

Научная статья

УДК 512.552

doi: 10.17223/19988621/90/3

MSC: 16R99

Об автоморфизмах и дифференцированиях редуцированных алгебр и коалгебр инцидентности

Петр Андреевич Крылов¹,
Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев²

^{1, 2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ krylov@math.tsu.ru

² nstsddts@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена редуцированным алгебрам и коалгебрам инцидентности, их автоморфизмам и дифференцированиям. Хорошо известны внутренние автоморфизмы и внутренние дифференцирования алгебр. В дополнение к ним в статье выделяется еще два вида автоморфизмов – мультипликативные и порядковые, а также один вид дифференцирований – аддитивные.

Ключевые слова: алгебра инцидентности, коалгебра инцидентности, автоморфизм, дифференцирование

Благодарности: Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (РНФ) № 23-21-00375, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/>

Для цитирования: Крылов П.А., Норбосамбуев Ц.Д. Об автоморфизмах и дифференцированиях редуцированных алгебр и коалгебр инцидентности // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 33–39. doi: 10.17223/19988621/90/3

Original article

On automorphisms and derivations of reduced incidence algebras and coalgebras

Piotr A. Krylov¹, Tsyrendorzhii D. Norbosambuev²

^{1, 2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ krylov@math.tsu.ru

² nstsddts@yandex.ru

Abstract. Incidence algebras of partially ordered sets over commutative rings are an important and characteristic example of function rings. From a partially ordered set, one can obtain an incidence coalgebra. Using certain equivalence relations on the set of all intervals of a locally finite poset, reduced incidence algebras and reduced incidence coalgebras

are defined. These objects have a much more complex structure compared to incidence algebras and incidence coalgebras.

This article introduces two types of automorphisms of the reduced incidence algebra – multiplicative and order, as well as one type of derivations – additive derivation. As for incidence coalgebras, there are no works devoted to their automorphisms or derivations. The article discusses a possible approach to the study of automorphisms and derivations of incidence coalgebras.

Keywords: incidence algebra, incidence coalgebra, automorphism, derivation

Acknowledgments: This work was supported by grant of Russian Science Foundation (RSF) no. 23-21-00375, <https://rscf.ru/en/project/23-21-00375/>

For citation: Krylov, P.A., Norbosambuev, T.D. (2024) On automorphisms and derivations of reduced incidence algebras and coalgebras. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 33–39. doi: 10.17223/19988621/90/3

Введение

Алгебры инцидентности и коалгебры инцидентности частично упорядоченных множеств достаточно хорошо известны. Им посвящено множество работ, а также книга [1]. Изучаются различные линейные отображения алгебр инцидентности: автоморфизмы, дифференцирования, антиавтоморфизмы и инволюции (более подробно об этом написано в [2]).

Менее известны редуцированные алгебры и редуцированные коалгебры инцидентности. Редуцированная алгебра инцидентности – это определенная подалгебра алгебры инцидентности. А редуцированная коалгебра инцидентности является некоторой фактор-коалгеброй коалгебры инцидентности. Редуцированные алгебры и коалгебры инцидентности устроены значительно сложнее, чем просто алгебры инцидентности и коалгебры инцидентности.

Основное внимание в статье уделяется автоморфизмам и дифференцированиям редуцированных алгебр и коалгебр инцидентности. Автоморфизмы и дифференцирования алгебр инцидентности давно привлекают внимание специалистов (см.: [1, 2]). В то же время авторам неизвестны работы об автоморфизмах и дифференцированиях редуцированных алгебр и коалгебр инцидентности.

Раздел 1 настоящей работы содержит некоторые вспомогательные сведения для последующих разделов.

В разделе 2 определяются мультипликативные и порядковые автоморфизмы, а также аддитивные дифференцирования редуцированных алгебр инцидентности. Их можно назвать стандартными отображениями. Здесь мы считаем автоморфизм или дифференцирование стандартным, если его строение вполне понятно. Отмечается, что композицией стандартных автоморфизмов не исчерпываются все автоморфизмы редуцированных алгебр инцидентности. Похожая ситуация и для дифференцирований.

В разделе 3 приводятся определения коалгебры инцидентности и редуцированной коалгебры инцидентности. В отличие от алгебр инцидентности автоморфизмы и дифференцирования коалгебр инцидентности в литературе не затрагивались. Затем кратко обсуждается один из возможных подходов к исследованию автоморфизмов и дифференцирований коалгебр инцидентности. Он опирается на

существующий способ связать с данной коалгеброй инцидентности определенную алгебру инцидентности, что позволит использовать известные факты об автоморфизмах и дифференцированиях алгебр инцидентности.

Все алгебры, встречающиеся в статье, – ассоциативные алгебры с ненулевой единицей. Если S – алгебра, то $\text{Aut } S$ – ее группа автоморфизмов.

