# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

УДК 519.816 DOI 10.17223/20710410/65/7

## О СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВА ВЕСОВ ГОЛОСУЮЩИХ ПРОЦЕДУР

С. К. Иванов

*Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского, г. Москва, Россия*

**E-mail:** sergey.k.ivanov@gmail.com

Изучена структура пространства весов самодвойственных пороговых функций, используемых в процедурах голосования при принятии решений, для размерностей 2–6. Найдены экстремальные векторы многогранных конусов, представляющих эти пороговые функции в пространстве весов.

**Ключевые слова:** *голосующие процедуры, алгоритмы голосования, пороговые фукции, принятие решений.*

## ON A STRUCTURE OF VOTING PROCEDURES WEIGHTS SPACE

S. K. Ivanov

*Moscow State University of Technology and Management named after K. G. Razumovsky, Moscow, Russia*

The structure of the self-dual threshold functions space of weights used in voting decision-making procedures has been studied for dimensions 2–6. Extremal vectors of polyhedral cones representing these threshold functions in the space of weights have been found.

**Keywords:** *voting procedures, voting algorithms, threshold functions, decision making.*

### Введение

Исторически изучение процедур голосования при принятии решений (которые далее кратко будем называть просто голосующими процедурами) восходит к работам Н. Кондорсе [1] и А. Пуанкаре [2]. Кондорсе систематически изучил правило голосования по большинству с вероятностной точки зрения и применил его к практике анализа свидетельских показаний и вынесения решений присяжными. Позже Пуанкаре критиковал его за склонность слишком прямолинейно применять абстрактные вероятностные результаты к реальной жизни человеческих судебных процессов. Но во времена Кондорсе трудно было найти область применения его исследований вне гуманитарных наук.

Ситуация коренным образом изменилась в XX в., когда вопрос достоверности остро встал практически в каждой задаче, связанной с приёмом сообщений, распознаванием образов, принятием решений и другими видами обработки информации. Общий подход к решению этих проблем, предполагающий дублирование информационных каналов и использование мажоритарного голосования для принятия решений, впервые появился, по-видимому, в работе фон Неймана [3], рассматривавшего проблему повышения надёжности логических автоматов. В. Пирс [4] изучил общее взвешенное голосование, нашёл оптимальное решающее правило для случая независимых голосователей и предложил принцип самообучения для взвешенного голосования, подразумевающий подстройку весов на основании результатов сравнения решения проголосовавшей системы с решениями отдельных голосователей.

Описанный подход может использоваться во многих ситуациях, таких, как: а) экспертные решения или анализ показаний свидетелей; б) распознавание образов, когда одновременно используются разные алгоритмы распознавания; в) логические схемы, которые используют резервные блоки для повышения надёжности; г) многоканальные системы телеметрии и радиосвязи с разнесением каналов, например по несущей частоте, и т. д.

С формальной точки зрения голосующие процедуры описываются самодвойственными пороговыми булевыми функциями с положительными весами. В [5–7] изучены различные аспекты голосующих процедур, включая вероятностные характеристики их надёжности и процессы обучения и самообучения соответствующих пороговых функций. В работе [8] получена асимптотика логарифма числа пороговых функций, которая была несколько улучшена в [9]. Кроме того, достаточно полный обзор теории пороговых функций можно найти, например, в [10, 11]. Многие полученные к настоящему времени результаты носят асимптотический характер. Это обусловлено упрощением математической техники при таком подходе. Однако с точки зрения приложений представляет особый интерес получение точных результатов для конечных размерностей, возможно, с применением численных методов. Численные методы в теории пороговых функций с успехом применялись для определения количества различных классов пороговых функций [11, 12].

Для того чтобы перейти к рассмотрению характеристик взвешенного голосования для конечных размерностей, необходимо прежде понять структуру пространства их весов. Каждой самодвойственной пороговой функции с положительными весами соответствует некоторый многогранный конус, лежащий в неотрицательном ортанте пространства весов. При этом конусы весов всех таких функций заполняют весь ортант. Такие конусы являются зонами нечувствительности голосующих процедур к изменению весов соответствующих им пороговых функций, т. е. если рассматривать вероятность ошибки принятия решения как функцию вектора весов, то она имеет дискретный (ступенчатый) вид. Получение информации о явном виде этих зон нечувствительности полезно для разработки и анализа алгоритмов самообучения систем, основанных на принципе взвешенного голосования. Указанные конусы весов задаются экстремальными векторами, выпуклыми оболочками которых они являются. Экстремальные векторы могут быть найдены как решения некоторых систем однородных линейных неравенств, что позволяет перечислить и в явном виде указать все конусы.

Данная работа посвящена нахождению экстремальных векторов для нескольких конечных размерностей. Для практических надобностей, как правило, используются нечётные размерности и бывает вполне достаточно голосующих процедур размерности 5.

