ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.651 DOI 10.17223/20710410/64/7

УПРОЩЁННАЯ ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

В. Р. Осипов

г. Москва, Россия

E-mail: osvktr@bk.ru

Получен упрощённый вариант формулы суммирования Эйлера — Маклорена

$$\sum_{k=0}^{m} f(a+kh) = \frac{1}{h}\int_{y_0}^{y_m} f(y)\,dy - \sum_{k} h^{2k-1} b_k\big(f^{(2k-1)}(y_m) - f^{(2k-1)}(y_0)\big),$$

где $y_0 = a - h/2$; $y_m = a + (m+1/2)h$. Формула включает в себя интегральную оценку суммы дискретных отсчётов функции и поправку к ней в виде суммы ряда весовых граничных значений её нечётных производных. Упрощением является исключение из результата суммирования полусуммы граничных значений функции и достигается путём смещения hr отсчётов внутрь отрезков интегрирования. Доказывается, что оптимальным является смещение каждого отсчёта в середину отрезка $r = 1/2$. Это смещение задаёт пределы интегральной оценки y_0, y_m и значения весовых коэффициентов производных поправочного ряда. Найдено аналитическое выражение этих коэффициентов и их производящая функция

$$b_k = \frac{1-2^{1-2k}}{(2k)!} B_{2k},\ \ \Psi_b(t) = 1 - \frac{t}{2}\operatorname{cosech}\frac{t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{2k},$$

где B_{2k} — числа Бернулли. На примерах получения точных выражений сумм $\sum\limits_{k=1}^{m} k^n$, $\sum\limits_{k=k_0}^{m} a^{hk}$, где m, n — целые положительные числа, показана справедливость полученной формулы и производящей функции её коэффициентов. Формула была использована для получения приближённых выражений для дзета-функции Римана, пси-функции, полигамма функций, а также сумм бесконечных обратно-степенных рядов и гармонического ряда. На основании анализа погрешности этих выражений показаны преимущества упрощённой формулы перед формулой Эйлера — Маклорена в точности и краткости.

Ключевые слова: *сумма, ряд, коэффициент, производящая функция, число Бернулли, поправка, погрешность.*

SIMPLIFIED FORMULA FOR SUMMING DISCRETE VALUES OF SOME FUNCTIONS

V. R. Osipov

Moscow, Russia

The simplified variant of Euler — Maclaurin summation formula is obtained:
$$\sum_{k=0}^{m} f(a+kh) = \frac{1}{h}\int_{y_0}^{y_m} f(y)\,dy - \sum_k h^{2k-1} b_k\big(f^{(2k-1)}(y_m) - f^{(2k-1)}(y_0)\big),$$
where $y_0 = a - h/2$, $y_m = a + (m+1/2)h$. The formula includes an integrated estimation of the sum of function discrete samples and the correction to it in the form of the series sum of weight boundary values of its odd derivatives. Simplification is the exception a half-sum of boundary function values from summing result and is reached by shiftihg hr samples inside the integrated segments. The optimal value of this shift for each sample to the middle of the segment $r = 1/2$ is proven. This shift specifies integrated estimation limits y_0, y_m, and values of correction series weighting coefficients. The analytical expression of these coefficients and their generating function have been found: $b_k = \dfrac{1-2^{1-2k}}{(2k)!}B_{2k}$, $\Psi_b(t) = 1 - \dfrac{t}{2}\,\mathrm{cosech}\,\dfrac{t}{2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k t^{2k}$, where B_{2k} are Bernoulli numbers. Using examples of obtaining exact expressions for the sums $\sum\limits_{k=1}^{m} k^n$, $\sum\limits_{k=k_0}^{m} a^{hk}$, where $m, n \in \mathbb{N}$, the validity of the resulting formula and the generating function of its coefficients is shown. The formula was used to obtain approximate expressions for the Riemann zeta function, psi function, polygamma function, as well as sums of infinite inverse power series and harmonic series. Based on an analysis of the error of these expressions, the advantages of the simplified formula over the Euler — Maclaurin formula in terms of accuracy and brevity are shown.

Keywords: *sum, row, coefficient, generating function, Bernoulli's number, correction, error.*

Введение

Решения задач прикладной математики и асимптотические оценки некоторых специальных функций иногда сводятся к результату в виде суммы параметрического функционального ряда
$$S_m(a,h) = \sum_{k=0}^{m} f(a+kh), \tag{1}$$
где $f(y)$ — функция члена ряда, суммируемая в узлах равномерной сетки.

Сумму (1) можно оценить определённым интегралом от функционального члена в пределах значений k при условии его существования. Фундаментальной основой такого способа является формула суммирования Эйлера — Маклорена. Приведём вариант этой формулы из авторитетного справочника [1, (23.1.30)]:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} F(a+kh) = \frac{1}{h}\int_a^b F(t)dt + \frac{1}{2}(F(a)+F(b)) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\big(F^{(2k-1)}(b) - F^{(2k-1)}(a)\big) + \\ \ldots + \frac{h^{2n}}{(2n)!}B_{2n}\sum_{k=k_0}^{m-1} F^{(2n)}(a+kh+\theta h), \qquad h = \frac{b-a}{m},\end{aligned} \tag{2}$$

где B_{2k}, B_{2n} — числа Бернулли.

Формула (2) связывает результат суммирования $(m+1)$ значений (отсчётов) функции с интегралом от этой функции в заданных пределах и содержит, кроме него, полусумму крайних значений и поправочный ряд с остаточным n-м членом.

Целью работы является уточнение интегральной оценки и упрощение формулы суммирования за счёт избавления её от потенциально сравнимого с конечным результатом значения полусуммы.

1. Вывод упрощённой формулы суммирования

Для монотонных на интервале функций поставленную цель можно достигнуть, используя теорему о среднем значении на основе её утверждения о равенстве определённого интеграла на этом интервале значению функции в его промежуточной точке, умноженной на длину отрезка. При этом для разных интервалов смещение промежуточной точки относительно границ будет неодинаковым, зависящим от самой функции. Для одинакового значения этого положения внутри всех интервалов его следует оптимизировать с целью минимизации погрешности интегральной оценки.

1.1. Оптимизация положения функциональных отсчетов внутри интервалов

Представим непрерывную функцию ряда (1) как функцию дискретных значений (отсчётов) целочисленного аргумента, помещённых внутрь $(m-k_0+1)$ единичных интервалов. Представим результат суммирования этих отсчётов в виде разности интегральной оценки по всем интервалам и суммы дискретных поправок для каждого единичного интервала:

$$\sum_{k=k_0}^{m} f(k) = \int\limits_{k_0-r}^{m+1-r} f(k)\,dk - \sum_{k=k_0}^{m}\bigl(\varphi(k+1-r)-\varphi(k-r)\bigr), \tag{3}$$

где $\varphi(y)$ — функция поправки; $r<1$ — одинаковое для всех интервалов смещение от их нижних границ.

