

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/90/13

Связанная неосесимметричная нестационарная задача термоупругости для длинного цилиндра

Дмитрий Аверкиевич Шляхин¹, Владимир Андреевич Юрин²,
Олеся Викторовна Ратманова³

^{1, 2, 3} Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

¹ d-612-mit2009@yandex.ru

² get8ack@mail.ru

³ ratmanova654@mail.ru

Аннотация. Построено новое замкнутое решение задачи термоупругости для длинного анизотропного цилиндра при нестационарном изменении температуры на его внутренней поверхности. Математическая формулировка задачи включила в себя уравнения равновесия и нестационарное уравнение теплопроводности. При решении использовано обобщенное биортогональное преобразование, позволяющее исследовать несамосопряженную систему уравнений. Полученные расчетные соотношения дали возможность определить температурное поле, а также напряженно-деформированное состояние цилиндра.

Ключевые слова: неосесимметричная задача термоупругости, длинный анизотропный цилиндр, конечные биортогональные преобразования

Для цитирования: Шляхин Д.А., Юрин В.А., Ратманова О.В. Связанная неосесимметричная нестационарная задача термоупругости для длинного цилиндра // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 152–166. doi: 10.17223/19988621/90/13

Original article

A coupled non-axisymmetric non-stationary problem of the thermoelasticity of a long cylinder

Dmitriy A. Shlyakhin¹, Vladimir A. Yurin², Olesya V. Ratmanova³

^{1, 2, 3} Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

¹ d-612-mit2009@yandex.ru

² get8ack@mail.ru

³ ratmanova654@mail.ru

Abstract. Inhomogeneous non-stationary heating of constructions of various purposes induces thermal strains and stresses that should be considered in the comprehensive analysis of elastic systems. The mathematical formulation of the considered linear three-dimensional thermoelasticity problems includes coupled non-self-adjoint differential

equations of motion and thermal conductivity. Due to their integration difficulty, axisymmetric problems are usually analyzed instead.

The purpose of this work is to develop a solution algorithm for the coupled non-axisymmetric non-stationary problem of the thermoelasticity of a long cylinder. On the internal surface of the hollow anisotropic cylinder, the temperature variation function is known; on the external surface, the convective heat transfer and environmental temperature are given. The rate of the temperature load does not affect the inertial characteristics of the cylinder. Therefore, the equilibrium and heat equations can be added to the initial system of linear equations.

The finite Fourier sine and cosine transforms and general biorthogonal transforms are used to study a non-self-adjoint system of differential equations and to develop a closed solution. The obtained solution allows one to determine the temperature field and the stress-strain state of a cylinder with its internal surface affected by non-stationary non-axisymmetric loading in terms of the temperature variation function.

Keywords: non-axisymmetric problem of thermoelasticity, long anisotropic cylinder, finite biorthogonal transforms

For citation: Shlyakhin, D.A., Yurin, V.A., Ratmanova, O.V. (2024) A coupled non-axisymmetric non-stationary problem of the thermoelasticity of a long cylinder. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 151–166. doi: 10.17223/19988621/90/13

Введение

Неравномерный нестационарный нагрев строительных конструкций приводит к возникновению тепловых деформаций, которые необходимо учитывать при определении прочностных характеристик упругих систем [1, 2]. При этом математическая формулировка задач термоупругости сводится к системе связанных несамосопряженных дифференциальных уравнений движения и теплопроводности [3–6].

В целях упрощения их интегрирования обычно исследуются осесимметричные задачи [7–15]. Здесь в первую очередь следует отметить статьи [14–15], в которых был разработан новый подход к решению подобных задач. В неосесимметричном случае замкнутые решения представлены в немногих работах. В статьях [16–17] в несвязанной постановке при действии статической температурной «нагрузки» построены замкнутые решения для длинного цилиндра и цилиндра конечных размеров. Исследование [18] посвящено анализу работы радиально-неоднородного цилиндра.

Цель данной работы – построение замкнутого решения связанной нестационарной неосесимметричной задачи термоупругости для длинного анизотропного цилиндра с учетом граничных условий 1-го и 3-го родов. Скорость изменения температурной «нагрузки» не влияет на его инерционные характеристики, что позволяет включить в исходную систему уравнения равновесия и теплопроводности.

Постановка задачи

Полый длинный анизотропный цилиндр (рис. 1) занимает в цилиндрической системе координат область $\Sigma = \{(r^*, \varphi, z) \mid r^* \in [a; b], \varphi \in [0; 2\pi), z \in \mathbf{R}\}$. На его внутренней поверхности известна функция изменения температуры $\omega_1^*(\varphi, t^*)$, а на

внешней заданы закон конвекционного теплообмена и температура окружающей среды ϑ^* .

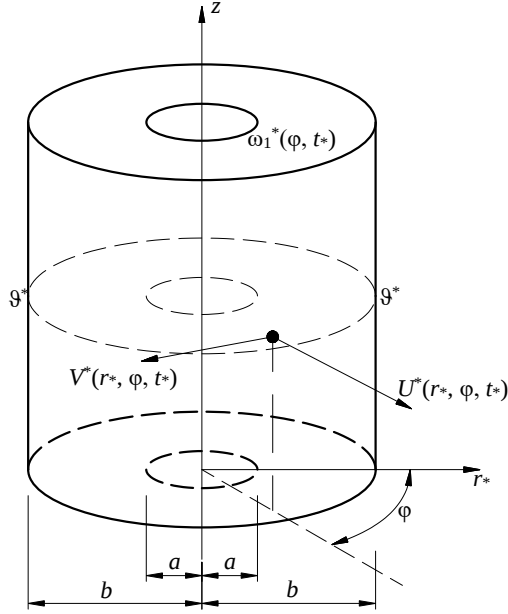


Рис. 1. Схема задачи
Fig. 1. Schematic model of the problem

Математическая формулировка задачи включает неосесимметричные дифференциальные уравнения равновесия, теплопроводности, а также граничные и начальные условия [19]:

$$\left(\nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_1}{r^2} + a_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) U + \frac{1}{r} \left[(a_2 + a_3) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(a_1 + a_2)}{r} \right] \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \left(\frac{a_4}{r} - \nabla \right) \Theta = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \left(a_2 \nabla + a_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \left(a_2 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{a_2}{r^2} \right) V - a_4 \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\left(\nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \Theta - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Theta + a_5 \nabla U + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = 0;$$

