ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2024 Математика и механика № 90
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 512.531.2 MSC: 20M10
doi: 10.17223/19988621/90/4

# Прямые произведения циклических полугрупп с нулем, допускающие внешнепланарные и обобщенные внешнепланарные графы Кэли

**Денис Владимирович Соломатин**

*Омский государственный педагогический университет, Омск, Россия,*
*solomatin_dv@omgpu.ru, denis_2001j@bk.ru*

**Аннотация.** Приводятся характеристические свойства прямых произведений полугрупп с нулем, допускающих внешнепланарные графы Кэли, а также их обобщения на языке определяющих соотношений.
**Ключевые слова:** правые графы Кэли полугрупп, планарные графы, полугруппы с нулем, прямые произведения полугрупп, внешнепланарные графы

**Для цитирования:** Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических полугрупп с нулем, допускающие внешнепланарные и обобщенные внешнепланарные графы Кэли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 40–49. doi: 10.17223/19988621/90/4

Original article

# Direct products of cyclic semigroups with zero, admitting outerplanar and generalized outerplanar Cayley graphs

**Denis V. Solomatin**

Omsk State Pedagogical University, Omsk, *Russian Federation,*
*solomatin_dv@omgpu.ru, denis_2001j@bk.ru*

**Abstract.** The article presents the characteristic properties of direct products of semigroups with zero admitting outerplanar Cayley graphs, as well as their generalizations in the defining relations of copresentation.
Theorem 1. A finite semigroup $S$ with zero that is a direct product of nontrivial cyclic semigroups with zero admits an outerplanar Cayley graph if and only if one of the following conditions holds:
1) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^3 = a^2 \right\rangle^0 \times \left\langle b \;\middle|\; b^{h+1} = b^h \right\rangle^0$ where $h$ is a natural number and $h < 4$;
2) $S \cong \left\langle a_0 \;\middle|\; a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \;\middle|\; a_i^{2+1} = a_i^2 \right\rangle$ where $r$ and $n$ are natural numbers and $r \le 2$; or $r = 3$, $n = 1$;

3) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^{+0} \times \langle b \mid b^2 = b \rangle^{+0}$ where $r$ and $m$ are natural numbers and $m \le 2$;

4) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+0}$ where $n = 1$; or $r = 1$, $n = 2$.

Theorem 2. A finite semigroup $S$ with zero that is a direct product of nontrivial cyclic semigroups with zero admits a generalized outerplanar Cayley graph if and only if one of the following conditions holds:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^{0} \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle^{0}$ where for natural numbers $r$, $m$, $h$, $t$ one of the following restrictions is satisfied:

1.1) $r = 2$, $m = 1$, $h < 4$, $t = 1$;

1.2) $r = 3$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$;

2) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ where $r$ and $n$ are natural numbers and $r \le 3$;

3.1) $S \cong \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle^{+0}$;

3.2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^{+0} \times \langle b \mid b^2 = b \rangle^{+0}$ where $r$ and $m$ are natural numbers and $m \le 2$;

4) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^2 = a_i \rangle^{+0}$ where $n = 1$; or $r = 1$, $n = 2$.

**Keywords:** right Cayley graphs of semigroups, planar graphs, semigroups with zero, direct products of semigroups, outerplanar graphs

**For citation:** Solomatin, D.V. (2024) Direct products of cyclic semigroups with zero, admitting outerplanar and generalized outerplanar Cayley graphs. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 40–49. doi: 10.17223/19988621/90/4

## Введение

Исследуя свойство планарности графов Кэли полугрупп, мы раз за разом возвращаемся к истокам – циклическим полугруппам и различным вариациям на эту тему. А так как для изучения полугрупповых многообразий принципиальное значение имеют прямые произведения полугрупп, подполугруппы и их гомоморфные образы, то не теряет актуальности тематика настоящей статьи. Кроме того, прямые произведения циклических полугрупп с нулем находят применение в теории алгоритмов и теории автоматов. Они используются для моделирования конечных автоматов, которые представляют собой системы с конечным числом состояний. Заключительное состояние в таком автомате, как правило, соответствует нулевому элементу, в отличие от моноидов, когда начальному состоянию автомата зачастую соответствует единица. Конечные автоматы широко применяются в различных областях, таких как информатика, электроника, теория управления и обработка текстов естественного языка. Они также играют ключевую роль в разработке компиляторов, проектировании микропроцессоров, анализе и синтезе речи и многом другом. В частности, прямые произведения циклических групп с нулем могут использоваться при создании недетерминированных конечных автоматов для моделирования параллельных вычислительных систем и систем с недетерминированным поведением.

