ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2024 Математика и механика № 90
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 519.6 MSC: 15-XX
doi: 10.17223/19988621/90/2

Метод переобусловливания матричных уравнений на основе делителей нуля

Николай Евгеньевич Зубов[1], Владимир Николаевич Рябченко[2]

[1, 2] ПАО РКК «Энергия» им. С.П. Королёва, Королёв, Россия
[1, 2] МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[1] nik.zubov@gmail.com
[2] ryabchenko.vn@yandex.ru

Аннотация. Обсуждается метод переобусловливания алгебраических матричных уравнений без преобразования матрицы правой части. В основе метода лежит техника матричных делителей нуля. Данный метод позволяет определять такие матрицы переобусловливания, которые наряду с изменением числа обусловленности матрицы коэффициентов левой части оставляют неизменной матрицу коэффициентов правой части, что неизбежно приводит к изменению степени обусловленности уравнения. Преимущества предложенного метода продемонстрированы на числовых примерах. Рассуждения, приведенные в статье относительно левостороннего матричного уравнения (матрица коэффициентов находится слева относительно неизвестной матрицы), также справедливы для правостороннего и двустороннего уравнений.
Ключевые слова: алгебраические матричные уравнения, точность решения уравнений, переобусловливаие матричных уравнений, делители нуля

Для цитирования: Зубов Н.Е., Рябченко В.Н. Метод переобусловливания матричных уравнений на основе делителей нуля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 18–32. doi: 10.17223/19988621/90/2

Original article

Method for preconditioning matrix equations based on zero divisors

Nikolay E. Zubov[1], Vladimir N. Ryabchenko[2]

[1, 2] S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia, Korolev, Russian Federation
[1, 2] Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russian Federation
[1] nik.zubov@gmail.com
[2] ryabchenko.vn@yandex.ru

Abstract. The article discusses the method of preconditioning of algebraic matrix equations without transforming the matrix of the right-hand side. The method is based on the

technique of matrix zero divisors. The presence of the right (left) zero divisor is associated with linear dependence of the columns (rows) of the matrix. In this case, the problem of determining such preconditioning matrices is posed and solved, which, along with a decrease in the condition number of the matrix of coefficients on the left side, leave the matrix of coefficients on the right-hand side unchanged. The transformations consist solely in the rotation of the system around its exact, although still unknown, solution. This makes it possible to further improve the accuracy of determining the solution by eliminating possible computational errors in the transformation of the right-hand side of the matrix equation.
It is shown that the choice of preconditioners, which make it possible to reduce the degree of conditionality of the equation, can be made on the basis of the method of simple iteration or taking into account the lower estimate of the condition number of the matrix on the left-hand side by fixing its eigenvalues using well-known and well-developed methods. The advantages of the proposed method are demonstrated by numerical examples.
The reasoning given in the article regarding the left-handed matrix equation (the matrix of coefficients is on the left of the unknown matrix) is also valid for the right-handed and two-sided equations.
Keywords: algebraic matrix equations, accuracy of solving equations, preconditioning of matrix equations, zero divisor

For citation: Zubov, N.E., Ryabchenko, V.N. (2024) Method for preconditioning matrix equations based on zero divisors. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 18–32. doi: 10.17223/19988621/90/2

Введение

В вычислительной алгебре одно из центральных мест занимает левостороннее матричное алгебраическое уравнение

$$AX = B, \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\det A \neq 0$.

Существует множество методов решения данного уравнения, которые продолжают развиваться [1, 2]. Однако для того, чтобы обоснованно подбирать методы и алгоритмы решения, объективно судить о корректности поставленной задачи и правильно трактовать полученные результаты, надо знать количественные характеристики степени неопределенности поставленной задачи, влияющие на изменения в решении в зависимости от ошибок в исходных данных.

Если в качестве ошибок исходных данных принять относительную погрешность правой части матричного алгебраического уравнения (1), то такой самой распространенной характеристикой степени неопределенности поставленной выше задачи является оценка относительной погрешности решения системы в зависимости от относительной погрешности ее правой части:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \tau \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ – матричная норма, индуцированная некоторой векторной нормой.

