal families // *Networks*. 1991. V. 21. P. 387–415.
20. *Liu H., Li X., and Wang S.* Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing // *Mathematics*. 2022. V. 10. Article 4016.
21. *Monakhova E. A., Romanov A. Y., and Lezhnev E. V.* Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip // *IEEE Access*. 2020. V. 8. P. 215010–215019.
22. *Монахова Э. А.* Синтез оптимальных диофантовых структур // *Вычислительные системы*. 1979. № 80. С. 18–35.
23. *Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., and Xu J.* A combinatorial problem related to distributed loop networks // *Networks*. 1990. V. 20. P. 173–180.
24. *Li Y., Chen Y., Tai W., and Wang R.* The minimum distance diagram and diameter of undirected double-loop networks // *Proc. ICMEMTC*. Taiyuan, China, 2016. P. 1682–1687.
25. *Loudiki L., Kchikech M., and Essaky E. H.* A New Approach for Computing the Distance and the Diameter in Circulant Graphs. <https://arxiv.org/abs/2210.11116>. 2022.
26. *Jha P. K.* Dense bipartite circulants and their routing via rectangular twisted torus // *Discrete Appl. Math.* 2014. V. 166. P. 141–158.
27. *Jha P. K. and Smith J. D. H.* Cycle Kronecker products that are representable as optimal circulants // *Discrete Appl. Math.* 2015. V. 181. P. 130–138.
28. *Liu H., Yang Y., and Hu M.* Tight optimal infinite families of undirected double-loop networks // *Systems Eng. Theory Practice*. 2002. V. 1. P. 75–79.
29. *Jha P. K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // *J. Interconn. Networks*. 2013. V. 14. No. 1. Article 1350002. 24 p.
30. *Bermond J.-C. and Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks: Dense optimal families // *Networks*. 1991. V. 21. P. 1–9.
31. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // *LNCS*. 2005. V. 3794. P. 308–316.
32. *Monakhova E. A.* Optimal circulant computer networks // *Proc. PaCT'91*. Novosibirsk, USSR, 1991. P. 450–458.
33. *Монахова Э. А., Монахов О. Г.* Эволюционный синтез семейств оптимальных двумерных циркулянтных сетей // *Вестник СибГУТИ*. 2014. № 2. С. 72–81.
34. *Zerovnik J. and Pisanski T.* Computing the diameter in multiple-loop networks // *J. Algorithms*. 1993. V. 14. P. 226–243.

35. *Romanov A.* The dataset for optimal circulant topologies // *Big Data Cogn. Comput.* 2023. V. 7. P. 80.
36. *Monakhova E. A. and Monakhov O. G.* Generation and analysis of optimal double-loop circulant networks dataset // *Proc. CEUR Workshop SibDATA.* 2023. (to be published)
37. *Storn R. and Price K.* Differential evolution — A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // *J. Global Optimization.* 1997. V. 11. P. 341–359.
38. *Zaheer H., Pant M., Monakhov O., and Monakhova E.* Simple and efficient co-operative approach for solving multi modal problems // *Proc. ICEEOT.* Chennai, Tamilnadu, India, 2016. P. 731–737.

REFERENCES

1. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 1995, no. 24(1), pp. 2–10.
2. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks. *Theoret. Comput. Sci.*, 2003, vol. 299, pp. 107–121.
3. *Monakhova E. A.* Strukturnye i kommunikativnye svoystva tsirkulyantnykh setey [Structural and communicative properties of circulant networks]. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2011, no. 3, pp. 92–115. (in Russian)
4. *Huang X., Ramos A. F., and Deng Y.* Optimal circulant graphs as low-latency network topologies. *J. Supercomput.*, 2022, vol. 78, pp. 13491–13510.
5. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 2006, vol. 8, pp. 299–311.
6. *Romanov A. Y.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies. *Heliyon*, 2019, vol. 5, iss. 4, article e01516.
7. *Chen B.-X., Xiao W.-J., and Parhami B.* Diameter formulas for a class of undirected double-loop networks. *Networks*, 2005, vol. 6(1), pp. 1–15.
8. *Jha K. P.* Tight-optimal circulants vis-a-vis twisted tori. *Discrete Appl. Math.*, 2014, vol. 175, pp. 24–34.
9. *Huanping L. and Yixian Y.-J.* On the fault-tolerant routing in distributed loop networks. *J. Electronics*, 2000, vol. 17, pp. 84–89.
10. *Bian Q.-F., Hang T., Liu H., and Fang M.* Research on the diameter and average diameter of undirected double-loop networks. *Int. Conf. Grid Cloud Computing*, Nanjang, Jiangsu China, 2010, pp. 461–466.
11. *Martinez C., Beivide R., Stafford E., et al.* Modeling toroidal networks with the Gaussian integers. *IEEE Trans. Comput.*, 2008, vol. 57, no. 8, pp. 1046–1056.
12. *Monakhova E. A., Monakhov O. G., and Romanov A. Yu.* Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip. *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.*, 2023, vol. 10, no. 1, pp. 413–425.
13. *Perez-Roses H., Bras-Amoros M., and Seradilla-Merintero J. M.* Greedy routing in circulant networks. *Graphs Combinatorics*, 2022, vol. 38, article 86.
14. *Lewis R. R.* Analysis and Construction of Extremal Circulant and Other Abelian Cayley Graphs. Ph.D. Thesis, The Open University, London, UK, 2022.
15. *Pai K.-J., Yang J.-S., Chen G.-Y., and Chang J.-M.* Configuring protection routing via completely independent spanning trees in dense Gaussian on-chip networks. *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.*, 2022, vol. 9, no. 2, pp. 932–946.

