МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЁЖНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

УДК 519.718.7 DOI 10.17223/20710410/62/6

КОРОТКИЕ ПРОВЕРЯЮЩИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ СХЕМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЛАБО СВЯЗНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ КОНТАКТОВ

К. А. Попков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Доказано, что для любого натурального k любую булеву функцию можно реализовать двухполюсной контактной схемой, k-неизбыточной и допускающей k-проверяющий тест длины не более 3 относительно произвольных связных неисправностей контактов в группах, где каждая группа состоит из одного замыкающего и одного размыкающего контакта. Установлено, что если булева функция не является самодвойственной, то оценку можно понизить до 2.

Ключевые слова: *контактная схема, связные неисправности контактов, проверяющий тест, булева функция.*

SHORT FAULT DETECTION TESTS FOR CONTACT CIRCUITS UNDER ARBITRARY WEAKLY CONNECTED FAULTS OF CONTACTS

K. A. Popkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

We prove that for any natural k, any Boolean function can be implemented by a two-pole contact circuit that is k-irredundant and allows a k-fault detection test of length no more than 3 relative to arbitrary connected faults of contacts in groups, where each group consists of one closing and one opening contact. We establish that if the Boolean function is not self-dual, then this bound can be lowered to 2.

Keywords: *contact circuit, connected faults of contacts, fault detection test, Boolean function.*

Введение

Рассматривается задача синтеза легкотестируемых двухполюсных контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции (слово «двухполюсная» в дальнейшем будем опускать). Логический подход к тестированию контактных схем предложен И. А. Чегис и С. В. Яблонским в [2]. Представим, что имеется контактная схема S, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько контактов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В качестве неисправностей контактов обычно рассматриваются их обрывы и (короткие) замыкания. При обрыве контакта проводимость между его концами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ станет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях в схеме S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [3–5]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\pi}$, на котором $g_1(\tilde{\pi}) \neq g_2(\tilde{\pi})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных n-разрядных наборов. Тест называется *полным*, если в схеме могут быть неисправны сколько угодно контактов, и *единичным*, если в схеме может быть неисправен только один контакт. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем* [5, с. 110–111], в которых любая допустимая неисправность любого одного контакта приводит к функции неисправности, отличной от функции, реализуемой данной схемой; такие функции неисправности называют *нетривиальными*. Если в схеме допускаются только обрывы контактов (или только их замыкания), то говорят о *тестах размыкания* (соответственно о *тестах замыкания*).

В работах [6–16] получены различные, в том числе окончательные результаты о возможностях построения легкотестируемых контактных схем, реализующих заданные булевы функции. Упомянем только один результат, который удобно сравнить с нижеследующей теоремой 4. В [9, теорема 2] доказано, что для любого натурального $n \geqslant 2$ существует булева функция от n переменных, которую нельзя реализовать контактной схемой, неизбыточной и допускающей единичный проверяющий тест длины менее $n+2$ относительно обрывов и замыканий контактов.

Назовём проверяющий (диагностический) тест для контактной схемы *k-проверяющим* (*k-диагностическим*), если в схеме может произойти не более k неисправностей, где $k \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать такие тесты только для *k-неизбыточных схем*, в которых любые не менее одной и не более k допустимых неисправностей приводят к нетривиальной функции неисправности.

В настоящей работе в качестве неисправностей в контактных схемах рассмотрим связные неисправности контактов в группах, как это сделано Н. П. Редькиным в [17, 18]. Пусть зафиксированы целые неотрицательные числа a и b, удовлетворяющие условиям $a+b \geqslant 2$ и $a \geqslant b$. Будем считать, что в рассматриваемых схемах все контакты разбиваются на группы связанных между собой контактов. Каждая группа содержит $a+b$ контактов, отвечающих одной и той же переменной, и разбивается на два блока из a контактов (первый блок) и b контактов (второй блок), причём внутри каждого блока все контакты одинаковы (т. е. либо все замыкающие, либо все размыкающие), а в разных блоках контакты противоположны. Предполагается, что обрыв (замыкание) любого контакта из одного из блоков влечёт за собой обрыв (соответственно замыкание) всех остальных контактов из этого блока и замыкание (соответственно обрыв) всех контактов из другого блока. Таким образом, каждая контактная группа подвержена только двум видам неисправностей: обрыву всех контактов из первого блока и одновременному замыканию всех контактов из второго блока, либо замыканию всех контактов из первого блока и одновременному обрыву всех контактов из второго блока. Мотивировка рассмотрения именно таких неисправностей с физической точки зрения даётся в [17, с. 42–43]. Контактные схемы, удовлетворяющие указанным условиям, будем называть (a,b)-*схемами*. Общее число неисправностей в (a,b)-схеме будем считать равным числу неисправных контактных групп (а не неисправных контактов).