Найдём значение дискретной поправки к интегральной оценке на единичном интервале:

$$\Delta\varphi(k,r) = \varphi(k+1-r)-\varphi(k-r) = \int\limits_{k-r}^{k+1-r} f(k)\,dk - f(k). \tag{4}$$

Потребуем от подынтегральной функции, чтобы она была аналитической в пределах каждого из единичных интервалов, и представим её в виде разложения в степенной ряд Маклорена с радиусом сходимости $r<1$:

$$f(k+t) = f(k) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(k)}{n!}t^n.$$

Подставим это разложение в (4) и получим выражение для поправки в виде ряда

$$\Delta\varphi(k,r) = \int\limits_{k-r}^{k+1-r}\left(f(k)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(k)}{n!}t^n\right)dt - f(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(k)}{(n+1)!}\bigl((1-r)^{n+1}-(-r)^{n+1}\bigr). \tag{5}$$

Проанализируем значение общего множителя этих поправок $\theta_n(r) = (1-r)^{n+1} - (-r)^{n+1}$, для чего исследуем производную квадрата этой зависимости:

$$\bigl(\theta_n(r)^2\bigr)' = 2(n+1)\left((1-r)^{n+1}-(-r)^{n+1}\right)\left((1-r)^n-(-r)^n\right).$$

Легко видеть, что при $r = 1/2$ эта производная для любого n равна 0, что соответствует минимуму значения зависимости. При этом $\theta_n(1/2) = 0$ для всех нечётных n, $\theta_n(1/2) = (1/2)^n$ для всех чётных n, а при $r = 0$ или 1 для любых n имеет максимальное значение $|\theta_n(r)| = 1$. Таким образом, значение $r = 1/2$ обеспечивает минимизацию общего множителя, а также способствует сокращению числа членов разложения (5) за счёт исключения из него членов с нечётными индексами и обеспечивает сокращение радиуса его сходимости. С этой точки зрения, полагая оптимальным положение дискретного отсчёта $r = 1/2$ в середине единичного интервала, подставим это значение в (5) и произведя замену $n \to 2n$, получим

$$\Delta\varphi(k, 1/2) = \varphi(k + 1/2) - \varphi(k - 1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(k)}{2^{2n}(2n+1)!}. \tag{6}$$

1.2. Определение аналитического выражения функции поправки

Очевидно, что функция поправки $\varphi(y)$ должна быть связана с суммируемой функцией $f(y)$. Представим эту связь в виде функционального ряда

$$\varphi(y) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l f^{(l)}(y), \tag{7}$$

где b_l — весовые коэффициенты производных $f^{(l)}(y)$. Тогда функциональное выражение для дискретной поправки примет вид

$$\varphi(k + 1/2) - \varphi(k - 1/2) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \big(f^{(l)}(k + 1/2) - f^{(l)}(k - 1/2)\big). \tag{8}$$

Представим граничные значения производных в (8) в виде степенного ряда, используя формулы производных функции $f(y)$:

$$f^{(l)}(k \pm 1/2) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f^{(l+q)}(k)}{q!} (\pm 1/2)^q.$$

Подставим эти разложения в (8) и приравняем результат подстановки к правой части (6):

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f^{(l+q)}(k)}{q!} \left((1/2)^q - (-1/2)^q\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(k)}{2^{2n}(2n+1)!}. \tag{9}$$

Очевидно, что условием независимости коэффициентов b_l от значений производных функции является индексное равенство $l + q = 2n$. Поскольку $n \geqslant 1$, то $l + q \geqslant 2$. При этом выражение $(1/2)^q - (-1/2)^q = 2/2^q$ имеет ненулевое значение только для нечётных q, следовательно, индекс l также должен быть нечётным, а функция поправки (7) может быть представлена, как и в формуле Эйлера — Маклорена, функциональным рядом только с нечётными производными:

$$\varphi(y) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l f^{(2l-1)}(y). \tag{10}$$

Составим для преобразованных индексов новое уравнение $2q - 1 + 2l - 1 = 2n$. Решив его относительно q, получим условие $q = n - l + 1$, ограничивающее число значений индекса l числом n. Подставим преобразованные значения индексов в (9) и приравняем члены рядов правой и левой части с одинаковым индексом n:

$$\sum_{l=1}^{n} b_l \frac{f^{(2n)}(k)(1/2)^{2n-2l}}{(2n-2l+1)!} = \frac{f^{(2n)}(k)}{2^{2n}(2n+1)!}.$$

Сокращая в правой и левой части отношение $f^{(2n)}(k)/2^{2n}$, получаем независимую от суммируемой функции систему уравнений

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{c_l}{(2n-2l+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}, \tag{11}$$

где $c_l = 2^{2l} b_l$. Последовательно задавая значения $l = 1, 2, 3 \ldots$, вычисляем $b_l = \frac{1}{24}$, $-\frac{7}{5760}$, $\frac{31}{967680}$, ...

Для получения общего выражения для коэффициентов b_l найдём производящие функции коэффициентов степенных рядов правой и левой части (11). Для коэффициентов правой части используем разложение $\operatorname{sh} t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Вычитаем из него первый член, в результате имеем

$$\operatorname{sh} t - t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{12}$$

Производящую функцию левой части, ввиду присутствия в ней двух индексов, представим в виде произведения функций $\eta(t)\Psi_c(t)$ с нулевым значением при $t = 0$ и приравняем результат произведения их разложений в степенные ряды ряду (12):

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\eta^{(q)}(0)}{q!} t^q \sum_{l=1}^{\infty} \Psi_c^{(l)}(0)\, t^l = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \Psi_c^{(l)}(0) \frac{\eta^{(q)}(0)}{q!}\, t^{q+l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{13}$$

Сгруппируем члены ряда левой части (13) со степенью t в соответствии с уравнением $q + l = 2n + 1$. Решив уравнение относительно q, получим $q = 2n - l + 1$. Приравняем члены рядов правой и левой части (13) с одинаковой степенью t. Сократив в них t^{2n+1}, получим

$$\sum_{l=1}^{2n} \Psi_c^{(l)}(0) \frac{\eta^{(2n-l+1)}(0)}{(2n-l+1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Очевидно, что условиями идентичности этого выражения с (11) являются чётное значение индекса l, независимость от индекса n значения производных $\eta^{(2n-2l+1)}(0) = \mathrm{C}$ и равенство $\Psi_c^{(2l)}(0) = c_l/\mathrm{C}$, где C — константа. Таким образом, индекс q должен быть нечётным числом и разложение функции $\eta(t)$ является рядом Маклорена из нечётных степеней t с постоянным значением при $t = 0$ и нулевых значениях чётных производных. Этим требованиям соответствует разложение $\operatorname{sh} t$, в котором $\mathrm{C} = 1$. Отсюда следует равенство $\Psi_c^{(2l)}(0) = c_l$, и из (12) и (13) получаем уравнение $\operatorname{sh} t\, \Psi_c(t) = \operatorname{sh} t - t$, решив которое, получим производящую функцию для коэффициентов c_l из (11):

$$\Psi_c(t) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l t^{2l} = 1 - t \operatorname{cosech} t. \tag{14}$$

Далее, воспользовавшись разложением в степенной ряд [1, (4.5.65)]

$$\operatorname{cosech} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{7}{360}z^3 - \frac{31}{15120}z^5 + \ldots - \frac{2(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1} + \ldots \quad (|z| < \pi),$$

где B_{2n} — числа Бернулли, получим из (14)

$$\Psi_c(t) = 1 - t\left[\frac{1}{t} - \frac{t}{6} + \frac{7}{360}t^3 - \ldots - \frac{2(2^{2l-1}-1)B_{2l}}{(2l)!}t^{2l-1} + \ldots\right] = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{2(2^{2l-1}-1)B_{2l}}{(2l)!}t^{2l}.$$

Очевидно, что общий коэффициент этого ряда является коэффициентом c_l разложения в степенной ряд (14). Подставив его выражение в соотношение между коэффициентами из (11), получим

$$b_l = 2^{-2l}c_l = 2^{-2l}\frac{2(2^{2l-1}-1)B_{2l}}{(2l)!} = \frac{1-2^{1-2l}}{(2l)!}B_{2l}, \tag{15}$$

или, более кратко, на основании соотношения $B_n(1/2) = -(1-2^{1-n})B_n$ [1, (23.1.21)]

$$b_l = -\frac{B_{2l}(1/2)}{(2l)!}.$$

Для достаточно больших $l > 3$ формулу (15) можно упростить, используя ограничения для чисел Бернулли [1, (23.1.15)]:

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\frac{1}{1-2^{1-2n}} > (-1)^{n+1}B_{2n} > \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

Согласно соотношению между b_l и B_{2l} в (15), изменив обозначение l на n, умножим обе части этого неравенства на $\dfrac{1-2^{1-2n}}{(2n)!}$. В результате получим

$$\frac{2}{(2\pi)^{2n}} > (-1)^{n+1}b_n > \frac{2}{(2\pi)^{2n}}(1-2^{1-2n}).$$

Отсюда для достаточно больших n получим приблизительное равенство

$$b_n \simeq \frac{2(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}}. \tag{16}$$