Из выражения (2), зная численные значения решений, нетрудно получить искомую характеристику степени обусловленности в виде:

$$\tau = \frac{\|\Delta X\| \cdot \|B\|}{\|X\| \cdot \|\Delta B\|}. \tag{3}$$

Однако непосредственное нахождение τ через коэффициенты исходных матриц затруднено вследствие нелинейности операции нормирования. Поэтому в рассмотрение вводится качественная характеристика, называемая числом обусловленности матрицы левой части системы:

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \tag{4}$$

удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \operatorname{cond}(A) \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}. \tag{5}$$

Чем больше число обусловленности, тем сильнее сказывается на решении линейной системы ошибка в исходных данных. Уравнения с матрицей A с большим числом обусловленности называются плохо обусловленными и характеризуются качественной сменой решения

$$X = A^{-1}B \tag{6}$$

при действии малых возмущений ΔB. Исследованию плохо обусловленных уравнений посвящена обширная литература [3–15].

Приведем показательный пример. Пусть задано уравнение (1) вида:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

В данном случае число обусловленности матрицы A, вычисленное на основе спектральной нормы $\|\cdot\|_2$, достаточно велико:

$$\operatorname{cond}_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{bmatrix}\right) \approx 4 \cdot 10^4. \tag{8}$$

Заметим, левая часть уравнения (7) заимствована из монографии [10], а правая часть достроена авторами статьи.

Решение уравнения (7) в данном случае равно

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Предположим, что по каким-либо причинам в матрице (точнее, вектор-матрице) B из (7) изменилось значение первого элемента, и эта матрица приняла вид:

$$B + \Delta B_1 = \begin{bmatrix} 1.0001 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Как видно из (10), мы предположили, что первый элемент матрицы B изменился всего лишь на $0{,}01\%$ от исходного значения. Однако такое малое изменение правой части (7) приводит к существенному изменению решения уравнения (9). В данном случае оно равно

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\Delta B_1} = \begin{bmatrix} 2.000099 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Очевидно, что решения (9) и (11) существенно различаются. При этом точная количественная характеристика степени обусловленности системы, определяемая в соответствии с выражением (3), равна

$$\tau = \frac{\|\Delta X\| \cdot \|B\|}{\|X\| \cdot \|\Delta B\|} = 20001\,. \tag{12}$$

Пусть далее

$$B + \Delta B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1.0001 \end{bmatrix} \tag{13}$$

и

$$B + \Delta B_3 = \begin{bmatrix} 0.9999 \\ \cdots \\ 1.0001 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Данным возмущениям соответствуют решения

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{bmatrix}_{\Delta B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_2 \end{bmatrix}_{\Delta B_3} = \begin{bmatrix} -1.000099 \\ \cdots \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Итак, каждые новые весьма малые возмущения исходных данных приводят к качественно новым решениям рассматриваемого уравнения.

1. Переобусловливание уравнений

В целях уменьшения влияния ошибок в исходных данных, повышения точности решения, а также ускорения сходимости итерационных методов используют различные алгоритмы, заключающиеся, как правило, в элементарных преобразованиях строк (столбцов) одновременно матриц *A* и *B* уравнения: масштабировании, регуляризации, балансировке, переобусловливании и т.д. [5, 7].

В самом общем виде такие преобразования сводятся к следующему [3].

Пусть *T* – некоторая невырожденная ($\det(T) \neq 0$) матрица размерности *n*. Умножение (1) слева на матрицу *T* приводит к уравнению

$$TAX = TB\,, \tag{15}$$

имеющему в силу невырожденности *T* то же решение, что и уравнение (1).

Введя обозначения

$$A_* = TA\,, \tag{16}$$

$$B_* = TB\,, \tag{17}$$

запишем (15) в виде:

$$A_* X = B_*\,. \tag{18}$$

Хотя (18) алгебраически эквивалентна (1), спектральные характеристики матрицы A_* отличаются от характеристик исходной матрицы *A*, что, вообще говоря, может быть использовано для повышения скорости получения решения и его точности. При этом окончательное решение может быть записано в виде:

$$X = A_*^{-1} B_*$$

или непосредственно из (15) в виде:

$$X = \left(T_* A\right)^{-1} T_* B\,,$$

$$Y_* = \left(T_* A\right)^{-1} T_*\,, \tag{19}$$

$$X = Y_* B\,, \qquad (20)$$

позволяющем исследовать влияние изменений (возмущений) в матрице B на конечный результат без осуществления дополнительных преобразований (17).

