

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.956.35

doi: 10.17223/19988621/89/1

MSC: 35L20, 35L72, 35D30

**Априорные оценки производных решений
одномерных неоднородных волновых уравнений
с интегральной нагрузкой в главной части**

Олег Людинович Бозиев

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, bozиеv@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается вторая начально-краевая задача с однородными граничными условиями для одномерного модифицированного волнового уравнения, в котором коэффициент при второй пространственной производной заменен степенной функцией от интеграла квадрата модуля производной решения уравнения по x . Исследованы степенные функции трех видов. Установлены соответствующие им априорные неравенства, правая часть которых используется для линеаризации уравнений.

Ключевые слова: волновое уравнение, интегральная нагрузка, априорная оценка, линеаризация

Для цитирования: Бозиев О.Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных волновых уравнений с интегральной нагрузкой в главной части // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 89. С. 5–16. doi: 10.17223/19988621/89/1

Original article

**A priori estimates for derivative solutions
of one-dimensional inhomogeneous wave equations
with an integral load in the main part**

Oleg L. Bozиеv

*Kabardino-Balkarian State University,
Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian
Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation, bozиеv@yandex.ru*

Abstract. In this paper, the second initial-boundary value problem with homogeneous boundary conditions for a one-dimensional modified wave equation is considered.

The modification consists in replacing the coefficient at the second spatial derivative with an integral load. In our case, it is a power function of the integral of the squared modulus of the derivative of the equation solution with respect to the spatial variable. Equations with such a load are associated with some practically important hyperbolic equations with a power nonlinearity in the main part. This makes it possible to use previously found solutions of loaded problems to start the process of successive approximation to solutions of nonlinear problems reduced to them. In this case, with respect to the original nonlinear equation, the loaded equation contains a weakened nonlinearity. Linearization of the loaded equation makes it possible to find its approximate solution. The article considers three cases of the integral load. It is the squared norm of the derivative of the solution with respect to x in the space L_2 in natural, inverse to natural, and two integer negative powers. The corresponding a priori inequalities are established. Their right-hand side is used to pass to linearized equations. Examples of linearization by this method of wave equations with an integral load in the main part are given.

Keywords: hyperbolic equation, integral load, a priori estimation, linearization

For citation: Boziev, O.L. (2024) A priori estimates for derivative solutions of one-dimensional inhomogeneous wave equations with an integral load in the main part. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 89. pp. 5–16. doi: 10.17223/19988621/89/1

Введение

Заданное в области $Q = \{(x, t) : x \in \Omega \subseteq R^n, t \in (0, T)\}$ дифференциальное уравнение принято называть нагруженным, если оно содержит один или несколько следов операций от искомого решения на принадлежащих $\overline{\Omega}$ многообразиях размерности меньше n . В случае, когда дифференциальное уравнение в частных производных содержит какую-либо функцию от интеграла по пространственной переменной некоторой степени решения или его производной, будем говорить об интегральной нагрузке. На практике интегральная нагрузка может возникать, например, в случае, когда при невозможности определения точного значения какого-либо коэффициента уравнения используется его усредненное значение на некотором промежутке.

Впервые гиперболическое уравнение с интегральной нагрузкой в главной части рассматривалось в работе [1], в которой для уравнения

$$u_{tt} - a\left(\|u_x\|^2\right)u_{xx} = 0, \quad \|u_x\|^2 = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx, \quad \Omega = [0, l].$$

приводился способ решения некоторых краевых задач при помощи бесконечных систем дифференциальных уравнений. К числу более поздних работ, связанных с данным уравнением, относятся [2, 3]. В статьях [4, 5] и других исследуются вопросы однозначной разрешимости начально краевых задач в многомерном случае, при этом в [5] уравнение дополнено младшими членами, один из которых является нелинейным.