Пусть множество T является k-проверяющим тестом для некоторой (a,b)-схемы S. Введём следующие обозначения: $D_{a,b}^{k\text{-П}}(T)$ — длина теста T; $D_{a,b}^{k\text{-П}}(S) = \min D_{a,b}^{k\text{-П}}(T)$, где минимум берётся по всем k-проверяющим тестам T для схемы S; $D_{a,b}^{k\text{-П}}(f) = \min D_{a,b}^{k\text{-П}}(S)$, где минимум берётся по всем k-неизбыточным (a,b)-схемам S, реализующим функцию f; $D_{a,b}^{k\text{-П}}(n) = \max D_{a,b}^{k\text{-П}}(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D_{a,b}^{k\text{-П}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины k-проверяющего теста. По аналогии с функциями $D_{a,b}^{k\text{-П}}$ можно ввести функции $D_{a,b}^{k\text{-Д}}$, $D_{a,b}^{\text{ПП}}$ и $D_{a,b}^{\text{ПД}}$ для соответственно k-диагностического, полного проверяющего и полного диагностического тестов, зависящие от T, S, f и n (в определениях функций $D_{a,b}^{\text{ПП}}(f)$ и $D_{a,b}^{\text{ПД}}(f)$ не предполагается неизбыточности схем). Если в первом блоке каждой контактной группы допустимы как обрыв, так и замыкание всех контактов (соответственно допусти́м только обрыв всех контактов, допустимо только замыкание всех контактов), то в конце верхнего индекса буквы D через точку с запятой будем ставить 01 (соответственно 0, 1); в первом из указанных трёх случаев связные неисправности контактов будем считать *произвольными*, а во втором и третьем случаях — *однотипными*. Основной целью исследований является нахождение оценок (в идеале — точных значений) величин $D_{a,b}(f)$ и $D_{a,b}(n)$ с разными верхними индексами при различных a, b, f и n.

В [17] установлено, что если $a + b \geqslant 3$, а t — натуральное число, то $2n - 2t - 1 \leqslant D_{a,b}^{\text{ПП};\,01}(n) \leqslant 2n$ при $n = 2^t + t + 1$; $2n - 2t - 2 \leqslant D_{a,b}^{\text{ПП};\,01}(n) \leqslant 2n$ при $2^t + t + 1 < n \leqslant 2^{t+1} + t + 1$. В [18] при $a + b \geqslant 3$ доказано неравенство $D_{a,b}^{1\text{-Д};\,01}(n) \leqslant 4n$, а при $a + b = 2$ получены оценки $D_{a,b}^{1\text{-П};\,01}(n) \leqslant 2^{\lceil n/2\rceil} + 2^{\lfloor n/2\rfloor} + n$, $D_{a,b}^{\text{ПП};\,1}(n) \leqslant 2n$ и $D_{a,b}^{\text{ПП};\,0}(n) \leqslant 2n$. Вслед за работой [18], связные неисправности контактов в случае $a + b = 2$ будем считать *слабо связными*.

1. Покрывающие и ключевые множества

Двоичный n-разрядный набор $\tilde{\sigma}$ будем называть (i,α)-*набором*, если его i-я (слева) компонента равна α.

Двоичный n-разрядный набор $\tilde{\sigma}$ будем называть β-*набором* булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\sigma}) = \beta$.

Множество M (некоторых) β-наборов булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 1$ и $\beta \in \{0,1\}$, назовём β-*покрывающим* для этой функции, если для любых $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha \in \{0,1\}$ в M найдётся (i,α)-набор.

Множество M (некоторых) β-наборов булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 1$ и $\beta \in \{0,1\}$, назовём β-*ключевым* для этой функции, если для любых $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha \in \{0,1\}$, таких, что существует хотя бы один (i,α)-набор, являющийся β-набором функции $f(\tilde{x}^n)$, в M найдётся (i,α)-набор.

В качестве β-ключевого множества для функции $f(\tilde{x}^n)$ всегда можно взять множество всех её β-наборов.

Очевидно, что любое β-покрывающее множество является β-ключевым. Обратное, вообще говоря, неверно: например, для функции $f(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$ множество $\{(1,1)\}$ является 1-ключевым, но не 1-покрывающим (более того, для этой функции не существует ни одного 1-покрывающего множества).

Сформулируем два полученных ранее результата.

Теорема 1 [11, теорема 1]. Пусть M — 1-ключевое множество для булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$. Тогда эту функцию для любого $k \in \mathbb{N}$ можно реализовать контактной схемой, k-неизбыточной относительно обрывов контактов, для которой множество M является k-проверяющим тестом размыкания.

Теорема 2 [16, теорема 1]. Пусть M — 0-ключевое множество для булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$. Тогда эту функцию для любого $k \in \mathbb{N}$ можно реализовать контактной схемой, k-неизбыточной относительно замыканий контактов, для которой множество M является k-проверяющим тестом замыкания.

В формулировках теорем 1 и 2 общее число неисправностей в контактных схемах считается равным числу неисправных контактов.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *самодвойственной*, если $\overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = f(\tilde{x}^n)$.

