

Научная статья

УДК 532.5.032

doi: 10.17223/19988621/90/10

Моделирование трехмерного поля скорости в барабанной вращающейся печи

Валерия Валерьевна Ким¹, Владимир Николаевич Брендаков²

¹ *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН,
Томск, Россия*

² *Северский технологический институт – филиал НИЯУ «МИФИ», Северск, Россия*

¹ *kimvaleriia@mail.ru*

² *vnbrendakov@mephi.ru*

Аннотация. Представлены результаты расчета гидродинамического поля в барабанной вращающейся печи. Численное решение математической модели течения несжимаемой среды получено методом конечно-разностного анализа. Адекватность построенной математической модели обоснована сравнением результатов расчета с известным аналитическим решением. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными, что свидетельствует об эффективности выбранного подхода и корректности полученных результатов.

Ключевые слова: математическое моделирование, полиуронат аммония, термическое разложение, барабанная вращающаяся печь, течение в трубе

Благодарности: Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003.

Для цитирования: Ким В.В., Брендаков В.Н. Моделирование трехмерного поля скорости в барабанной вращающейся печи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 119–129. doi: 10.17223/19988621/90/10

Original article

Modeling of a three-dimensional velocity field in a rotary drum furnace

Valeriya V. Kim¹, Vladimir N. Brendakov²

¹ *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences (ISPMS), Tomsk, Russian Federation*

² *Seversk Technological Institute – a branch of the National Research
Nuclear University MEPhI, Seversk, Russian Federation*

¹ kimvaleriia@mail.ru² vnbrendakov@mephi.ru

Abstract. This paper deals with the problem of laminar axisymmetric incompressible flow in the working area of a rotary drum furnace. A system of second-order partial differential equations is derived and solved numerically using the finite difference method. The obtained solutions are tested for mesh convergence and compared with available analytical solutions for a laminar axisymmetric flow.

The numerical results show that furnace rotation significantly affects the gas flow in the working section of the apparatus. Thus, the temperature distribution over the working area and furnace surface can be controlled through the furnace rotation velocity and gas flow rate. The input velocity profile also affects the flow pattern in the furnace. Vortex zones with counterflow occur near the walls, where the axial velocity profile is more elongated than the Poiseuille parabola. On the symmetry axis, the axial velocity is higher than that of the Poiseuille flow.

The proposed mathematical model allows one to calculate more accurately the degree of thermal decomposition as a function of temperature and longitudinal coordinate along the furnace axis.

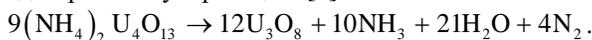
Keywords: mathematical modeling, ammonium polyuranate, thermal decomposition, rotary drum furnace, pipe flow

Acknowledgments: This work was carried out according to the state assignment for ISPMS SB RAS (project No. FWRW-2022-0003).

For citation: Kim, V.V., Brendakov, V.N. (2024) Modeling of a three-dimensional velocity field in a rotary drum furnace. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 119–129. doi: 10.17223/19988621/90/10

Введение

Атомная энергетика является одним из перспективных направлений получения тепловой и электрической энергии в современных условиях. При реализации ядерного топливного цикла для подготовки исходного сырья для топливных таблеток возникает необходимость получения оксидов урана ядерной чистоты. Наиболее часто для этих целей используют процесс экстракционного аффинажа с применением трибутилфосфата. Урановую руду растворяют азотной кислотой, в результате экстракционной очистки с использованием трибутилфосфата получают раствор реэкстракта урана $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$ ядерной чистоты. Раствор $(\text{NH}_4)_2\text{U}_4\text{O}_{13} \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ концентрируют и осаждают. После фильтрации осадок прокаливают в барабанной вращающейся печи до образования оксидов урана U_3O_8 . Процесс термического разложения полиураната аммония до оксидов урана представляет собой необратимую эндотермическую реакцию [1]



Эта реакция состоит из шести последовательно-параллельных стадий [2]. Степень термического разложения полиураната аммония в барабанной вращающейся печи зависит от температурного поля, формируемого в рабочей зоне аппарата [3]. Существенное влияние на тепловую обстановку оказывает гидродинамика проточного газа азота внутри барабанной вращающейся печи.