$$r = R, 1: \quad \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{a_3}{r} \left(U + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \Theta = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_6 \Theta \right) \Big|_{r=1} = a_6 \vartheta;$$

$$m \in [1; \infty): \quad \{U, V, \Theta\}_{|\varphi=0} = \{U, V, \Theta\}_{|\varphi=2\pi m}, \quad \frac{\partial \{U, V, \Theta\}}{\partial \varphi} \Big|_{|\varphi=0} = \frac{\partial \{U, V, \Theta\}}{\partial \varphi} \Big|_{|\varphi=2\pi m}; \quad (3)$$

$$t = 0: \quad U = V = \Theta = 0, \quad (4)$$

$$\text{где} \quad \{U, V, r, R\} = \{U^*, V^*, r_*, a\} / b; \quad (5)$$

$$\{\Theta, \omega_1, \vartheta\} = \frac{\gamma_{33}}{c_{33}} \{\Theta^* - T_0, \omega_1^* - T_0, \vartheta^* - T_0\};$$

$$\gamma_{33} = c_{33}\alpha_t; \quad \gamma_{11} = c_{11}\alpha_t; \quad t = \frac{\Lambda}{kb^2} t_*; \quad a_1 = \frac{c_{11}}{c_{33}}; \quad a_2 = \frac{c_{44}}{c_{33}};$$

$$a_3 = \frac{c_{13}}{c_{33}}; \quad a_4 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}; \quad a_5 = T_0 \frac{\gamma_{33}^2}{c_{33}k}; \quad a_6 = \alpha \frac{b}{\Lambda}; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

В выражениях (5) $U^*(r^*, \varphi, t^*)$, $V^*(r^*, \varphi, t^*)$, $\Theta^*(r^*, \varphi, t^*)$ – радиальные и окружные перемещения, а также температура тела в размерной форме; γ_{11} , γ_{33} – температурные напряжения; c_{ms} – модули упругости; $T_0(r^*)$ – начальная температура тела; α_t – коэффициент линейного температурного расширения материала; Λ , k , α – коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и теплоотдачи.

Соотношения (3) являются условиями периодичности для круговой области. В начальный момент времени (4) цилиндр находится в недеформированном состоянии, а его температурное поле определяется температурой первоначального состояния $T_0(r^*)$.

Построение общего решения

Решение нестационарной задачи термоупругости начинается с неполного разделения переменных с помощью конечного косинус- и синус-преобразования Фурье [20] при использовании трансформант

$$\{U_H(r, n, t), \Theta_H(r, n, t)\} = \int_0^{2\pi} \{U(r, \varphi, t), \Theta(r, \varphi, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (6)$$

$$V_H(r, n, t) = \int_0^{2\pi} V(r, \varphi, t) \sin(n\varphi) d\varphi$$

и формул обращения

$$\{U(r, \varphi, t), \Theta(r, \varphi, t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \{U_H(r, n, t), \Theta_H(r, n, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (7)$$

$$V(r, \varphi, t) = \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} V_H(r, n, t) \sin(n\varphi) d\varphi,$$

причем при $n = 0$: $\Omega_n = (2\pi)^{-1}$; $n \neq 0$: $\Omega_n = \pi^{-1}$.

Применение алгоритма преобразования с учетом условия периодичности решения (3) позволяет получить в пространстве изображений следующую начально-краевую задачу:

$$\nabla \frac{\partial U_H}{\partial r} - (a_1 + a_2 n^2) \frac{U_H}{r^2} + (a_3 + a_2) n \frac{1}{r} \frac{\partial V_H}{\partial r} - (a_2 + a_1) n \frac{V_H}{r^2} + a_4 \frac{\Theta_H}{r} - \nabla \Theta_H = 0, \quad (8)$$

$$- \frac{n}{r} \left(a_2 \nabla U_H + a_3 \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_1 \frac{U_H}{r} \right) + a_2 \nabla \frac{\partial V_H}{\partial r} - (a_1 n^2 + a_2) \frac{V_H}{r^2} + a_4 n \frac{\Theta_H}{r} = 0,$$

$$\left(\nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Theta_H - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Theta_H + a_5 \nabla U_H + a_5 \frac{n}{r} V_H \right) = 0;$$

$$r = R, 1: \quad \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_3 \frac{U_H}{r} + a_3 n \frac{V_H}{r} - \Theta_H = 0, \quad n \frac{U_H}{r} - \frac{\partial V_H}{\partial r} + \frac{V_H}{r} = 0, \quad (9)$$

$$\Theta_H|_{r=R} = \omega_{1H}, \quad \left(\frac{\partial \Theta_H}{\partial r} + a_6 \Theta_H \right)_{|r=1} = a_6 \vartheta_H;$$

$$t = 0: \quad U_H = V_H = \Theta_H = 0, \quad (10)$$

$$\text{где} \quad \{\omega_{1H}(n, t), \vartheta_H\} = \int_0^{2\pi} \{\omega_1(\varphi, t), \vartheta\} \cos(n\varphi) d\varphi.$$

Приведение неоднородных граничных условий (9) к однородным реализуется при использовании разложения:

$$U_H(r, n, t) = H_1(r, n, t) + u_H(r, n, t), \quad (11)$$

$$V_H(r, n, t) = H_2(r, n, t) + v_H(r, n, t),$$

$$\Theta_H(r, n, t) = H_3(r, n, t) + T_H(r, n, t);$$

$$\{H_1(r, n, t), H_2(r, n, t), H_3(r, n, t)\} = \{f_1(r), f_3(r), f_5(r)\} \omega_{1H}(n, t) + \{f_2(r), f_4(r), f_6(r)\} \vartheta_H,$$

где $f_1(r) \dots f_6(r)$ – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (11) в (8)–(10) при выполнении условий

$$r = R, 1: \quad \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_3 \frac{H_1}{r} + a_3 n \frac{H_2}{r} - H_3 = 0, \quad n \frac{H_1}{r} - \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{H_2}{r} = 0, \quad (12)$$

$$H_3|_{r=R} = \omega_{1H}, \quad \left(\frac{\partial H_3}{\partial r} + a_6 H_3 \right)_{|r=1} = a_6 \vartheta_H$$