Утверждение 1. Для любой несамодвойственной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, существует β-покрывающее множество мощности 2 хотя бы для одного $\beta \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Существуют такие $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}$, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$, так как функция $f(\tilde{x}^n)$ несамодвойственная. Тогда множество

$$\{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)\}$$

является β-покрывающим для этой функции при $\beta = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. ■

Утверждение 2. Для любой самодвойственной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящей по крайней мере от трёх переменных, существует β-покрывающее множество мощности 3 для каждого $\beta \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Функция f неконстантная, поэтому существуют два двоичных n-разрядных набора, различающихся только в одном разряде, на которых она принимает различные значения. Обозначим эти наборы через $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \overline{\sigma}_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$, где $r \in \{1, \ldots, n\}$; тогда $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \overline{f}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \overline{\sigma}_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$. Функция $f(\tilde{x}^n)$ самодвойственная, поэтому $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \overline{f}(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$. Из последних двух соотношений вытекает, что $f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \overline{\sigma}_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$. Положим $\gamma = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$.

Если для любых $\pi_1, \ldots, \pi_{r-1}, \pi_{r+1}, \ldots, \pi_n \in \{0, 1\}$ выполняется равенство $f(\pi_1, \ldots, \pi_{r-1}, \sigma_r, \pi_{r+1}, \ldots, \pi_n) = \overline{\gamma}$, то $f(\overline{\pi}_1, \ldots, \overline{\pi}_{r-1}, \overline{\sigma}_r, \overline{\pi}_{r+1}, \ldots, \overline{\pi}_n) = \gamma$ для любых $\pi_1, \ldots, \pi_{r-1}, \pi_{r+1}, \ldots, \pi_n \in \{0, 1\}$ в силу самодвойственности функции f, а тогда легко проверить, что $f(\tilde{x}^n) = x_r \oplus \sigma_r \oplus \overline{\gamma}$. Получаем, что функция f существенно зависит только от переменной x_r, однако это противоречит условию утверждения 2. Поэтому существуют такие $\pi_1, \ldots, \pi_{r-1}, \pi_{r+1}, \ldots, \pi_n \in \{0, 1\}$, что $f(\pi_1, \ldots, \pi_{r-1}, \sigma_r, \pi_{r+1}, \ldots, \pi_n) = \gamma$. В таком случае множество

$$M = \{(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n), (\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \overline{\sigma}_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n), (\pi_1, \ldots, \pi_{r-1}, \sigma_r, \pi_{r+1}, \ldots, \pi_n)\}$$

является γ-покрывающим для функции $f(\tilde{x}^n)$. Действительно, на каждом наборе из этого множества, как показано выше, функция f принимает значение γ; для любых $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{r\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$ один из наборов $(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n), (\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \overline{\sigma}_r, \sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_n)$

является (i,α)-набором, а для $i = r$ и любого $\alpha \in \{0,1\}$ один из наборов $(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_n),(\pi_1,\ldots,\pi_{r-1},\sigma_r,\pi_{r+1},\ldots,\pi_n)$ является (i,α)-набором. Множество

$$\{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_{r-1},\sigma_r,\overline{\sigma}_{r+1},\ldots,\overline{\sigma}_n),(\overline{\pi}_1,\ldots,\overline{\pi}_{r-1},\overline{\sigma}_r,\overline{\pi}_{r+1},\ldots,\overline{\pi}_n)\},$$

состоящее из наборов, противоположных наборам из M, является $\overline{\gamma}$-покрывающим для функции $f(\tilde{x}^n)$. Действительно, на каждом наборе из этого множества функция f в силу самодвойственности принимает значение $\overline{\gamma}$; для любых $i \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{r\}$, $\alpha \in \{0,1\}$ один из наборов $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_{r-1},\sigma_r,\overline{\sigma}_{r+1},\ldots,\overline{\sigma}_n)$ является (i,α)-набором, а для $i=r$ и любого $\alpha \in \{0,1\}$ один из наборов $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n),(\overline{\pi}_1,\ldots,\overline{\pi}_{r-1},\overline{\sigma}_r,\overline{\pi}_{r+1},\ldots,\overline{\pi}_n)$ является (i,α)-набором. ■

2. Формулировки и доказательства основных результатов

Введём обозначение

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \beta = 1,\\ \overline{\alpha}, & \text{если } \beta = 0,\end{cases}$$

где $\alpha \in \{0,1\}$.

Далее для краткости всюду вместо «замыкающий (размыкающий) контакт, отвечающий переменной x_i», $i = 1,\ldots,n$, будем говорить «контакт x_i» (соответственно «контакт $\overline{x}_i$»).

Теорема 3. Пусть M — β-покрывающее множество для булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, где $\beta \in \{0,1\}$ и $n \geqslant 1$. Тогда эту функцию для любого $k \in \mathbb{N}$ можно реализовать k-неизбыточной $(1,1)$-схемой, для которой множество M является k-проверяющим тестом относительно произвольных связных неисправностей контактов.