## 1. Голосующие процедуры принятия решений

Традиционно при анализе голосующих процедур принятия решений мы рассматриваем абстрактную информационную систему, состоящую из $n$ каналов, по которым передаются одни и те же данные в виде двоичных символов. Реальная природа канала не представляет интереса. Это может быть отдельный эксперт, свидетель, алгоритм распознавания, радиоканал и т. п. Когда символ $z \in \{-1, 1\}$ передаётся по каждому из $n$ каналов, на выходе $i$-го канала появляется некоторый символ $y_i \in \{-1, 1\}$, из-за шумов в канале не обязательно совпадающий с $z$. Возникает задача отыскания булевой функции $f(\mathbf{y}) = f(y_1, \ldots, y_n) : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$, дающей наиболее надёжную оценку $z$.

Даже не имея информации о вероятностях ошибок в каналах, можно тем не менее провести некоторый качественный анализ.

Во-первых, если нет информации о каналах и нет причин предпочесть один канал другому, нужно выбрать $f(\mathbf{y})$, которая не меняет значения ни при каких перестановках аргументов, т. е. $f(\mathbf{y})$ должна быть симметричной.

Во-вторых, если мы считаем многоканальную информационную систему симметричной относительно 1 и $-1$, то $f(\mathbf{y})$ должна удовлетворять соотношению $f(-\mathbf{y}) = -f(\mathbf{y})$, т. е. $f(\mathbf{y})$ должна быть самодвойственной.

В-третьих, если каналы не являются «лжецами», нужно выбрать такую $f(\mathbf{y})$, которая не уменьшается при замене некоторого из $y_i$ с $-1$ на 1, т. е. $f(\mathbf{y})$ должна быть монотонной. Оказывается, что при чётном $n$ такой функции нет, а при нечётном $n$ единственной булевой функцией, удовлетворяющей этим трём требованиям, является мажоритарная пороговая функция $f(\mathbf{y}) = \operatorname{sign}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$.

Действительно, для каждого $\mathbf{y} \in \{-1, 1\}^n$ обозначим через $|\mathbf{y}|$ количество компонент, равных 1, и положим $L_i = \{\mathbf{y} \in \{-1, 1\}^n : |\mathbf{y}| = i\}$. Поскольку $f(\mathbf{y})$ симметрична, она постоянна на каждом $L_i$. Кроме того, $f(\mathbf{y})$ монотонна, так что если $f(\mathbf{y}) = 1$ на $L_i$, то $f(\mathbf{y}) = 1$ на $L_j$ при всех $j > i$. Пусть $f(\mathbf{y}) = -1$ на $L_k$ и $f(\mathbf{y}) = 1$ на $L_{k+1}$. Из самодвойственности $f(\mathbf{y})$ следует, что $f(\mathbf{y}) = -1$ на $L_{n-k-1}$ и $f(\mathbf{y}) = 1$ на $L_{n-k}$. Отсюда следует, что $n-k = k+1$, то есть $n = 2k+1$ и $f(\mathbf{y})$ является мажоритарной функцией. Этот результат в некоторой степени объясняет, почему голосование по большинству так широко используется.

Для получения более полного представления о состоянии дел в данной предметной области приведём ряд результатов, следуя [5–7]. Предполагается, что $\Pr[z = 1] = \Pr[z = -1] = 1/2$, $\Pr[y_i = 1 \,|\, z = 1] = \Pr[y_i = -1 \,|\, z = -1] = p_i \geqslant 1/2$, каналы статистически независимы, $n = 2k + 1$.

**Теорема 1.** При $p_1 = \ldots = p_n$ принятие решения большинством голосов (то есть использование мажоритарной функции) является оптимальным решающим правилом, минимизирующим вероятность ошибки.

Это частный случай следующей более общей теоремы.

**Теорема 2.** Оптимальное решающее правило, минимизирующее вероятность ошибки, даёт самодвойственная пороговая булева функция вида

$$f(\mathbf{y}) = \operatorname{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \operatorname{sign}(a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n),$$

где $a_i = \log(p_i/(1 - p_i))$, $i = 1, \ldots, n$.

**Теорема 3.** Если $1/2 < m \leqslant p_i \leqslant M < 1$, $i = 1, \ldots, n$, а $\Pr_{\text{err}}$ — вероятность ошибки при использовании оптимального решающего правила, то

$$\frac{1-M}{M}\binom{n}{[n/2]}\prod_{i=1}^{n}\sqrt{p_i(1-p_i)} \leqslant \Pr_{\text{err}} \leqslant \frac{m}{2m-1}\binom{n}{[n/2]}\prod_{i=1}^{n}\sqrt{p_i(1-p_i)}.$$

**Теорема 4.** Пусть $\Pr_{\text{err}}$ — вероятность ошибки для решающего правила, задаваемого самодвойственной пороговой функцией $f(\mathbf{y}) = \operatorname{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = \operatorname{sign}(a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n)$ с произвольным вектором весов $\mathbf{a}$. Тогда имеют место следующие оценки:

— если $(\mathbf{a}_\beta, \mathbf{a}) \geqslant 0$, то $\Pr_{\text{err}} \leqslant \exp\big(-(\mathbf{a}_\beta, \mathbf{a}^{(0)})^2/2\big)$;

— если $(\mathbf{a}_\pi, \mathbf{a}) \geqslant 0$, то $\Pr_{\text{err}} \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} 2\sqrt{p_i(1-p_i)}\exp\big((\mathbf{a}_\pi^2 - (\mathbf{a}_\pi, \mathbf{a}^{(0)})^2)/2\big)$.

Здесь $\mathbf{a}_\beta = (2p_1 - 1, \ldots, 2p_n - 1)$; $\mathbf{a}_\pi = \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right), \ldots, \frac{1}{2}\log\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)\right)$; $\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ — нормированный вектор весов.

Если веса фиксированы по величине, но могут переставляться, то вероятность ошибки является функцией перестановки весов. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n$, $\mathbb{S}_n$ — симметрическая группа перестановок множества $\{1, \ldots, n\}$. Обычным образом определим для перестановки $\sigma \in \mathbb{S}_n$ множество беспорядков $\mathbf{X}(\sigma)$: $(\sigma(i_1), \sigma(i_2)) \in \mathbf{X}(\sigma) \Leftrightarrow i_1 \leqslant i_2 \ \&\ \sigma(i_1) \geqslant \sigma(i_2)$. Пусть $\prec$ — отношение частичного порядка на $\mathbb{S}_n : \sigma_1 \prec \sigma_2 \Leftrightarrow \mathbf{X}(\sigma_1) \subseteq \mathbf{X}(\sigma_2)$. Минимальным элементом является тождественная перестановка, максимальным — обратная.

**Теорема 5.** Вероятность ошибки — монотонная функция по отношению к частичному порядку $\prec$, то есть $\sigma_1 \prec \sigma_2 \Rightarrow P(\sigma_1) \leqslant P(\sigma_2)$.

В условиях теоремы 5 можно рассматривать выбор весов как двухходовую игру человека с природой, в которой человек делает первый ход, выбором весов $a_i$ минимизируя вероятность ошибки, а природа делает второй ход, максимизируя её перестановкой вероятностей $p_i$.

**Теорема 6.** Оптимальная стратегия человека состоит в том, чтобы выбирать равные веса, т. е. использовать правило голосования по большинству; оптимальная стратегия природы заключается в использовании обратной перестановки вероятностей.

## 2. Пространство весов

Самодвойственной пороговой функции $f(\mathbf{y}) = \operatorname{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{y})$ соответствует система из $2^n$ неравенств вида

$$f(\mathbf{y})(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})(a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n) > 0,$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ пробегает весь набор элементов множества $\{-1, 1\}^n$. Эта система определяет все значения весов $\mathbf{a}$, допустимые для $f(\mathbf{y})$. Обратно, каждая совместная система неравенств вида $S(\mathbf{y})(\mathbf{a}, \mathbf{y}) > 0$, где $S(\mathbf{y})$ — заданное для вектора $\mathbf{y}$ значение, равное 1 или $-1$, определяет самодвойственную пороговую функцию $S(\mathbf{y}) = \operatorname{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{y})$, а решения системы — допустимые для неё веса $\mathbf{a}$.

Общее неотрицательное решение $\mathbf{a}$ однородной системы линейных неравенств

$$c_{i1}a_1 + c_{i2}a_2 + \ldots + c_{in}a_n \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

представляет собой многогранный конус [13], то есть линейную комбинацию вида $\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{a}_i$, где векторы $\mathbf{a}_i$ — базисные неотрицательные решения этой системы и $\lambda_i \geqslant 0$. Назовём вырожденным вектором весов вектор, для которого в (1) достигается равенство. Очевидно, такие векторы могут появляться только на границе конуса. Это соответствует случаю, когда задающая самодвойственную пороговую функцию гиперплоскость проходит через некоторую вершину булева куба. Требование $\lambda_i > 0$ устраняет вырожденные векторы из рассмотрения. Чтобы избежать появления вырожденных пороговых функций размерности меньше $n$, мы должны рассматривать только системы неравенств, для которых $s \geqslant n$.