Утверждается [3], что матрица T должна быть:

– по возможности близка к A^{-1};

– легко вычислима;

– легко обратима.

При этом на матрицу T, как правило, не накладывается никаких требований, обусловленных матрицей правой части B. В таких условиях не все преобразования вида (15), несмотря на очевидное изменение числа обусловленности матрицы коэффициентов левой части, приводят к изменению степени обусловленности всего уравнения, которое точным образом определяется выражением (2).

Например, применение переобусловливания вида (15) уравнения (7) на основе LU-факторизации

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix},\ T_{LU} = L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

приводит согласно (16), (17) к эквивалентному уравнению с матрицами

$$A_{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix},\quad B_{LU} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

имеющему то же решение (9), но с меньшим число обусловленности левой части $\operatorname{cond}\left(A_{LU}\right) = 2 \cdot 10^4$. Однако аналогичная погрешность в матрице правой части (10) приводит к погрешности в решении, в точности совпадающей с (11), а следовательно, характеристика обусловленности уравнения в целом, определяемая выражением (2), осталась неизменной (12). Таким образом, можно утверждать, что в общем случае «улучшение» левой части может приводить к «ухудшению» правой части, которое проявляется, например, в увеличении ее абсолютной погрешности, как в рассмотренном примере:

$$\Delta B_1 = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{bmatrix},\ \Delta B_{1_{LU}} = T_{LU} \Delta B_1 = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ -0.0001 \end{bmatrix}.$$

В данной статье ставится и решается задача определения таких матриц переобусловливания, которые наряду с уменьшением числа обусловленности матрицы коэффициентов левой части оставляют неизменной матрицу коэффициентов правой части. Следует заметить, что данному требованию соответствуют матрицы переобусловливания, приводящие выражение (17) к тождеству

$$T_B B = B\,. \qquad (21)$$

Рассматривая (21) как правостороннее матричное уравнение относительно матрицы T и применяя правило: «общее решение неоднородной системы – это частное решение этой системы плюс общее решение соответствующей однородной системы», все множество матриц T_B , удовлетворяющих (21), может быть записано в виде:

$$T_B = I + \varphi B_L^{\perp}\,, \qquad (22)$$

где $B_L^{\perp}$ – левый делитель нуля полного ранга матрицы B, удовлетворяющий тождеству

$$B_L^{\perp} B = 0\,; \qquad (23)$$

φ – матрица произвольных элементов подходящего размера; I – единичная матрица.

Умножение выражения (21) слева на T_B^{-1} приводит к уравнению

$$B = T_B^{-1} B\,,$$

решение которого также может быть записано в аналогичном (22) виде:

$$T_B^{-1} = I + \mu B_L^{\perp}\,,$$

где μ – также матрица произвольных элементов подходящего размера, откуда следует в общем случае неочевидное тождество

$$T_B^{-1} T_B = \left(I + \mu B_L^{\perp}\right)\left(I + \varphi B_L^{\perp}\right) = I\,.$$

Заметим, что частным случаем обратимости матрицы

$$I_n + \varphi B_L^{\perp}$$

является, например, матрица вида

$$I_n + \underbrace{B\varphi' }_{\varphi}B_L^{\perp}\,,$$

для которой справедливо тождество

$$\left(I_n + B\varphi' B_L^{\perp}\right)^{-1} = I_n - B\varphi' B_L^{\perp}\,,$$

проверяющееся непосредственными вычислениями:

$$\left(I_n + B\varphi' B_L^{\perp}\right)\left(I_n - B\varphi' B_L^{\perp}\right) = I_n \underbrace{-B\varphi' B_L^{\perp} + B\varphi' B_L^{\perp}}_{0} - B\varphi' \underbrace{B_L^{\perp} B}_{0} \varphi' B_L^{\perp} = I_n.$$

Итак, выбирая матрицу переобусловливания из множества (22) с учетом требования на ее обратимость $\det(T_B) \neq 0$, можно влиять на обусловленность алгебраических уравнений, не изменяя их правые части:

$$A_B = T_B A = \left(I + \varphi B_L^{\perp}\right) A\,, \qquad (24)$$

$$A_B X = B$$

или

$$\left(A + \varphi B_L^{\perp} A\right) x = B\,, \qquad (25)$$

при этом имеет место решение

$$x = A_B^{-1} B = \left(A + \varphi B_L^{\perp} A\right)^{-1} B\,, \qquad (26)$$