В работе рассматривается задача течения ламинарной, осесимметричной несжимаемой среды в рабочей зоне барабанной вращающейся печи. Полученная система дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных решалась численно с помощью метода конечных разностей. Получаемые решения проверялись на сеточную сходимость и сравнивались с имеющимися аналитическими решениями ламинарного, осесимметричного течения.

Математическая постановка задачи

В качестве объекта исследования был выбран аппарат, используемый на Сибирском химическом комбинате (рис. 1). Он представляет собой цилиндрическую трубу радиусом $R = 0.3$ м и длиной $L = 8$ м, расположенную под углом наклона 2° к горизонту. Рабочая зона печи вращается с постоянной угловой скоростью $W = 0.35$ рад/с.

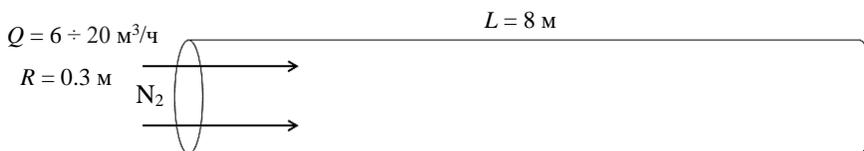


Рис. 1. Схема рабочей зоны барабанной вращающейся печи
Fig. 1. Scheme of the working area in a rotary drum furnace

При продувке барабанной печи нагретым азотом повышается количество урана в выходном продукте по сравнению с проведением того же процесса при продувке барабанной печи воздухом. Кроме этого, происходит увеличение скорости термического разложения и снижаются энергетические затраты на 25% [4]. Расход инертного газа для продувки печи варьирует в диапазоне $Q = 0.0017\text{--}0.0055$ м³/сек. Влияние гидродинамики газового потока внутри аппарата на технологический процесс очевидно. Задача является актуальной.

В работе рассматривается задача о стационарном ламинарном, осесимметричном течении несжимаемой вязкой среды. Исходная система уравнений Навье–Стокса записывается в цилиндрической системе координат [5]:

$$V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r V_\varphi}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} \right),$$

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right),$$

$$V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0.$$

Таким образом, имеем систему из четырех уравнений для четырех неизвестных V_r , V_φ , V_z , p . Для получения единственности решения исходную систему дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных необходимо дополнить соответствующими граничными и начальными условиями.

На боковой поверхности рассматриваемого объема ставятся условия прилипания для всех компонент вектора скорости:

$$V_r = 0; V_z = 0; V_\phi = R \cdot W.$$

На входе в рабочую область задавался ударный профиль для компоненты вектора скорости V_z , для всех остальных переменных выбирались мягкие условия установления в виде равенства нулю первой производной по нормали к входу:

$$V_z = 1; \frac{\partial V_r}{\partial z} = 0; \frac{\partial V_\phi}{\partial z} = 0.$$

На выходе из расчетной области выбирались условия установления для всех переменных:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0; \frac{\partial V_r}{\partial z} = 0; \frac{\partial V_\phi}{\partial z} = 0.$$

На продольной оси аппарата, при $r = 0$, ставились условия симметрии:

$$V_r = 0; \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0; \frac{\partial V_\phi}{\partial r} = 0.$$

Созданная математическая модель полностью описывает гидродинамику газа, используемого для продувки в барабанной вращающейся печи.

Численный метод исследования

Построенная математическая модель течения несжимаемого вязкого газа в круглой вращающейся трубе не имеет аналитического решения, так как уравнения обладают существенной нелинейностью [6]. Математическая модель решается численным методом.

В качестве масштабов для получения безразмерной системы уравнений используются радиус печи R , средняя осевая скорость на входе V_0 , плотность ρ и вязкость газа ν на входе в аппарат. В получаемой системе уравнений появляются два безразмерных критерия подобия:

$$Re = \frac{V_0 R}{\nu}; Rws = \frac{V_{\phi R}}{V_0};$$

где Re – число Рейнольдса, Rws – безразмерная окружная скорость печи. Исходная система решается методом конечных разностей.