Из соотношения между коэффициентами c_l и b_l нетрудно получить производящую функцию для коэффициентов b_l. Для этого воспользуемся преобразованием

$$\Psi_b(t) = \sum_{l=1}^{\infty}b_l t^{2l} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{c_l}{2^{2l}}t^{2l} = \sum_{l=1}^{\infty}c_l\left(\frac{t}{2}\right)^{2l} = \Psi_c\left(\frac{t}{2}\right).$$

Отсюда из (14) окончательно получаем

$$\Psi_b(t) = \sum_{l=1}^{\infty}b_l t^{2l} = 1 - \frac{t}{2}\operatorname{cosech}\frac{t}{2} = 1 - \frac{t\,\mathrm{e}^{t/2}}{\mathrm{e}^t - 1}. \tag{17}$$

Подставив в (10) выражение для весовых коэффицентов b_l (15), получим аналитическое выражение для функции поправки:

$$\varphi(y) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1-2^{1-2l}}{(2l)!}B_{2l}f^{(2l-1)}(y). \tag{18}$$

Представление функции поправки рядом из нечётных производных не противоречит представлению дискретной поправки (6) рядом высших чётных производных, так как последняя является разностью между граничными значениями функции поправки в единичном интервале.

Просуммируем дискретные поправки в (3), учитывая взаимное уничтожение их крайних значений на границе соседних интервалов $-\varphi((k+1)-1/2)+\varphi(k+1/2)=0$, и получим поправку к интегральной оценке в виде разности граничных значений функции $\varphi(y)$:

$$\sum_{k=k_0}^{m}\left(\varphi(k+1/2)-\varphi(k-1/2)\right)=\varphi(m+1/2)-\varphi(k_0-1/2).$$

1.3. Аналитическое выражение упрощённой формулы суммирования

Результатом оптимизации положения дискретных отсчётов суммируемой функции в середине единичных интервалов $r=1/2$ является определение как коэффициентов (15), так и границ интегральной оценки. Используя это значение и аналитическое выражение функции поправки (18), приведём формулу суммирования дискретных значений функций от целочисленного аргумента (3) к виду

$$\sum_{k=k_0}^{m} f(k)=\int\limits_{k_0-1/2}^{m+1/2} f(y)dy-\sum_{k}\frac{1-2^{1-2k}}{(2k)!}B_{2k}\big(f^{(2k-1)}(m+1/2)-f^{(2k-1)}(k_0-1/2)\big), \quad (19)$$

где $k=1,2,3,\ldots$; B_{2k} — числа Бернулли.

Общее выражение для формулы суммирования, сходное по виду с формулой Эйлера — Маклорена (2), можно получить, раскрывая параметрическую зависимость аргумента $y_k=a+kh$, где $a=a_0+k_0h$:

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{m} f(a+kh)=\frac{1}{h}\int\limits_{a-h/2}^{a+mh+h/2} f(y)\,dy-\ldots\\ -\sum_{k}^{n-1} h^{2k-1}\frac{1-2^{1-2k}}{(2k)!}B_{2k}\left(f^{(2k-1)}(a+m\,h+h/2)-y^{(2k-1)}(a-h/2)\right)+R_n.\end{gathered} \quad (20)$$

Для монотонных функций, поскольку все производные нечётного порядка $f^{(2k-1)}(y)$ не меняют знак, поправочный ряд в формулах (2) и (20) является знакопеременным, так как числа Бернулли поочерёдно меняют знак в соответствии с равенством $B_{2k}=(-1)^{k-1}|B_{2k}|$ [2, (9.611)]. Если при этом последний член этих рядов при неограниченном росте его индекса стремится к нулю, то, согласно признаку сходимости Лейбница знакопеременного ряда с монотонно убывающими членами, абсолютное значение остатка его суммирования не превышает абсолютного значения первого отбрасываемого в (20) члена $|R_n|\leqslant|A_n|$ [2, (0.227)], где $A_n = h^{2n-1}b_n\left(f^{(2n-1)}(a+m\,h+h/2)-y^{(2n-1)}(a-h/2)\right)$. В остальных случаях без исследования остатка суммирования поправочного ряда R_n знак равенства в формулах (19) и (20) является условным. Однако если производные а) $f^{(2n+2)}(y)$ и б) $f^{(2n+4)}(y)$ не меняют знак на всём интервале интегрирования, то, согласно свойствам поправочного ряда формулы Эйлера — Маклорена, $|R_n|=\theta|A_n|$, где $\theta<2$ в случае (а) и $\theta<1$ в случае (а+б) [1, примечание к формуле (25.4.7); 3, формула (21*), с. 542–543]. Это свойство можно применить в упрощённых формулах (19) и (20), используя сходство последней с (2), а также мажорирующее значение коэффициентов в (2) к коэффициентам b_k в (20). Их отношение $1/(1-2^{1-2k})$ больше 1 и стремится к 1 при $k\to\infty$. При этом первый коэффициент поправочного ряда в (20) вдвое меньше первого коэффициента формулы (2), что может быть существенным для приближённых оценок.

Таким образом, при сформулированных ограничениях для функции остаток суммирования поправочного ряда в (20) можно оценить выражением

$$|R_n| = \theta \left| b_n h^{2n-1} \left(f^{(2n-1)}(y_m) - f^{(2n-1)}(y_0) \right) \right|, \tag{21}$$

где b_n — коэффициент поправочного ряда (15); $\theta < 2$ при однозначности производной $f^{(2n+2)}(y)$ на всём интервале $[y_0, y_m]$ и $\theta < 1$ при дополнительной однозначности производной $f^{(2n+4)}(y)$.

Замечание 1. В случае равенств $f(k_0)=0$ в (19) или $f(a)=0$ в (20), не влияющих на значения итоговых сумм, использование приведённых в формулах нижних границ приведёт к ошибке. Для определения границ упрощённой формулы следует использовать только крайние значащие отсчёты суммируемой функции.

2. Применение упрощённой формулы для решения прикладных задач

Подтвердим справедливость полученной формулы и получим на её основе новые приближённые формулы.

2.1. Получение точных аналитических выражений

Найденную упрощённую формулу можно проверить, не прибегая к вычислениям, на примерах получения с её помощью точных аналитических выражений. Очевидно, что точное аналитическое выражение можно получить для функций с конечным числом членов поправочного ряда, то есть функций с ограниченным числом производных. Такой является, например, степенная функция $f(k)=(a+kh)^n$ с целочисленным показателем степени $n>0$. Согласно формулам (19) и (20), можно получить точное выражение для суммы такого ряда с любым показателем n. При этом количество членов поправочного ряда, входящих в выражение, равно $n/2$ для чётного n и $(n+1)/2-1$ для нечётного.

В качестве примера с помощью формулы (19) при $k_0=1$ найдём суммы целочисленных степенных рядов и сравним результаты суммирования с известными [2, (0.121)]:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \int_{1/2}^{n+1/2} k\,dk = \frac{1}{2}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] - \frac{1}{24}\left[2\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{2}\right] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right] - \frac{1}{24}\left[3\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2^2}\right] = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

$$\ldots$$

Дальнейшие результаты суммирования при повышении степени n подтверждают справедливость как границ интегральной оценки, так и значений весовых коэффициентов b_l при производных поправочного ряда.