## 1. Основные факты и определения

Необходимые для понимания статьи сведения из теории графов можно почерпнуть в [1], развернутую мотивацию изучения обобщенных внешнепланарных графов – в [2], а имеющиеся сведения о полугруппах с планарными графами Кэли – в обзоре [3]. Напомним лишь, что правым графом Кэли полугруппы $S=\langle X\rangle$, или просто графом Кэли полугруппы относительно множества образующих ее элементов $X\subseteq S$, называется ориентированный мультиграф $Cay(S;X)=(S,A)$, в котором задана совокупность дуг $A=[(u,v)\,|\,u\in S, v\in S, \exists x\in X: ux=v]$ и задано отображение $\varphi: A\to X$, ставящее в соответствие каждой дуге из $A$ метку в $X$. Множество вершин графа $Cay(S;X)$ состоит из элементов полугруппы $S$. Помеченные дуги графа $Cay(S;X)$ представляют собой элементы совокупности $A$, начинаются в вершине $u\in S$, заканчиваются в вершине $v\in S$, помечены элементом $x\in X$ тогда и только тогда, когда $ux=v$. Двойственным образом через равенство $xu=v$ определяются левые графы Кэли полугрупп, в коммутативном случае совпадающие с правыми. Более того, для моноидов как полугрупп с единицей $e$ эти графы являются частным случаем двусторонних графов Кэли $2SCay(S;L,R)=(S,[(u,v)\,|\,u\in S, v\in S, \exists l\in L, \exists r\in R: lu=vr])$; в самом деле, чтобы получить односторонний граф Кэли, достаточно взять $R=\{e\}$ или $L=\{e\}$.

Заметим, что наличие петель в ориентированном мультиграфе, кратных ребер, их направленностей и пометок не влияет на возможность плоской укладки графа, то есть такого вложения в плоскость, что вершины графа изображены точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, так называемыми жордановыми кривыми, не имеющими общих точек, кроме, возможно, общих вершин. Следовательно, имеет смысл переход к так называемым основам графов Кэли $SCay(S;X)=(S,\{\{a,b\}\,|\,a\in S, b\in S, \exists x\in X: ax=b\})$ путем удаления петель, направленностей, меток и замены параллельных ребер одним ребром, соединяющим те же вершины исходного графа. Тогда корректным будет перенос следующих свойств обыкновенных графов на графы Кэли полугрупп.

**Определение 1.** Внешнепланарной укладкой графа называется такая укладка графа на плоскости, при которой все вершины графа принадлежат единственной внешней грани.

**Определение 2.** Обобщенной внешнепланарной укладкой графа называется такая укладка графа на плоскости, при которой каждое ребро графа принадлежит внешней грани хотя бы одним из своих концов.

Сформулируем критерии внешней планарности и обобщенной внешней планарности.

**Предложение 1.** Полугруппа допускает внешнепланарный граф Кэли если и только если относительно некоторого множества образующих основа графа Кэли этой полугруппы не содержит подграфов, гомеоморфных графам Чартрэнда–Харари $K_4$ или $K_{2,3}$, то есть полному графу, восстановленному на четырех вершинах, или полному двудольному графу, содержащему две вершины в одной и три вершины в другой доле графа в обозначениях из [1].

Аналогичным образом формулируется критерий обобщенной внешнепланарности.

**Предложение 2.** Полугруппа допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли если и только если относительно некоторого множества образующих основа графа Кэли этой полугруппы не содержит подграфов, стягиваемых к графам Седлачека из множества графов $\{G_i \mid i = 1 \div 12\}$ в обозначениях из [4].