Таким образом, в пространстве весов каждая самодвойственная пороговая функция представлена выпуклым многогранным конусом размерности $n$, экстремальными векторами которого являются $\mathbf{a}_i$. В качестве характеристического вектора весов самодвойственной пороговой функции $f(\mathbf{y})$ удобно взять барицентрический вектор её конуса весов $\mathbf{a}^{(\beta)} = \sum\limits_{i=1}^{s} \mathbf{a}_i$. Отметим, что если добавить к нему $s$ в качестве нулевой компоненты, то получим обобщённый вектор параметров Чоу [10] для множества $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s\}$, что является дополнительным аргументом в пользу выбора $\mathbf{a}^{(\beta)}$ для характеризации $f(\mathbf{y})$. Задавшись некоторым вектором весов, с помощью выражения $f(\mathbf{y}) = \operatorname{sign}(\mathbf{a}, \mathbf{y})$ можно легко построить таблицу истинности для $f(\mathbf{y})$.

**Утверждение 1.** Рассмотрим две различные самодвойственные пороговые функции $f_1$ и $f_2$ размерности $n$. Пусть $A_1$ и $A_2$ — их конусы весов. Тогда $\dim(A_1 \cap A_2) < n$.

***Доказательство.*** При $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ имеем $\dim(A_1 \cap A_2) = 0 < n$.

Максимальная размерность границ конусов равна $(n-1)$, поскольку каждый такой конус является пересечением конечного числа полупространств [14], а полупространство задаётся гиперплоскостью размерности $(n-1)$. То есть если $A_1$ и $A_2$ — «соседи», имеющие общую границу, то $\dim(A_1 \cap A_2) = (n-1) < n$.

Обозначим $A_1^0$ и $A_2^0$ внутренние части рассматриваемых конусов, то есть множества векторов весов вида $\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \mathbf{a}_i$, где $\lambda_i > 0$, и предположим, что $A_1^0 \cap A_2^0 \neq \varnothing$. Тогда в этом пересечении можно выбрать невырожденный характеристический вектор весов, общий для $f_1$ и $f_2$, с помощью которого построить таблицы истинности, одинаковые для $f_1$ и $f_2$. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

**Утверждение 2.** Объединение многогранных конусов весов всех самодвойственных пороговых функций размерности $n$ совпадает с неотрицательным ортантом $n$-мерного линейного пространства весов.

***Доказательство.*** Предположим противное: разность между неотрицательным ортантом и объединением конусов не пуста. Неотрицательный ортант является замкнутым множеством размерности $n$. Каждый конус — также замкнутое множество размерности $n$. Поскольку рассматриваемых конусов имеется конечное число, то их объединение — также замкнутое множество размерности $n$. Отсюда следует, что непустая разность указанных множеств имеет размерность $n$. Тогда в этой разности можно выбрать невырожденный характеристический вектор весов, не принадлежащий ни одному из имеющихся конусов. Он задаёт самодвойственную пороговую функцию размерности $n$, не совпадающую ни с одной из имеющихся. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Рассмотрим симплекс $n$-мерного пространства весов. Как следует из утверждений 1 и 2, соответствующие самодвойственным пороговым функциям многогранные конусы разбивают симплекс на некоторые выпуклые многогранники и сумма объёмов этих многогранников равна объёму симплекса. Такое представление может быть удобно для визуализации структуры пространства весов самодвойственных пороговых функций.

Итак, голосующие процедуры задаются самодвойственными пороговыми функциями. Число этих функций с ростом $n$ очень быстро растёт. В табл. 1 приведены количества самодвойственных пороговых функций, согласно данным из [11].

Таблица 1

**Число голосующих процедур**

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Число процедур | 2 | 4 | 12 | 81 | 1684 | 123565 |

Для сокращения количества рассматриваемых структур и соответственно облегчения анализа и представления данных введём понятие алгоритма голосования. Зададим каждую самодвойственную пороговую функцию её характеристическим вектором весов (например, барицентрическим вектором $\mathbf{a}^{(\beta)}$) и рассмотрим группу подстановок, действующую на компонентах этих векторов.

Определим отношение $R$ на множестве характеристических векторов весов следующим образом: $R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если существует подстановка, переводящая вектор $a$ в вектор $b$. Поскольку подстановки образуют группу, ясно, что $R$ — отношение эквивалентности. Классы эквивалентности по отношению $R$ будем называть алгоритмами голосования. Характеристическим представителем алгоритма голосования будем считать принадлежащий ему вектор весов $\mathbf{a}$, у которого $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Из табл. 2, полученной в результате расчётов, видно, насколько меньше алгоритмов голосования, чем голосующих процедур.

Таблица 2

**Число алгоритмов голосования**

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Число алгоритмов | 1 | 2 | 3 | 7 | 19 |

Отметим, что та же подстановка, которая переводит характеристический вектор весов функции $f_1$ в характеристический вектор весов функции $f_2$, переводит и экстремальные векторы конуса весов $f_1$ в экстремальные векторы конуса весов $f_2$.