Доказательство. Зафиксируем натуральное k. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\beta = 1$. Из теоремы 1 и того факта, что любое β-покрывающее множество является β-ключевым, следует, что функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать контактной схемой S, k-неизбыточной относительно обрывов контактов, для которой множество M является k-проверяющим тестом размыкания. Построим контактные схемы $A_1,\ldots,A_n$ по аналогии с тем, как это сделано в [17, с. 44]. Пусть i — произвольный индекс из множества $\{1,\ldots,n\}$. Схема A_i представляет собой параллельное соединение двух несамопересекающихся цепей C_i^1 и C_i^0 из контактов. Цепь C_i^1 содержит только контакты x_i, а цепь C_i^0 — только контакты $\overline{x}_i$. Для каждого контакта x_i, содержащегося в схеме S, в цепи C_i^0 содержится свой контакт $\overline{x}_i$, который образует с ним контактную группу; будем считать эту группу *основной*. Для каждого контакта $\overline{x}_i$, содержащегося в схеме S, в цепи C_i^1 содержится свой контакт x_i, который образует с ним контактную группу; её также будем считать *основной*. Если хотя бы в одной из цепей C_i^1, C_i^0 к настоящему моменту содержится не более k контактов, добавим к каждой из них одинаковое число контактов, чтобы как в цепи C_i^1, так и в цепи C_i^0 содержалось не менее $k+1$ контактов; при этом к цепи C_i^1 будем добавлять только контакты x_i, а к цепи C_i^0 — только контакты $\overline{x}_i$, и все добавляемые контакты разобьём на группы из двух связанных между собой контактов x_i и $\overline{x}_i$, которые будем считать *дополнительными* группами. В итоге каждый контакт цепи C_i^1 имеет тип x_i и образует контактную группу с каким-то контактом $\overline{x}_i$, содержащимся либо в схеме S, либо в цепи C_i^0, а каждый контакт цепи C_i^0 имеет тип $\overline{x}_i$ и образует контактную группу с каким-то контактом x_i, содержащимся либо в схеме S, либо в цепи C_i^1.

Соединим все контактные схемы $S, A_1,\ldots,A_n$ последовательно; обозначим полученную контактную схему через S^* (рис. 1). В ней все контакты разделены на группы связанных между собой контактов, каждая из которых состоит из одного замыкающего и одного размыкающего контакта переменной x_i для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом, схема S^* является $(1,1)$-схемой. При отсутствии неисправностей в этой схеме подсхема A_i, очевидно, реализует функцию $x_i \vee \overline{x}_i \equiv 1$ для $i = 1, \ldots, n$, поэтому схема S^* реализует функцию $f(\tilde{x}^n)\&\underbrace{1\&\ldots\&1}_{n} = f(\tilde{x}^n)$. Докажем, что данная схема k-неизбыточна и допускает k-проверяющий тест M относительно произвольных связных неисправностей контактов. Предположим, что в схеме S^* оказались неисправными не менее одной и не более k контактных групп. Согласно определению $(1,1)$-схемы, в каждой неисправной контактной группе один контакт оборван и один замкнут. Рассмотрим два подслучая.

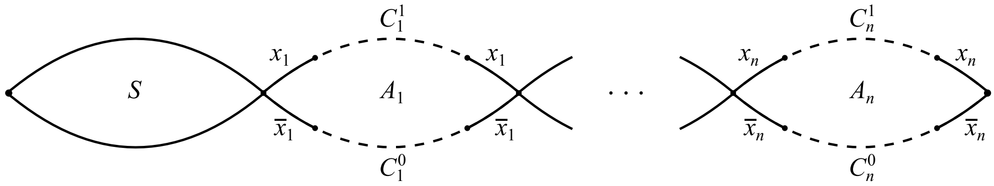

Рис. 1. Схема S^* в случае 1

1.1. Существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что в подсхеме A_i хотя бы один контакт оборван. Пусть это контакт x_i^α, где $\alpha \in \{0,1\}$. Тогда функция проводимости цепи C_i^α, состоящей из контактов x_i^α, равна тождественному нулю. В цепи $C_i^{\overline{\alpha}}$, состоящей из контактов $x_i^{\overline{\alpha}}$, по построению содержится не менее $k+1$ контактов. Если хотя бы один из них оборван, то функция проводимости цепи $C_i^{\overline{\alpha}}$ также равна тождественному нулю. В противном случае замкнуто в указанной цепи может быть не более k контактов, поскольку всего в схеме S^* неисправно не более k контактных групп. Таким образом, хотя бы один контакт в цепи $C_i^{\overline{\alpha}}$ исправен и функция её проводимости равна $x_i^{\overline{\alpha}}$. Следовательно, функция проводимости подсхемы A_i равна либо $0 \vee 0 = 0$, либо $0 \vee x_i^{\overline{\alpha}} = x_i^{\overline{\alpha}}$. Множество M является 1-покрывающим для функции $f(\tilde{x}^n)$, поэтому в нём найдётся такой (i,α)-набор $\tilde{\sigma}$, что $f(\tilde{\sigma}) = 1$. На этом наборе подсхема A_i не проводит и схема S^* выдаст значение 0, отличное от $f(\tilde{\sigma})$; тем самым неисправность схемы будет обнаружена.