В настоящее время наиболее перспективным подходом среди численных методов исследования системы дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, описывающих гидродинамику пространственного течения, является метод решения уравнений в физических переменных «скорость–давление» [7]. Поэтому в работе решение задачи выполнялось в переменных «скорость–давление». Одним из эффективных способов решения уравнений движения несжимаемой среды в переменных «скорость–давление» является метод физического расщепления по времени полей скорости и давления [8]. Используя метод физического расщепления полей скорости и давления, получим два векторных соотношения

$$\frac{\mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^n}{\Delta\tau} + (\mathbf{w}^n \cdot \nabla) \mathbf{w}^+ = -\nabla p^n + \nabla^2 \mathbf{w}^+;$$

$$\frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^+}{\Delta\tau} = -\nabla(\delta p),$$

где верхним индексом «+» обозначено промежуточное сеточное значение вектора скорости и введена поправка к давлению между временными слоями n и $n + 1$.

Умножая скалярно последнее соотношение на градиент и учитывая соленоидальность вектора скорости на $(n + 1)$ -м временном слое, получаем уравнение Пуассона для поправки давления [9]:

$$\nabla^2(\delta p) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{w}}{\Delta\tau}.$$

При решении стационарной задачи все уравнения удобнее представить в виде нестационарных уравнений и стационарное решение системы уравнений искать эволюционным методом установления по времени. На всех границах расчетной области используется условие Неймана для поправки к давлению, при этом следует отметить, что градиент давления на границах области не равен нулю, а может быть определен из проекций уравнения переноса импульса на границу исследуемой области.

В силу нелинейности системы уравнений выбор временных шагов и количества необходимых итераций устанавливается опытным путем. Число временных шагов определяется выполнением неравенства для всех искомым функций

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} \right)_{i,j,k} = \max \left| \frac{\Phi_{i,j,k}^{n+1} - \Phi_{i,j,k}^n}{\Delta\tau} \right| < \varepsilon.$$

Для решения систем дифференциальных уравнений типа уравнений переноса скалярной транспортабельной субстанции в работе использовалась неявная двухслойная схема переменных направлений, предложенная Дугласом и Ганом и записанная в «дельта»-форме [10].

Дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных можно решить численно, записывая разностный аналог дифференциального уравнения [11], используя метод расщепления по координатам и применяя методику прогонки для решения получившейся системы линейных алгебраических уравнений [12]. Для получения устойчивого вычислительного алгоритма и достоверных результатов необходимо контролировать сеточное число Рейнольдса и условие диагонального преобладания прогоночных коэффициентов. Проверка на сеточную сходимость позволила выбрать оптимальное количество узлов разностной сетки в расчетной области, цилиндрическая система координат: $N_r = 40$, $N_z = 360$.

Результаты исследований

Верификацию созданной модели проводили сравнением расчетов по модели с аналитическим решением простой задачи. Течение в круглой трубе без вращения (рис. 2, 3). Хорошо известно, что установившееся течение представляет собой параболу Пуазейля с максимальным значением V_z на оси, равным 2.

Как видно на рис. 2, выполненный расчет хорошо совпадает с теоретической параболой. На рис. 3 показано, что при таком режиме течения профиль V_z выходит на установившуюся параболу примерно на расстоянии трех радиусов от ударного входа $V_0 = 1$.

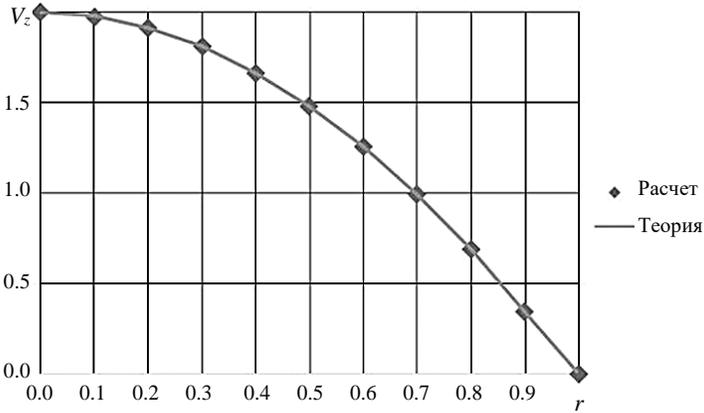


Рис. 2. Сравнение расчета с аналитическим решением профиля V_z на выходе из аппарата, $Re = 10, Rws = 0$