1. Редуцированные алгебры инцидентности

Кратко изложим некоторый необходимый материал об алгебрах инцидентности. Более детально с ними можно познакомиться в книге [1] и работе [2].

Пусть X – частично упорядоченное множество. Для любых элементов $x, y \in X$ через $[x, y]$ обозначим подмножество $\{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$. Оно называется интервалом в X . Договоримся, что все интервалы в X конечны. В таком случае X называется локально конечным частично упорядоченным множеством.

Далее буква R будет обозначать некоторое коммутативное кольцо. Положим $I(X, R) = \{f : X \times X \rightarrow R \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \not\leq y\}$. Функции складываются поточечно и естественным образом умножаются на скаляры из R . Произведение функций f и g задается формулой

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot g(z, y) \quad (1)$$

для любых $x, y \in X$. В результате получаем R -алгебру $I(X, R)$, называемую алгеброй инцидентности частично упорядоченного множества X над кольцом R . Конкретную алгебру $I(X, R)$ обычно обозначаем буквой A .

Редуцированная алгебра инцидентности определяется с помощью некоторого отношения эквивалентности на множестве всех интервалов частично упорядоченного множества X . Такое отношение будем обозначать символом $\sim$.

Определение. Пусть дано отношение эквивалентности $\sim$ на множестве всех интервалов частично упорядоченного множества X , причем всякий раз из того, что $[x, y] \sim [s, t]$ следует существование биекции $\varepsilon : [x, y] \rightarrow [s, t]$, для которой выполняются соотношения $[x, z] \sim [s, \varepsilon(z)]$ и $[z, y] \sim [\varepsilon(z), t]$ для каждого $z \in [x, y]$. Говорят, что $\sim$ – отношение, совместимое с порядком.

Пусть $\sim$ – отношение, совместимое с порядком. Обозначим через $I(X_{\sim})$ совокупность всех функций f из $I(X, R)$, для которых всякий раз из того, что $[x, y] \sim [s, t]$ следует $f(x, y) = f(s, t)$. Иными словами, f является константой на классах эквивалентности отношения $\sim$. Проверка показывает, что $I(X_{\sim})$ – подалгебра алгебры $I(X, R)$ [1. Предложение 1.3.5]. Она носит название редуцированной алгебры инцидентности.

Итак, редуцированные алгебры инцидентности – это определенные подалгебры алгебр инцидентности. Они образуют обширный и довольно сложный класс алгебр. Например, кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ изоморфно некоторой подобной алгебре.

2. Стандартные автоморфизмы и дифференцирования

Как и раньше, символ $I(X, R)$ обозначает алгебру инцидентности, а A – какая-то редуцированная алгебра инцидентности $I(X_{\sim})$.

Рассмотрим несколько видов стандартных автоморфизмов и дифференцирований.

1. Известными представителями стандартных автоморфизмов и дифференцирований являются внутренние автоморфизмы и внутренние дифференцирования. Правда, если кольцо $I(X, R)$ коммутативно, то они тривиальны.

2. Мультипликативные автоморфизмы.

Пусть для каждого $x, y \in X$ с условием $x < y$ дан обратимый элемент c_{xy} кольца R , причем $c_{xy} = c_{xz} \cdot c_{zy}$ как только $x < z < y$. Множество элементов $\{c_{xy} \mid x < y\}$ называется мультипликативной системой [2]. Каждая мультипликативная система $\{c_{xy} \mid x < y\}$ дает автоморфизм μ алгебры $I(X, R)$. Именно, для каждой функции f из $I(X, R)$ полагаем $(\mu(f))(x, x) = f(x, x)$ для всех $x \in X$ и $(\mu(f))(x, y) = c_{xy} f(x, y)$ для всех $x, y \in X$ с условием $x < y$. Автоморфизм μ называется мультипликативным автоморфизмом, соответствующим мультипликативной системе $\{c_{xy} \mid x < y\}$. Все мультипликативные автоморфизмы образуют нормальную подгруппу в группе $\text{Aut } I(X, R)$.

Предположим, что мультипликативная система $\{c_{xy} \mid x < y\}$ обладает дополнительным свойством: для любых интервалов $[x, y]$ и $[u, v]$ из $[x, y] \sim [u, v]$ следует $c_{xy} = c_{uv}$. Проверим, что мультипликативный автоморфизм, соответствующий этой системе, индуцирует автоморфизм алгебры A . Если $[x, x] \sim [u, u]$, то $(\mu(f))(x, x) = f(x, x) = f(u, u) = (\mu(f))(u, u)$. Аналогично, если $[x, y] \sim [u, v]$, где $x < y$, $u < v$, то $(\mu(f))(x, y) = c_{xy} f(x, y) = c_{uv} f(u, v) = (\mu(f))(u, v)$. Делаем вывод, что $\mu(f) \in A$.