В справедливости производящей функции коэффициентов b_l можно убедиться на примере суммирования членов геометрической прогрессии [2, (0.112)]:

$$\sum_{k=0}^{m} d^{ck} = \frac{d^{c(m+1)}-1}{d^c-1}.$$

Применим для суммы значений функции d^{ck} формулу (20), преобразовав её к виду $d^{ck} = \mathrm{e}^{hk}$, где $h = c\ln d$. Интегрируя в (20) преобразованную функцию при $a = 0$, получаем

$$\sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{hk} = (1/h)(\mathrm{e}^{h(m+1/2)} - \mathrm{e}^{-h/2}) - \varphi(h(m+1/2)) + \varphi(-h/2),$$

где $\varphi(hy)$ — функция поправки. Использовав равенство функции поправки ряду (10) и выражение для производящей функции (17) при $t = h$, приведём её к виду

$$\varphi(hy) = \mathrm{e}^{hy}\sum_{l=1}^{\infty} b_l h^{2l-1} = \mathrm{e}^{hy}\,\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{\infty} b_l h^{2l} = \mathrm{e}^{hy}\,\frac{1}{h}\Psi_b(h).$$

Таким образом, формулу искомой суммы можно определить, применяя выражение для производящей функции коэффициентов b_l:

$$\sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{hk} = \frac{\mathrm{e}^{h(m+1/2)} - \mathrm{e}^{-h/2}}{h} - \frac{\mathrm{e}^{h(m+1/2)} - \mathrm{e}^{-h/2}}{h}\Psi_b(h) = \frac{\mathrm{e}^{h(m+1/2)} - \mathrm{e}^{-h/2}}{h}(1 - \Psi_b(h)).$$

С помощью формулы (17) приведём выражение в скобках к виду $1 - \Psi_b(h) = \dfrac{h\,\mathrm{e}^{h/2}}{\mathrm{e}^{h} - 1}$ и подставим этот результат в предыдущее выражение. После несложных преобразований, используя подстановку $h = c\ln d$, окончательно получаем

$$\sum_{k=0}^{m} \mathrm{e}^{hk} = \frac{\mathrm{e}^{h(m+1/2)} - \mathrm{e}^{-h/2}}{h}\,\frac{h\,\mathrm{e}^{h/2}}{\mathrm{e}^{h} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{h(m+1)} - 1}{\mathrm{e}^{h} - 1} = \frac{d^{c(m+1)} - 1}{d^{c} - 1}.$$

Этот результат совпадает с выражением для суммы геометрической прогрессии, что доказывает справедливость найденного выражения для производящей функции весовых коэффициентов поправочного ряда.

С помощью производящей функции можно получить точные суммы линейных комбинаций показательной функции, например гиперболических функций $\mathrm{sh}\,(hk)$, $\mathrm{ch}\,(hk)$.

2.2. Общее выражение приближённых формул суммирования и их погрешность

Вычисление с помощью полученных формул приблизительных числовых значений сумм ограниченных функциональных рядов с заданными параметрами не имеет смысла, поскольку можно получить практически точный результат, используя компьютер. Приближённые аналитические выражения могут потребоваться для установления упрощённой функциональной связи результата суммирования с его параметрами, а также для получения его числовой оценки с требуемой точностью при неограниченном числе членов суммируемого ряда. Эти приближения неизбежны в случае бесконечного числа членов поправочного ряда в формулах (19) и (20) и ограничение их числа приведёт к погрешности итогового результата формул, равной остатку его суммирования. Из-за возможного большого различия граничных значений производных в формулах (19) и (20) целесообразно разделить поправочный ряд на два, с верхним и нижним значениями производных и разным количеством учитываемых членов с соответствующим остатком.

Разделяя ряд, представим формулу (20) в виде

$$\sum_{k=0}^{m} f(y_k) = \widehat{S_q^m}\big(f(y)\big) - \varphi_J(y_m) + \varphi_I(y_q) + \Delta_J(y_m) - \Delta_I(y_q).$$

Здесь приближённая интегральная оценка

$$\widehat{S_q^m}\big(f(y)\big) = \sum_{k=0}^{q} f(y_k) + \frac{1}{h}\int\limits_{y_q}^{y_m} f(y)\,dy; \tag{22}$$

$\varphi_J(y_m), \varphi_I(y_q)$ — поправка к оценке, представленная ограниченными рядами поправочной функции (18):

$$\varphi_I(y_q) = \sum_{i=1}^{I-1} b_i f^{(2i-1)}(y_q), \quad \varphi_J(y_m) = \sum_{j=1}^{J-1} b_j f^{(2j-1)}(y_m); \tag{23}$$

$\Delta_I(y_q), \Delta_J(y_m)$ — погрешности интегральной оценки, равные остаткам суммирования рядов (23), взятым с противоположным знаком, $y_q = a + (q + 1/2)h$, где q определяет вклад значения $\Delta_I(y_q)$ в погрешность интегральной оценки. Задавая граничные индексы $I, J = 1, 2, 3, \ldots$ и раскрывая числовые значения коэффициентов $b_{I,J+1}$ из (15), эти погрешности можно представить виде

$$-\Delta_I(y_q) = \left\{\frac{hf'(y_q)}{24}, -\frac{7h^3 f'''(y_q)}{5760}, \frac{31h^5 f^V(y_q)}{967680}, \cdots\right\}; \tag{24}$$

$$\Delta_J(y_m) = \left\{\frac{hf'(y_m)}{24}, -\frac{7h^3 f'''(y_m)}{5760}, \frac{31h^5 f^V(y_m)}{967680}, \cdots\right\}. \tag{25}$$

Значений погрешностей (24) и (25) интегральной оценки недостаточно для определения её точности. О ней можно судить, лишь вычислив относительную погрешность. При численно неопределённых параметрах суммирования эту погрешность можно определить приблизительно:

$$\widehat{\delta_q^m}(I, J) \simeq \frac{\Delta_J(y_m) - \Delta_I(y_q)}{\widehat{S_q^m}\big(f(y)\big)}. \tag{26}$$

В случаях известного результата суммирования относительную погрешность приближённой интегральной оценки можно определить с любой точностью:

$$\delta_q^m(I, J) = \frac{\widehat{S_q^m}\big(f(y)\big)}{\sum\limits_{k=0}^{m} f(y_k)} - 1. \tag{27}$$

2.3. Суммирование дискретных значений функции $f(y) = y^{-p}$

Очевидно, что при бесконечном числе отсчётов функции y^{-p} сумма существует только для $p > 1$. В остальных случаях при проведении оценки следует ограничивать число отсчётов.

Исследуем сходимость поправочного ряда, для чего найдём предел отношения значений соседних его членов $d_k = \dfrac{b_{k+1} f^{(2k+1)}(y)}{b_k f^{(2k-1)}(y)}$. Общее выражение для нечётных производных этой функции можно привести к виду

$$f^{(2k-1)}(y) = -\left(\frac{1}{y}\right)^{p+2k-1} \prod_{l=1}^{2k-1} (p + l - 1). \tag{28}$$

Отсюда, задавая $k = 1, 2, 3, \ldots$ и используя выражения для коэффициентов b_k (15) и (16), получаем

$$|d_k| = \left\{ \frac{(1+p)(2+p)}{34{,}2857y^2}, \frac{(3+p)(4+p)}{37{,}9355y^2}, \frac{(5+p)(6+p)}{39{,}0551y^2}, \ldots, \frac{(p+2k-1)(p+2k)}{39{,}4784y^2} \right\}.$$

Из выражения k-го члена этой последовательности следует $\lim\limits_{k\to\infty} |d_k| = \infty$, что противоречит признаку сходимости Даламбера $\lim\limits_{k\to\infty} |d_k| < 1$ [2, (0.222)]. Это означает, что поправочный ряд расходится для любых $y < \infty$. Поскольку все нечётные производные (28) отрицательны, поправочный ряд на их основе является знакопеременным из-за противоположности знаков b_n его соседних членов. При этом все чётные производные имеют положительный знак во всём интервале $[y_0, y_m]$. Отсюда, согласно (21), погрешность можно оценить первым отбрасываемым членом функции поправки при $\theta < 1$.