Fig. 2. Comparison of the calculated and analytical profiles of V_z at the apparatus outlet for $Re = 10, Rws = 0$

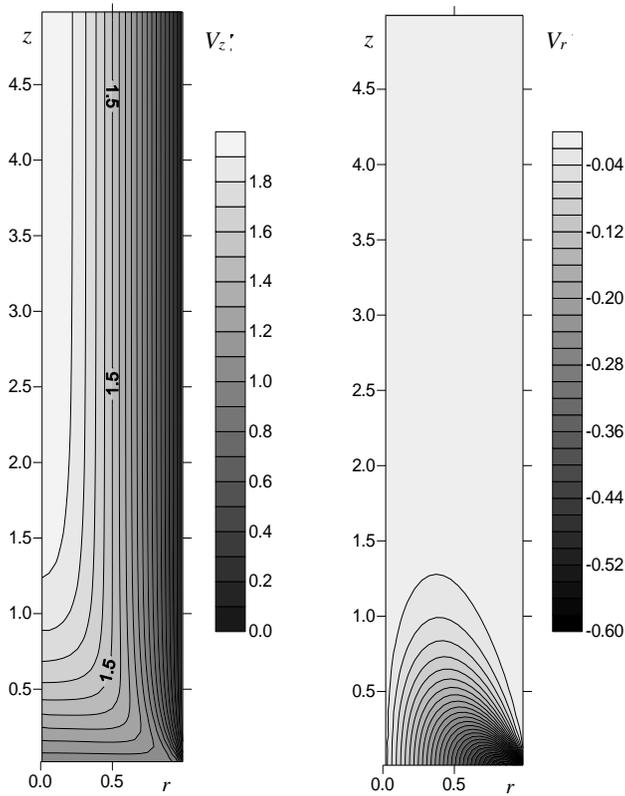


Рис. 3. Распределение компонент поля скорости в аппарате при параметрах течения $Re = 10, Rws = 0$

Fig. 3. Distribution of the velocity field components along the apparatus with flow parameters $Re = 10, Rws = 0$

На рис. 4 показано сравнение профиля аксиальной скорости, рассчитанной по представленной модели, с данными Лавана [13]. Анализ полученных данных позволяет говорить, что модель правильно учитывает влияние вращающейся трубы на профиль аксиальной скорости.

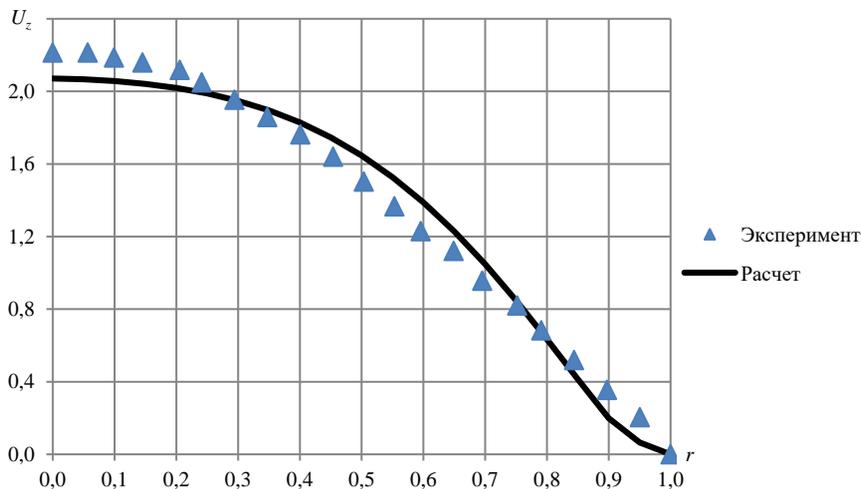


Рис. 4. Сравнение расчета с экспериментом [13] профиля U_z при $z = 4.3$, $Re = 20$, $Rws = 5.22$

Fig. 4. Comparison of the calculated and experimental [13] profiles of U_z at $z = 4.3$, $Re = 20$, $Rws = 5.22$