позволяет получить новую систему относительно функций u_H, v_H, T_H с однородными граничными условиями

$$\nabla \frac{\partial u_H}{\partial r} - (a_1 + a_2 n^2) \frac{u_H}{r^2} + (a_3 + a_2) n \frac{1}{r} \frac{\partial v_H}{\partial r} - (a_2 + a_1) n \frac{v_H}{r^2} + a_4 \frac{T_H}{r} - \nabla T_H = F_1, \quad (13)$$

$$- \frac{n}{r} \left(a_2 \nabla u_H + a_3 \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_1 \frac{u_H}{r} \right) + a_2 \nabla \frac{\partial v_H}{\partial r} - (a_1 n^2 + a_2) \frac{v_H}{r^2} + a_4 n \frac{T_H}{r} = F_2,$$

$$\left(\nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right) T_H - \frac{\partial}{\partial t} \left(T_H + a_5 \nabla u_H + a_5 n \frac{v_H}{r} \right) = F_3;$$

$$r = R, 1: \quad \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_3 \frac{u_H}{r} + a_3 n \frac{v_H}{r} - T_H = 0, \quad n \frac{u_H}{r} - \frac{\partial v_H}{\partial r} + \frac{v_H}{r} = 0, \quad (14)$$

$$T_H|_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{\partial T_H}{\partial r} + a_6 T_H \right)_{|r=1} = 0;$$

$$t = 0: \quad \{u_H, v_H, T_H\} = \{u_{0H}, v_{0H}, T_{0H}\}, \quad (15)$$

$$\text{где} \quad F_1 = -\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + (a_1 + a_2 n^2) \frac{H_1}{r^2} - \frac{(a_3 + a_2) n}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} + (a_2 + a_1) n \frac{H_2}{r^2} - a_4 \frac{H_3}{r} + \nabla H_3;$$

$$F_2 = \frac{n}{r} \left(a_2 \nabla H_1 + a_3 \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r} \right) - a_2 \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + (a_1 n^2 + a_2) \frac{H_2}{r^2} - a_4 n \frac{H_3}{r};$$

$$F_3 = - \left(\nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right) H_3 + \frac{\partial}{\partial t} \left(H_3 + a_5 \nabla H_1 + a_5 n \frac{H_2}{r} \right);$$

$$\{u_{0H}, v_{0H}, T_{0H}\} = -\{H_1(r, n, 0), H_2(r, n, 0), H_3(r, n, 0)\}.$$

Полученная задача (13)–(15) решается методом биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [21–23]. Для этого вводится КИП с неизвестными компонентами собственных вектор-функций $K_1(\lambda_{in}, r) \dots K_3(\lambda_{in}, r)$ и $N_1(\mu_{in}, r) \dots N_3(\mu_{in}, r)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_R \left[T_H + T_H + a_5 \nabla u_H + a_5 n \frac{v_H}{r} \right] r K_3(\lambda_{in}, r) dr, \quad (16.1)$$

$$\{u_H, v_H, T_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \frac{\{N_1(\mu_{in}, r), N_2(\mu_{in}, r), N_3(\mu_{in}, r)\}}{\|K_{in}\|^2}, \quad (16.2)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_R K_3(\lambda_{in}, r) N_3(\mu_{in}, r) r dr,$$

где λ_{in} , μ_{in} – собственные значения соответствующих однородных задач относительно $K_k(\lambda_{in}, r)$ и $N_k(\mu_{in}, r)$ при $k = 1 \dots 3$.

Согласно алгоритму преобразования формируется счетное множество задач для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$i \in [1; \infty); n \in [0; \infty); \left(\frac{d}{dt} + \lambda_{in}^2 \right) G(\lambda_{in}, n, t) = F_H(\lambda_{in}, n, t); \quad (17)$$

$$t = 0: G(\lambda_{in}, n, t) = G_{0H}. \quad (18)$$

Их решение имеет вид:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_{0H} \exp(-\lambda_{in}^2 t) + \int_0^t F_H(\lambda_{in}, n, \tau) \exp[\lambda_{in}^2 (\tau - t)] d\tau, \quad (19)$$

$$F_H(\lambda_{in}, n, t) = - \int_R (F_1 K_{1in} + F_2 K_{2in} + F_3 K_{3in}) r dr,$$

$$G_{0H} = (T_{0H} + a_5 \nabla u_{0H}) K_{3in} r dr,$$

где

$$K_{k,in} = K_k(\lambda_{in}, r); N_{k,in} = N_k(\mu_{in}, r).$$

Кроме того, формируются две однородные задачи. Первая – относительно $K_{k,in}$:

$$\nabla \frac{dK_{1in}}{dr} - (a_1 + a_2 n^2) \frac{K_{1in}}{r^2} + (a_2 + a_3) n \frac{1}{r} \frac{dK_{2in}}{dr} - (a_1 + a_2) n \frac{K_{2in}}{r^2} - a_5 \lambda_{in}^2 \frac{dK_{3in}}{dr} = 0, \quad (20)$$

$$a_2 \nabla \frac{dK_{2in}}{dr} - (a_1 n^2 + a_2) \frac{K_{2in}}{r^2} - (a_3 + a_2) n \frac{1}{r} \frac{dK_{1in}}{dr} - (a_2 + a_1) n \frac{K_{1in}}{r^2} + \lambda_{in}^2 a_5 n \frac{K_{3in}}{r} = 0,$$

$$\nabla \frac{dK_{3in}}{dr} - n^2 \frac{K_{3in}}{r^2} + a_4 \frac{K_{1in}}{r} + \frac{dK_{1in}}{dr} + a_4 n \frac{K_{2in}}{r} + \lambda_{in}^2 K_{3in} = 0;$$

$$r = R, 1: \frac{dK_{1in}}{dr} + a_3 \frac{K_{1in}}{r} + a_3 n \frac{K_{2in}}{r} - a_5 \lambda_{in}^2 K_{3in} = 0, \quad n \frac{K_{1in}}{r} - \frac{dK_{2in}}{dr} + \frac{K_{2in}}{r} = 0, \quad (21)$$

$$K_{3in}|_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{dK_{3in}}{dr} + a_6 K_{3in} \right) \Big|_{r=1} = 0.$$