Условимся различать операции присоединения нуля и операции внешнего присоединения нуля к полугруппе $S$. В первом случае нуль добавляем, только когда он отсутствует в полугруппе $S$, и соответствующую полугруппу обозначаем, как обычно, через $S^0$. Во втором случае нуль присоединяем всегда и полученную полугруппу будем обозначать через $S^{+0}$. Внешнее присоединение нуля происходит следующим способом: присоединяем к полугруппе $S$ новый элемент 0 и доопределяем операцию на множестве $S \cup \{0\}$, полагая $0 \cdot 0 = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ для любого $x \in S$. Под циклической полугруппой с нулем понимается любой гомоморфный образ свободной однопорожденной полугруппы с нулем. Очевидно, что любая циклическая полугруппа с нулем либо изоморфна циклической нильполугруппе, либо получена из циклической полугруппы внешним присоединением нуля.

## 2. Основной результат

Основным результатом данной заметки являются следующие две теоремы.

**Теорема 1.** *Конечная полугруппа S с нулем, являющаяся прямым произведением неодноэлементных циклических полугрупп с нулем, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^3 = a^2 \right\rangle^0 \times \left\langle b \;\middle|\; b^{h+1} = b^h \right\rangle^0$, *где h – натуральное число, причем h* < 4;

2) $S \cong \left\langle a_0 \;\middle|\; a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \;\middle|\; a_i^{2+1} = a_i^2 \right\rangle$, *где r и n – натуральные числа, причем* $r \le 2$; *или r* = 3, *n* = 1;

3) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^{r+m} = a^r \right\rangle^{+0} \times \left\langle b \;\middle|\; b^2 = b \right\rangle^{+0}$, *где r и m – натуральные числа, причем* $m \le 2$;

4) $S \cong \left\langle a_0 \;\middle|\; a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \;\middle|\; a_i^2 = a_i \right\rangle^{+0}$, *где n* = 1; *или r* = 1, *n* = 2.

**Теорема 2.** *Конечная полугруппа S с нулем, являющаяся прямым произведением неодноэлементных циклических полугрупп с нулем, допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^{r+m} = a^r \right\rangle^0 \times \left\langle b \;\middle|\; b^{h+t} = b^h \right\rangle^0$, *где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений*:

1.1) *r* = 2, *m* = 1, *h* < 4, *t* = 1;

1.2) *r* = 3, *m* = 1, *h* = 3, *t* = 1;

2) $S \cong \left\langle a_0 \;\middle|\; a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \;\middle|\; a_i^{2+1} = a_i^2 \right\rangle$, *где r и n – натуральные числа, причем* $r \le 3$;

3.1) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^{2+1} = a^2 \right\rangle \times \left\langle b \;\middle|\; b^{2+1} = b^2 \right\rangle^{+0}$;

3.2) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^{r+m} = a^r \right\rangle^{+0} \times \left\langle b \;\middle|\; b^2 = b \right\rangle^{+0}$, *где r и m – натуральные числа, причем* $m \le 2$;

4) $S \cong \left\langle a_0 \;\middle|\; a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \;\middle|\; a_i^2 = a_i \right\rangle^{+0}$, *где* $n = 1$; *или* $r = 1$, $n = 2$.

Доказательство теорем опирается на следующую лемму, приведенную в [3] как Теорема 23.

**Лемма.** *Конечная полугруппа S с нулем, являющаяся прямым произведением неодноэлементных циклических полугрупп с нулем, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^{r+m} = a^r \right\rangle^{0} \times \left\langle b \;\middle|\; b^{h+t} = b^h \right\rangle^{0}$, *где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений*:

1.1) $r = 2$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$;
1.2) $r = 3$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$;
1.3) $r = 2$, $m = 1$, $h = 1$, $t = 2$;

2) $S \cong \left\langle a_0 \;\middle|\; a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \;\middle|\; a_i^{2+1} = a_i^2 \right\rangle$, *где r – натуральное число, причем* $r \le 3$.