Многомерное неоднородное уравнение

$$u_{tt} - a\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)u_{xx} = f, \quad \Omega \subset R^n,$$

рассматривается в работах [6, 7]. В настоящее время подобное уравнение с младшими членами интенсивно исследуется. Среди большого количества работ можно указать [8–10]. К уравнениям, содержащим интегральную нагрузку, можно редуцировать гиперболические уравнения, содержащие степенную нелинейность как в главной части, так и в младших членах, путем замены нелинейного члена его интегралом по пространственной переменной [11, 12]. Во всех упомянутых случаях интегральная нагрузка представляет собой норму производной искомого решения в пространстве $L_2(\Omega)$ или некоторую функцию от этой нормы. Этот факт позволяет использовать правую часть априорного неравенства, оценивающего данную норму, для линейризации нагруженного уравнения. Точное или приближенное решение линейризованного уравнения можно впоследствии принять за исходное приближение к решению ассоциированного нелинейного уравнения.

В работе рассматривается вторая начально-краевая задача с однородными граничными условиями для модифицированного одномерного неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt} - a\left(\|u_x\|^2\right)u_{xx} = f(x, t), \quad a > 0.$$

Модификация уравнения состоит в замене константы a^2 интегральной нагрузкой $a\left(\|u_x\|^2\right)$, т.е. функцией, зависящей от квадрата нормы производной решения в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\|u_x\|^2 = \int_{\Omega} |u_x|^2 dx, \quad \Omega = [0, l].$$

В указанной норме устанавливаются априорные неравенства для пространственной производной решения нагруженного гиперболического уравнения с краевыми условиями второго рода с интегральной нагрузкой, принимающей один из следующих видов:

$$\|u_x\|^p, \|u_x\|^{\frac{2}{p}}, \quad p \in N, \quad \|u_x\|^{-p}, \quad p = 1, 2.$$

Случай $p = 2$ был отдельно рассмотрен в [13]. Приводятся примеры, в которых с целью линейризации первоначального уравнения интегральная нагрузка заменяется некоторой известной функцией от t , определяемой посредством правой части априорной оценки.

В приведенных ниже рассуждениях неоднократно используется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма [14. Теорема 1.4]. Если функция $u(t)$ удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t \beta(\tau) u(\tau) d\tau + f(t), \quad t \geq t_0,$$

где функция $f(t)$ и неотрицательные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ интегрируемы, то справедливо неравенство

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t f(\tau) \beta(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^t \alpha(s) \beta(s) ds\right) d\tau + f(t).$$

Всюду в приводимых ниже рассуждениях скалярное произведение понимается в смысле пространства $L_2(\Omega)$.

1. Интегральная нагрузка $a(\|u_x\|^2) = \|u_x\|^p, p \in N$

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \|u_x\|^p u_{xx} = f(x, t) \quad (1)$$

при условиях

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x), 0 \leq x \leq l, u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (1), (2), $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|^{p+2}$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (1) и функции u_t :

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|^p (u_{xx}, u_t) = (f, u_t).$$

Легко убедиться, что в предположении $u \in H^1(\Omega)$ имеют место равенства

$$(u_{tt}, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{2,\Omega}^2, \quad -(u_{xx}, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|_{2,\Omega}^2.$$

Заметим также, что

$$-\|u_x\|_{2,\Omega}^2 (u_{xx}, u_t) = \left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2\right)^{\frac{p+2}{2}} = \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^{p+2}.$$

Эти преобразования приводят к соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^{p+2} = \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое, получаем

$$(p+2) \|u_t\|^2 + 2 \|u_x\|^{p+2} = 2(p+2) \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + (p+2) \|u_t(x, 0)\|^2 + \|u_x(x, 0)\|^{p+2}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и перейдем к неравенству

$$\begin{aligned} (p+2) \|u_t\|^2 + 2 \|u_x\|^{p+2} &\leq \\ &\leq (p+2) \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + (p+2) \left(\int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2\|^2 \right) + 2 \|\varphi_{1x}\|^{p+2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2 &\leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t), \\ F(t) &= \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2\|^2 + \frac{2}{p+2} \|\varphi_{1x}\|^{p+2}. \end{aligned}$$

Применяя к последнему неравенству лемму, будем иметь

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2 &\leq K_0(t), \\ K_0(t) &= \int_0^t F(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F(t). \end{aligned}$$

Возвращаясь к (3), опустим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$. В результате получим оценку

$$\|u_x\|^{p+2} \leq K(t), \quad (4)$$

$$K(t) = \frac{p+2}{2} \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t),$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 1 доказана.