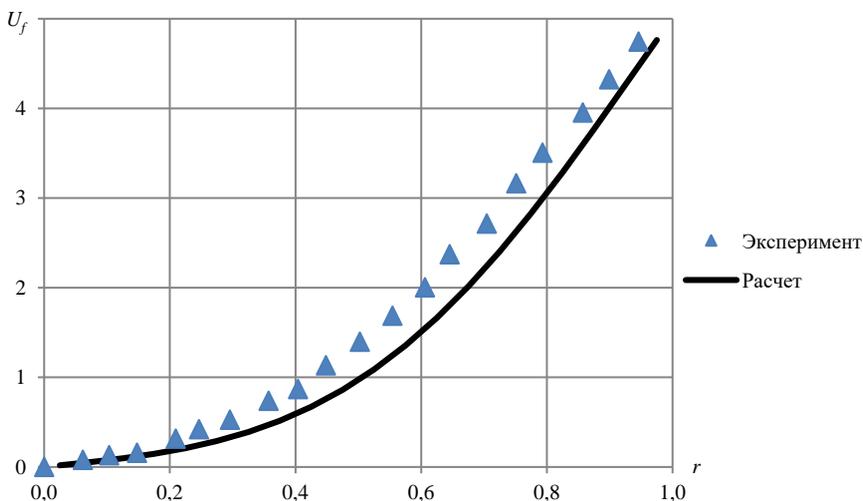


Рис. 5. Сравнение расчета с экспериментом [13] профиля U_f при $z = 0.95$, $Re = 20$, $Rws = 5.22$

Fig. 5. Comparison of the calculated and experimental [13] profiles of U_f at $z = 0.95$, $Re = 20$, $Rws = 5.22$

На рис. 5 приведено сравнение рассчитанного по модели профиля окружной скорости с экспериментальными данными [13]. Запоздывание развития профиля окружной скорости может быть связано с тем, что в расчетах на входе в трубу задается ударный профиль аксиальной скорости. Существует определенная зона формирования параболы, когда влияние стенки занижено.

На рис. 6 показано распределение рассчитанной аксиальной компоненты вектора скорости в рабочем объеме аппарата.

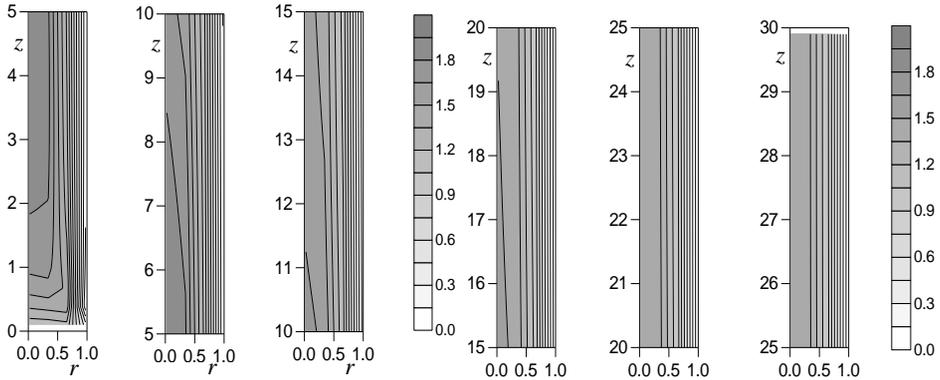


Рис. 6. Распределение аксиальной компоненты поля скорости в аппарате при параметрах течения $Re = 100, Rws = 5$

Fig. 6. Distribution of the axial velocity component along the apparatus with flow parameters $Re = 100, Rws = 5$

На рис. 7 показано распределение рассчитанной угловой компоненты вектора скорости в рабочем объеме аппарата.

На рис. 8 показано распределение рассчитанной радиальной компоненты вектора скорости в рабочем объеме аппарата.