обладающее в условиях присутствующих возмущений при $\operatorname{cond}\left(A + \varphi B_L^{\perp} A\right) \to 1$ существенно лучшей устойчивостью [4], так как

$$\Delta X = \left(A + \varphi B_L^{\perp} A\right)^{-1} \Delta B\,.$$

Продемонстрируем это на обсуждавшемся ранее уравнении (7). Для этого выполним следующие операции.

Вычислим левый делитель нуля матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда согласно выражению (23) можно положить

$$B_L^{\perp}=\left[1 \;\vdots\; -1\right],$$

и, следовательно,

$$A+\varphi B_L^{\perp}A=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}\left[1 \;\vdots\; -1\right]\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.0001\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1-0.0001\varphi_1\\ 1 & 1.0001-0.0001\varphi_2\end{bmatrix}. \qquad (27)$$

Выбирая $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=10001$ для выражения (27), получим

$$A+\varphi B_L^{\perp}A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\operatorname{cond}_2\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\approx 2.62,$$

что более чем в 15 000 раз меньше, чем у исходной матрицы (8). Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{A+\varphi B_L^{\perp}A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}_{B}.$$

Вместе с тем полученная система обладает достаточно высокой устойчивостью к ранее введенным возмущениям (10), (13) и (14), поскольку

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}_{\Delta B_1}=\begin{bmatrix}1\\ 0.0001\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \tau=1.4142,$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}_{\delta B_3}=\begin{bmatrix}1.0001\\ -0.0001\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \tau=2,$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}_{\delta B_3}=\begin{bmatrix}1.0001\\ -0.0002\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \tau=2.2361.$$

Рассмотрим другой пример. Пусть задано матричное уравнение вида (1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 100 & 200 & 300 & 400 & 500 & 600 & 700\end{bmatrix}}_{A}X=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{B}, \qquad (28)$$

при этом

$$\operatorname{cond}_2(A)\approx 1.4\cdot 10^4,$$

а решение (28) имеет вид:

$$X=\begin{bmatrix}-2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{29}$$

Вычисление левого делителя нуля матрицы B дает

$$B_L^{\perp}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{30}$$

Если выбрать

$$\varphi=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ -0.999\end{bmatrix}, \tag{31}$$

то согласно (25), (28), (30) и (31) приходим к уравнению

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7\end{bmatrix}}_{A+\varphi B_L^{\perp}A} X=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{B},$$

имеющему точно такое же решение (29), как и (28), но с числом обусловленности преобразованной матрицы

$$\operatorname{cond}_2\left(A+\varphi B_L^{\perp}A\right)\approx 24,$$

что почти в 585 раз меньше, чем у исходной матрицы.

2. Методики нахождения матриц переобусловливания

Представленные выше примеры имели достаточно простой вид и давали возможность подбирать искомые матрицы преобразования вручную.

Рассмотрим возможные способы выбора «подходящей» матрицы φ, обеспечивающей удовлетворительную обусловленность преобразованной системе. В общем случае они определяются алгоритмами решения задачи глобальной минимизации, когда требуется найти такую матрицу φ, что

$$\min_{\varphi} \operatorname{cond}\left(A + \varphi B_L^{\perp} A\right), \tag{32}$$

или эквивалентно

$$\min_{\varphi}\left(\left\|A + \varphi B_L^{\perp} A\right\| \cdot \left\|\left(A + \varphi B_L^{\perp} A\right)^{-1}\right\|\right).$$

Для решения (32) могут быть применены различные методы [3]. Покажем, как данная задача может быть решена на основе метода простой итерации.

Запишем уравнение

$$\left(I_n + \varphi B_L^{\perp}\right) A = H , \tag{33}$$

где H – некоторая подходящая матрица с заданным числом обусловленности.

Перепишем (33) в эквивалентном виде:

$$\left(I_n + \varphi B_L^{\perp}\right) A + \varphi E = H + \varphi E . \tag{34}$$

Здесь E – прямоугольная обратимая справа матрица (т.е. $\bar{E}^L = 0$) [4], назначение которой будет определено ниже.