1.2. Ни в одной из подсхем $A_1, \ldots, A_n$ ни один контакт не оборван. Тогда в подсхеме S ни один контакт не замкнут (в противном случае контакт, образующий группу с произвольным замкнутым контактом x_i^α подсхемы S, по построению содержался бы в цепи $C_i^{\overline{\alpha}}$ подсхемы A_i и был бы оборван), а все дополнительные контактные группы в схеме S^* исправны. Значит, неисправны не менее одной и не более k основных контактных групп в данной схеме, и при этом тот контакт каждой неисправной группы, который содержится в подсхеме S, оборван. Множество M является k-проверяющим тестом размыкания для k-неизбыточной схемы S, поэтому хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}$ из M подсхема S выдаст значение, отличное от «правильного», т. е. от $f(\tilde{\sigma})$. Из описания подслучая 1.2 вытекает также, что для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0,1\}$ функция проводимости цепи C_i^α равна либо x_i^α, либо 1, поэтому для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ функция проводимости подсхемы A_i равна либо $x_i^\alpha \vee x_i^{\overline{\alpha}}$, либо $1 \vee x_i^{\overline{\alpha}}$, либо $x_i^\alpha \vee 1$, либо $1 \vee 1$, т. е. равна тождественной единице. Следовательно, функция, реализуемая схемой S^*, совпадает с функцией проводимости подсхемы S, и на наборе $\tilde{\sigma}$ схема S^* выдаст значение, отличное от $f(\tilde{\sigma})$; тем самым неисправность схемы будет обнаружена.

Из приведённых рассуждений следует, что схема S^* является k-неизбыточной и допускает k-проверяющий тест M относительно произвольных связных неисправностей контактов. Случай 1 разобран.

2. Пусть $\beta = 0$. Из теоремы 2 и того факта, что любое β-покрывающее множество является β-ключевым, следует, что функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать контактной схемой S, k-неизбыточной относительно замыканий контактов, для которой множество M является k-проверяющим тестом замыкания. Построим контактные схемы $B_1^1, \ldots, B_n^1, B_1^0, \ldots, B_n^0$ по аналогии с тем, как это сделано в [17, с. 45] (в [17] они обозначаются через $B_1, \ldots, B_n, B_1', \ldots, B_n'$ соответственно). Рассмотрим произвольные $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\alpha \in \{0, 1\}$. Схема B_i^α представляет собой пучок из контактов x_i^α, т. е. параллельное соединение некоторого числа контактов x_i^α. Для каждого контакта $x_i^{\overline{\alpha}}$, содержащегося в схеме S, в схеме B_i^α содержится свой контакт x_i^α, который образует с ним контактную группу; будем считать эту группу *основной*. Если хотя бы в одной из схем B_i^1, B_i^0 к настоящему моменту содержится не более k контактов, добавим к каждой из них одинаковое число контактов, чтобы как в схеме B_i^1, так и в схеме B_i^0 содержалось не менее $k+1$ контактов и каждая из схем B_i^1, B_i^0 по-прежнему представляла собой пучок из контактов; при этом к схеме B_i^1 будем добавлять только контакты x_i, а к схеме B_i^0 — только контакты $\overline{x}_i$, и все добавляемые контакты разобьём на группы из двух связанных между собой контактов x_i и $\overline{x}_i$, которые будем считать *дополнительными* группами. В итоге каждый контакт схемы B_i^1 имеет тип x_i и образует контактную группу с каким-то контактом $\overline{x}_i$, содержащимся в одной из схем S, B_i^0, а каждый контакт схемы B_i^0 имеет тип $\overline{x}_i$ и образует контактную группу с каким-то контактом x_i, содержащимся в одной из схем S, B_i^1. Соединим контактные схемы B_i^1 и B_i^0 последовательно и обозначим полученную схему через B_i.

Теперь все контактные схемы $S, B_1, \ldots, B_n$ соединим параллельно и обозначим итоговую контактную схему через S^* (рис. 2). В ней все контакты разделены на группы связанных между собой контактов, каждая из которых состоит из одного замыкающего и одного размыкающего контакта переменной x_i для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Таким образом, схема S^* является $(1,1)$-схемой. При отсутствии неисправностей в этой схеме подсхема B_i, очевидно, реализует функцию $x_i \& \overline{x}_i \equiv 0$ для $i = 1, \ldots, n$, поэтому схема S^* реализует функцию $f(\tilde{x}^n) \vee \underbrace{0 \vee \ldots \vee 0}_{n} = f(\tilde{x}^n)$. Докажем, что данная схема k-неизбыточна и допускает k-проверяющий тест M относительно произвольных связных неисправностей контактов. Предположим, что в схеме S^* оказались неисправными не менее одной и не более k контактных групп. Отметим, что в каждой неисправной контактной группе один контакт оборван и один замкнут. Рассмотрим два подслучая.