Выбирая равенство в (4), запишем

$$\|u_x\|^p \leq (K(t))^{\frac{p}{p+2}},$$

что при подстановке в (1) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{p}{p+2}} u_{xx} = f(x, t). \quad (5)$$

Пример 1. Пусть $p = 2$, а в условиях (2)

$$l = 1, \quad \varphi_1(x) = x(x-1), \quad \varphi_2(x) = x, \quad f(x, t) = xt. \quad (6)$$

Тогда

$$\|\varphi_{1x}\|^{p+2} = \|\varphi_{1x}\|^4 = \left(\int_0^1 (2x-1)^2 dx \right)^2 = \frac{1}{9}, \quad \|\varphi_2\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad (7)$$

$$\int_0^t \|f\|^2 d\tau = \int_0^t \int_0^1 \tau^2 x^2 dx d\tau = \frac{1}{3} \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{t^3}{9},$$

$$F(t) = \frac{1}{18} (2t^3 + 7), \quad K(t) = \frac{1}{9} (19e^t - 6t^2 - 12t - 12).$$

Отметим, что $K(t) > 0$ при $t \geq 0$. Подставляя в (7), переходим к линеаризованному уравнению

$$u_{tt} - \frac{1}{3} \sqrt{19e^t - 6t^2 - 12t - 12} u_{xx} = xt.$$

2. Интегральная нагрузка $a(\|u_x\|^2) = \|u_x\|^{\frac{2}{p}}, p \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \|u_x\|^{\frac{2}{p}} u_{xx} = f(x, t). \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (3), (4), $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|^{\frac{2(p+1)}{p}}$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (8) с u_t

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|^{\frac{2}{p}} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t)$$

и заметим, что

$$-\|u_x\|^{\frac{2}{p}} (u_{xx}, u_t) = \frac{1}{2} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{1}{p}} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{p+1} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

С помощью последнего запишем соотношение

$$\frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{p}{p+1} \frac{d}{dt} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}} = 2 \int_{\Omega} f u_t dx.$$

Его интегрирование приводит к равенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{p}{p+1} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}} = \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|^2 + \frac{p}{p+1} \left(\|u_x(x, 0)\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши с $\varepsilon = 0,5$:

$$\int_{\Omega} |f u_t| dx \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon \int_{\Omega} |f|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right) = \frac{1}{4} \|f\|^2 + \|u_t\|^2.$$

Это позволяет перейти к неравенству

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2 + \frac{p}{p+1} \left(\|u_x\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}} \leq \\ & \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + 0,25 \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{p}{p+1} \left(\|\varphi_{1x}(x)\|^2 \right)^{\frac{p+1}{p}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Опуская в левой части второе слагаемое, получим

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t), \\ & F(t) = 0,25 \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2\|^2 + \frac{p}{p+1} \|\varphi_{1x}\|^{\frac{2(p+1)}{p}}. \end{aligned}$$

Очередное применение леммы приводит к оценке

$$\begin{aligned} & \|u_t\|^2 \leq K_0(t), \\ & K_0(t) = \int_0^t F(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F(t). \end{aligned}$$

Возвращаясь к (9), опустим в левой части первое слагаемое, а в правой части заменим $\|u_t\|^2$ на $K_0(t)$:

$$\frac{p}{p+1} \|u_x\|^{\frac{2(p+1)}{p}} \leq \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t).$$

От данного неравенства перейдем к оценке

$$\begin{aligned} & \|u_x\|^{\frac{2(p+1)}{p}} \leq K(t), \\ & K(t) = \frac{p+1}{p} \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

выполняющейся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 2 доказана.

Выбирая в (10) верхнюю границу оценки, можем записать, что

$$\|u_x\|^{\frac{2}{p}} = K(t)^{\frac{1}{p+1}},$$

что позволяет перейти от (8) к линейному уравнению

$$u_{tt} - K(t)^{\frac{1}{p+1}} u_{xx} = f(x, t). \quad (11)$$

Пример 2. Пусть $p = 2$ и имеет место (6). С помощью (7) получаем

$$\|\varphi_{1x}(x)\|^{\frac{2(p+1)}{p}} = \|\varphi_{1x}\|_{2,\Omega}^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.19245,$$

$$F(t) = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{4} t^3 + \frac{3\sqrt{3} + 2}{3\sqrt{3}} \right) \approx 0.02778t^3 + 1.26581,$$

$$K(t) = 1.5(1.43249e^t - 0.08334t^2 - 0.16668t - 0.16668).$$

Заметим, что $K(t) > 0$ при $t \geq 0$. Подстановка в (8) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - 1.14471\sqrt[3]{1.43249e^t - 0.08334t^2 - 0.16668t - 0.16668} u_{xx} = xt.$$