3.1) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^{2+1} = a^2 \right\rangle \times \left\langle b \;\middle|\; b^{2+1} = b^2 \right\rangle^{+0}$;

3.2) $S \cong \left\langle a \;\middle|\; a^{r+m} = a^r \right\rangle^{+0} \times \left\langle b \;\middle|\; b^2 = b \right\rangle^{+0}$, *где r и m – натуральные числа, причем* $m \le 2$;

4) $S \cong \left\langle a_0 \;\middle|\; a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \;\middle|\; a_i^2 = a_i \right\rangle^{+0}$, *где* $n \le 2$; *или* $r = 1$, $n \le 3$.

***Доказательство.*** Рассмотрим каждый случай в отдельности. Одновременное доказательство двух теорем осуществим согласно следующей общей схеме: перебираем варианты ограничений из Леммы. Если окажется так, что условие теоремы выполнено, то граф Кэли соответствующей полугруппы с нулем допускает внешнепланарную укладку или обобщенную внешнепланарную укладку, иначе в основе этого графа обнаруживается подграф, гомеоморфный графу $K_4$ или $K_{2,3}$ (тогда граф не является внешнепланарным), или одному из графов Седлачека (в этом случае граф не является обобщенным внешнепланарным).

При выполнении условий пункта 1.1 из Леммы для $h < 4$ граф Кэли соответствующей полугруппы допускает внешнепланарную укладку относительно множества неразложимых образующих $\{(a;b),(a;b^2),(a;b^3),(a^2;b)\}$. А именно, основа графа Кэли двухэлементной полугруппы $\left\langle a \mid a^3 = a^2 \right\rangle^0 \times \left\langle b \mid b^2 = b^1 \right\rangle^0$ является внешнепланарным паросочетанием; основа графа Кэли четырехэлементной полугруппы $\left\langle a \mid a^3 = a^2 \right\rangle^0 \times \left\langle b \mid b^3 = b^2 \right\rangle^0$ является внешнепланарной звездой; наконец, такая укладка основы графа Кэли шестиэлементной полугруппы $\left\langle a \mid a^3 = a^2 \right\rangle^0 \times \left\langle b \mid b^4 = b^3 \right\rangle^0$, что все ее вершины принадлежат внешней грани, приведена на рис. 1. Дальнейшее увеличение параметра до $h = 4$ приводит к появлению изображенного на рис. 2 подграфа основы графа Кэли формируемой полугруппы, гомеоморфного графу $G_{10}$ . Следовательно, граф не является обобщенным внешнепланарным и не является внешнепланарным. Заметим, что здесь и в дальнейшем при любой системе образующих $X$ полугруппы $S$ в основе графа Кэли $SCay(S;X)$ будет возникать найденный подграф, гомеоморфный одному из запрещенных графов, и ни при какой другой системе образующих этого нельзя будет избежать, так как подграфы строятся относительно минимального множества неразложимых образующих элементов, присутствующего в качестве подмножества в любом другом множестве образующих.

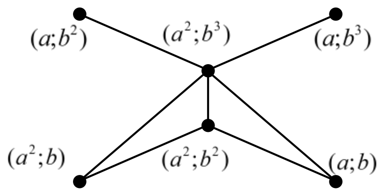


**Рис. 1.** Внешнепланарная укладка основы графа Кэли полугруппы
$S=\langle a\mid a^3=a^2\rangle^0\times\langle b\mid b^4=b^3\rangle^0$

**Fig. 1.** Outerplanar embedding of the base of the Cayley graph of semigroup
$S=\langle a\mid a^3=a^2\rangle^0\times\langle b\mid b^4=b^3\rangle^0$

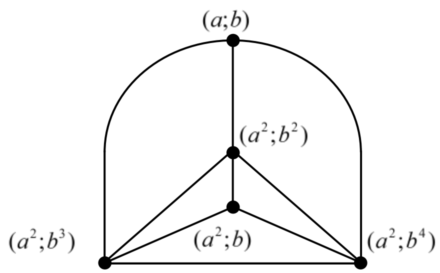


**Рис. 2.** Подграф основы графа Кэли полугруппы $S=\langle a\mid a^3=a^2\rangle^0\times\langle b\mid b^5=b^4\rangle^0$

**Fig. 2.** Subgraph of the base of the Cayley graph of semigroup $S=\langle a\mid a^3=a^2\rangle^0\times\langle b\mid b^5=b^4\rangle^0$