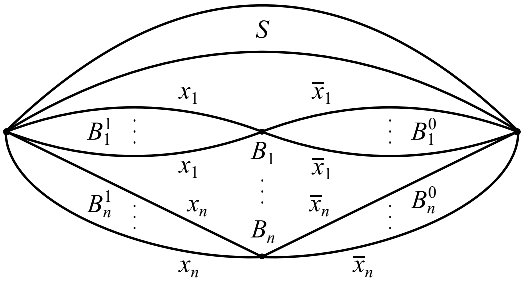

Рис. 2. Схема S^* в случае 2

2.1. Существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что в подсхеме B_i хотя бы один контакт замкнут. Пусть это контакт x_i^α, где $\alpha \in \{0,1\}$. Тогда функция проводимости подсхемы B_i^α, состоящей из контактов x_i^α, равна тождественной единице. В подсхеме $B_i^{\overline{\alpha}}$, состоящей из контактов $x_i^{\overline{\alpha}}$, по построению содержится не менее $k+1$ контактов. Если хотя бы один из них замкнут, то функция проводимости подсхемы $B_i^{\overline{\alpha}}$ также равна тождественной единице. В противном случае оборвано в указанной подсхеме может быть не более k контактов, поскольку всего в схеме S^* неисправно не более k контактных групп. Таким образом, хотя бы один контакт в подсхеме $B_i^{\overline{\alpha}}$ исправен и функция её проводимости равна $x_i^{\overline{\alpha}}$. Следовательно, функция проводимости подсхемы B_i равна либо $1 \vee 1 = 1$, либо $1 \vee x_i^{\overline{\alpha}} = x_i^{\overline{\alpha}}$. Множество M является 0-покрывающим для функции $f(\tilde{x}^n)$, поэтому в нём найдётся такой $(i, \overline{\alpha})$-набор $\tilde{\sigma}$, что $f(\tilde{\sigma}) = 0$. На этом наборе подсхема B_i проводит и схема S^* выдаст значение 1, отличное от $f(\tilde{\sigma})$; тем самым неисправность схемы будет обнаружена.

2.2. Ни в одной из подсхем $B_1, \ldots, B_n$ ни один контакт не замкнут. Тогда в подсхеме S ни один контакт не оборван (в противном случае контакт, образующий группу с произвольным оборванным контактом x_i^α подсхемы S, по построению содержался бы в подсхеме $B_i^{\overline{\alpha}}$, а значит, в подсхеме B_i, и был бы замкнут), а все дополнительные контактные группы в схеме S^* исправны. Значит, неисправны не менее одной и не более k основных контактных групп в данной схеме, и при этом тот контакт каждой неисправной группы, который содержится в подсхеме S, замкнут. Множество M является k-проверяющим тестом замыкания для k-неизбыточной схемы S, поэтому хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}$ из M подсхема S выдаст значение, отличное от «правильного», т. е. от $f(\tilde{\sigma})$. Из описания подслучая 2.2 вытекает также, что для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0,1\}$ функция проводимости подсхемы B_i^α равна либо x_i^α, либо 0, поэтому для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ функция проводимости подсхемы B_i равна либо $x_i^\alpha \& x_i^{\overline{\alpha}}$, либо $0 \& x_i^{\overline{\alpha}}$, либо $x_i^\alpha \& 0$, либо $0 \& 0$, т. е. равна тождественному нулю. Следовательно, функция, реализуемая схемой S^*, совпадает с функцией проводимости подсхемы S, и на наборе $\tilde{\sigma}$ схема S^* выдаст значение, отличное от $f(\tilde{\sigma})$; тем самым неисправность схемы будет обнаружена.

Из приведённых рассуждений следует, что схема S^* является k-неизбыточной и допускает k-проверяющий тест M относительно произвольных связных неисправностей контактов. Случай 2 разобран. ■

Теорема 4. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — булева функция и $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{cases} D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) = 0, & \text{если } f \equiv 0 \text{ или } f \equiv 1, \\ D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) \in \{2,3\}, & \text{если } f \text{ — самодвойственная функция, существенно зависящая} \\ & \text{по крайней мере от трёх переменных,} \\ D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) = 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Если $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то функцию f можно реализовать $(1,1)$-схемой, не содержащей ни одного контакта. У такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому она k-неизбыточна и допускает k-проверяющий тест $\varnothing$ длины 0 (относительно произвольных связных неисправностей контактов), откуда следует, что $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) = 0$. Далее будем считать, что функция f отлична от констант. Докажем неравенство $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) \geqslant 2$.

Пусть S — произвольная k-неизбыточная $(1,1)$-схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, и T — произвольный k-проверяющий тест для схемы S. В этой схеме содержится хотя бы одна контактная группа, состоящая из контактов x_i и $\overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Если i-я компонента каждого набора из множества T равна нулю (единице), то в случае отсутствия неисправностей в схеме S при подаче вместо набора переменных $(x_1, \dots, x_n)$ произвольного набора $\tilde{\sigma}$ из T все контакты x_i в этой схеме будут иметь нулевую (соответственно единичную) проводимость, а все контакты $\overline{x}_i$ — единичную (нулевую) проводимость, поэтому обрыв (замыкание) контакта x_i и замыкание (обрыв) контакта $\overline{x}_i$ из рассматриваемой группы никак не отразятся на значении, выдаваемой схемой на наборе $\tilde{\sigma}$. Однако это противоречит тому, что схема S является k-неизбыточной и допускает k-проверяющий тест T. Значит, в T входят хотя бы один $(i, 1)$-набор и хотя бы один $(i, 0)$-набор. Таким образом, любой k-проверяющий тест для схемы S содержит по крайней мере два набора, откуда следует, что $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(S) \geqslant 2$, а с учётом произвольности выбора схемы S — что $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) \geqslant 2$.