Из выражения для производной (28) видно, что погрешность оценки $\Delta_I(y_q)$ тем меньше, чем больше единицы нижняя граница интегральной оценки y_0. Поэтому если $y_0 < 1$, целесообразно просуммировать в соответствии с (22) начальные члены с $y_k < 1$ с целью установления нижней границы $y_q > 1$. Если число суммируемых отсчётов ограничено, а параметры a, h в (20) столь малы, что приводят к значительному количеству членов начальной суммы с $y_k < 1$, формулу (20) можно свести к оценке суммы отсчётов функции от целочисленного аргумента путём умножения каждого отсчёта на h^p и деления результата суммирования на h^{p+m+1} при $a > 0$ и на h^{p+m} при $a = 0$.

При $p \neq 1$ упрощённая интегральная оценка (23) примет вид

$$\widehat{S_q^m}(y^{-p}) = \sum_{k=0}^{q} y_k^{-p} + \frac{1}{(p-1)\, y_q^{p-1}} - \frac{1}{(p-1)\, y_m^{p-1}}, \tag{29}$$

где $y_q = a + (q + 1/2)h$; $y_m = a + (m + 1/2)h$; оценка по формуле Эйлера — Маклорена равна

$$S_q^{\mathrm{EM}}\left(y^{-p}\right) = \sum_{k=0}^{q} y_k^{-p} + \frac{1}{2y_q^p} + \frac{1}{(p-1)y_q^{p-1}} - \frac{1}{(p-1)y_m^{p-1}}, \tag{30}$$

где $y_q = a + (q+1)h$; $y_m = a + mh$.

Для численных расчётов с заданными параметрами p, a, h, m значение q определяется заданной погрешностью, а начальную сумму можно рассчитать на компьютере при практически неограниченном числе её членов. Тогда без учёта поправки ожидаемая погрешность в соответствии с (21) будет определяться первым членом поправочных рядов (23):

для упрощённой оценки

$$\Delta_1(y_{q,m}) = \frac{p}{24y_{q,m}^{p+1}}; \tag{31}$$

для формулы Эйлера — Маклорена

$$\Delta_1^{\mathrm{EM}}(y_{q,m}) = \frac{p}{12y_{q,m}^{p+1}}.$$

Поскольку $\Delta_1(y_m) \to 0$ при $m \to \infty$, увеличивая число членов начальной суммы q, можно обеспечить любую точность численной интегральной оценки.

Суммирование гармонического ряда $S_1^m(k^{-1}) = \sum\limits_{k=1}^{m} k^{-1}$

Этот ряд является расходящимся, поэтому число отсчётов m должно быть ограниченным. Известный ещё в начале прошлого века результат суммирования имеет вид [2, (0.131)]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = C + \ln(n) + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_k}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}, \tag{32}$$

где $C = \gamma$ — постоянная Эйлера; $A_2 = A_3 = 1/12$; $A_4 = 19/80$; $A_5 = 9/20, \ldots$

Представим в соответствии с (22) приближённую интегральную оценку этого ряда в виде

$$\widehat{S_q^m}\left(k^{-1}\right) = C_q + \ln(m+1/2), \text{ где } C_q = \sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k} - \ln(q+1/2).$$

Задавая значения $q = 1, 2, 3, 4, \ldots$, получим $C_q \simeq 0{,}594535, 0{,}583709, 0{,}58057, 0{,}579256,$ $0{,}577593, \ldots$ При дальнейшем увеличении q получим, согласно [1, (6.1.3)], $\lim\limits_{q\to\infty} C_q = \gamma$, где $\gamma = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,5\ldots$ — постоянная Эйлера.

Очевидно, что для такой оценки поправка $\varphi_I(y_q) = 0$ и погрешность $\Delta_I(y_q) = 0$. Отсюда, согласно (19), используя при $p = 1$ выражение для производной (28) $f^{(2k-1)}(y) = -y^{-2k}(2k-1)!$, представим упрощённую формулу суммирования гармонического ряда в виде

$$S_1^m\left(k^{-1}\right) = \gamma + \ln(m+1/2) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-2^{1-2k})B_{2k}}{2k(m+1/2)^{2k}}. \tag{33}$$

Аналогичным способом можно получить из (2) формулу

$$S_{\mathrm{EM}}^m(k^{-1}) = \gamma + \ln m + \frac{1}{2m} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2km^{2k}}. \tag{34}$$

Отметим, что интегральные оценки формул (32) и (34) совпадают, причём и первые члены поправочного ряда при больших m, n практически равны. Получим из (33) и (34) приближённые выражения, удерживая в них не более двух членов, зависящих от верхнего индекса m:

$$\widehat{S}_{10}^m\left(k^{-1}\right) = \gamma + \ln(m+1/2); \tag{35}$$

$$\widehat{S}_{11}^m\left(k^{-1}\right) = \gamma + \ln(m+1/2) + \frac{1}{24(m+1/2)^2}; \tag{36}$$

$$\widehat{S}_{\mathrm{EM}}^m\left(k^{-1}\right) = \gamma + \ln(m) + \frac{1}{2m}. \tag{37}$$

Взятый с обратным знаком третий член формулы (36), в соответствии с (21), определяет приближённую погрешность формулы (35) $\Delta_1(m) = -\dfrac{1}{24(m+1/2)^2}$.

Найдём, согласно (26) и (27), относительные погрешности приближённых формул (35)–(37) и сравним их между собой:

$$\widehat{\delta}_{01}(m) = \frac{\Delta_1(m)}{\widehat{S}_{10}^m\left(k^{-1}\right)},\ \delta_{10}(m) = \frac{\widehat{S}_{10}^m\left(k^{-1}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{m}k^{-1}} - 1,\ \delta_{11}(m) = \frac{\widehat{S}_{11}^m\left(k^{-1}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{m}k^{-1}} - 1,\ \delta_{EM}(m) = \frac{S_{EM}^m\left(k^{-1}\right)}{\sum\limits_{k=1}^{m}k^{-1}} - 1.$$

Результаты вычислений этих погрешностей приведены в табл. 1.

Таблица 1

Относительные погрешности интегральных оценок сумм гармонического ряда

m	3	10	100	1000
$\delta_{\mathrm{EM}}(m)$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2{,}84 \cdot 10^{-4}$	$1{,}61 \cdot 10^{-6}$	$1{,}11 \cdot 10^{-8}$
$\widehat{\delta}_{10}(m)$	$-1{,}86 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}29 \cdot 10^{-4}$	$-7{,}95 \cdot 10^{-7}$	$-5{,}56 \cdot 10^{-9}$
$\delta_{10}(m)$	$-1{,}83 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}29 \cdot 10^{-4}$	$-7{,}95 \cdot 10^{-7}$	$-5{,}56 \cdot 10^{-9}$
$\delta_{11}(m)$	$2{,}55 \cdot 10^{-5}$	$2{,}04 \cdot 10^{-7}$	$1{,}38 \cdot 10^{-11}$	$8{,}88 \cdot 10^{-16}$

Сравнив табличные результаты, можно сделать следующие выводы:

— все приближённые формулы (35)–(37) обеспечивают хорошую точность суммирования даже для малых значений m;

— приближённая $\widehat{\delta}_{10}(m)$ и реальная $\delta_{10}(m)$ погрешности формулы (35) практически совпадают;

— приближённая формула (35), представленная одним зависящим от индекса m членом, более чем в 2 раза точнее формулы (37), полученной из формулы Эйлера — Маклорена и представленной двумя такими членами;

— приближённая формула (36), представленная двумя зависящими от m членами, на несколько порядков точнее формул (35) и (37).