При выполнении условий пункта 1.2 из Леммы основа графа Кэли соответствующей полугруппы не является внешнепланарной, так как содержит изображенный на рис. 3 подграф, гомеоморфный графу $K_{2,3}$, но будет обобщенной внешнепланарной.

В случае выполнения ограничений пункта 1.3 из Леммы основа графа Кэли соответствующей полугруппы содержит изображенный на рис. 4 подграф, гомеоморфный графу $G_{10}$ , следовательно, граф не является обобщенным внешнепланарным и не является внешнепланарным.

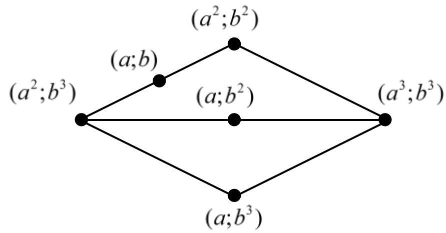


**Рис. 3.** Подграф основы графа Кэли полугруппы $S=\left\langle a \mid a^4=a^3\right\rangle^0 \times \left\langle b \mid b^4=b^3\right\rangle^0$

**Fig. 3.** Subgraph of the base of the Cayley graph of semigroup $S=\left\langle a \mid a^4=a^3\right\rangle^0 \times \left\langle b \mid b^4=b^3\right\rangle^0$

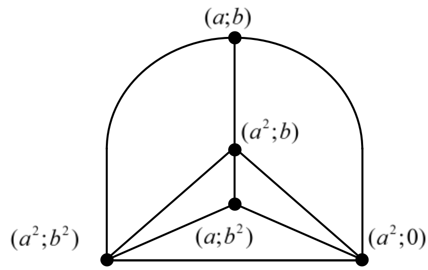


**Рис. 4.** Подграф основы графа Кэли полугруппы $S=\left\langle a \mid a^3=a^2\right\rangle^0 \times \left\langle b \mid b^3=b\right\rangle^0$

**Fig. 4.** Subgraph of the base of the Cayley graph of semigroup $S=\left\langle a \mid a^3=a^2\right\rangle^0 \times \left\langle b \mid b^3=b\right\rangle^0$

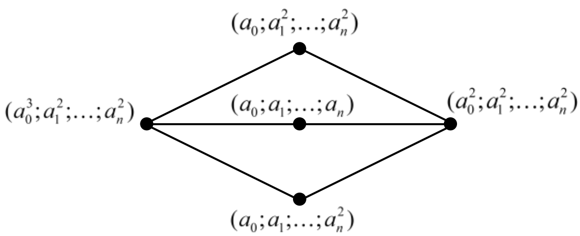


**Рис. 5.** Подграф основы графа Кэли полугруппы $S=\left\langle a_0 \mid a_0^4=a_0^3\right\rangle \times \prod_{i=1}^{n}\left\langle a_i \mid a_i^3=a_i^2\right\rangle$, при $n>1$

**Fig. 5.** Subgraph of the base of the Cayley graph of semigroup

$$S=\left\langle a_0 \mid a_0^4=a_0^3\right\rangle \times \prod_{i=1}^{n}\left\langle a_i \mid a_i^3=a_i^2\right\rangle \text{ with } n>1$$

На рис. 5 изображен гомеоморфный графу $K_{2,3}$ подграф основы графа Кэли полугруппы формируемой условиями пункта 2 из Леммы при $n>1$ для $r=3$, следовательно, в этом случае граф Кэли соответствующей полугруппы не является внешнепланарным, но при этом допускает обобщенную внешнеплоскую укладку. Для меньших значений $r<3$ либо $n=1$ для $r=3$ запрещенных конфигураций не обнаруживается; таким образом, в каждом их этих случаев граф внешнепланарный и обобщенный внешнепланарный.