Вторая – относительно $N_{k,in}$:

$$\nabla \frac{dN_{1in}}{dr} - (a_1 + a_2 n^2) \frac{N_{1in}}{r^2} + (a_3 + a_2) n \frac{1}{r} \frac{dN_{2in}}{dr} - (a_2 + a_1) n \frac{N_{2in}}{r^2} + a_4 \frac{N_{3in}}{r} - \nabla N_{3in} = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{n}{r} \left(a_2 \nabla N_{1in} + a_3 \frac{dN_{1in}}{dr} + a_1 \frac{N_{1in}}{r} \right) + a_2 \nabla \frac{dN_{2in}}{dr} - \left(a_1 n^2 + a_2 \right) \frac{N_{2in}}{r^2} + a_4 n \frac{N_{3in}}{r} = 0, \\
 & \nabla \frac{dN_{3in}}{dr} - n^2 \frac{N_{3in}}{r^2} + \mu_{in}^2 \left(N_{3in} + a_5 \nabla N_{1in} + a_5 n \frac{N_{2in}}{r} \right) = 0; \\
 r = R, 1: & \quad \frac{dN_{1in}}{dr} + a_3 \frac{N_{1in}}{r} + a_3 n \frac{N_{2in}}{r} - N_{3in} = 0, \quad n \frac{N_{1in}}{r} - \frac{dN_{2in}}{dr} + \frac{N_{2in}}{r} = 0, \\
 & N_{3in}|_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{dN_{3in}}{dr} + a_6 N_{3in} \right) \Big|_{r=1} = 0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

В системах (20)–(21) и (22)–(23) связанность полей осуществляется за счет коэффициентов $a_5 \lambda_{in}^2$ и $a_5 \mu_{in}^2$. С учетом того, что для твердых материалов параметр $a_5 \ll 1$, а собственные значения для первых членов ряда ($i = 1 \dots 7$) достаточно малы, связанность полей можно не учитывать и принять $a_5 = 0$.

Рост номера ряда приводит к увеличению λ_{in} , μ_{in} и образованию члена ряда, которым можно пренебречь вследствие его малости.

В результате при решении однородных задач (20)–(21) и (22)–(23) получаются следующие выражения функций $K_{k,in}$ и $N_{k,in}$ ($k = 1 \dots 3$):

$$K_1(\lambda_{in}, r) = \sum_{p=1}^4 D_{pn} r^{m_p}, \quad K_2(\lambda_{in}, r) = \sum_{p=1}^4 D_{pn} A_{pn} r^{m_p}, \tag{24}$$

$$K_3(\lambda_{in}, r) = -\sum_{p=1}^4 D_{pn} (m_p + a_4 + a_4 n A_{pn}) \lambda_{in}^{-m_p-1} G_{n,m_p}(\lambda_{in} r) + D_{5n} J_n(\lambda_{in} r) + D_{6n} Y_n(\lambda_{in} r),$$

$$N_1(\mu_{in}, r) = \sum_{p=1}^4 E_{pn} r^{m_p} + \sum_{p=1}^4 V_p(r) r^{m_p},$$

$$N_2(\mu_{in}, r) = \sum_{p=1}^4 E_{pn} A_{pn} r^{m_p} + \sum_{p=1}^4 V_p(r) A_{pn} r^{m_p},$$

$$N_3(\mu_{in}, r) = E_{5n} J_n(\mu_{in} r) + E_{6n} Y_n(\mu_{in} r),$$

$$\text{где} \quad V_1(r) = -\frac{A_{9n}}{(b_{2n} - b_{1n})} \left[N_{3in} r^{1-m_1} + \left(\frac{a_4 b_{2n}}{a_2 b_{3n}} n - a_4 + m_1 \right) \int N_{3in} r^{-m_1} dr \right],$$

$$V_2(r) = \frac{A_{9n}}{(b_{2n} - b_{1n})} \left[N_{3in} r^{1-m_2} + \left(\frac{a_4 b_{1n}}{a_2 b_{3n}} n - a_4 + m_2 \right) \int N_{3in} r^{-m_2} dr \right],$$

$$V_3(r) = -\frac{A_{5n}}{(b_{5n} - b_{4n})} \left[N_{3in} r^{1-m_3} + \left(\frac{a_4 b_{5n}}{a_2 b_{6n}} n - a_4 + m_3 \right) \int N_{3in} r^{-m_3} dr \right],$$

$$V_4(r) = \frac{A_{5n}}{(b_{5n} - b_{4n})} \left[N_{3in} r^{1-m_4} + \left(\frac{a_4 b_{4n}}{a_2 b_{6n}} n - a_4 + m_4 \right) \int N_{3in} r^{-m_4} dr \right];$$

$$b_{1n} = A_{9n} m_1 + A_{10n} m_3 - A_{8n} m_4, \quad b_{2n} = A_{9n} m_2 - A_{7n} m_3 + A_{6n} m_4,$$

$$b_{3n} = A_{1n} A_{9n} m_1 + A_{3n} A_{10n} m_3 - A_{4n} A_{8n} m_4, \quad b_{4n} = A_{5n} m_3 - A_{8n} m_2 - A_{6n} m_1,$$

$$b_{5n} = A_{5n} m_4 - A_{10n} m_2 - A_{7n} m_1, \quad b_{6n} = A_{3n} A_{5n} m_3 - A_{2n} A_{8n} m_2 - A_{1n} A_{6n} m_1;$$

$$A_{pn} = \left[(a_2 + a_3)m_p n - (a_1 + a_2)n \right]^{-1} \left[(a_1 + a_2 n^2) - m_p^2 \right] \text{ при } p = 1 \dots 4;$$

$$\begin{aligned} A_{5n} &= A_{2n} - A_{1n}, & A_{6n} &= A_{2n} - A_{3n}, & A_{7n} &= A_{2n} - A_{4n}, \\ A_{8n} &= A_{3n} - A_{1n}, & A_{9n} &= A_{3n} - A_{4n}, & A_{10n} &= A_{4n} - A_{1n}. \end{aligned}$$