Ясно, что система элементов $\{c_{xy}^{-1} \mid x < y\}$ является мультипликативной системой и ей соответствует автоморфизм μ^{-1} . Как и выше, можно убедиться, что $\mu^{-1}(f) \in A$. Следовательно, ограничение μ на A является автоморфизмом алгебры A . Назовем его тоже мультипликативным. Все мультипликативные автоморфизмы алгебры A образуют нормальную подгруппу в $\text{Aut } A$.

3. Порядковые автоморфизмы.

Пусть τ – автоморфизм частично упорядоченного множества X . Известно, что τ индуцирует автоморфизм алгебры $I(X, R)$, для обозначения которого сохраним букву τ . Именно, для любой функции f из $I(X, R)$ и каждой пары элементов (x, y) с условием $x \leq y$ положим $(\tau(f))(x, y) = f(\tau(x), \tau(y))$. Предположим, что автоморфизм τ согласован с отношением эквивалентности $\sim$ в следующем смысле: если $[x, y] \sim [u, v]$, то $[\tau(x), \tau(y)] \sim [\tau(u), \tau(v)]$.

Убедимся, что τ индуцирует автоморфизм алгебры A . Имеется в виду, что ограничение автоморфизма τ на алгебре A является автоморфизмом этой алгебры. Пусть $f \in A$ и $[x, y] \sim [u, v]$. Тогда $[\tau(x), \tau(y)] \sim [\tau(u), \tau(v)]$. И далее находим $(\tau(f))(x, y) = f(\tau(x), \tau(y)) = f(\tau(u), \tau(v)) = (\tau(f))(u, v)$. Заключаем, что $\tau A \subseteq A$. Похожим образом можно рассуждать и для обратного автоморфизма τ^{-1} (он также согласован с $\sim$) и получить, что $\tau^{-1}A \subseteq A$. Следовательно, $\tau A = A$ и $\tau \in \text{Aut } A$.

Замечание. Если в качестве отношения $\sim$ взять изоморфизм интервалов как частично упорядоченных множеств, то любой автоморфизм τ будет согласован с отношением эквивалентности $\sim$.

4. Аддитивные дифференцирования.

Определение [2]. Назовем аддитивной системой такую совокупность элементов $\{d_{xy} \in R \mid x < y\}$, что $d_{xy} = d_{xz} + d_{zy}$ для всех x, y, z с условием $x < z < y$. С каждой аддитивной системой $\{d_{xy} \mid x < y\}$ можно ассоциировать дифференцирование d алгебры $I(X, R)$. Надо положить $(d(f))(x, x) = 0$ для всех $x \in X$ и $(d(f))(x, y) = d_{xy}f(x, y)$, где $x, y \in X$ и $x < y$.

Все аддитивные дифференцирования образуют подмодуль в R -модуле дифференцирований алгебры $I(X, R)$.

Предположим, что дана аддитивная система $\{d_{xy} \mid x < y\}$ с условием $d_{xy} = d_{uv}$ для любых эквивалентных интервалов $[x, y]$ и $[u, v]$. Обозначим через δ дифференцирование алгебры $I(X, R)$, соответствующее этой системе в смысле, раскрытом в предыдущем абзаце. Как и в ситуации с мультипликативными автоморфизмами в пункте 2, несложно проверить, что $\delta A \subseteq A$. Следовательно, δ индуцирует дифференцирование алгебры A . Удобно тоже назвать его аддитивным дифференцированием.

Пусть R – коммутативное неразложимое кольцо. Тогда каждый автоморфизм R -алгебры инцидентности $I(X, R)$ является произведением следующих трех стандартных автоморфизмов: внутреннего, мультипликативного и порядкового. А каждое дифференцирование записывается в виде суммы внутреннего и аддитивного дифференцирований (см.: [1, 2]).

Положение для редуцированной алгебры инцидентности $I(X_{\sim})$ намного более сложное. В разделе 1 замечено, что алгебра $R[[x]]$ изоморфна определенной редуцированной алгебре инцидентности. А как известно, подстановка в каждый ряд из $R[[x]]$ некоторого фиксированного ряда приводит к автоморфизму алгебры $R[[x]]$. Такие автоморфизмы, как правило, не относятся к стандартным. Алгебра $R[[x]]$ обладает также нестандартными дифференцированиями.

3. Коалгебры инцидентности, их автоморфизмы и дифференцирования

Коалгебра – это математический объект, двойственный к алгебре (в смысле обращения стрелок).

С этого места буква F обозначает какое-то поле. Пусть (C, Δ, ϵ) – некоторая коалгебра над полем F . Таким образом, C – F -пространство, Δ – коумножение в C , а ϵ – коединица для C . Для обозначения этой коалгебры будем использовать одну букву C .