## 3. Отыскание экстремальных векторов

Процесс отыскания экстремальных векторов подразумевает двухэтапную процедуру. На первом этапе формируются системы линейных неравенств вида $S(\mathbf{y})(\mathbf{a}, \mathbf{y}) > 0$, где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ в каждой из них пробегает весь набор из $N = 2^n$ элементов множества $\{-1, 1\}^n$, а $S(\mathbf{y})$ в процессе формирования систем — весь набор из $2^N$ элементов множества $\{-1, 1\}^N$. Таким образом в итоге перечисляется полный комплект из $2^N$ систем из $N$ линейных неравенств для определения $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Дубликаты неравенств из каждой системы устраняются. На втором этапе производится решение полученных систем неравенств.

Для отыскания экстремальных векторов применим алгоритм решения систем однородных линейных неравенств, предложенный в [15]. Рассмотрим систему неравенств (1), все $c_{ij}$ равны 1 или $-1$. Отыскание экстремальных векторов сводится к последовательным однотипным преобразованиям матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & \ldots & c_{m1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{12} & \ldots & c_{m2} \\ & & \cdots & & & \ldots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{1n} & \ldots & c_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

в которой левая часть — единичная матрица $n$-го порядка, а правая — транспонированная матрица коэффициентов системы неравенств. Преобразования производятся по следующему правилу. За основной столбец матрицы принимается один из таких столбцов её правой части, в котором имеется хотя бы один отрицательный элемент (если такие столбцы есть).

В новую матрицу переносятся без изменения те строки, на пересечении которых с основным столбцом стоят неотрицательные числа (если такие строки есть).

Затем перебираются поочередно те пары строк, в которых элементы основного столбца имеют противоположные знаки. Для каждой такой пары просматриваются все столбцы левой части матрицы и неотрицательные столбцы правой части и проверяется, есть ли среди этих столбцов такие, на пересечении которых с обеими строками рассматриваемой пары стоят нули.

Если таких столбцов нет или если есть ещё хотя бы одна строка, на пересечении которой со всеми такими столбцами стоят нули, то рассматриваемая пара пропускается. В противном случае в новую матрицу переносится линейная комбинация рассматриваемой пары строк с такими положительными коэффициентами, чтобы её элемент в основном столбце оказался равным нулю.

Когда просмотр закончится, новая матрица принимается за исходную, по тому же правилу составляется следующая и так далее.

В том особом случае, когда матрица состоит из одной пары строк и знаки элементов основного столбца противоположны, указанный критерий отбора пар перестаёт действовать. В этом случае следует выбрать строку с положительным элементом в основном столбце, составить линейную комбинацию строк таблицы с положительными коэффициентами, подобранными с тем же расчётом, что и в общем случае, и сравнить её с выбранной строкой. Если эти вектор-строки коллинеарны, то указанная линейная комбинация в новую таблицу не включается, если не коллинеарны — включается.

После конечного числа шагов наступит одна из двух ситуаций, означающих конец процесса:

1) в очередной матрице все столбцы правой части неотрицательны;
2) в столбце матрицы, который принят за основной, все элементы отрицательны (так что следующая матрица пуста).

В первом случае вектор-строки левой части последней матрицы (взятые с произвольными положительными коэффициентами) составляют совокупность всех существенно различных экстремальных векторов конуса неотрицательных решений системы неравенств. Все неотрицательные её решения исчерпываются всевозможными линейными комбинациями этих векторов с неотрицательными коэффициентами. Таким образом, если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ — найденные экстремальные векторы, то искомая общая формула для решений рассмотренной системы имеет вид

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_s \mathbf{a}_s; \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Во втором случае система имеет единственное неотрицательное решение — нулевое.

## 4. Проведение расчётов и их результаты

Расчёты производились с использованием программы, написанной на языке C$^{\#}$. Первая процедура для заданной размерности формирует системы линейных неравенств, подлежащие решению. Вторая процедура находит решение системы, если она оказывается совместной, и записывает в файл полученные экстремальные векторы каждого найденного алгоритма голосования и соответствующий характеристический вектор. В качестве характеристических векторов мы берём барицентрические векторы, все компоненты которых для упрощения поделены на общий целый множитель, если это оказалось возможным.

Тестирование программы производилось на контрольных примерах как в отдельности для проверки правильности формирования систем неравенств и проверки правильности их решения, так и в комплексе. В качестве контрольного примера для комплексного тестирования использовалось пространство весов размерности 3, достаточно ненапряжённо просчитывающееся вручную.

В табл. 3–7 приведены найденные экстремальные векторы многогранных конусов и соответствующие характеристические векторы для размерностей $n = 2, \ldots, 6$ и количество голосующих процедур для каждого алгоритма голосования, которое выражается полиномиальным коэффициентом, соответствующим данному характеристическому вектору. Суммарное их число для каждого $n$ совпадает с данными табл. 1, что также говорит о точности расчётов.