Если $f(\tilde{x}^n)$ — самодвойственная функция, существенно зависящая по крайней мере от трёх переменных, то в силу утверждения 2 и теоремы 3 эту функцию можно реализовать k-неизбыточной $(1, 1)$-схемой, допускающей k-проверяющий тест длины 3; отсюда $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) \leqslant 3$ и $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) \in \{2, 3\}$. Если $f(\tilde{x}^n)$ — несамодвойственная функция, то в силу утверждения 1 и теоремы 3 данную функцию можно реализовать k-неизбыточной $(1, 1)$-схемой, допускающей k-проверяющий тест длины 2; отсюда $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) \leqslant 2$ и $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) = 2$. Пусть, наконец, $f(\tilde{x}^n)$ — самодвойственная функция, существенно зависящая менее чем от трёх переменных. Тогда это обязательно функция вида x_i^α для некоторых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\alpha \in \{0, 1\}$ (как известно, ни одна булева функция, существенно зависящая ровно от двух переменных, не является самодвойственной). Реализуем её $(1, 1)$-схемой, содержащей ровно три вершины и ровно два контакта, образующих группу: контакт x_i^α между полюсами схемы и контакт $x_i^{\overline{\alpha}}$ между одним из полюсов схемы и её вершиной, отличной от полюсов. При обрыве контакта x_i^α и замыкании контакта $x_i^{\overline{\alpha}}$ схема станет реализовывать тождественный нуль, а при замыкании контакта x_i^α и обрыве контакта $x_i^{\overline{\alpha}}$ — тождественную единицу. Константу 0 (константу 1) можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n) = x_i^\alpha$ на любом (i, α)-наборе (соответственно $(i, \overline{\alpha})$-наборе), поэтому рассматриваемая схема k-неизбыточна и допускает k-проверяющий тест длины 2. Отсюда следует, что $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) \leqslant 2$ и $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(f) = 2$. ■

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{cases} D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(n) = 0, & \text{если } n = 0, \\ D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(n) = 2, & \text{если } n = 1 \text{ или } n = 2, \\ D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(n) \in \{2, 3\}, & \text{если } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Заключение

Сравним полученные результаты с результатами работ [9, 18]. В [18], в частности, доказано неравенство $D_{a,b}^{1\text{-П};\,01}(n) \leqslant 2^{\lceil n/2 \rceil} + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + n$ при $a + b = 2$. Следствие 1 показывает, что в случае $a = b = 1$, $n \geqslant 3$ верхнюю оценку $2^{\lceil n/2 \rceil} + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} + n$ можно понизить до 3 и затем для любого $k \in \mathbb{N}$ распространить на величину $D_{1,1}^{k\text{-П};\,01}(n)$. В [9, теорема 2] установлено, что для любого натурального $n \geqslant 2$ существует булева функция от n переменных, которую нельзя реализовать контактной схемой, неизбыточной и допускающей единичный проверяющий тест длины менее $n + 2$ относительно произвольных неисправностей контактов, т. е. обрывов и замыканий контактов. Теорема 4 демонстрирует, что если разбить все контакты на пары противоположных контактов и связать между собой обрыв одного контакта и замыкание другого контакта в паре, то, напротив, любую булеву функцию для любого $k \in \mathbb{N}$ можно реализовать контактной схемой, k-неизбыточной и допускающей k-проверяющий тест длины не более 3 относительно произвольных связных неисправностей контактов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984. 138 с.
2. *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. 1958. Т. 51. С. 270–360.
3. *Яблонский С. В.* Надёжность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 7–12.
4. *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. 1988. Вып. 1. С. 5–25.
5. *Редькин Н. П.* Надёжность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 192 с.
6. *Мадатян Х. А.* Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23. М.: Наука, 1970. С. 103–118.
7. *Редькин Н. П.* О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. Вып. 39. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. С. 80–87.
8. *Редькин Н. П.* О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Вып. 40. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. С. 87–99.
9. *Романов Д. С., Романова Е. Ю.* О единичных проверяющих тестах константной длины для обобщённых итеративных контактных схем // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 42–50.
10. *Попков К. А.* О проверяющих тестах размыкания для контактных схем // Дискретная математика. 2017. Т. 29. Вып. 4. С. 66–86.
11. *Попков К. А.* О диагностических тестах размыкания для контактных схем // Дискретная математика. 2019. Т. 31. Вып. 2. С. 124–143.
12. *Попков К. А.* Короткие единичные проверяющие тесты для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. Т. 23. Вып. 3. С. 97–130.
13. *Редькин Н. П.* О диагностических тестах для контактных схем // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2019. № 2. С. 35–37.
14. *Попков К. А.* О полных диагностических тестах для контактных схем при обрывах и/или замыканиях контактов // Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2019. № 3 (51). С. 3–24.
15. *Попков К. А.* Короткие тесты замыкания для контактных схем // Математические заметки. 2020. Т. 107. Вып. 4. С. 591–603.
16. *Попков К. А.* Оценки функций Шеннона длин тестов замыкания для контактных схем // Дискретная математика. 2020. Т. 32. Вып. 3. С. 49–67.
17. *Редькин Н. П.* Об одной математической модели неисправностей контактных схем // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1993. № 1. С. 42–49.
18. *Редькин Н. П.* Единичные тесты для связных неисправностей контактных схем // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1993. № 2. С. 20–27.