Запишем (34) в виде:

$$\varphi E = H - A + \varphi E - \varphi B_L^{\perp} A,$$

или

$$\varphi E = H - A + \varphi\left(E - B_L^{\perp} A\right). \tag{35}$$

В силу постулируемой обратимости справа матрицы E уравнение (35) можно переписать в другой форме:

$$\varphi = (H - A) E^{+} + \varphi\left(E - B_L^{\perp} A\right) E^{+}, \tag{36}$$

где E^{+} – псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу:

$$E^{+} = E^{\mathrm{T}}\left(EE^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

Тогда для решения (36) можно записать следующий итерационный процесс:

$$\varphi_{k+1} = (H - A) E^{+} + \varphi_k \left(E - B_L^{\perp} A\right) E^{+}. \tag{37}$$

Если матрица E выбрана таким образом, что

$$\left\|I - B_L^{\perp} A E^{+}\right\| < 1,$$

то, согласно теореме о достаточном условии сходимости метода простой итерации, итерационный процесс (37) сходится к решению со скоростью геометрической прогрессии.

Отметим, что из итерационного процесса (37) можно исключить левый делитель нуля $B_L^{\perp}$ в виде прямоугольной матрицы. Для этого достаточно рассмотреть проектор (квадратную матрицу)

$$I_n - BB^{+},$$

очевидно, также являющийся левым делителем нуля:

$$\left(I_n - BB^{+}\right) B = B - BB^{+} B = 0 .$$

Вместо (33) введем в рассмотрение соотношение

$$\left(I_n - \Phi\left(I_n - BB^{+}\right)\right) A = H, \tag{38}$$

где Φ – квадратная матрица, играющая ту же роль, что матрица φ в (33).

Осуществляя преобразования (38) к виду:

$$A-\Phi\left(I_n-BB^+\right)A=H\ ,$$

или эквивалентно

$$A-\Phi\left(I_n-BB^+\right)A+\Phi-\Phi=H\ ,$$

имеем

$$\Phi=H-A+\Phi\left(I_n-BB^+\right)A+\Phi\ .$$

Соответственно, для итерационного процесса имеем

$$\Phi_{k+1}=H-A+\Phi_k\left(I_n+\left(I_n-BB^+\right)A\right). \tag{39}$$

Поскольку норма матрицы $I_n-\left(I_n-BB^+\right)A$ в общем случае не удовлетворяет упомянутой выше теореме о достаточном условии сходимости, вместо (39) лучше использовать процесс вида

$$\Phi_{k+1}=H-A+\Phi_k\left(E+\left(I_n-BB^+\right)A\right)E^{-1}, \tag{40}$$

или

$$\Phi_{k+1}=H-A+\Phi_k\left(I_n+\left(I_n-BB^+\right)AE^{-1}\right),$$

где E – подходящая матрица, обеспечивающая

$$\left\|I_n+\left(I_n-BB^+\right)AE^{-1}\right\|<1\ . \tag{41}$$

В качестве необходимого и достаточного условия существования матрицы E, обеспечивающей (41), может быть выдвинуто *условие стабилизируемости пары матриц* [16]

$$\left(I_n,\ \left(I_n-BB^+\right)A\right). \tag{42}$$

Таким образом, с помощью итерационного процесса (40), (41) может быть решена задача

$$\min_{\varphi}\operatorname{cond}\left(A-\Phi\left(I_n-BB^+\right)A\right).$$

Недостатком (40) по отношению (37) является повышенный размер вычисляемых элементов. Так, в общем случае число вычисляемых с помощью процесса (37) элементов матрицы φ равно $n\left(n-\operatorname{rank}B\right)=n^2-n\cdot\operatorname{rank}B$. При использовании (40) это число равно n^2 .

Еще один возможный способ определения подходящей матрицы φ основан на оценке снизу числа обусловленности матрицы $\left(I+\varphi B_L^{\perp}\right)A$ с помощью ее спектрального радиуса или числа обусловленности Тодда. Идея данного способа состоит в следующем.