Пункт 3.1 из Леммы содержит условия, выполнение которых формирует полугруппу, допускающую обобщенный внешнепланарный граф Кэли, но не допускающую внешнепланарный граф Кэли, так как ее основа содержит изображенный на рис. 6 подграф, гомеоморфный графу $K_{2,3}$. В случае выполнения условий пункта 3.2 из Леммы плоская укладка графа Кэли соответствующей полугруппы относительно множества образующих ее элементов $\{(a;0),(a;b)\}$ оказывается внешнепланарной и, следовательно, обобщенной внешнепланарной.

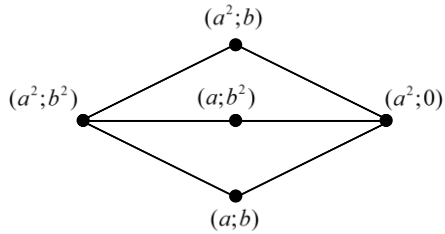


**Рис. 6.** Подграф основы графа Кэли полугруппы
$$S = \left\langle a \mid a^3 = a^2 \right\rangle \times \left\langle b \mid b^3 = b^2 \right\rangle^{+0}$$
**Fig. 6.** Subgraph of the base of the Cayley graph of semigroup
$$S = \left\langle a \mid a^3 = a^2 \right\rangle \times \left\langle b \mid b^3 = b^2 \right\rangle^{+0}$$

Для полугруппы, удовлетворяющей ограничениям условия 4 из Леммы, при $n = 1$ существует внешнепланарная укладка графа Кэли. В то же время такая укладка существует при $n = 2$ и $r = 1$, но уже при $r > 1$ в основе графа Кэли относительно минимального множества образующих обнаруживается изображенный на рис. 7 подграф, гомеоморфный графу $G_{11}$, следовательно, граф Кэли не является обобщенным внешнепланарным. Более того, изображенный на рис. 8 подграф, гомеоморфный графу $G_{11}$, обнаруживается и при $n = 3$, когда $r = 1$. Следовательно, в этом случае граф Кэли рассматриваемой полугруппы также не является обобщенным внешнепланарным и тем более внешнепланарным.

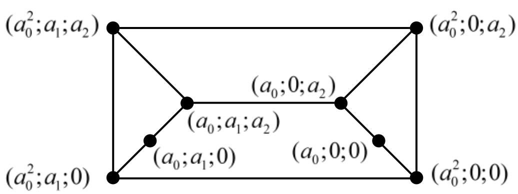


**Рис. 7.** Подграф основы графа Кэли полугруппы
$$S = \left\langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \left\langle a_1 \mid a_1^2 = a_1 \right\rangle^{+0} \times \left\langle a_2 \mid a_2^2 = a_2 \right\rangle^{+0} \text{ при } r > 1$$
**Fig. 7.** Subgraph of the base of the Cayley graph of semigroup
$$S = \left\langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \left\langle a_1 \mid a_1^2 = a_1 \right\rangle^{+0} \times \left\langle a_2 \mid a_2^2 = a_2 \right\rangle^{+0} \text{ with } r > 1$$

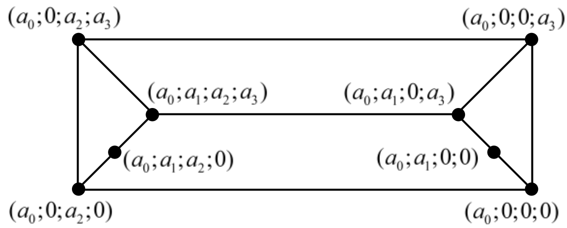


**Рис. 8.** Подграф основы графа Кэли полугруппы
$$S=\langle a_0 \mid a_0^2=a_0\rangle\times\langle a_1 \mid a_1^2=a_1\rangle^{+0}\times\langle a_2 \mid a_2^2=a_2\rangle^{+0}\times\langle a_3 \mid a_3^2=a_3\rangle^{+0}$$
**Fig. 8.** Subgraph of the base of the Cayley graph of semigroup
$$S=\langle a_0 \mid a_0^2=a_0\rangle\times\langle a_1 \mid a_1^2=a_1\rangle^{+0}\times\langle a_2 \mid a_2^2=a_2\rangle^{+0}\times\langle a_3 \mid a_3^2=a_3\rangle^{+0}$$

Что и требовалось доказать.