REFERENCES

1. *Lupanov O. B.* Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem. [Asymptotic Bounds of the Complexity of Control Systems]. Moscow, MSU Publ., 1984. 138 p. (in Russian)
2. *Chegis I. A. and Yablonskiy S. V.* Logicheskie sposoby kontrolya raboty elektricheskikh skhem [Logical ways of monitoring the operation of electrical circuits]. Trudy MIAN, 1958, vol. 51, pp. 270–360. (in Russian)
3. *Yablonskiy S. V.* Nadezhnost' i kontrol' upravlyayushchikh sistem [Reliability and verification of control systems]. Materialy Vsesoyuznogo seminara po diskretnoy matematike i ee prilozheniyam (Moscow, 31 Jan.–2 Feb. 1984). Moscow, MSU Publ., 1986, pp. 7–12. (in Russian)
4. *Yablonskiy S. V.* Nekotorye voprosy nadezhnosti i kontrolya upravlyayushchikh sistem [Some questions of reliability and verification of control systems]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, 1988, iss. 1, pp. 5–25. (in Russian)
5. *Red'kin N. P.* Nadezhnost' i diagnostika skhem [Circuits Reliability and Diagnostics]. Moscow, MSU Publ., 1992. 192 p. (in Russian)
6. *Madatyan Kh. A.* Polnyy test dlya bespovtornykh kontaktnykh skhem [Complete test for non-repetitive contact circuits]. Problemy Kibernetiki, iss. 23. Moscow, Nauka Publ., 1970, pp. 103–118. (in Russian)
7. *Red'kin N. P.* O polnykh proveryayushchikh testakh dlya kontaktnykh skhem [On complete fault detection tests for contact circuits]. Metody Diskretnogo Analiza v Issledovanii Ekstremal'nykh Struktur, iss. 39. Novosibirsk, Math. Inst. Sib. Br. USSR Acad. Sci., 1983, pp. 80–87. (in Russian)
8. *Red'kin N. P.* O proveryayushchikh testakh zamykaniya i razmykaniya [On fault detection tests of closure and opening]. Metody Diskretnogo Analiza v Optimizatsii Upravlyayushchikh Sistem, iss. 40. Novosibirsk, Math. Inst. Sib. Br. USSR Acad. Sci., 1983, pp. 87–99. (in Russian)
9. *Romanov D. S. and Romanova E. Y.* Single fault detection tests for generalized iterative switching circuits. Moscow Univ. Comput. Math. Cybern., 2015, vol. 39, no. 3, pp. 144–152.
10. *Popkov K. A.* On fault detection tests of contact break for contact circuits. Discrete Math. Appl., 2018, vol. 28, no. 6, pp. 369–383.
11. *Popkov K. A.* On diagnostic tests of contact break for contact circuits. Discrete Math. Appl., 2020, vol. 30, no. 2, pp. 103–116.
12. *Popkov K. A.* Korotkie edinichnye proveryayushchie testy dlya kontaktnykh skhem pri obryvakh i zamykaniyakh kontaktov [Short single fault detection tests for contact circuits under breaks and closures of contacts]. Intellektual'nyye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 97–130. (in Russian)
13. *Red'kin N. P.* Diagnostic tests for contact circuits. Moscow Univ. Math. Bull., 2019, vol. 74, no. 2, pp. 62–64.
14. *Popkov K. A.* O polnykh diagnosticheskikh testakh dlya kontaktnykh skhem pri obryvakh i/ili zamykaniyakh kontaktov [On complete diagnostic tests for contact circuits under breaks and/or closures of contacts]. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Povolzhskiy Region. Fiziko-matematicheskiye nauki, 2019, no. 3 (51), pp. 3–24. (in Russian)
15. *Popkov K. A.* Short tests of closures for contact circuits. Math. Notes, 2020, vol. 107, no. 4, pp. 653–662.
16. *Popkov K. A.* Bounds on Shannon functions of lengths of contact closure tests for contact circuits. Discrete Math. Appl., 2021, vol. 31, no. 3, pp. 165–178.

17. *Red'kin N. P.* Ob odnoy matematicheskoy modeli neispravnostey kontaktnykh skhem [On one mathematical model of faults of contact circuits]. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 1993, no. 1, pp. 42–49. (in Russian)
18. *Red'kin N. P.* Edinichnye testy dlya svyaznykh neispravnostey kontaktnykh skhem [Single tests for connected faults of contact circuits]. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika, 1993, no. 2, pp. 20–27. (in Russian)