Численные расчёты сумм бесконечных рядов k^{-p} с показателем степени $p > 1$

Формулы для этих расчётов можно получить из выражений (29)–(31), задавая параметры $a = 0$, $h = 0$ и $m = \infty$:

$$\widehat{S}_q(k^{-p}) = \sum_{k=1}^{q} k^{-p} + \frac{1}{(p-1)(q+1/2)^{p-1}}; \tag{38}$$

$$S_q^{\mathrm{EM}}(k^{-p}) = \sum_{k=1}^{q} k^{-p} + \frac{1}{2(q+1)^p} + \frac{1}{(p-1)(q+1)^{p-1}}; \tag{39}$$

$$\Delta_{1q}(k^{-p}) = -\frac{p}{24(q+1/2)^{p+1}}. \tag{40}$$

Формула (40) задаёт приближённую погрешность формулы (38), зависящую от количества членов начального ряда q. Задавая q, можно сколько угодно уменьшать эту погрешность, однако её использование в качестве реальной следует проверить. Реальную погрешность можно вычислить, применяя известные точные значения сумм рядов, например рядов с чётным целочисленным показателем p [2, (0.233.3)]:

$$S_1^{\infty}(k^{-p}) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2n} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} \left| B_{2n} \right|.$$

Используя значения этих сумм, можно вычислить реальную погрешность (27) формулы (38) и сравнить её с относительной погрешностью (26) и с реальной погрешностью формулы (39), полученной из формулы Эйлера — Маклорена (2):

$$\delta_q^p = \frac{\widehat{S}_q(k^{-p})}{S_1^{\infty}(k^{-p})} - 1,\ \widehat{\delta}_q^p = \frac{\Delta_{1q}(k^{-p})}{\widehat{S}_q(k^{-p})},\ \delta_q^{\mathrm{EM}} = \frac{S_q^{EM}(k^{-p})}{S_1^{\infty}(k^{-p})} - 1.$$

На рис. 1 представлены графики десятичного логарифма приближённой относительной погрешности $\widehat{\delta}_q^p$ вычисления сумм бесконечных рядов k^{-p} по формуле (38) при $p \in [1{,}5, 14]$ и количестве членов начальной суммы $q = 10, 100, 1000$. Маркерами отмечены реальные относительные погрешности δ_q^p для чётных значений $p = 2, \ldots, 12$. Для тех же чётных p в табл. 2 приведены числовые значения реальной погрешности δ_q^p формулы (38), отношения её приближённой погрешности к реальной $\widehat{k_q^p} = \widehat{\delta_q^p}/\delta_q^p$ и отношения реальных погрешностей $k_q^{\mathrm{EM}} = \delta_q^{\mathrm{EM}}/\delta_q^p$.

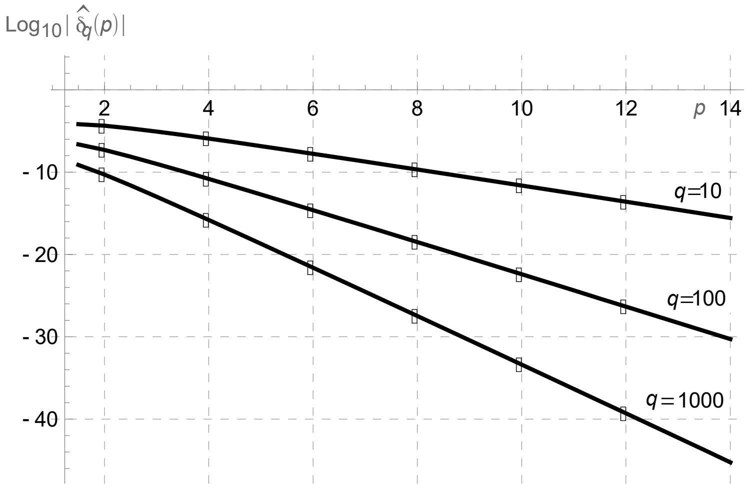

Рис. 1. Относительные погрешности формул суммирования бесконечных рядов k^{-p}

Таблица 2

Относительные погрешности вычисления сумм бесконечных рядов k^{-p} с чётным показателем p

q	Формула	Значение суммы					
		$\pi^2/6$	$\pi^4/90$	$\pi^6/945$	$\pi^8/9450$	$\pi^{10}/93555$	$691\pi^{12}/638512875$
		p					
		2	4	6	8	10	12
10	δ_q^p	$4{,}36 \cdot 10^{-5}$	$1{,}20 \cdot 10^{-6}$	$1{,}72 \cdot 10^{-8}$	$2{,}09 \cdot 10^{-10}$	$2{,}35 \cdot 10^{-12}$	$2{,}53 \cdot 10^{-14}$
	$\widehat{k_q^p}$	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,05
	k_q^{EM}	−0,574	−0,629	−0,688	−0,752	−0,821	−0,895
100	δ_q^p	$4{,}99 \cdot 10^{-8}$	$1{,}50 \cdot 10^{-11}$	$2{,}37 \cdot 10^{-15}$	$3{,}17 \cdot 10^{-19}$	$3{,}94 \cdot 10^{-23}$	$4{,}68 \cdot 10^{-27}$
	$\widehat{k_q^p}$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	k_q^{EM}	−0,507	−0,513	−0,518	−0,523	−0,528	−0,533
1000	δ_q^p	$5{,}06 \cdot 10^{-11}$	$1{,}54 \cdot 10^{-16}$	$2{,}45 \cdot 10^{-22}$	$3{,}30 \cdot 10^{-28}$	$4{,}14 \cdot 10^{-34}$	$4{,}97 \cdot 10^{-40}$
	$\widehat{k_q^p}$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	k_q^{EM}	−0,501	−0,501	−0,502	−0,502	−0,503	−0,503

Данные графиков и результаты расчётов позволяют сделать следующие выводы:

— если значение суммы неизвестно, то погрешность её расчёта можно задавать при достаточно большом количестве членов начальной суммы, благодаря практически равным при этом приближённой и реальной погрешностей;

— увеличивая количество членов начальной суммы, можно задавать практически любую точность результата суммирования;

— формула (38), несмотря на более короткую форму, почти вдвое точнее формулы (39), полученной из формулы Эйлера — Маклорена.

Приближённые формулы суммирования бесконечных рядов k^{-p} при $p > 1$

Задачей приближённых формул является упрощение связи результата суммирования с параметрами суммируемой функции. Для создания приближённых формул сумм бесконечных рядов k^{-p} можно использовать формулы (38) и (39) с небольшим количеством членов начальной суммы. Удерживая не более двух таких членов, из них получим:

— (38) при $q = 1$, без поправки, с приближённой погрешностью $\Delta_{10} = \dfrac{p}{24(3/2)^{p+1}}$:

$$\widehat{S_{10}}(k^{-p}) = 1 + \frac{1}{(p-1)(3/2)^{p-1}}; \tag{41}$$

— (38) при $q = 2$, без поправки, с приближённой погрешностью $\Delta_{20} = \dfrac{p}{24(5/2)^{p+1}}$:

$$\widehat{S_{20}}(k^{-p}) = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{(p-1)(5/2)^{p-1}}; \tag{42}$$

— (38) при $q = 1$, с первым членом поправки, с приближённой погрешностью $\Delta_{11} = \dfrac{7p(p+1)(p+2)}{5760(3/2)^{p+3}}$:

$$\widehat{S_{11}}(k^{-p}) = 1 + \frac{1}{(p-1)(3/2)^{p-1}} - \frac{p}{24(3/2)^{p+1}}; \tag{43}$$

— (39) при $q = 1$, без поправки, с приближённой погрешностью $\Delta_{\text{em}} = \dfrac{p}{12 \cdot 2^{p+1}}$:

$$S_{10}^{\text{EM}}(k^{-p}) = 1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{(p-1)2^{p-1}}. \tag{44}$$

По этим формулам, согласно (26), рассчитаны приближённые относительные погрешности. Для их сравнения с реальной погрешностью с помощью (38) и (39)) при $q = 1000$ рассчитаны уточнённые суммы и, в соответствии с (27), уточнённые относительные погрешности. Результаты расчётов приведены на рис. 2, где пунктиром показаны приближённые погрешности, сплошной линией — уточнённые.