Как и раньше, X – локально конечное частично упорядоченное множество. Пусть C – векторное пространство над полем F , базис которого состоит из всех интервалов $[x, y]$ множества X . Определим отображения $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ и $\epsilon: C \rightarrow F$, полагая

$$\Delta([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} [x, z] \otimes [z, y], \quad \epsilon([x, y]) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \\ 0, & \text{если } x \neq y \end{cases} \quad (2)$$

для всякого базисного вектора $[x, y]$. Естественным образом Δ и ϵ продолжаются до коумножения и коединицы для пространства C .

Тройка (C, Δ, ε) является коалгеброй. Она называется коалгеброй инцидентности локально конечного частично упорядоченного множества X . Обозначаем коалгебру (C, Δ, ε) символом $Co(X, F)$. Теория алгебр и коалгебр инцидентности достаточно полно представлена в книге [1].

Двойственная алгебра $Co(X, F)^*$ к коалгебре $Co(X, F)$ канонически изоморфна алгебре инцидентности $I(X, R)$. При этом важно, что автоморфизмы и дифференцирования коалгебры $Co(X, F)$ индуцируют автоморфизмы и дифференцирования соответственно двойственной алгебры $Co(X, F)^*$, а затем алгебры $I(X, F)$.

Опираясь на изложенные обстоятельства, развивается следующий подход к исследованию автоморфизмов и дифференцирований коалгебры $Co(X, F)$. От коалгебры $Co(X, F)$ мы переходим к алгебре $I(X, F)$. Затем используем известные свойства и строение автоморфизмов либо дифференцирований данной алгебры. В завершение этой процедуры нужно вернуться обратно к коалгебре $Co(X, F)$. Но это значительно более сложная задача.

Из предпоследнего абзаца раздела 2 можно заключить, что строение группы автоморфизмов и пространства дифференцирований F -алгебры $I(X, F)$ в целом известны. Основываясь на соответствующей информации и реализуя идеи, изложенные выше, удалось вычислить группу автоморфизмов и пространство дифференцирований коалгебры $Co(X, F)$. Оказалось, что группа автоморфизмов коалгебры $Co(X, F)$ антиизоморфна группе автоморфизмов алгебры $I(X, F)$. А пространства дифференцирований этих объектов изоморфны. Решающую роль здесь сыграли предложенные аналоги стандартных автоморфизмов и стандартных дифференцирований, фигурирующих в разделе 2. Соответствующие результаты готовятся к публикации.

Двойственным аналогом редуцированных алгебр инцидентности можно назвать редуцированные коалгебры инцидентности [1]. Пусть как в разделе 1 дано отношение эквивалентности $\sim$ на множестве всех интервалов локально конечного частично упорядоченного множества X , совместимое с порядком. Обозначим через $Co(X_-)$ векторное пространство над полем F , базис которого образуют все типы множества X относительно отношения $\sim$. Исходя из типов, можно так задать коумножение и коединицу для $Co(X_-)$, что получится коалгебра (см.: [1]). Собственно говоря, структура этой коалгебры определяется равенствами (2). Коалгебру $Co(X_-)$ называют редуцированной коалгеброй инцидентности множества X . Она изоморфна определенной фактор-коалгебре коалгебры $Co(X, F)$. Двойственная алгебра $Co(X_-)^*$ к коалгебре $Co(X_-)$ канонически изоморфна редуцированной алгебре инцидентности $I(X_-)$. Фактически нужный изоморфизм индуцируется изоморфизмом $Co(X, F)^* \cong I(X, F)$ (о нем упоминается в этом разделе).

При изучении автоморфизмов и дифференцирований коалгебры $Co(X_-)$ после некоторых модификаций в целом годится подход, кратко изложенный выше для случая коалгебры $Co(X, F)$.

Список источников

1. Spiegel E., O'Donnell C.J. Incidence Algebras. New York : Marcel Dekker, 1997. 334 p.
2. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence rings: automorphisms and derivations // arXiv:2305.02984v1 [math.RA]. 2023. doi: 10.48550/arXiv.2305.02984

References

1. Spiegel E., O'Donnell C.J. (1997) *Incidence Algebras*. New York: Marcel Dekker.
2. Krylov P., Tuganbaev A. (2023) Incidence rings: automorphisms and derivations. arXiv:2305.02984v1 [math.RA]. DOI: 10.48550/arXiv.2305.02984.

Сведения об авторах:

Крылов Петр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: krylov@math.tsu.ru

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Information about the authors:

Krylov Piotr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: krylov@math.tsu.ru

Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 04.03.2024; принята к публикации 05.08.2024

The article was submitted 04.03.2024; accepted for publication 05.08.2024