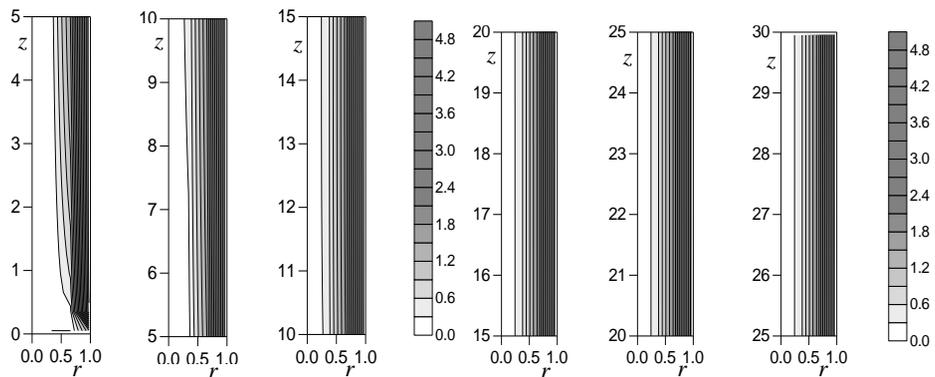


Рис. 7. Распределение угловой компоненты поля скорости в аппарате при параметрах течения $Re = 100, Rws = 5$

Fig. 7. Distribution of the angular velocity component along the apparatus with flow parameters $Re = 100, Rws = 5$

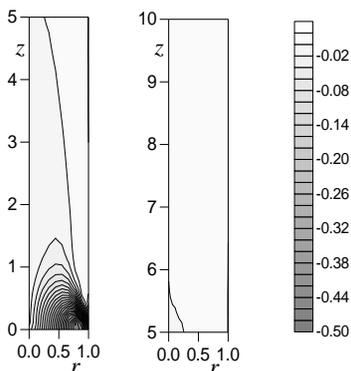


Рис. 8. Распределение радиальной компоненты поля скорости в аппарате при параметрах течения $Re = 100$, $Rws = 5$

Fig. 8. Distribution of the radial velocity component along the apparatus with flow parameters $Re = 100$, $Rws = 5$

Вращение печи оказывает значительное влияние на течение продувочного газа в рабочей зоне аппарата. Появляется существенная неоднородность в области возле входа в аппарат. Профиль окружной скорости V_ϕ формируется примерно на расстоянии десяти радиусов от входа. Аксиальная скорость V_z имеет на выходе из аппарата более пологий профиль, чем при течении без вращения стенки печи. Компоненты вектора скорости связаны в том числе через уравнение неразрывности потока. Входной профиль вектора скорости также оказывает влияние на гидродинамическую обстановку внутри печи.

Заключение

Рассмотрена математическая модель ламинарного, осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в аппарате цилиндрической формы. Вращение стенки печи оказывает существенное влияние на профиль скорости жидкости внутри аппарата. Особенно это заметно во входной области. Возле стенки формируются вихревые структуры с противотоком, здесь профиль аксиальной скорости имеет более вытянутую форму по сравнению с параболой Пуазейля; на оси симметрии значение больше. Развитие окружной скорости зависит от числа Рейнольдса и скорости вращения стенки. Радиальная скорость быстро вырождается, она заметна только во входной зоне.

Список источников

1. Пищулин В.П., Брендаков В.Н. Математическая модель процесса термического разложения в барабанной вращающейся печи // Известия Томского политехнического университета. 2005. № 308 (3). С. 106–109.
2. Брендаков В.Н., Деметьев Ю.Н., Кладиев С.Н., Пищулин В.П. Технология и оборудование производства оксидов урана // Известия Томского политехнического университета. 2005. № 308 (6). С. 95–98.
3. Пищулин В.П., Алимиева Е.А., Зарипова Л.Ф., Кропочев Е.В. Разработка технологии получения оксидов урана ядерной чистоты // Известия вузов. Физика. 2017. № 60 (11/2). С. 86–91.

4. Zhiganov A., Lobas O., Pishchulin V., Mironov V. Thermal decomposition of $(\text{NH}_4)_2\text{U}_4\text{O}_{13}$ // Vth Korea – Russia Intern. Symp. on Science and Technology Proceeding (KORUS 2001). 2001. Tomsk : Tomsk Polytechnic University, 2001. V. 2. P. 165–167.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа : учебник для вузов. 6-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
6. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М. : Энергия, 1967.
7. Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л. : Гидрометеоздат, 1986.
8. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М. : Энергоатомиздат, 1984.
9. Douglas J., Gunn J.E. A general formulation of alternating direction implicit methods. Part 1: Parabolic and hyperbolic problems // Numerische Math. 1964. V. 6. P. 428–453.
10. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М. : Мир, 1980.
11. Турубаев Р.Р., Шваб А.В. Численное исследование аэродинамики закрученного турбулентного течения и процесса классификации частиц в вихревой камере центробежного аппарата // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 137–147. doi: 10.17223/19988621/65/11
12. Флетчер К. Вычислительные методы динамики жидкостей : в 2 т. М. : Мир, 1991.
13. Lavan Z., Nielsen H., Fejer A.A. Separation and Flow Reversal in Swirling Flows in Circular Ducts // Physics of fluids. 1969. V. 12 (9). P. 1747–1757.