3. Интегральная нагрузка $a(\|u_x\|^2) = \|u_x\|^{-p}$, $p \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \|u_x\|^{-p} u_{xx} = f(x, t). \quad (12)$$

Заметим, что в скалярном произведении

$$(u_{tt}, u_t) - \|u_x\|^{-p} (u_{xx}, u_t) = (f, u_t) \quad (13)$$

имеет место равенство

$$-\|u_x\|^{-p} (u_{xx}, u_t) = \frac{1}{2} \|u_x\|^{-p} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{1}{2} (\|u_x\|^2)^{-\frac{p}{2}} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2.$$

Продолжим его при $p = 1$ и $p = 2$.

Пусть $p = 1$. Тогда

$$-\|u_x\|^{-1} (u_{xx}, u_t) = \frac{1}{2} (\|u_x\|^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{d}{dt} (\|u_x\|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} \|u_x\|. \quad (14)$$

Пусть $p = 2$. В этом случае

$$-\|u_x\|^{-2} (u_{xx}, u_t) = \|u_x\|^{-2} \frac{d}{dt} \|u_x\|^2 = \frac{d}{dt} \ln(\|u_x\|^2). \quad (15)$$

Вернемся к случаю $p = 1$.

Теорема 3.1. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega)$, является решением задачи (12), (2) при $p = 1$. Пусть также $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $\|u_x\|$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. Рассмотрим (13) при $p = 1$. С учетом (14) запишем

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + 2\|u_x\|) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

После интегрирования последнего перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + 2\|u_x\| \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t), \quad (16)$$

$$F(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2 + 2\|\varphi_{1x}(x)\|.$$

Опуская в (16) второе слагаемое левой части и применяя лемму, получаем

$$\|u_t\|^2 \leq K_0(t),$$

$$K_0(t) = \int_0^t F(\tau)e^{t-\tau} d\tau + F(t).$$

Подстановка в (16) дает оценку

$$\|u_x\| \leq K(t), \quad (17)$$

$$K(t) = 0,5 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t) \right),$$

выполняющуюся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 3.1 доказана.

Считая, что (17) выполняется как равенство, можно записать

$$\|u_x\|^{-1} = (K(t))^{-1}.$$

Это позволяет перейти от (14) к линейному уравнению

$$u_{tt} - K(t)^{-1}u_{xx} = f(x, t).$$

Пример 3.1. Пусть имеет место (6). С помощью (7) получаем

$$\|\varphi_{1x}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \|\varphi_2\|^2 = \frac{1}{3}, \int_0^t \|f\|^2 d\tau = \frac{t^3}{9}, F(t) = 0.11111t^3 + 0.71823,$$

$$K(t) = 0.69245e^t - 0.16666t^2 - 0.33333t - 0.33333.$$

Отметим, что $K(t) > 0$ при $t \geq 0$. Подстановка в (15) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - (0.69245e^t - 0.16666t^2 - 0.33333t - 0.33333)^{-1}u_{xx} = xt.$$

Перейдем к случаю $p = 2$.

Теорема 3.2. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega)$, $\|u_x\|^2 > 0$, является решением задачи (12), (2) при $p = 2$. Пусть, кроме того, $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$, $\|\varphi_{1x}(x)\|^2 > 0$. Тогда функция $\|u_x\|^2$ ограничена константой, зависящей только от t .