16. *Monakhov O. G., Monakhova E. A., Romanov A. Y., et al.* Adaptive dynamic shortest path search algorithm in networks-on-chip based on circulant topologies. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 160836–160846.
17. *Monakhova E. A.* Ob analiticheskom opisani optimal'nykh dvumernykh diofantovykh struktur odnorodnykh vychislitel'nykh sistem [On analytical representation of optimal two-dimensional Diophantine structures of homogeneous computer systems]. *Vychislitel'nye Sistemy*, 1981, no. 90, pp. 81–91. (in Russian)
18. *Boesch F. and Wang J.-F.* Reliable circulant networks with minimum transmission delay. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1985, vol. 32, no. 12, pp. 1286–1291.
19. *Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks. 1. Large infinite optimal families. *Networks*, 1991, vol. 21, pp. 387–415.
20. *Liu H., Li X., and Wang S.* Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing. *Mathematics*, 2022, vol. 10, article 4016.
21. *Monakhova E. A., Romanov A. Y., and Lezhnev E. V.* Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 215010–215019.
22. *Monakhova E. A.* Sintez optimal'nykh diofantovykh struktur [Synthesis of optimal Diophantine structures]. *Vychislitel'nye Sistemy*, 1979, no. 80, pp. 18–35. (in Russian)
23. *Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., and Xu J.* A combinatorial problem related to distributed loop networks. *Networks*, 1990, vol. 20, pp. 173–180.
24. *Li Y., Chen Y., Tai W., and Wang R.* The minimum distance diagram and diameter of undirected double-loop networks. *Proc. ICMEMTC, Taiyuan, China*, 2016, pp. 1682–1687.
25. *Loudiki L., Kchikech M., and Essaky E. H.* A New Approach for Computing the Distance and the Diameter in Circulant Graphs. <https://arxiv.org/abs/2210.11116>, 2022.
26. *Jha P. K.* Dense bipartite circulants and their routing via rectangular twisted torus. *Discrete Appl. Math.*, 2014, vol. 166, pp. 141–158.
27. *Jha P. K. and Smith J. D. H.* Cycle Kronecker products that are representable as optimal circulants. *Discrete Appl. Math.*, 2015, vol. 181, pp. 130–138.
28. *Liu H., Yang Y., and Hu M.* Tight optimal infinite families of undirected double-loop networks. *Systems Eng. Theory Practice*, 2002, vol. 1, pp. 75–79.
29. *Jha P. K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants. *J. Interconn. Networks*, 2013, vol. 14, no. 1, article 1350002, 24 p.
30. *Bermond J.-C. and Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks: Dense optimal families. *Networks*, 1991, vol. 21, pp. 1–9.
31. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks. *LNCS*, 2005, vol. 3794, pp. 308–316.
32. *Monakhova E. A.* Optimal circulant computer networks. *Proc. PaCT'91, Novosibirsk, USSR*, 1991, pp. 450–458.
33. *Monakhova E. A. and Monakhov O. G.* Evolyutsionnyy sintez semeystv optimal'nykh dvumernykh tsirkulyantnykh setey [Evolutionary synthesis of families of optimal two-dimensional circulant networks.] *Vestnik SibSUTIS*, 2014, no. 2, pp. 72–81. (in Russian)
34. *Zerovnik J. and Pisanski T.* Computing the diameter in multiple-loop networks. *J. Algorithms*, 1993, vol. 14, pp. 226–243.
35. *Romanov A.* The dataset for optimal circulant topologies. *Big Data Cogn. Comput.*, 2023, vol. 7, pp. 80.
36. *Monakhova E. A. and Monakhov O. G.* Generation and analysis of optimal double-loop circulant networks dataset. *Proc. CEUR Workshop SibDATA*, 2023. (to be published)

-
37. *Storn R. and Price K.* Differential evolution — A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *J. Global Optimization*, 1997, vol. 11, pp. 341–359.
 38. *Zaheer H., Pant M., Monakhov O., and Monakhova E.* Simple and efficient co-operative approach for solving multi modal problems. *Proc. ICEEOT*, Chennai, Tamilnadu, India, 2016, pp. 731–737.