В выражениях (24) J_n , Y_n – функции Бесселя I и II родов порядка n ; G_{n,m_p} – неэлементарные функции Ломмеля; $A_{1n} \dots A_{10n}$ и $b_{1n} \dots b_{6n}$ – постоянные, полученные в результате приведения (20) и (22) к разрешающим уравнениям относительно функций $K_{1,in}$ и $N_{1,in}$ соответственно; постоянные $m_1 \dots m_4$ являются корнями следующего биквадратного уравнения:

$$\begin{aligned} a_2 (m^2)^2 + e_{1n} m^2 + e_{2n} &= 0, \\ e_{2n} &= (a_1 n^2 + a_2)(a_2 n^2 + a_1) - n^2 (a_1 + a_2)^2, \\ e_{1n} &= n^2 (2a_2 a_3 + a_3^2 - a_1) - a_2 (a_1 + 1). \end{aligned} \quad (25)$$

Подстановка $K_{k,in}$ и $N_{k,in}$ ($k = 1 \dots 3$) в граничные условия (21), (23) позволяет определить постоянные $D_{1n} \dots D_{4n}$, $E_{1n} \dots E_{4n}$ и сформировать трансцендентные уравнения для определения собственных значений λ_{in} , μ_{in} .

Итоговые выражения для $U(r, \varphi, t)$, $V(r, \varphi, t)$, $\Theta(r, \varphi, t)$ формируются при использовании формул обращения (7), (16.2) с учетом (11):

$$\begin{aligned} U(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_1(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi, \\ V(r, \varphi, t) &= \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[H_2(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \sin(n\varphi) d\varphi, \\ \Theta(r, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_3(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (26)$$

Для определения функций $f_1(r) \dots f_6(r)$ при удовлетворении граничных условий (14) решаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \left[\nabla \frac{d}{dr} - \frac{(a_1 + a_2 n^2)}{r^2} \right] f_p(r) + n \left[\frac{(a_2 + a_3)}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(a_1 + a_2)}{r^2} \right] f_{p+2}(r) + \left[\frac{a_4}{r} - \nabla \right] f_{p+4}(r) &= 0, \\ \frac{n}{r} \left(a_2 \nabla + a_3 \frac{d}{dr} + \frac{a_1}{r} \right) f_p(r) + \left[\frac{(a_1 n^2 + a_2)}{r^2} - a_2 \nabla \frac{d}{dr} \right] f_{p+2}(r) - a_4 n \frac{f_{p+4}(r)}{r} &= 0, \\ \nabla \frac{df_{p+4}(r)}{dr} - n^2 \frac{f_{p+4}(r)}{r^2} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Анализ результатов

В качестве примера рассматривается длинный анизотропный цилиндр со следующими физико-механическими характеристиками: $b = 2 \times 10^{-2}$ м; $a = 5 \times 10^{-3}$ м; $\{c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}\} = \{13.9, 7.43, 11.5, 2.56\} \times 10^{10}$ Па; $\rho = 7\,600$ кг/м³; $k = 3 \times 10^6$ Дж/(м³ × К); $\Lambda = 1.6$ Вт/(м × К); $\alpha_t = 0.4 \times 10^{-5}$ К⁻¹.

Изменение температуры на внутренней поверхности цилиндра определяется следующей зависимостью:

$$\omega_1^*(\varphi, t_*) = Y(t_*) \left[H\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) + H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right] + T_0 \left[H\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) - H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right], \quad (28)$$

$$Y(t_*) = T_{\max} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right],$$

где $\theta \in [-\pi/4; \pi/4]$ – участок, на котором изменяется температура $Y(t_*)$; $H(x) = 1$ при $x \geq 0$, $H(x) = 0$ при $x < 0$; $T_{\max}$, $t_{\max}^*$ – максимальное значение действующей температуры в соответствующий момент времени в размерной форме ($T_{\max} = 373$ K; $t_{\max}^* = 1$ с).

Температура окружающей среды ϑ^* равна температуре первоначального состояния тела ($T_0(r^*) = T_0$, $\vartheta = 0$), а коэффициент теплоотдачи материала $\alpha = 5.6$ Вт/(м² × K).

На рис. 2–6 показаны графики изменения температуры в размерной форме и перемещений по тангенциальной координате в различные моменты времени. Для лучшей сходимости рядов радиальная ось располагается в середине участка θ температурного «нагружения».

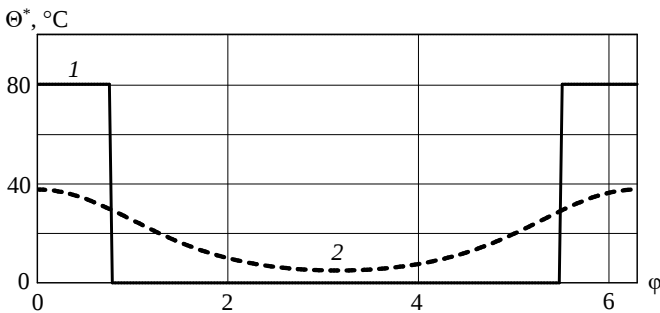


Рис. 2. Изменение $\Theta^*(r, \varphi, 500t_{\max}^*)$ по тангенциальной координате: $r = R$ (1); $r = 1$ (2)
Fig. 2. Variation of $\Theta^*(r, \varphi, 500t_{\max}^*)$ with respect to the tangential coordinate: $r =$ (1) R and (2) 1

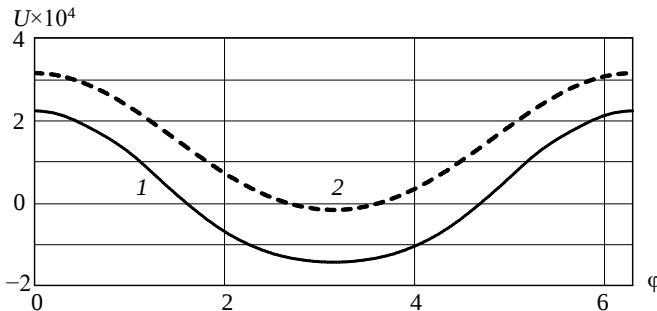


Рис. 3. Изменение $U(r, \varphi, t^*)$ по тангенциальной координате при $t^* = t_{\max}^*$: $r = R$ (1); $r = 1$ (2)
Fig. 3. Variation of $U(r, \varphi, t^*)$ with respect to the tangential coordinate for $t^* = t_{\max}^*$:
 $r =$ (1) R and (2) 1