Переобусловленная с помощью (22) матрица может быть записана в виде суммы

$$A_B=\left(I+\varphi B_L^{\perp}\right)A=A+\varphi B_L^{\perp}A\ . \tag{43}$$

Транспонирование (43) приводит к выражению

$$\underset{A_{ж}}{\left(A_B\right)^{\mathrm{T}}}=\underset{A'}{A^{\mathrm{T}}}+\underbrace{\left(B_L^{\perp}A\right)^{\mathrm{T}}}_{-B'}\underset{K}{\varphi^{\mathrm{T}}}\ , \tag{44}$$

которое с точностью до обозначений соответствует задаче нахождения такой обратной связи *K*, которая обеспечит матрице собственной динамики замкнутой системы $A_ж = A^{'} - B^{'}K$ желаемый спектр (множество собственных значений)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \qquad (45)$$

Методы решения приведенной задачи достаточно известны и хорошо разработаны [12, 17–20]. Например, при реализации процедуры размещения полюсов пакета Toolbox Control *place* программной оболочки Matlab используется модальный метод Каутского, Никольса и Ван Доорена [19].

Таким образом, определив любым известным способом матрицу φ^{T}, обеспечивающую системе (44) желаемые собственные значения (полюсы) (45), и подставив ее транспонированное значение в (22), мы получим матрицу переобусловливания, использование которой приводит исходное уравнение (1) к уравнению с заранее известными характеристиками. Работоспособность приведенного алгоритма продемонстрируем на примере.

Классическим примером плохо обусловленной матрицы является так называемая матрица Гильберта

$$H_n = \left(\frac{1}{i + j - 1} \right)_{i,j=1}^{n},$$

возникающая, например, при приближении функции многочленом канонического вида методом наименьших квадратов и демонстрирующая катастрофическое возрастание числа обусловленности с ростом размерности [9, 14]. Так, уже при *n* = 5 число обусловленности $\operatorname{cond}(H_5) \approx 4.8 \cdot 10^5$, что определяет высокую чувствительность решения уравнения (1) к незначительным возмущениям в правой части:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; X_1 \approx \begin{bmatrix} 5 \\ -120 \\ 630 \\ -1120 \\ 630 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1.01 \end{bmatrix}, \; X_2 \approx \begin{bmatrix} 11.3 \\ -246 \\ 1197 \\ -2002 \\ 1071 \end{bmatrix}, \; \Delta X \approx \begin{bmatrix} 6.3 \\ -126 \\ 567 \\ -882 \\ 441 \end{bmatrix}, \qquad (46)$$

$$\delta B = \frac{\|B_2 - B_1\|}{\|B_1\|} \approx 0.005, \; \delta X = \frac{\|\Delta X\|}{\|X_1\|} \approx 0.8, \; \tau = \frac{\|\Delta X\| \cdot \|B_1\|}{\|X_1\| \cdot \|\Delta B\|} = \frac{\delta X}{\delta B} \approx 178.2.$$

Использование же переобусловливания на основе *LU*-факторизации позволяет уменьшить число обусловленности матрицы $A_{LU} = L^{-1}A$ приблизительно в два раза: $\operatorname{cond}(A_{LU}) \approx 2.8 \cdot 10^5$, что, однако, оставляет приведенные выше вычисления (50) практически неизменными.

Расчет матрицы переобусловливания T_B из (22) с учетом (44) с использованием процедуры *place* при фиксировании собственных значений искомой матрицы (45) в виде $\Lambda = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 1.011 \end{bmatrix}$ приводит к матрице $A_B = T_B A$, имеющей число обусловленности $\operatorname{cond}(A_B) \approx 50$! При этом решения соответствующих уравнений приводят к следующим результатам:

$$B_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ X_1\approx\begin{bmatrix}5\\-120\\630\\-1120\\630\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1.01\end{bmatrix},\ X_2\approx\begin{bmatrix}4.79\\-120.5\\631.2\\-1122.8\\632.2\end{bmatrix},\ \Delta X\approx\begin{bmatrix}-0.21\\-0.5\\1.2\\-2.8\\2.2\end{bmatrix},$$

демонстрирующим высокую устойчивость решения переобусловленного уравнения к возмущениям его правой части: $\delta X\approx 0.0026,\quad \tau\approx 0.6$.