По результатам проведённых расчётов можно сделать следующие выводы:

— кривые приближённой погрешности имеют сходную с соответствующей уточнённой погрешностью траекторию и находятся в её пределах, что доказывает справедливость формулы (21) для оценки остатка суммирования поправочного ряда;
— наилучшее приближение $\delta_{20}(p) < 0{,}3\,\%$ даёт формула (42), наихудшее $\delta_{10}(p) < 1{,}7\,\%$ — самая простая (41);
— формула (43), содержащая поправку, не имеет преимуществ в точности при $p > 2{,}5$;
— приближённые погрешности и их близость к уточнённым сильно зависят от количества членов начальной суммы q;
— сравнение погрешностей $\delta_{20}(p)$ формулы (42) и $\delta_{\text{em}}(p)$ формулы Эйлера — Маклорена (44), содержащих по два зависящих от p члена, вновь указывает на преимущество упрощённой формулы суммирования.

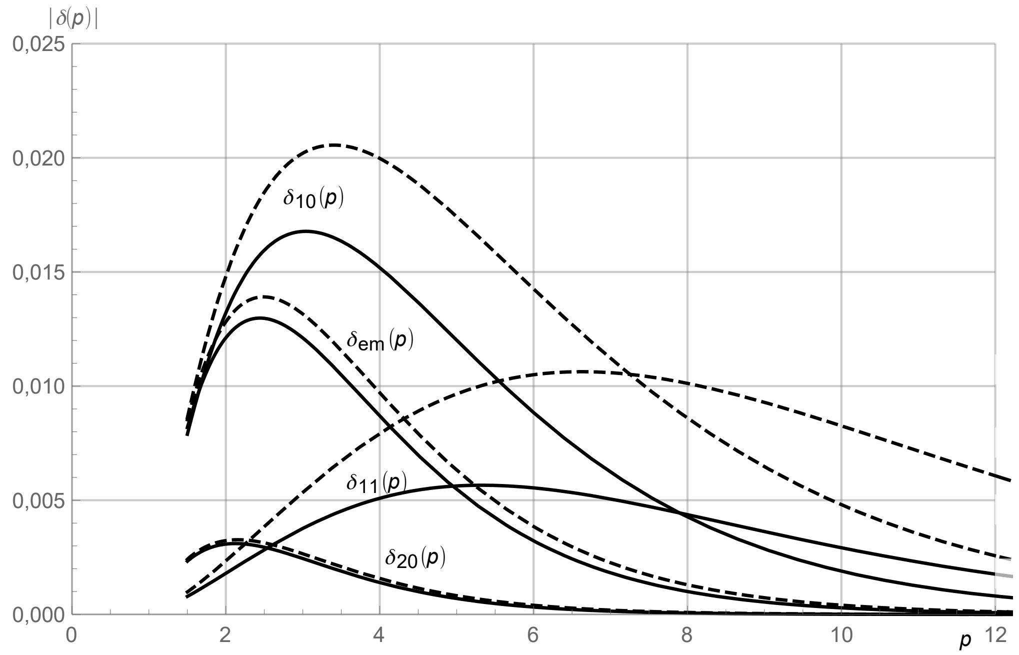

Рис. 2. Относительные погрешности приближённых формул суммирования бесконечных рядов k^{-p}

2.4. Упрощённые формулы некоторых специальных функций

На конечных и бесконечных суммах обратностепенных числовых рядов основаны выражения и оценки для некоторых специальных функций.

Приближённое выражение для дзета-функции Римана

Классическое представление этой функции в виде ряда Дирихле имеет вид [4, с. 58]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

где $s = \sigma + it$ и ряд сходится к аналитической функции при $\sigma > 1$.

В п. 2.3 проведён сравнительный анализ приближённых формул для такого ряда в отсутствие мнимого аргумента ($t = 0$). Проверим их справедливость при $t \neq 0$. Для этого используем формулу (42), содержащую два члена начальной суммы:

$$\widehat{\zeta}_{20}(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(s-1)(5/2)^{s-1}}, \tag{45}$$

и более точную, содержащую поправку к ней:

$$\widehat{\zeta}_{21}(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(s-1)(5/2)^{s-1}} - \frac{s}{24(5/2)^{s+1}}. \tag{46}$$

Рис. 3 и 4, где приведены графики зависимости погрешностей абсолютных значений $|\widehat{\zeta}_{20}(s)|$ и $|\widehat{\zeta}_{21}(s)|$ от комплексного аргумента относительно истинного абсолютного значения дзета-функции $|\zeta(s)|$, указывают на вполне удовлетворительную ($|\widehat{\zeta}_{20}(s)| < 10\,\%$ для (45) и $|\widehat{\zeta}_{21}(s)| < 5\,\%$ для (46)) точность оценки значений дзета-функции в пределах изменения аргументов $|s| \in [1, 10]$, $\varphi_s \in [-\pi/2, \pi/2]$. Приближение s к мнимому значению $\varphi_s \to \pm\pi/2$ значительно увеличивает погрешность формул при увеличении $|s|$.

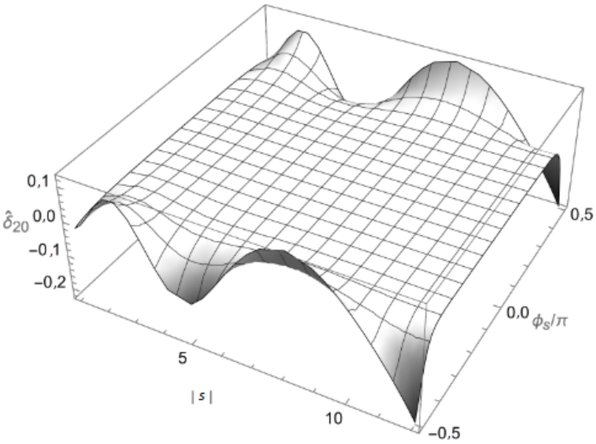

Рис. 3. Относительная погрешность приближённого абсолютного значения дзета-функции (45) на комплексной плоскости

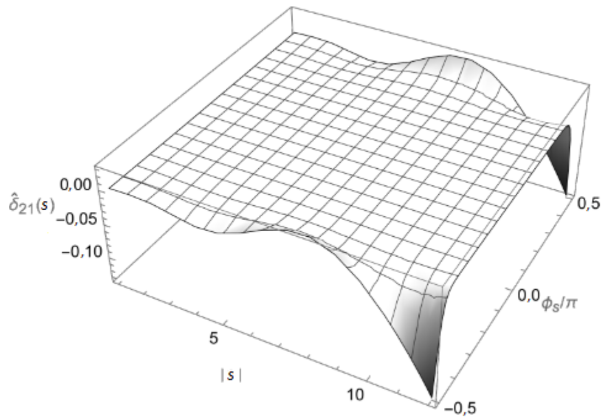

Рис. 4. Относительная погрешность приближённого абсолютного значения дзета-функции (46) на комплексной плоскости

Приближённые формулы для пси-функции

Для вывода приближённого выражения пси-функции (или дигамма-функции) из всего многообразия её представлений воспользуемся формулой для целочисленного аргумента [1, (6.3.2)]

$$\psi(n) = \begin{cases} -\gamma, & \text{если } n = 1, \\ -\gamma + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k^{-1}, & \text{если } n \geqslant 2, \end{cases} \tag{47}$$

где γ — постоянная Эйлера.

В этой формуле присутствует сумма гармонического ряда, для которого найдены приближённые выражения — простейшее (35) и более точное (36). С их помощью получим следующие приближённые формулы:

$$\widehat{\psi}_0(n) = \ln(n - 1/2); \tag{48}$$

$$\widehat{\psi}_1(n) = \ln(n - 1/2) + \frac{1}{24(n - 1/2)^2}. \tag{49}$$

Проверим справедливость этих формул для любых действительных $n = z > 1/2$. На рис. 5 представлены графики этих зависимостей в сравнении с реальным значением пси-функции $\psi(z)$. Как видно из графиков, зависимости значительно отклоняются от реальной при $z \to 1/2$, поскольку при этом значении аргумента в формулах (48) и (49) возникает неопределённость. От этого недостатка можно избавиться, прибавляя к сумме в (47) член $1/n$ и вычитая его из итоговой оценки. Модифицированные таким образом формулы (48), (49) при $n = z$ примут вид

$$\widehat{\psi}_{01}(z) = \ln(z + 1/2) - \frac{1}{z}; \tag{50}$$

$$\widehat{\psi}_{11}(z) = \ln(z + 1/2) - \frac{1}{z} + \frac{1}{24(z + 1/2)^2}. \tag{51}$$

На рис. 6 приведены графики относительной погрешности формул (50), (51) при значениях аргумента $0{,}01 \leqslant z \leqslant 0{,}5$.