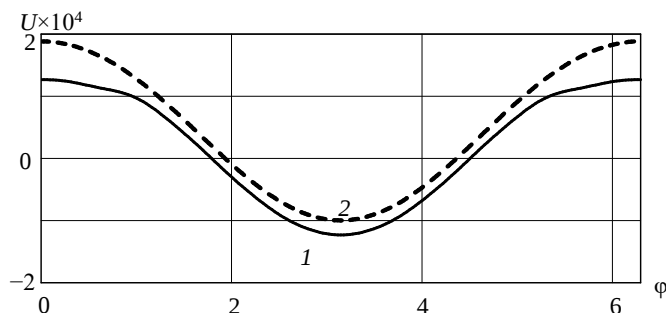


Рис. 4. Изменение $U(r, \varphi, t^*)$ по тангенциальной координате при $t^* = 500t_{\max}^*$:
 $r = R$ (1); $r = 1$ (2)

Fig. 4. Variation of $U(r, \varphi, t^*)$ with respect to the tangential coordinate for $t^* = 500t_{\max}^*$:
 $r = (1) R$ and (2) 1

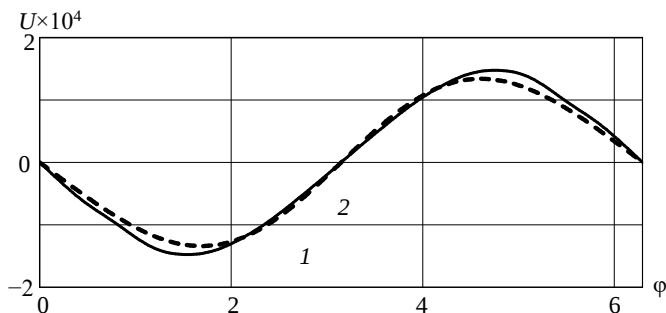


Рис. 5. Изменение $V(r, \varphi, t^*)$ по тангенциальной координате при $t^* = t_{\max}^*$: $r = R$ (1); $r = 1$ (2)

Fig. 5. Variation of $V(r, \varphi, t^*)$ with respect to the tangential coordinate for $t^* = t_{\max}^*$:
 $r = (1) R$ and (2) 1

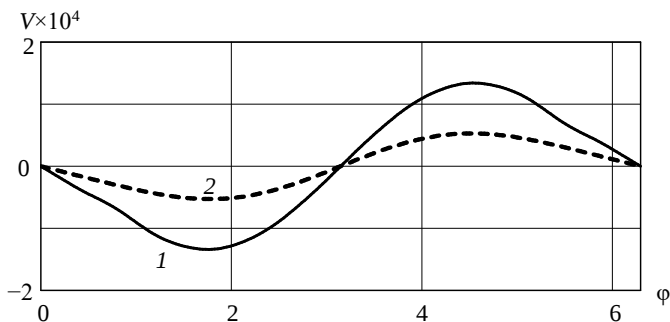


Рис. 6. Изменение $V(r, \varphi, t^*)$ по тангенциальной координате при $t^* = 500t_{\max}^*$:
 $r = R$ (1); $r = 1$ (2)

Fig. 6. Variation of $V(r, \varphi, t^*)$ with respect to the tangential coordinate for $t^* = 500t_{\max}^*$:
 $r = (1) R$ and (2) 1

По результатам расчета можно сделать следующие выводы:

1. Изменение температуры на внутренней цилиндрической поверхности (см. рис. 2, $r = R$), описываемое функцией $\omega_1^*(\varphi, t^*)$, приводит к образованию установившегося температурного режима во всем теле цилиндра при $t^* = 500t_{\max}^*$.

2. Наибольшее значение температуры на внешней поверхности наблюдается в середине участка «нагружения» ($\varphi = 0$). На других участках при $r = 1$ повышение температуры имеет меньшие значения.

3. На первом этапе изменения температурного поля ($t^* = t^*_{\max}$) разница в радиальных перемещениях цилиндрических поверхностей $U(r, \varphi, t^*)$ при $r = R$ и $r = 1$ наиболее существенна. Однако при установившемся режиме ($t^* = 500t^*_{\max}$) данная характеристика снижается (см. рис. 3, 4). Обратная картина наблюдается при определении тангенциальных перемещений $V(r, \varphi, t^*)$ (см. рис. 5, 6).

4. Наибольшие значения радиальных перемещений $U(r, \varphi, t^*)$ образуются в начальный момент времени при неустановившемся температурном режиме ($t^* = t^*_{\max}$) (см. рис. 3, $\varphi = 0$).

На рис. 7–8 представлены графики изменения окружной компоненты тензора нормальных напряжений по радиальной координате в различные моменты времени в размерной форме.

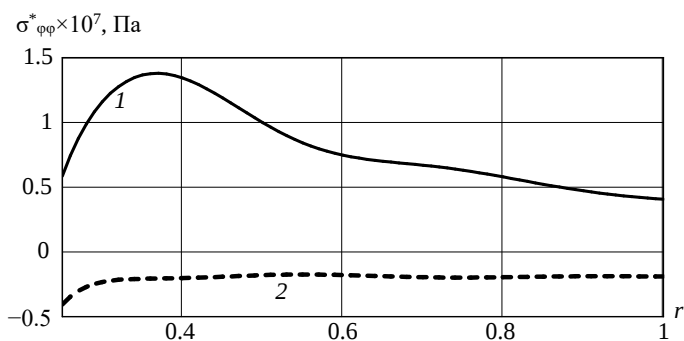


Рис. 7. Изменение $\sigma^*_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t^*)$ по радиальной координате при $t^* = t^*_{\max}$:
 $\varphi = 0$ (1), $\varphi = \pi$ (2)

Fig. 7. Variation of $\sigma^*_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t^*)$ with respect to the radial coordinate for $t^* = t^*_{\max}$:
 $\varphi = (1) 0$ and (2) π