Таблица 3

**Результаты для $n = 2$**

| Алгоритм голосования | Экстремальные векторы | Характеристический вектор | Число голосующих процедур |
|---|---|---|---|
| 1 | (1, 0), (1, 1) | (2, 1) | $\frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2$ |

Таблица 4

**Результаты для $n = 3$**

| Алгоритм голосования | Экстремальные векторы | Характеристический вектор | Число голосующих процедур |
|---|---|---|---|
| 1 | (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0) | (3, 1, 1) | $\frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$ |
| 2 | (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0) | (1, 1, 1) | $\frac{3!}{3!} = 1$ |

Таблица 5

**Результаты для $n = 4$**

| Алгоритм голосования | Экстремальные векторы | Характеристический вектор | Число голосующих процедур |
|---|---|---|---|
| 1 | (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0) | (4, 1, 1, 1) | $\frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$ |
| 2 | (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1) | (2, 1, 1, 1) | $\frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$ |
| 3 | (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1) | (3, 3, 3, 1) | $\frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ |

Таблица 6

**Результаты для $n = 5$**

| Алгоритм голосования | Экстремальные векторы | Характеристический вектор | Число голосующих процедур |
|---|---|---|---|
| 1 | (1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0) | (5, 1, 1, 1, 1) | $\frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5$ |
| 2 | (1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (2, 1, 1, 1, 1) | (3, 1, 1, 1, 1) | $\frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5$ |
| 3 | (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 1, 1) | (6, 3, 3, 3, 1) | $\frac{5!}{1!\cdot 3!\cdot 1!} = 20$ |
| 4 | (1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 1, 1) | (3, 2, 2, 1, 1) | $\frac{5!}{1!\cdot 2!\cdot 2!} = 30$ |
| 5 | (0, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 0) | (4, 4, 4, 1, 1) | $\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ |
| 6 | (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1) | (7, 7, 4, 4, 4) | $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ |
| 7 | (0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 1, 2) | (1, 1, 1, 1, 1) | $\frac{5!}{5!} = 1$ |

Таблица 7

**Результаты для $n = 6$**

| Алгоритм голосования | Экстремальные векторы | Характеристический вектор | Число голосующих процедур |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | (1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0) | (6, 1, 1, 1, 1, 1) | $\frac{6!}{1!\cdot 5!} = 6$ |
| 2 | (1, 0, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (3, 1, 1, 1, 1, 1) | (4, 1, 1, 1, 1, 1) | $\frac{6!}{1!\cdot 5!} = 6$ |
| 3 | (1, 0, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 1, 1, 1, 1, 1) | (9, 3, 3, 3, 3, 1) | $\frac{6!}{1!\cdot 4!\cdot 1!} = 30$ |
| 4 | (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (2, 1, 1, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 1, 1, 1, 1, 1) | (5, 2, 2, 2, 1, 1) | $\frac{6!}{1!\cdot 3!\cdot 2!} = 60$ |
| 5 | (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0) | (8, 4, 4, 4, 1, 1) | $\frac{6!}{1!\cdot 3!\cdot 2!} = 60$ |
| 6 | (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (2, 1, 1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 2, 2, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1, 1, 1) | (14, 7, 7, 4, 4, 4) | $\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = 60$ |

Окончание табл. 7

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 7 | (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (5, 3, 3, 2, 1, 1) | $\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!} = 180$ |
| 8 | (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (9, 6, 6, 3, 3, 1) | $\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!} = 180$ |
| 9 | (1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (4, 3, 3, 2, 2, 2) | $\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = 60$ |
| 10 | (1, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0) | (5, 5, 5, 1, 1, 1) | $\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ |
| 11 | (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 2, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 2, 1, 2, 1, 1), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (14, 10, 7, 7, 4, 4) | $\frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!} = 180$ |
| 12 | (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 2, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (5, 4, 3, 2, 2, 1) | $\frac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!} = 360$ |
| 13 | (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 3, 2, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1, 1, 1), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (11, 11, 8, 4, 4, 4) | $\frac{6!}{2!\cdot 1!\cdot 3!} = 60$ |
| 14 | (1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0) | (9, 9, 5, 5, 5, 1) | $\frac{6!}{2!\cdot 3!\cdot 1!} = 60$ |
| 15 | (1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 1, 2, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 1, 2, 2, 1, 1), (3, 2, 1, 2, 1, 1), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (21, 13, 13, 13, 8, 8) | $\frac{6!}{1!\cdot 3!\cdot 2!} = 60$ |
| 16 | (1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 1, 2, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (12, 9, 9, 6, 6, 4) | $\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!} = 180$ |
| 17 | (1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 2, 3, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 1, 1, 1), (2, 3, 2, 1, 1, 1), (2, 1, 2, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1, 1, 1), (3, 2, 2, 1, 1, 1) | (2, 2, 2, 1, 1, 1) | $\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ |
| 18 | (1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 0) | (9, 9, 6, 6, 6, 2) | $\frac{6!}{2!\cdot 3!\cdot 1!} = 60$ |
| 19 | (1, 0, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 2, 1, 1, 0), (1, 2, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 2, 0), (2, 1, 1, 1, 1, 0) | (11, 11, 11, 11, 11, 1) | $\frac{6!}{5!\cdot 1!} = 6$ |

На рис. 1 показаны разбиения соответствующих симплексов многогранными конусами векторов весов голосующих процедур для $n = 2$ и 3.