Доказательство. С помощью (15) перейдем от (13) к уравнению

$$\frac{d}{dt} (\|u_t\|^2 + 2 \ln \|u_x\|^2) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрируя которое, получим

$$\|u_t\|^2 + \ln \|u_x\|^4 = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|^2 + \ln \|u_x(x, 0)\|^4.$$

Отсюда перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \ln \|u_x\|^4 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 dt + F(t), \quad (18)$$

$$F(t) = \int_0^t \|f\|^2 dt + \|\varphi_2(x)\|^2 + \ln \|\varphi_{1x}(x)\|^4.$$

Опуская второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau + F(t).$$

Очередное применение леммы дает

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2 &\leq K_0(t), \\ K_0(t) &= \int_0^t F(\tau)e^{t-\tau} d\tau + F(t). \end{aligned}$$

Подстановка в (18) приводит к неравенству

$$\ln \|u_x\|^4 \leq \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t).$$

Из него следует оценка

$$\begin{aligned} \|u_x\|^2 &\leq K(t), \\ K(t) &= \exp \left(0,5 \left(\int_0^t K_0(\tau) d\tau + F(t) \right) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

выполняющаяся для всех $t \in [0, T]$. Теорема 3.2 доказана.

Считая, что (19) выполняется как равенство, запишем

$$\|u_x\|^{-2} = (K(t))^{-1}.$$

Линеаризуя уравнение (12) при $p = 2$ с помощью последнего равенства, получаем уравнение

$$u_{tt} - K(t)^{-1} u_{xx} = f(x, t).$$

Пример 3.2. Пусть имеет место (6). С помощью (7) имеем

$$\begin{aligned} \ln \|\varphi_{1,x}\|^4 &= -2.19722, F(t) = 0.11111t^3 - 1.86389, \\ K(t) &= \exp(-0.59862e^t - 0.16666t^2 - 0.33333t - 0.33333). \end{aligned}$$

При этом $K(t) > 0$ при $t \geq 0$. Подстановка в (15) приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - \exp(0.59862e^t + 0.16666t^2 + 0.33333t + 0.33333) u_{xx} = xt.$$

Заключение

В работе установлены априорные оценки производных решений смешанной задачи (2) для одномерных неоднородных уравнений теплопроводности (1) с интегральной нагрузкой в главной части. Рассмотрено три случая, в которых интегральная нагрузка $a(\|u_x\|^2)$ последовательно принимает вид $\|u_x\|^p$, $\|u_x\|^{\frac{2}{p}}$, $p \in N$, $\|u_x\|^{-p}$, $p = 1, 2$. Первому случаю соответствует оценка (4), второму – оценка (10), третьему – оценки (17) и (20) при $p = 1$ и $p = 2$ соответственно. Правые части оценок используются для линеаризации нагруженных уравнений. Данный способ линеаризации в отличие от других позволяет переходить от нагруженного уравнения к линейному с сохранением в общих чертах физического (биологического, экологического) смысла процесса, моделируемого нагруженным уравнением. Точное

или приближенное решение линеаризованного уравнения, найденное при исходных начальном и граничных условиях, можно принять за приближенное решение нагруженного уравнения, которое может быть использовано для запуска итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нагруженной задачи.

Аналогичные результаты получены ранее для одномерных неоднородных уравнений теплопроводности, содержащих в главной части интегральную нагрузку рассмотренных видов [15]. Здесь в первых двух случаях вывод априорных оценок оказывается достаточно простым, так как их удается получить лишь с помощью преобразования скалярного произведения исходного уравнения с u_t .

Литература

1. Бернштейн С.Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1940. Т. 4, вып. 1. С. 17–26.
2. Woinowsky-Krieger S. The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. P. 35–36.
3. Dickey R.W. Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 23. P. 459–468.
4. Crippa H.R. On local solutions of some mildly degenerate Hyperbolic equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1993. V. 21 (8). P. 565–574.
5. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary // Differential and Integral Equations. 2011. V. 17. P. 1001–1020.
6. Похожаев С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Математический сборник. 1975. Т. 96 (138), № 1. С. 152–166.
7. Похожаев С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 101–108.
8. Nishihara K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984. V. 8 (6). P. 623–636.
9. Ngoc L.T.P., Long N.T. Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solutions in Many Small Parameters for a Nonlinear Kirchhoff Wave Equation with Mixed Nonhomogeneous Conditions // Acta Appl Math. 2010. V. 112. P. 137–169. doi: 10.1007/s10440-009-9555-9
10. Ono K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in Bounded Domains // J. Math. Tokushima Univ. 2021. V. 55. P. 11–18.
11. Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями // Вестник Южноуральского государственного университета. Сер. Математика, физика, механика. 2016. Т. 8, № 2. С. 14–18. doi: 10.14529/mmph160202
12. Бозиев О.Л. Решение нелинейного гиперболического уравнения приближенно-аналитическим методом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 51. С. 5–14. doi: 10.17223/19988621/51/1.
13. Бозиев О.Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 16–25. doi: 10.17223/19988621/80/2
14. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М. : Наука, 1976. 151 с.
15. Бозиев О.Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных уравнений теплопроводности с интегральной нагрузкой в главной части // Вестник

Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика, физика, механика. 2023. Т. 15, № 2. С. 5–13. doi: 10.14529/mmph230201.

References

1. Bernshtein S.N. (1940) Ob odnom klasse funktsional'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi [On a class of partial differential functional equations]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR*. 4(1). pp. 17–26.
2. Woinowsky-Krieger S. (1950) The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars. *Journal of Applied Mechanics*. 17. pp. 35–36.
3. Dickey R.W. (1969) Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 23. pp. 459–468.
4. Crippa H.R. (1993) On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 21(8). pp. 565–574.
5. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. (2011) Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary. *Differential and Integral Equations*. 17. pp. 1001–1020.
6. Pokhozhaev S.I. (1975) Ob odnom klasse kvazilineynykh giperbolicheskikh uravneniy [On a class of quasi-linear hyperbolic equations]. *Matematicheskii Sbornik*. 96(1). pp. 152–166.
7. Pokhozhaev S.I. (1985) Ob odnom kvazilineynom giperbolicheskom uravnenii Kirkhgofa [On a quasi-linear hyperbolic Kirchhoff equation]. *Differentsial'nyye uravneniya*. 21(1). pp. 101–108.
8. Nishihara K. (1984) Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 8(6). pp. 623–636.
9. Ngoc L.T.P., Long N.T. (2010) Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions. *Acta Applicandae Mathematicae*. 112. pp. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
10. Ono K. (2021) Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains. *Journal of Mathematics, Tokushima University*. 55. pp. 11–18.
11. Boziev O.L. (2016) Priblizhennoye resheniye nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya s odnorodnymi krayevymi usloviyami [Approximate solution of a loaded hyperbolic equation with homogeneous boundary conditions]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seriya matematika, mekhanika, fizika*. 8(2). pp. 14–18. DOI: 10.14529/mmph160202.
12. Boziev O.L. (2019) Resheniye nelineynogo giperbolicheskogo uravneniya priblizhenno-analiticheskim metodom [Solution of the nonlinear hyperbolic equation by an approximate-analytical method]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 51. pp. 5–14. DOI: 10.17223/19988621/51/1.
13. Boziev O.L. (2022) O linearizatsii giperbolicheskikh uravneniy s integral'noy nagruzkoy v glavnoy chasti s pomoshch'yu apriornoy otsenki ikh resheniy [On linearization of hyperbolic equations with an integral load in the main part by an a priori estimation of their solutions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2.
14. Filatov A.N., Sharova L.V. (1976) *Integral'nyye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* [Integral inequalities and the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka.
15. Boziev O.L. (2023) Apriornyye otsenki proizvodnykh resheniy odnomernykh neodnorodnykh uravneniy teploprovodnosti s integral'noy nagruzkoy v glavnoy chasti [A priori estimates of derivatives of solutions of one-dimensional inhomogeneous heat conduction equations with an integral load in the main part]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo universiteta. Seriya matematika, mekhanika, fizika*. 15(2). pp. 5–13. DOI: 10.14529/mmph230201.

Сведения об авторе:

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности Института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова; старший научный сотрудник Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН (Нальчик, Россия). E-mail: boziev@yandex.ru

Information about the author:

Boziev Oleg L. (Candidate of in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Computer Technologies and Information Security Department, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University; Senior Staff Scientist of Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation). ORCID: 0000-0002-1228-7892. E-mail: boziev@yandex.ru

The article was submitted 18.06.2023; accepted for publication 03.06.2024

Статья поступила в редакцию 18.06.2023; принята к публикации 03.06.2024