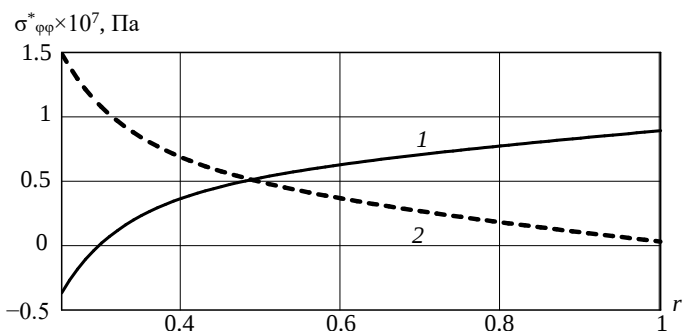


Рис. 8. Изменение $\sigma^*_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t^*)$ по радиальной координате при $t^* = 500t^*_{\max}$:
 $\varphi = 0$ (1), $\varphi = \pi$ (2)

Fig. 8. Variation of $\sigma^*_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t^*)$ with respect to the radial coordinate for $t^* = 500t^*_{\max}$:
 $\varphi = (1) 0$ and (2) π

По представленным графикам можно отметить следующие характерные особенности работы цилиндра:

1. На первом этапе деформирования цилиндра при $t^* = t^*_{\max}$ напряжения $\sigma^*_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t^*)$ по радиальной координате имеют одинаковый знак. При $\varphi = 0$ – напряжения растяжения, а при $\varphi = \pi$ – напряжения сжатия (см. рис. 7).

2. При установившемся температурном режиме ($t^* = 500t^*_{\max}$) напряжения меняют свой знак при $r = 0.49$ (см. рис. 8).

3. Наибольшие напряжения наблюдаются в теле цилиндра при $t^* = t^*_{\max}$ и $r = 0.35$.

Для оценки связанности термоупругих полей, а именно влияния скорости изменения толщины стенки на температурное поле, краевые задачи (20)–(23) относительно компонент вектор-функций ядер преобразований $K_{k,in}$ и $N_{k,in}$ (при $k = 1 \dots 3$) исследовались с учетом коэффициента связанности ($a_5 = 1.79 \times 10^{-4}$) и без его учета ($a_5 = 0$). Разница между соответствующими собственными значениями λ_{in} , μ_{in} для элемента с различной толщиной стенки составила менее 0.5%.

При оценке влияния связанности полей на трансформанту «нагрузки» $G(\lambda_{in}, n, t)$ выясняется, что данное свойство необходимо учитывать, когда $a_5 \geq 10^{-2}$.

Заключение

Построено новое замкнутое решение связанной задачи термоупругости для длинного полого анизотропного цилиндра при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го родов. В отличие от несвязанной постановки задачи представленный алгоритм расчета имеет преимущества, так как при исследовании уравнения равновесия отпадает необходимость аппроксимации функции температуры, а влиянием скорости изменения толщины стенки на температурное поле цилиндра можно пренебречь.

Список источников

1. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Теплоупругость тел неоднородной структуры. М. : Наука, 1984.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М. : Мир, 1970.
3. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // International Journal of Solids and Structures. 1974. V. 10 (6). P. 625–637. doi: 10.1016/0020-7683(74)90047-X
4. Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1967. V. 15 (5). P. 299–309. doi: 10.1016/0022-5096(67)90024-5
5. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // Journal of Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208. doi: 10.1016/S0307-904X(02)00078-1
6. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев : Наукова думка, 1965. 204 с.
7. Sargsyan S.H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells // Journal of Thermal Stresses. 2013. V. 36 (11). P. 1200–1216. doi: 10.1080/01495739.2013.819265
8. Verma K.L. Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. V. 37. P. 573–580. doi: 10.5281/zenodo.1058727
9. Жорник А.И., Жорник В.А., Савочка П.А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2012. № 9 (1). С. 63–69.

10. Harmatij H., Król M., Popovycz V. Quasi-Static Problem of Thermoelasticity for Thermo-sensitive Infinite Circular Cylinder of Complex Heat Exchange // *Advances in Pure Mathematics*. 2013. V. 3 (4). P. 430–437. doi: 10.4236/apm.2013.34061
11. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2009. Т. 9. № 4 (2). С. 94–127. doi: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127
12. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2018. № 5 (77). С. 1–15. doi: 10.18698/2308-6033-2018-5-1761
13. Шляхин Д.А., Даулетмуратова Ж.М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жестко закрепленной круглой пластины // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2019. № 4. С. 191–200. doi: 10.15593/perm.mech/2019.4.18
14. Лычев С.А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2003. № 4 (30). С. 112–124.
15. Лычев С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2010. № 4. С. 138–154.
16. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. General Solution for Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder due to Nonaxisymmetric Steady-State Loads // *Journal of Applied Mechanics*. 2003. V. 70 (1). P. 111–118. doi: 10.1115/1.1509484
17. Protsiuk B., Syniuta V. Solution of the non-axisymmetric quasistatic thermoelasticity problem for multilayer cylinder with identical lame coefficients // *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*. 2018. V. 89 (1). P. 40–51. doi: 10.33108/visnyk_tntu2018.01.040
18. Tokovyy Yu.V., Chien-Ching Ma. Analysis of 2D non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for radially inhomogeneous hollow cylinders // *Journal of Engineering Mathematics*. 2008. V. 61. P. 171–184. doi: 10.1007/s10665-007-9154-6
19. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Ревинский П.А. Прохождение обобщенной GNIII-термоупругой волны через волновод с проницаемой для тепла стенкой // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2011. Т. 11, № 1. С. 59–70.
20. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М. : Изд-во иностр. лит., 1955.
21. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // *Известия вузов. Математика*. 1991. № 4. С. 57–63.
22. Сеницкий Ю.Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // *Известия вузов. Математика*. 1996. № 8. С. 71–81.
23. Лычев С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2002. Спец. вып. С. 16–38.