Заключение

Количественной характеристикой, наиболее точно отражающей зависимость относительной погрешности решения линейного матричного уравнения вида (1) от относительной погрешности его правой части, является степень обусловленности уравнения τ, определяемая выражением (3). Трудность непосредственного определения τ через коэффициенты исходных матриц вследствие нелинейности операции нормирования приводит к необходимости использования качественной характеристики (4), удовлетворяющей неравенству (5), называемой числом обусловленности матрицы левой части уравнения.

Уравнения с матрицей A с большим числом обусловленности называются плохо обусловленными и характеризуются качественной сменой решения при действии малых возмущений. В целях уменьшения влияния ошибок в исходных данных, повышения точности решения, а также ускорения сходимости итерационных методов используют различные алгоритмы, заключающиеся, как правило, в элементарных преобразованиях строк одновременно матриц A и B уравнения согласно (15). Показано, что, несмотря на очевидное изменение числа обусловленности матрицы коэффициентов левой части, не все такие преобразования приводят к изменению степени обусловленности всего уравнения τ, и «улучшение» левой части может приводить к «ухудшению» правой части.

В данной статье решена задача определения таких матриц переобусловливания согласно (22), которые наряду с изменением числа обусловленности матрицы коэффициентов левой части оставляют неизменной матрицу коэффициентов правой части, что неизбежно приводит к изменению степени обусловленности уравнения τ. Геометрическая интерпретация матричного уравнения второго порядка демонстрирует, что такие преобразования заключаются исключительно во вращении системы вокруг ее точного, хотя еще неизвестного решения. Это позволяет дополнительно повысить точность определения решения, исключив возможные вычислительные погрешности при преобразовании правой части согласно (17).

Показано, что выбор переобусловливателей из множества (22), позволяющих уменьшить степень обусловленности уравнения, может производиться на основе метода простой итерации или с учетом оценки снизу числа обусловленности матрицы левой части путем фиксирования ее собственных значений с помощью известных и хорошо проработанных методов.

В заключение отметим, что изложенные в статье рассуждения относительно левостороннего матричного уравнения вида (1) справедливы как для правостороннего уравнения вида $XA=B$ при переобусловливании справа матрицей

$T_B = I + B_R^{\perp}\varphi$, так и для двустороннего $AXC = B$ при переобусловливании матрицами $T_{B_L} = I + \varphi_L B_L^{\perp}$ и $T_{B_R} = I + B_R^{\perp}\varphi_R$ слева и справа соответственно.

Список источников

1. *Mikrin E.A., Zubov N.E., Efanov D.E., Ryabchenko V.N.* Superfast iterative solvers for linear matrix equations // Doklady Mathematics. 2018. Т. 98, № 2. С. 444–447.
2. *Zubov N.E., Ryabchenko V.N.* Solution of a linear nondegenerate matrix equation based on the zero divisor // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2021. № 5 (98). С. 49–59.
3. *Баландин М.Ю., Шурина М.П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000.
4. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М. : Наука, 1984.
5. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М. : Мир, 1999.
6. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М. : Мир, 2001.
7. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений / под ред. Д.К. Фаддеева. М. : Наука, 1984.
8. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М. : Наука, 1977.
9. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1986.
10. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. М. : Мир, 1980.
11. *Тауфер И.* Решение граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1981.
12. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. М. : Наука, 1970.
13. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М. : Мир, 1980.
14. *Форсайт Дж., Молер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М. : Мир, 1969.
15. *Буков В.Н., Рябченко В.Н., Косьянчук В.В., Зыбин Е.Ю.* Решение линейных матричных уравнений методом канонизации // Вестник Киевского национального университета имени Т.Г. Шевченко. Сер. Физико-математические науки. 2002. Вып. 1. С. 19–28.
16. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002.
17. *Kautsky J., Nichols N.K., Van Dooren P.* Robust Pole Assignment in Linear State Feedback // Int. J. Control. 1985. V. 41 (5). P. 1129–1155.
18. Справочник по теории автоматического управления / под общ. ред. А.А. Красовского. М. : Наука, 1987.
19. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н.* Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
20. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976.