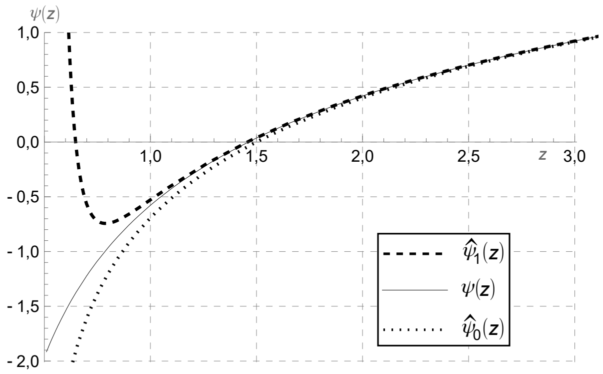

Рис. 5. Приближённые формулы пси-функции (48), (49) в сравнении с реальным её значением

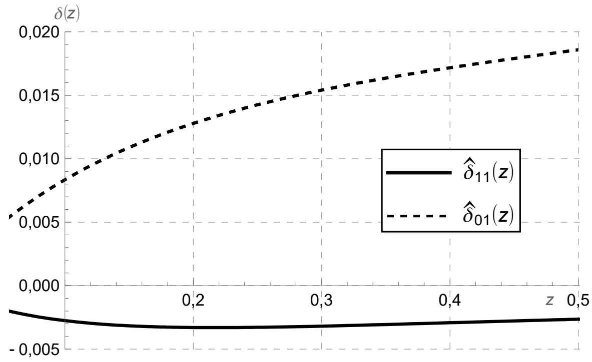

Рис. 6. Относительная погрешность приближённых формул (50), (51) при значениях аргумента $z \leqslant 1/2$

Все рассмотренные приближённые зависимости с ростом z асимптотически стремятся к значению $\ln z$, что соответствует свойствам пси-функции [1, (6.3.18)].

Приближённые формулы для полигамма-функций

Полигамма-функцией порядка n является n-я производная пси-функции [1, (6.4.1)]

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\psi(z). \tag{52}$$

Для целого аргумента этих функций существует выражение [1, (6.4.2)]

$$\psi^{(m)}(n+1) = (-1)^m m! \left[-\zeta(m+1) + 1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{n^{m+1}}\right], \tag{53}$$

где $\zeta(m+1)$ — дзета-функция Римана.

Выражение в квадратных скобках можно преобразовать, используя определение дзета-функции

$$-\zeta(m+1) + 1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{n^{m+1}} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{m+1}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{m+1}} = -\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{m+1}}.$$

Вынося из суммы первый член $1/(n+1)^{m+1}$ и преобразуя аргумент $n+1 \to n$, из (53) получаем

$$\psi^{(m)}(n) = (-1)^{m-1} m! \left[\frac{1}{n^{m+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{m+1}}\right].$$

Подставляя в это выражение вместо суммы её упрощённую интегральную оценку $\displaystyle\int_{m+1/2}^{\infty}\frac{1}{k^{m+1}} = \frac{1}{m(n+1/2)^m}$, имеем

$$\widehat{\psi}^{(m)}(n) = (-1)^{m-1} m! \left[\frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{m(n+1/2)^m}\right]. \tag{54}$$

Проинтегрировав (54) при $m=1$, $n=z$ по z, получим результат $\ln(z+1/2) - 1/z$, полностью совпадающий с упрощённой интегральной оценкой пси-функции (50). Вынос члена суммы $1/(n+1)^{m+1}$ понадобился, как в (50), для устранения неопределённости в приближённых выражениях полигамма-функций при $z = 1/2$.

Проверим возможность использования приближённых выражений пси-функции (50), (51) для получения выражений полигамма-функций, взяв в соответствие с (52) их производные

$$\widehat{\psi}_{x1}^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n}\widehat{\psi}_{x1}. \tag{55}$$

На рис. 7 и 8 приведены графики погрешности производных (55) приближённых выражений пси-функции (50), (51) относительно реальных значений соответствующих полигамма-функций. Максимальная относительная погрешность формулы (55) относительно значений полигамма-функций для приближённого выражения пси-функции $\widehat{\psi}_{01}^{(n)}(z)$ (50) до десятого порядка не превышает 2,5 %, для пси-функции $\widehat{\psi}_{11}^{(n)}(z)$ (51) — 0,7 %.

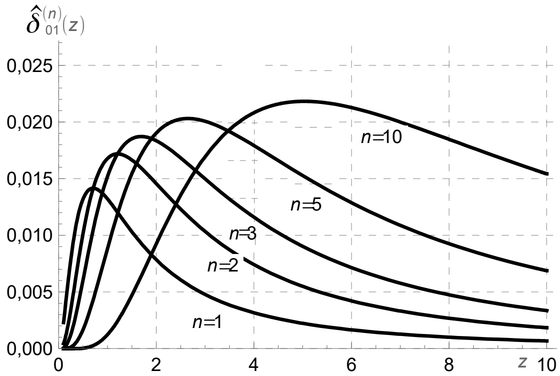

Рис. 7. Относительная погрешность формулы (55) для функции $\widehat{\psi}_{01}^{(n)}(z)$ (50)

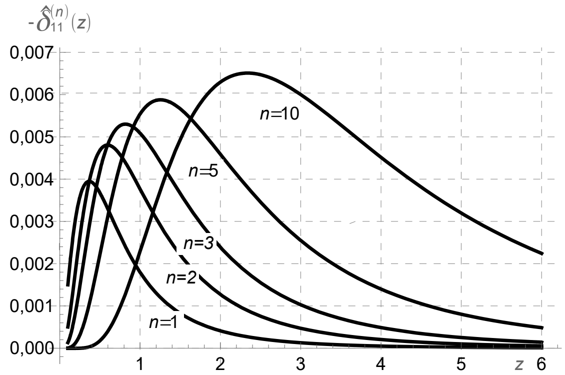

Рис. 8. Относительная погрешность формулы (55) для функции $\widehat{\psi}_{11}^{(n)}(z)$ (51)

Заключение

Полученные приближённые аналитические выражения для дзета-функции Римана, пси-функции, полигамма-функций, а также сумм обратно степенных рядов и гармонического ряда демонстрируют непрямой порядок применения упрощённой формулы суммирования. При их выводе были использованы начальное суммирование для уменьшения погрешности оценки и прибавление дополнительного члена к оцениваемой сумме с вычитанием его из итоговой оценки для устранения в ней неопределённости. Полученные формулы выявили некоторое преимущество применения упрощённой формулы перед формулой Эйлера — Маклорена (2) в краткости и погрешности. Этим она оправдывает своё прикладное значение и существование в качестве ещё одного варианта формулы суммирования Эйлера — Маклорена. Однако, в отличие от последней, она неприменима для оценки интегралов в пределах, совпадающих с позицией граничных отсчётов функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1963. 1108 с.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. 7-е изд. М.: Наука, Физматгиз, 1970. 800 с.
4. *Уиттеккер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1963. 500 с.

REFERENCES

1. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.). N.Y., Dover Publ., 1964.
2. *Gradshteyn I. S. and Ryzhik I.M.* Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 1108 p. (in Russian)
3. *Fikhtengol'ts G. M.* The Fundamentals of Mathematical Analysis. Elsevier Ltd., 1965.
4. *Whittaker E. T. and Watson G. N.* A Course of Modern Analysis. 4th Ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1927.