References

1. Podstrigach Ya.S., Lomakin V.A., Kolyano Yu.M. (1984) *Termouprugost' tel neodnorodnoy struktury* [Thermoelasticity of bodies of inhomogeneous structure]. Moscow: Nauka.
2. Nowacki W. (1975) *Dynamic Problems of Thermoelasticity*. Berlin: Springer.
3. Mindlin R.D. (1974) Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *International Journal of Solids and Structures*. 10(6). pp. 625–637. doi: 10.1016/0020-7683(74)90047-X

4. Lord H.W., Shulman Y. (1967) A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 15(5). pp. 299–309. doi: 10.1016/0022-5096(67)90024-5
5. Green A.E., Naghdi P.M. (1993) Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of Elasticity*. 31. pp. 189–208. doi: 10.1016/S0307-904X(02)00078-1
6. Kovalenko A.D. (1969) *Thermoelasticity: Basic Theory and Applications*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
7. Sargsyan S.H. (2013) Mathematical model of micropolar thermo-elasticity of thin shells. *Journal of Thermal Stresses*. 36(11). pp. 1200–1216. doi: 10.1080/01495739.2013.819265
8. Verma K.L. (2008) Thermoelastic waves in anisotropic plates using normal mode expansion method. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 37. pp. 573–580. doi: 10.5281/zenodo.1058727
9. Zhornik A.I., Zhornik V.A., Savochka P.A. (2012) Ob odnoy zadache termouprugosti dlya sploshnogo tsilindra [On a thermoelasticity problem for a solid cylinder]. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 9(1). pp. 63–69.
10. Harmatij H., Król M., Popovycz V. (2013) Quasi-static problem of thermoelasticity for thermosensitive infinite circular cylinder of complex heat exchange. *Advances in Pure Mathematics*. 3(4). pp. 430–437. doi: 10.4236/apm.2013.34061
11. Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Semenov D.A. (2009) Svyazannye dinamicheskie zadachi giperbolicheskoy termouprugosti [Coupled dynamic problems of hyperbolic thermoelasticity]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*. 4(2). pp. 94–127. doi: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127
12. Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Gh.M. (2018) Nestatsionarnaya osesimmetrichnaya zadacha termouprugosti dlya zhestkozakreplennoy krugloy plastiny [Non-stationary axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 5(77). pp. 1–15. doi: 10.18698/2308-6033-2018-5-1761
13. Shlyakhin D.A., Dauletmuratova Gh.M. (2019) Nestatsionarnaya svyazannaya osesimmetrichnaya zadacha termouprugosti dlya zhestko zakreplennoy krugloy plastiny [Non-stationary coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*. 4. pp. 191–200. doi: 10.15593/pern.mech/2019.4.18
14. Lychev S.A. (2003) Svyazannaya dinamicheskaya zadacha termouprugosti dlya konechnogo tsilindra [Coupled dynamic thermoelastic problem for a finite cylinder]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya – Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 4(30). pp. 112–124.
15. Lychev S.A., Manzhirev A.V., Yuber S.V. (2010) Closed solutions of boundary-value problems of coupled thermoelasticity. *Mechanics of Solids*. 45(4). pp. 610–623. doi: 10.3103/S0025654410040102.
16. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. (2003) General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads. *Journal of Applied Mechanics*. 70(1). pp. 111–118. doi: 10.1115/1.1509484
17. Protsiuk B., Syniuta V. (2018) Solution of the non-axisymmetric quasistatic thermoelasticity problem for multilayer cylinder with identical lame coefficients. *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*. 89(1). pp. 40–51. doi: 10.33108/visnyk_tntu2018.01.040
18. Tokovyy Yu.V., Ma Ch.-Ch. (2008) Analysis of 2D non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for radially inhomogeneous hollow cylinders. *Journal of Engineering Mathematics*. 61. pp. 171–184. doi: 10.1007/s10665-007-9154-6
19. Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Revinskiy R.A. (2011) Prokhozhdenie obobshchennoy GNIII-termouprugoy volny cherez volnovod s pronitsaemoy dlya tepla stenkoy [Generalized cross-

- coupled type-III thermoelastic waves propagating via a waveguide under sidewall heat interchange]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics.* 1(11). pp. 59–70. doi: 10.18500/1816-9791-2011-11-1-59-70
20. Sneddon I.N. (1951) *Fourier Transforms*. New York: McGraw-Hill.
 21. Senitskiy Yu.E. (1991) Mnogokomponentnoe obobshchennoe konechnoe integral'noe preobrazovanie i ego prilozhenie k nestatsionarnym zadacham mekhaniki [A multicomponent generalized finite integral transformation and its application to nonstationary problems in mechanics]. *Izvestiya vuzov. Matematika – Russian Mathematics.* 4. pp. 57–63.
 22. Senitskiy Yu.E. (1996) Biortogonal'noe mnogokomponentnoe konechnoe integral'noe preobrazovanie i ego prilozhenie k kraevym zadacham mekhaniki [A biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems in mechanics]. *Izvestiya vuzov. Matematika – Russian Mathematics.* 8. pp. 71–81.
 23. Lychev S.A., Senitskiy Yu.E. (2002) Nesimmetrichnye integral'nye preobrazovaniya i ikh prilozheniya k zadacham vyazkoupругosti [Nonsymmetric finite integral transformations and their application to visco-elasticity problems]. *Vestnik Samarского universiteta. Estestvennonauchnaya seriya – Vestnik of Samara University. Natural Science Series. Special Issue.* pp. 16–38.

Сведения об авторах:

Шляхин Дмитрий Аверкиевич – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» Самарского государственного технического университета (Самара, Россия). E-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Юрин Владимир Андреевич – аспирант, инженер кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» Самарского государственного технического университета (Самара, Россия). E-mail: get8ack@mail.ru

Ратманова Олеся Викторовна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» Самарского государственного технического университета (Самара, Россия). E-mail: ratmanova654@mail.ru

Information about the authors:

Shlyakhin Dmitriy A. (Doctor of Technical Sciences, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation). E-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Yurin Vladimir A. (Samara State Technical University, Samara, Russian Federation). E-mail: get8ack@mail.ru

Ratmanova Olesya V. (Candidate of Technical Sciences, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation). E-mail: ratmanova654@mail.ru

Статья поступила в редакцию 17.05.2023; принята к публикации 05.08.2024

The article was submitted 17.05.2023; accepted for publication 05.08.2024