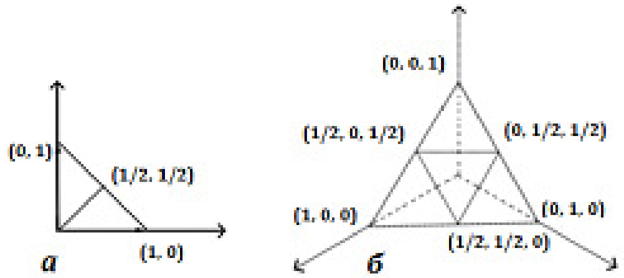


Рис. 1. Результаты для $n = 2$ (*а*) и 3 (*б*)

На рис. 2 показаны разбиения симплекса многогранными конусами голосующих процедур для $n = 4$.

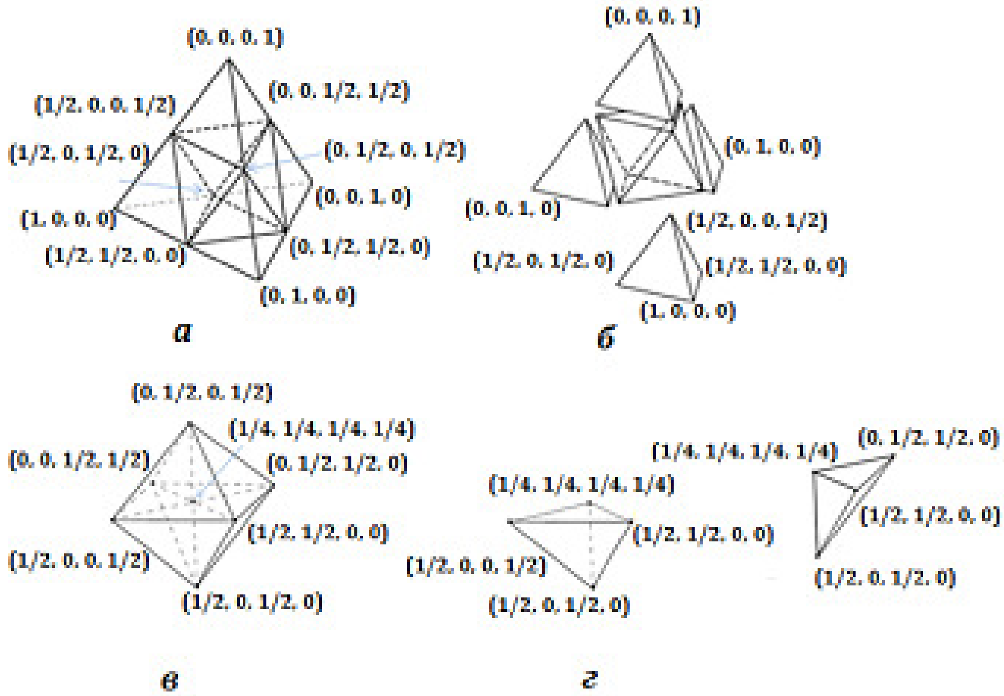


Рис. 2. Результаты для $n = 4$

На рис. 2,*а* выделены разбиения, соответствующие голосующим процедурам, работающим по алгоритму голосования 1 (табл. 5). На рис. 2,*б* отдельно показан многогранник, соответствующий характеристическому вектору весов этого алгоритма (для которого $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$). На рис. 2,*в* показаны дальнейшие разбиения симплекса, соответствующие голосующим процедурам, работающим по алгоритмам голосования 2 и 3 (табл. 5). На рис. 2,*г* показаны многогранники, соответствующие характеристическим векторам весов данных алгоритмов голосования (для которых $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$).

## Заключение

В работе найдены экстремальные и характеристические векторы весов алгоритмов голосования размерностей 2–6 и определено количество голосующих процедур, соответствующих каждому алгоритму голосования. Для размерностей 2, 3 и 4 визуализированы разбиения симплексов конусами, соответствующими алгоритмам голосования и голосующим процедурам. В качестве следующего этапа мы рассмотрим разработку методов сокращения множества перебираемых систем неравенств для получения аналогичных результатов для размерностей 7–9.