References

1. Mikrin E.A., Zubov N.E., Efanov D.E., Ryabchenko V.N. (2018) Superfast iterative solvers for linear matrix equations. *Doklady Mathematics*. 98(2). pp. 444–447.
2. Zubov N.E., Ryabchenko V.N. (2021) Solution of a linear nondegenerate matrix equation based on the zero divisor. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 98(5). pp. 49–59.
3. Balandin M.Yu., Shurina M.P. (2000) *Metody resheniya SLAU bol'shoy razmernosti* [Methods for solving high-dimensional SLAEs]. Novosibirsk: Publishing House of NSTU.

4. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. (1984) *Matritsy i vychisleniya* [Matrices and calculations]. Moscow: Nauka.
5. Golub G.H., Van Loan C.F. (1996) *Matrix Computations*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
6. Demmel J. (1997) *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia, SIAM.
7. Ikramov Kh.D. (1984) *Chislennoye resheniye matrichnykh uravneniy* [Numerical solution of matrix equations]. Moscow: Nauka.
8. Marchuk G.I. (1977) *Metody vychislitel'noy matematiki* [Methods of computational mathematics]. Moscow: Nauka.
9. Ortega J.M., Poole W.G. (1981) *An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations*. Lanham, MD: Pitman Publishing.
10. Strang G. (1976) *Linear Algebra and Its Applications*. Cambridge, Mass.: Academic Press.
11. Taufer J. (1981) *Resheniye granichnykh zadach dlya sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Solution of boundary value problems for systems of linear differential equations]. Moscow: Nauka.
12. Wilkinson J.H. (1965) *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Oxford University Press.
13. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. (1977) *Computer Methods for Mathematical Computations*. Hoboken: Prentice Hall.
14. Forsythe G.E., Moler C.B. (1967) *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*. Hoboken: Prentice Hall.
15. Bukov V.N., Ryabchenko V.N., Kos'yanchuk V.V., Zybin E.Yu. (2002) Resheniye lineynykh matrichnykh uravneniy metodom kanonizatsii [Solution of linear matrix equations by the canonization method]. *Vestnik Kiyevskogo Natsional'nogo Universiteta imeni T.G. Shevchenko. Ser.: fiziko-matematicheskiye nauki – Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*. 1. pp. 19–28.
16. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. (2002) *Robastnaya ustoychivost' i upravleniye* [Robust stability and control]. Moscow: Nauka.
17. Kautsky J., Nichols N.K., Van Dooren P. (1985) Robust pole assignment in linear state feedback. *International Journal of Control*. 41(5). pp. 1129–1155.
18. *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Handbook on the theory of automatic control] (1987) Ed. by A.A. Krasovskiy. Moscow: Nauka.
19. Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N. (2016) *Matrichnyye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nykh apparatov* [Matrix methods in the theory and practice of aircraft automatic control systems]. Moscow: Publishing House of Moscow State Technical University.
20. Kuzovkov N.T. (1976) *Modal'noye upravleniye i nablyudayushchiye ustroystva* [Modal control and monitoring devices]. Moscow: Mashinostroyeniye.

***Сведения об авторах*:**

Зубов Николай Евгеньевич – профессор, доктор технических наук, профессор аспирантуры ПАО РКК «Энергия» им. С.П. Королёва (Королёв, Россия); профессор кафедры систем автоматического управления, декан факультета РКТ МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: nik.zubov@gmail.com

Рябченко Владимир Николаевич – доцент, доктор технических наук, профессор аспирантуры ПАО РКК «Энергия» им. С.П. Королёва (Королёв, Россия); профессор кафедры систем автоматического управления МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: ryabchenko.vn@mail.ru

***Information about the authors*:**

Zubov Nikolay E. – Professor, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Professor of S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia (Korolev, Russian Federation); Professor of Dep. “Automatic

Control Systems", Dean of "Rocket and Space Techniques" faculty at Bauman MSTU (Moscow, Russian Federation). E-mail: nik.zubov@gmail.com
Ryabchenko Vladimir N. – Professor, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Professor of S.P. Korolev Rocket and Space Public Corporation Energia (Korolev, Russian Federation); Professor of Dep. "Automatic Control Systems" at Bauman MSTU (Moscow, Russian Federation). E-mail: ryabchenko.vn@mail.ru

Статья поступила в редакцию 06.06.2023; принята к публикации 05.08.2024

The article was submitted 06.06.2023; accepted for publication 05.08.2024