References

1. Pishchulin V.P., Brendakov V.N. (2005) Matematicheskaya model' protsessa termicheskogo razlozheniya v barabannoy vrashchayushcheysya pechi [A mathematical model of thermal decomposition in a rotary drum furnace]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 308(3). pp. 106–109.
2. Brendakov V.N., Dement'ev Yu.N., Kladiyev S.N., Pishchulin V.P. (2005) Tekhnologiya i oborudovanie proizvodstva oksidov urana [Technology and equipment for uranium oxide production]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 308(6). pp. 95–98.
3. Pishchulin V.P., Alimpiyeva E.A., Zaripova L.F., Kropochev E.V. (2017) Razrabotka tekhnologii polucheniya oksidov urana yadernoy chistoty [Development of technology for obtaining uranium oxides of nuclear purity]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy – Russian Physics Journal*. 60(11/2). pp. 86–91.
4. Zhiganov A., Lobas O., Pishchulin V., Mironov V. (2001) Thermal decomposition of $(\text{NH}_4)_2\text{U}_4\text{O}_{13}$. *Proceedings of the Vth Korea – Russia International Symposium on Science and Technology. Tomsk Polytechnic University, Tomsk*. 2. pp. 165–167.
5. Loytsyanskiy L.G. (1987) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and gas mechanics]. Moscow: Nauka.
6. Petukhov B.S. (1967) *Teploobmen i soprotivlenie pri laminarnom techenii zhidkosti v trubakh* [Heat transfer and resistance in a laminar fluid flow in pipes]. Moscow: Energiya.
7. Peyret R., Taylor T.D. (1983) *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer-Verlag.
8. Patankar S.V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere Publishing Corporation.
9. Douglas J., Gunn J.E. (1964) A general formulation of alternating direction implicit methods. Part 1: Parabolic and hyperbolic problems. *Numerische Mathematik*. 6. pp. 428–453. doi: 10.1007/BF01386093
10. Roache P.J. (1976) *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque: Hermosa Publishers.
11. Turubayev R.R., Shvab A.V. (2020) Chislennoe issledovanie aerodinamiki zakruchennogo turbulentnogo techeniya i protsessa klassifikatsii chastits v vikhreвой kamere tsentrobezh-

- nogo apparata [Numerical study of swirling turbulent flow aerodynamics and classification of particles in a vortex chamber of a centrifugal machine]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 65. pp. 137–147. doi: 10.17223/19988621/65/11
12. Fletcher C. (1991) *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
13. Lavan Z., Nielsen H., Fejer A.A. (1969) Separation and flow reversal in swirling flows in circular ducts. *Physics of Fluids*. 12(9). pp. 1747–1757. doi: 10.1063/1.1692738

Сведения об авторах:

Ким Валерия Валерьевна – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия); младший научный сотрудник Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН (Томск, Россия). E-mail: kimvaleriia@mail.ru

Брендаков Владимир Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика и информационные технологии» Северского технологического института – филиала НИЯУ «МИФИ» (Северск, Россия). E-mail: vnbrendakov@mephi.ru

Information about the authors:

Kim Valeriya V. (Tomsk State University, Institute of Strength Physics and Materials Science of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (ISPMS), Tomsk, Russian Federation). E-mail: kimvaleriia@mail.ru

Brendakov Vladimir N. (Doctor of Physics and Mathematics, Seversk Technological Institute – a branch of the National Research Nuclear University MEPHI, Seversk, Russian Federation). E-mail: vnbrendakov@mephi.ru

Статья поступила в редакцию 18.09.2023; принята к публикации 05.08.2024

The article was submitted 18.09.2023; accepted for publication 05.08.2024