## ЛИТЕРАТУРА

1. *De Condorcet N.* Essai sur l'Application de l'Analyse a la Probabilite des Desisions Rendues a la Pluralite des Vox. Paris: 1785. 304 p. (in French)
2. *Poincare J. H.* Science et Methode. Paris: Ernest Flammarion, 1908. 308 p. (in French)
3. *Von Neumann J.* Probabilistic Logic and the Synthesis of Reliable Organisms from Unreliable Components. Princeton: Princeton University Press, 1956. 58 p.
4. *Pierce W. J.* Failure-Tolerant Computer Design. N.Y.: Academic Press, 1965. 256 p.
5. *Зуев Ю. А., Иванов С. К.* Взвешенное голосование в многоканальных системах передачи дискретных сигналов // Проблемы передачи информации. 1995. Т. 31. № 4. С. 22–36.
6. *Зуев Ю. А., Иванов С. К.* Обучение и самообучение в процедурах взвешенного голосования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 1. С. 104–121.
7. *Zuev Yu. A. and Ivanov S. K.* Voting as a way to increase the decision reliability // J. Franklin Institute. 1999. V. 336. No. 2. P. 361–378.
8. *Зуев Ю. А.* Асимптотика логарифма числа пороговых функций алгебры логики // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 3. С. 528–530.
9. *Ирматов А. А.* О числе пороговых функций // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 3. С. 40–43.
10. *Зуев Ю. А.* Пороговые функции и пороговые представления булевых функций // Математические вопросы кибернетики. 1994. № 3. С. 5–61.
11. *Muroga S.* Threshold Logic and its Applications. N.Y.: Wiley, 1971. 478 p.
12. *Muroga S., Tsuboi N., and Baugh R. S.* Enumeration of threshold functions of eight variables // IEEE Trans. Computers. 1970. V. C-19. No. 9. P. 818–825.
13. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.
14. *Ziegler G. M.* Lectures on Polytopes. N.Y.: Springer Verlag, 1995. 370 p.
15. *Черникова Н. В.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 2. С. 334–337.
16. *Розенфельд Н. В.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

## REFERENCES

1. *De Condorcet N.* Essai sur l'Application de l'Analyse a la Probabilite des Desisions Rendues a la Pluralite des Vox. Paris, 1785. 304 p. (in French)
2. *Poincare J. H.* Science et Methode. Paris, Ernest Flammarion, 1908. 308 p. (in French)
3. *Von Neumann J.* Probabilistic Logic and the Synthesis of Reliable organisms from Unreliable Components. Princeton, Princeton University Press, 1956. 58 p.
4. *Pierce W. J.* Failure-Tolerant Computer Design. N.Y., Academic Press, 1965. 256 p.
5. *Zuev Yu. A. and Ivanov S. K.* Vzveshennoe golosovanie v mnogokanal'nykh sistemakh peredachi diskretnykh signalov [Weighted voting in multichannel systems of discrete signal transmission]. Problemy Peredachi Informatsii, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 22–36. (in Russian)
6. *Zuev Yu. A. and Ivanov S. K.* Obuchenie i samoobuchenie v protsedurakh vzveshennogo golosovaniya [Taught and self-taught weighted voting procedures]. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki, 1995, vol. 35, no. 1, pp. 104–121. (in Russian)
7. *Zuev Yu. A. and Ivanov S. K.* Voting as a way to increase the decision reliability. J. Franklin Institute, 1999, vol. 336, no. 2, pp. 361–378.

8. *Zuev Yu. A.* Asimptotika logarifma chisla porogovykh funktsiy algebry logiki [Asymptotics of the logarithm of the number of Boolean threshold functions]. Dokl. AN SSSR, 1989, vol. 306, no. 3, pp. 528–530. (in Russian)
9. *Irmatov A. A.* O chisle porogovykh funktsiy [On the number of threshold functions]. Diskretnaya Matematika, 1993, vol. 5, no. 3, pp. 40–43. (in Russian)
10. *Zuev Yu. A.* Porogovye funktsii i porogovye predstavleniya bulevykh funktsiy [Threshold functions and threshold representations of Boolean functions]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, 1994, no. 3, pp. 5–61. (in Russian)
11. *Muroga S.* Threshold Logic and its Applications. N.Y., Wiley, 1971. 478 p.
12. *Muroga S., Tsuboi N., and Baugh R. S.* Enumeration of threshold functions of eight variables. IEEE Trans. Computers, 1970, vol. C-19, no. 9, pp. 818–825.
13. *Chernikov S. N.* Lineynye neravenstva [Linear Inequalities]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 488 p. (in Russian)
14. *Ziegler G. M.* Lectures on Polytopes. N.Y., Springer Verlag, 1995. 370 c.
15. *Chernikova N. V.* Algoritm dlya nakhozhdeniya obshchey formuly neotritsatel'nykh resheniy sistemy lineynykh neravenstv [Algorithm for finding a general formula for the non-negative solutions of a system of linear inequalities]. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki, 1965, vol. 5, no. 2, pp. 334–337. (in Russian)
16. *Rozenfel'd N. V.* Mnogomernye prostranstva [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 648 p. (in Russian)