Заметим, что условия представленных двух теорем различаются только пунктами 1.2, 2 и 3.1. Таким образом, из доказательства этих теорем непосредственно вытекает следующее следствие.

**Следствие 1.** *Конечная полугруппа S, являющаяся произведением неодноэлементных циклических полугрупп с нулем, допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли, но не допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $S\cong\langle a \mid a^4=a^3\rangle^0\times\langle b \mid b^4=b^3\rangle^0$;

2) $S\cong\langle a_0 \mid a_0^4=a_0^3\rangle\times\prod_{i=1}^{n}\langle a_i \mid a_i^3=a_i^2\rangle$, *где* $n>1$;

3) $S\cong\langle a \mid a^3=a^2\rangle\times\langle b \mid b^3=b^2\rangle^{+0}$.

## Заключение

В заключение отметим, что полученный результат открывает перспективы исследования рангов внешнепланарности и рангов обобщенной внешнепланарности многообразий полугрупп с нулем. В работе рассмотрены прямые произведения неодноэлементных циклических полугрупп с нулем. С помощью понятия основы графа проведено исследование возможности внешнепланарной и обобщенной внешнепланарной укладки графа Кэли полугрупп с нулем. Получены копредставления всех конечных полугрупп с нулем, допускающих обобщенный внешнепланарный граф Кэли, являющихся произведением неодноэлементных циклических полугрупп с нулем. Подробно рассмотрен случай, когда графы Кэли таких полугрупп оказываются обобщенными внешнепланарными, но не внешнепланарными.

## Список источников

1. *Харари Ф.* Теория графов. М. : Мир, 1973. 300 с.
2. *Sedláček J.* On a generalization of outerplanar graphs // Časopis Pěst. Mat. 1988. V. 113 (2). P. 213–218. (In Czech).

3. *Соломатин Д.В.* Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы // Прикладная дискретная математика. 2021. № 54. С. 5–57. doi: 10.17223/20710410/54/1
4. *Мартынов П.О.* Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие обобщенно внешнепланарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2015. № 4. С. 6–9.

**References**

1. Harary F. (1994) *Graph Theory. Advanced Book Program Series*. Boulder: Westview Press.
2. Sedláček J. (1988) O jednom zobecnění vnějškově rovinných grafů [On a generalization of outerplanar graphs]. *Časopis pro pěstování matematiky*. 113(2). pp. 213–218.
3. Solomatin D.V. (2021) Issledovaniya polugrupp s planarnymi grafami Keli: rezul'taty i problemy [Researches of semigroups with planar Cayley graphs: results and problems]. *Prikladnaya diskretnaya matematika*. 54. pp. 5–57. DOI: 10.17223/20710410/54/1.
4. Martynov P.O. (2015) Konechnyye svobodnyye kommutativnyye monoidy, dopuskayushchiye obobshchenno vneshneplanarnyye grafy Keli [Finite free commutative monoids admitting generalized outerplanar Cayley graphs]. *Vestnik Omskogo Universiteta – Herald of Omsk University*. 4. pp. 6–9.

***Сведения об авторе*:**
**Соломатин Денис Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике Омского государственного педагогического университета (Омск, Россия). E-mail: solomatin_dv@omgpu.ru, denis_2001j@bk.ru

***Information about the author*:**
**Solomatin Denis V.** (Docent, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Mathematics and Mathematics Teaching Methods, Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russian Federation). E-mail: solomatin_dv@omgpu.ru, denis_2001j@bk.ru

*Статья поступила в редакцию 17.11.2023; принята к публикации 05.08.2024*

*The article was submitted 17.11.2023; accepted for publication 05.08.2024*